Devoir non surveillé

Sous-algèbres sur lesquelles la transposition induit un automorphisme

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définitions et rappels (qu'il est inutile de montrer).

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est *nilpotente* s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = 0_n$.
- On appelle *trace* de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ le scalaire $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$. On rappelle que la trace (vue comme application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$) est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que pour toute matrice B de taille n, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
- Soit $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ (où $m \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$). On note $P(A)$ la matrice $\sum_{k=0}^m a_k A^k$ (où $A^0 = I_n$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A\,A^k$). On dit que le *polynôme* P *annule* A (ou que P est un *polynôme annulateur* de A) si $P(A) = 0_n$. On définit des notions analogues pour des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- On dit[1] qu'un ensemble $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$-*algèbre* s'il admet des lois lui conférant une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et s'il est également muni d'une loi de composition interne (notée multiplicativement) bilinéaire, associative, et pour laquelle il existe un élément neutre. Cela revient à dire que $\mathcal{A}$ est à la fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, un anneau, et que, pour tout $(\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$:

  $$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

  Une $\mathbb{K}$-algèbre est dite *commutative* si sa loi de multiplication interne est commutative, ce qui revient à dire qu'en tant qu'anneau, elle soit commutative.

  On peut citer, comme exemples de $\mathbb{K}$-algèbres (pour les lois usuelles) : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ (où A est un ensemble), $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, le produit cartésien de deux $\mathbb{K}$-algèbres.
- On dit qu'une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{A}$ si c'en est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau.

  Comme exemple de sous-algèbre (commutative), on peut citer $\mathbb{K}[M] = \operatorname{Vect}(M^k, k \in \mathbb{N})$, où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: c'est la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des polynômes en M.
- On dit qu'une application entre deux $\mathbb{K}$-algèbres est un *morphisme d'algèbres* si elle est linéaire et si c'est un morphisme d'anneaux. On définit naturellement les notions d'isomorphisme, d'endomorphisme, et d'automorphisme d'algèbre(s).

  Comme exemple d'automorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre, on peut donner $M \mapsto P^{-1}MP$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- On dit qu'une $\mathbb{K}$-algèbre est *diagonale* si elle est isomorphe (en tant que $\mathbb{K}$-algèbre) à $\mathbb{K}^m$, pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$

Dans la suite, et sauf mention contraire, $\mathcal{A}$ désignera une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La notion principalement étudiée dans ce problème

On dit que $\mathcal{A}$ est de *type* T si la transposition (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) induit un automorphisme de $\mathcal{A}$, *i.e.* $\mathcal{A}$ est stable par transposition, et l'application de $\mathcal{A}$ dans elle-même qui à $M \in \mathcal{A}$ associe ${}^tM$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Le but de ce problème est de montrer que si $\mathcal{A}$ est de type T, alors elle est diagonale.

---

[1] il existe d'autres définitions

Partie A – Généralités

A.1 Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{K}$-algèbres, $\mathcal{A}'$ une partie de $\mathcal{A}$, Φ une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

a Montrer que $\mathcal{A}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ si et seulement si elle comprend l'élément unité $1_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$, est stable par combinaison linéaire et par produit.

b Montrer que Φ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres si et seulement si $\Phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$, et pour tout $(a, a') \in \mathcal{A}^2$, tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$:

$$\Phi(\lambda a + \lambda' a') = \lambda\Phi(a) + \lambda'\Phi(a') \quad \text{et} \quad \Phi(aa') = \Phi(a)\Phi(a').$$

A.2 Montrer que $\mathcal{A}$ est de type T si et seulement si elle est stable par transposition et commutative.

A.3 Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que N soit nilpotente et M et N commutent. Montrer que MN est nilpotente.

A.4 Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{tr}(M^t M) = 0$. Montrer que M est nulle.

A.5

a Donner une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par transposition, mais pas de type T. On justifiera brièvement sa réponse.

b Donner une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutative, mais pas de type T. On justifiera brièvement sa réponse.

A.6 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{N}_M = \{Q \in \mathbb{C}[X], Q(M) = 0\}$$

des polynômes annulateurs de M possède un élément non nul.

b Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mathcal{N}_M$ soit égal à l'ensemble $P\,\mathbb{C}[X]$ des multiples du polynôme P.

Ce polynôme sera noté μ_M et appelé *polynôme minimal* de M.

Partie B – Sur les matrices nilpotentes

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

B.1 Montrer que N est semblable à une matrice dont la première colonne est nulle.

B.2 Montrer que toute matrice nilpotente est de trace nulle.

B.3 (Question non essentielle pour la suite)

On considère $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $\mathrm{tr}(M^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer que M est nilpotente.

a Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X]$ annule M, alors 0 est racine de P.

b Montrer que M n'est pas inversible.

c En déduire que M est nilpotente (on pourra raisonner par récurrence).

Partie C – $\mathcal{A}$ est diagonale

$\mathcal{A}$ désigne ici une sous-algèbre de type T. On souhaite montrer qu'elle est diagonale.

C.1

a Montrer que $\mathcal{A}$ ne possède pas de matrice nilpotente non nulle.

b Soit $M \in \mathcal{A}$. Montrer que les racines (complexes) du polynôme minimal de M sont simples.

C.2 On fixe un élément M de $\mathcal{A}$, et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les différentes racines complexes de μ_M, de sorte que, d'après ce qui précède,

$$\mu_M = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i).$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M, et on pose, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$:

$$P_i = \prod_{j \in [\![1,m]\!] \setminus \{i\}} (X - \lambda_j).$$

Ici, Id désigne $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$.

a Montrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathrm{Im}(P_i(f)) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$, et que $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

b Montrer que $1 \in \mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_m)$.

c En déduire que
$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}\,) + \cdots + \mathrm{Ker}(f - \lambda_m \mathrm{Id}\,).$$

d Montrer que M est *diagonalisable* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *i.e.* M est semblable à une matrice diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En travaillant encore un peu, on peut montrer que, tous les éléments de $\mathcal{A}$ étant diagonalisables, et $\mathcal{A}$ étant commutative, les éléments de $\mathcal{A}$ sont *codiagonalisables*, *i.e.* il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, PMP^{-1} soit diagonale. **Nous admettons ce résultat**.

C.3 Montrer que $\mathcal{A}$ est diagonale.

C.4 Montrer qu'il existe un élément Z de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = \mathbb{R}[Z]$ (on dit que cette $\mathbb{R}$-algèbre est *monogène*).

C.5 Toute sous-algèbre diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle de type T ?