ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

MAI 2002

Option A. - MATHÉMATIQUES

première composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comprend 3 pages (y compris celle-ci).

Concours ENSAI 2002 Maths 1

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Si $a, b \in \mathscr{L}(E)$, l'endomorphisme $a \circ b$ sera noté ab et l'on pose $[a, b] = ab - ba$.
Pour $a \in \mathscr{L}(E)$ on note θ_a l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par

$$\theta_a(b) = [a, b] = ab - ba.$$

On rappelle le théorème de décomposition en noyaux :
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ leur multiplicité respective ; alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}.$$

L'objet du problème est d'étudier dans quelques cas particuliers des propriétés du « crochet » [,].

I-Exemple.

1° On suppose dans cette question que $E = \mathbb{C}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n, à coefficients dans $\mathbb{C}$, et l'on pose pour $P \in E$

$$e(P) = P',\ f(P) = -nXP + X^2P',\ h(P) = -nP + 2XP'.$$

a) Calculer $[e, h]$, $[f, h]$, $[e, f]$.

b) Soit $F \neq \{0\}$, un sous-espace de E stable par e, f, h, et $P \neq 0$ un élément de F. En examinant les degrés des images successives de P par e et par f, prouver que $F = E$.

E désigne maintenant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque de dimension finie. On considère 3 éléments de $\mathscr{L}(E)$ notés e, f, h et vérifiant :

$$[e, h] = 2e,\ [f, h] = -2f,\ [e, f] = h.$$

On note $\mathscr{L}_3$ le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

2° Prouver que $\dim \mathscr{L}_3 = 3$.

3° Soit $\mathscr{I}$ un sous-espace de $\mathscr{L}_3$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{I}, \forall a \in \mathscr{L}_3, [a, x] \in \mathscr{I}.$$

a) Montrer que si $\mathscr{I}$ contient un élément $x = \alpha e + \beta f + \gamma h$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\mathscr{I} = \mathscr{L}_3$.

b) Prouver que si $\mathscr{I} \neq \{0\}$ alors $\mathscr{I} = \mathscr{L}_3$ (on pourra se ramener à la question précédente)

4° **a)** Soit y un vecteur propre de h ; prouver que si $e(y) \neq 0$, alors $e(y)$ est un vecteur propre de h.

b) En déduire qu'il existe un vecteur propre x de h tel que $e(x) = 0$.

Dans la suite de cette partie, on note x un tel vecteur, et on note α la valeur propre de h associée.

5° **a)** Calculer $h\left(f^k(x)\right)$ où k est un entier naturel.

b) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$.

c) Prouver que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e\left(f^k(x)\right)$ est colinéaire à $f^{k-1}(x)$.

6° On suppose que E ne contient aucun sous-espace stable par $\mathscr{L}_3$ autre que $\{0\}$ et E. On pose

$$F = \operatorname{Vect}(x, f(x), \ldots, f^m(x))$$

a) Justifier que F est stable par e, f et h. Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (x, f(x), \ldots, f^m(x))$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$.

d) En examinant $\operatorname{tr}(h)$, prouver que $\alpha = -m$.

7 ° Déterminer la matrice de e dans la base $\mathscr{B}$.

II-Préliminaire à l'étude de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie E désigne toujours un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 ° Prouver qu'un endomorphisme a de E possède une seule valeur propre si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $a - \lambda Id$ soit nilpotent.

2 ° Soit u et v deux endomorphismes nilpotents commutant entre eux. Prouver que $u - v$ est nilpotent.

3 ° Soit u un endomorphisme de E ; on pose $\mathscr{N}_u = \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} \operatorname{Ker} u^p$ et $\mathscr{G}_u = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \operatorname{Im} u^p$.

- **a)** Prouver qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{N}_u = \operatorname{Ker} u^{p_0}$ et $\mathscr{G}_u = \operatorname{Im} u^{p_0}$.
- **b)** Prouver que $\mathscr{N}_u$ et $\mathscr{G}_u$ sont deux sous-espaces supplémentaires, stables par u, tels que u restreint à $\mathscr{N}_u$ soit nilpotent et que u restreint à $\mathscr{G}_u$ soit bijectif.
- **c)** Prouver réciproquement que si $E = F \oplus G$ où F et G sont deux sous-espaces stables par u tels que la restriction de u à F soit nilpotente et la restriction de u à G bijective, alors $F = \mathscr{N}_u$ et $G = \mathscr{G}_u$.

On vient donc de prouver l'existence et l'unicité de tels sous-espaces F et G.

III-Étude de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et l'on note θ_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par
$$\theta_A(B) = AB - BA.$$

1 °
- **a)** Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\phi_A(M) = AM$ sont les valeurs propres de A.
- **b)** Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme ψ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\psi_A(M) = MA$.

Étant donnée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on considère λ et μ deux valeurs propres de A de multiplicité respective α et β. On pose
$$\mathscr{L}_{\lambda,\mu} = \operatorname{Vect}\left\{U\,{}^tV, U \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha ; V \in \operatorname{Ker}\left({}^tA - \mu I_n\right)^\beta\right\}.$$

2 °
- **a)** Prouver que le sous-espace $\mathscr{L}_{\lambda,\mu}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est stable par θ_A.
- **b)** Prouver que la restriction de θ_A à $\mathscr{L}_{\lambda,\mu}$ admet pour unique valeur propre $\lambda - \mu$ (on remarquera que $\theta_A = \phi_A - \psi_A$).

3 °
- **a)** Soit $\mathscr{F} = (U_1, \ldots, U_p)$ et $\mathscr{G} = (V_1, \ldots, V_q)$ deux familles de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Prouver que si les familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont libres, la famille $\left\{U_i\,{}^tV_j, i \in [|1,p|], j \in [|1,q|]\right\}$, qu'on notera $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$, est libre.
- **b)** Soit λ et μ deux valeurs propres de A. On note $\mathscr{B}_\lambda$ une base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ et $\mathscr{B}^*_\mu$ une base de $\operatorname{Ker}\left({}^tA - \mu I_n\right)^\beta$. Prouver que la famille $\mathscr{B}_\lambda \otimes \mathscr{B}^*_\mu$ est une base de $\mathscr{L}_{\lambda,\mu}$.
- **c)** En déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = \bigoplus\limits_{(\operatorname{Spec} A)^2} \mathscr{L}_{\lambda,\mu}$ où $\operatorname{Spec} A$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A.

4 ° Déterminer $\mathscr{N}_{\theta_A}$ (on utilisera la question II.3 ° c).

5 °
- **a)** Soit $p_1, \ldots, p_n$ des entiers positifs ou nuls tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = n$. Prouver que $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^2$ est minimal lorsque $\forall k \in [|1,n|], p_k = 1$.
- **b)** En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que $\dim \mathscr{N}_{\theta_A}$ soit minimale.