Mathématiques 1

PC **2012**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Si n et k sont deux entiers naturels, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

I Approximation

I.A – Quelques calculs préliminaires

Dans cette sous-partie, x est un nombre réel et n est un entier naturel.

I.A.1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$.

I.A.2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$.

I.A.3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2$.

I.A.4) Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$$

I.B – Étude de $S(x)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

$$S(x)=\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

I.B.1) Majoration de $S(x)$: première méthode

On note

- V l'ensemble des entiers $k\in\{0,\dots,n\}$ tels que $\left|x-\dfrac{k}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,
- W l'ensemble des entiers $k\in\{0,\dots,n\}$ tels que $\left|x-\dfrac{k}{n}\right|>\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

et on pose

$$S_V(x)=\sum_{k\in V}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\qquad\text{et}\qquad S_W(x)=\sum_{k\in W}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

a) Montrer que $S_V(x)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Montrer que $S_W(x)\leqslant\dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire que $S(x)\leqslant\dfrac{5}{4\sqrt{n}}$.

I.B.2) Majoration de $S(x)$: seconde méthode

a) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique.

b) À l'aide de la **question I.A.4**, en déduire que $S(x)\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

I.C – Application à l'approximation uniforme

Dans cette sous-partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}$ de la norme de la borne supérieure, notée $\| \ \|_\infty$:

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein de f, noté $B_n(f)$, en posant, pour tout $x \in [0,1]$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette sous-partie est d'étudier $\|B_n(f) - f\|_\infty$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

I.C.1) Un exemple

Si $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0,1]$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\|B_n(f) - f\|_\infty$.

I.C.2) Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer, pour tout $x \in [0,1]$, la relation

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

I.C.3) *a)* Montrer que si f est δ-lipschitzienne, alors $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) En déduire que si f est de classe C^1, alors il existe un réel c tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

c) Étendre le résultat précédent au cas où f est une fonction continue, de classe C^1 par morceaux.

I.C.4) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $r > 0$, il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) - r \leqslant P(x) \leqslant f(x) + r$.

II Un théorème de Hardy-Littlewood

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière associée $\sum a_n x^n$ admet pour rayon de convergence $R_a = 1$ et que la somme f de cette série, définie par

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

vérifie

$$f(x) \sim \frac{1}{1-x} \qquad \text{quand } x \to 1,\ x < 1. \tag{II.1}$$

On note

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad \widetilde{a}_n = \frac{A_n}{n+1}.$$

Ainsi, $\widetilde{a}_n$ est la moyenne arithmétique des nombres $a_0, \dots, a_n$.

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des a_n lorsque n tend vers l'infini. On s'intéresse en particulier aux deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \tag{II.2}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n = 1 \tag{II.3}$$

II.A – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.2

II.A.1) Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

II.A.2) En déduire un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant II.1 mais ne convergeant pas vers 1.

II.B – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.3

II.B.1) Donner le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^2}$ ainsi que son rayon de convergence. Préciser si la série converge aux bornes de l'intervalle de convergence.

II.B.2) On considère les fonctions $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$ et $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2(1-x)}$. Déterminer des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

On explicitera en fonction de n, suivant la parité de n, les réels u_n et v_n.

II.B.3) Calculer $\widetilde{v}_n$ (moyenne arithmétique des nombres $v_0, \dots, v_n$).

II.B.4) Construire à l'aide de ψ un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant **II.1** mais ne vérifiant pas la **propriété II.3**.

Jusqu'à la fin de cette partie, on continue de supposer **II.1** et on fait l'hypothèse supplémentaire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0. \qquad \text{(II.4)}$$

L'objectif principal, après quelques observations concernant la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$, est de démontrer la **propriété II.3** (théorème de Hardy et Littlewood).

II.C – Majoration de la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$

II.C.1) Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f(x) \geqslant A_n x^n$.

II.C.2) Montrer l'existence d'un entier $N > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ f(\mathrm{e}^{-1/n}) \leqslant \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1/n}}.$$

II.C.3) En déduire que la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.

II.D – Minoration, à partir d'un certain rang, de $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$ par un réel > 0

On désigne par $\mu > 0$ un majorant de la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{a}_n \leqslant \mu$.

II.D.1) *a)* Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, montrer que $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{f(x)}{1-x} \leqslant A_{N-1}\frac{1-x^N}{1-x} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty} (k+1)x^k.$$

c) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) \leqslant A_{N-1} + \mu\left((N+1)x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}\right).$$

II.D.2) Soit λ un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un entier $N_0 > 0$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$,

$$f(\mathrm{e}^{-\lambda/N}) \geqslant \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-\lambda/N})} \geqslant \frac{N}{2\lambda}.$$

b) Montrer que pour tout $N \geqslant N_0$

$$\widetilde{a}_{N-1} \geqslant \frac{1}{2\lambda} - \mu\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{N} + \mathrm{e}^{-\lambda/N}\frac{1}{N(1-\mathrm{e}^{-\lambda/N})}\right).$$

c) Déterminer en fonction de λ la limite, quand N tend vers l'infini, du membre de droite dans l'inégalité précédente.

d) Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que cette limite soit strictement positive.

II.D.3) Conclure qu'il existe un réel $\nu > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang on ait $\widetilde{a}_n \geqslant \nu$.

II.E – Démonstration de la propriété II.3, due à Karamata

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(x) = 1/x$ si $x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ et $g(x) = 0$ sinon.

On fixe un réel $\varepsilon \in]0, \mathrm{e}^{-1}[$. On définit deux applications continues $g^+, g^- : [0,1] \to \mathbb{R}$ ainsi :

– g^+ est affine sur $[\mathrm{e}^{-1} - \varepsilon, \mathrm{e}^{-1}]$ et coïncide avec g sur $[0, \mathrm{e}^{-1} - \varepsilon] \cup [\mathrm{e}^{-1}, 1]$;

– g^- est affine sur $[\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1} + \varepsilon]$ et coïncide avec g sur $[0, \mathrm{e}^{-1}[\cup [\mathrm{e}^{-1} + \varepsilon, 1]$.

Pour tout entier $N > 0$ on pose $x_N = \mathrm{e}^{-1/N}$.

On rappelle que dans cette sous-partie, on fait les hypothèses **II.1** et **II.4**

II.E.1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 g^+(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 g^-(t)\,\mathrm{d}t$.

II.E.2) Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considérera d'abord le cas particulier $P(x) = x^k$, où $k \in \mathbb{N}$.

II.E.3) Établir l'existence de deux polynômes P, Q à coefficients réels tels que :

$$\forall x \in [0,1], \quad g^-(x) - \varepsilon \leqslant P(x) \leqslant g(x) \leqslant Q(x) \leqslant g^+(x) + \varepsilon.$$

II.E.4) Établir l'existence d'un entier $N_1 > 0$ tel que pour tout entier $N \geqslant N_1$,

$$(1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \geqslant \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon$$

et

$$(1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n) \leqslant \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon.$$

II.E.5) Déduire des trois questions précédentes que pour tout entier $N \geqslant N_1$

$$1 - 5\varepsilon \leqslant (1-x_N)A_N \leqslant 1 + 5\varepsilon.$$

II.E.6) Conclure.

• • • FIN • • •