DS4 de MP2
18.10.16

Devoir surveillé

Durée : 4 heures

Problème I – Ordre d'un élément et ordre d'un groupe abélien

Dans tout ce problème (sauf à la dernière question), G est un groupe abélien d'ordre N. On note sa loi multiplicativement et 1_G son élément neutre. Pour tout $g \in G$, on note $\mathrm{o}(g)$ l'ordre de g :

$$\mathrm{o}(g) = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ g^k = 1_G\}$$

On sait aussi que

$$\{k \in \mathbb{Z}, g^k = 1_G\} = \mathrm{o}(g)\mathbb{Z}$$

Partie I – Généralités sur les ordres

I.1 Soit $x \in G$, d'ordre l.
a Donner l'ordre de x^{l-1}.
b Si $m \in \mathbb{N}^*$ divise l, donner l'ordre de x^m.

I.2
a Rappeler l'énoncé du théorème de Lagrange pour les sous-groupes cycliques.
b Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

1. G est cyclique.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ divisant N, G admet (au moins) un élément d'ordre m.

I.3 On considère deux éléments a et b de G, d'ordres respectifs m et n.
a On suppose m et n premiers entre eux. Montrer que ab est d'ordre mn.
b On ne suppose plus m et n premiers entre eux. Vérifier qu'il existe un élément de G d'ordre $m \vee n$.
Indication : on pourra remarquer, en le justifiant soigneusement, que ce ppcm s'écrit $m'\,n'$, avec m' divisant m, n' divisant n, et m' et n' premiers entre eux.

Partie II – Exposant d'un groupe abélien fini

II.1 On considère l'ensemble

$$\Omega = \{k \in \mathbb{N}^*, \forall\, g \in G, g^k = 1_G\}$$

a Montrer que Ω admet un plus petit élément. Ce plus petit élément de Ω s'appelle *exposant* de G, et on le notera r.
b Vérifier que

$$r = \mathrm{ppcm}(\mathrm{o}(g), g \in G)$$

c Montrer que G admet un élément d'ordre r.
Indication : on pourra considérer un élément de G d'ordre maximal.
d En déduire que $m \in \mathbb{N}^*$ est l'ordre d'un élément de G si et seulement si m divise r.

II.2 Caractériser le fait que $r = N$, et donner un exemple où $N = 4$ et $r < N$.

II.3 Montrer que si on enlève l'hypothèse de commutativité de G, alors l'exposant de G n'est plus nécessairement l'ordre d'un élément de G.

Problème II – Une version faible du théorème des nombres premiers

On notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On sait que cet ensemble n'est pas vide, et on indexe la suite ordonnée des nombres premiers : $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \dots$

Dans tout le problème, la lettre p est réservée aux nombres premiers. Étant donné un réel x, sa partie entière $[x]$ est l'entier n qui vérifie la double inégalité suivante : $[x] = n \leqslant x < n+1$.

Partie III – L'ensemble des nombres premiers est infini

Le but de cette partie est de démontrer que $\mathcal{P}$ est infini et d'étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$

III.1 Démontrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

III.2 On se donne un entier n supérieur ou égal à 2.

a Montrer que la série $\sum_k \frac{1}{n^k}$ converge et donner la valeur de sa somme (on rappelle que n est un entier fixé, supérieur ou égal à 2, l'indice de sommation est $k \in \mathbb{N}$).

Soit N le rang du plus grand nombre premier inférieur à n : $N = \max\{i \in \mathbb{N}^*, p_i \leqslant n\}$, de sorte que

$$[\![1, n]\!] \cap \mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$$

b Nous admettons la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$$

À l'aide de ce résultat admis, retrouver le fait que $\mathcal{P}$ soit infini.

c Montrer la divergence de la série de terme général ν_k, où

$$\nu_k = -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

d En déduire la nature de la série $\sum_k \frac{1}{p_k}$.

e Montrer que si la suite de terme général $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ converge ($k \in \mathbb{N}$), alors sa limite vaut 1.

Partie IV – Minoration du ppcm des $2n+1$ premiers entiers naturels non nuls

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soit d_n le plus petit commun multiple de tous les entiers $1, 2, 3, ..., n$:

$$d_n \overset{def}{=} \text{ppcm}(1, 2, \dots, n) = 1 \vee 2 \vee \cdots \vee n$$

Soit N l'entier tel que $p_N \leqslant n < p_{N+1}$.

IV.1 Démontrer que

$$d_n = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i},$$

où, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $\alpha_i = \left[\frac{\ln n}{\ln p_i}\right]$.

IV.2 Étant donné un entier n supérieur ou égal à 2 ($n \geqslant 2$), soit I_n l'intégrale définie par la relation suivante : $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$.

a Établir la majoration : $I_n \leqslant \frac{1}{4^n}$.

b Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $n + k + 1$ divise d_{2n+1}.

c En déduire que le produit $d_{2n+1} I_n$ est un entier en considérant, par exemple, une expression de I_n obtenue par développement de $(1-x)^n$.

IV.3 Établir, à l'aide de la majoration de l'intégrale I_n, une minoration de d_{2n+1}.

Partie V – Majoration du produit des N premiers nombres premiers

Pour tous x et y réels positifs avec $x > y$, on définit $P(x, y)$ comme valant
- $\diamond$ 1 si l'intervalle $]y, x]$ ne contient pas de nombre premier ;
- $\diamond$ le produit des nombres premiers de l'intervalle $]y, x]$ sinon.

On a donc, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $z \leqslant y \leqslant x$, la relation :

$$P(x, z) = P(x, y)P(y, z).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $K(x) = P(x, 0)$.

V.1 Donner $K(x)$, pour tout $x \in]0, 6]$. Donner les points de discontinuité de la fonction K.

Soit m un entier naturel non nul.

V.2 Montrer que $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

V.3 Montrer que l'entier $P(2m + 1, m + 1)$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m}$.

V.4 En déduire que si $K(m + 1) \leqslant 4^{m+1}$, alors $K(2m + 1) \leqslant 4^{2m+1}$.

V.5

a Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, K(n) \leqslant 4^n$$

b En déduire la majoration :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, K(x) \leqslant 4^x$$

Partie VI – $N(x) = \Theta\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)$

On note N la fonction définie par :

$$\forall\, x \geqslant 0, N(x) = \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{N}^*, p_k \in [0, x]\}$$

Pour tout $x \geqslant 0$, $N(x)$ est donc le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.

On note S la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par

$$\forall\, x \geqslant 2, S(x) = \ln(K(x)).$$

VI.1 Pour tout $x \geqslant 2$, déduire de la partie précédente un majorant de $S(x)$.

VI.2 Soit f une fonction définie sur $[2, +\infty[$ à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue.

a Montrer que pour tout k entier naturel non nul, on a

$$\int_2^{p_k} S(t)f'(t)\mathrm{d}t = -\sum_{i \in [\![1,k]\!]} \ln(p_i)f(p_i) + S(p_k)f(p_k).$$

b Déduire pour tout réel x supérieur ou égal à 2 la relation :

$$\sum_{i \in [\![1,N(x)]\!]} \ln(p_i)f(p_i) = S(x)f(x) - \int_2^x S(t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

VI.3 On prend $f = \frac{1}{\ln}$. Déduire de la question précédente l'inégalité :

$$N(x) \leqslant 2\ln 2\left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}\right).$$

VI.4

a Étudier sur l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$ la fonction $\psi\ : u \mapsto \frac{e^u}{u^2}$. Montrer qu'il existe un unique réel (noté u_0) strictement supérieur à $\ln 2$ tel que

$$\frac{e^{u_0}}{u_0^2} = \frac{2}{(\ln 2)^2}.$$

b Montrer, pour tout $x > e^{u_0}$, la majoration :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^u}{u^2} \mathrm{d}u \leqslant \frac{x}{(\ln x)^2}(\ln x - \ln 2).$$

c Déduire, pour tout $x > e^{u_0}$, l'inégalité :

$$N(x) \leqslant 4 \ln 2 \frac{x}{\ln x}.$$

VI.5 En utilisant par exemple la minoration du p.p.c.m. d_{2n+1} obtenue précédemment, démontrer qu'il existe un réel x_1 tel que pour tout réel x supérieur ou égal à x_1, la fonction N vérifie la minoration suivante :

$$N(x) \geqslant \frac{\ln 2}{2} \frac{x}{\ln x}$$

Ces deux résultats sont cohérents avec le théorème des nombres premiers établi par Hadamard et De La Vallée Poussin en 1896, qui affirme plus précisément que

$$N(x) \sim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)}$$

VI.6 On admet dans cette question le théorème des nombres premiers.
a Montrer que

$$p_n \sim n \ln(n)$$

b Retrouver la divergence de $\sum \frac{1}{p_n}$.
c Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{p_{n+1}}{p_n}$.