Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Arithmétique et intégrales

Partie A – $K(x) \leqslant 4^x$

A.1 Question laissée au lecteur.

A.2 Grâce à la convention stipulant qu'un produit indexé par un ensemble vide vaut 1, on obtient immédiatement le résultat demandé en remarquant que $]z, x]$ est l'union disjointe des deux ensembles $]z, y]$ et $]y, z]$.

Soit m un entier naturel non nul.

A.3 On sait que $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$, et que

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1} = 2 \cdot 4^m$$

Il vient donc :

$$2 \cdot \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \leqslant \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2 \cdot 4^m,$$

puis le résultat demandé.

A.4 Soit p_k un diviseur premier du produit $P(2m+1, m+1)$. Ce nombre divise le produit $\left(\binom{2m+1}{m}\right)(m!(m+1)!)$ $(= (2m+1)!)$, et est premier avec le second terme de ce produit, donc divise le premier terme $\binom{2m+1}{m}$ (lemme de Gauss). Les nombres premiers p_k (compris entre $m+1$ et $2m$) divisant $\binom{2m+1}{m}$ et étant premiers entre eux deux à deux, leur produit $P(2m+1, m+1)$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

A.5 Si $K(m+1) \leqslant 4^{m+1}$, alors, en vertu de ce que précède :

$$K(2m+1) = K(m+1)P(2m+1, m+1) \leqslant 4^{m+1}4^m \leqslant 4^{2m+1}.$$

A.6

a On raisonne par récurrence sur n, en écartant le cas évident où $n = 1$:

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], K(k) \leqslant 4^k$$

L'amorçage en $n = 2$ est aisé ($0 \leqslant 4$ et $2 \leqslant 16$).

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose l'assertion vérifiée au rang n, montrons-là au rang $n+1$: raisonnons par disjonction des cas :

- si $n+1$ est premier, il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2m+1$ (car cet entier premier vaut au moins 3 donc est impair, d'où l'intérêt d'amorcer la récurrence en 2), l'hypothèse de récurrence et la question précédente montre que $K(n+1) \leqslant 4^{n+1}$;
- si $n+1$ n'est pas premier, alors $K(n+1) = K(n) \leqslant 4^n \leqslant 4^{n+1}$ (la première inégalité étant justifiée par l'hypothèse de récurrence).

b On a prouvé cette inégalité si $x \in \mathbb{N}^*$, et, si $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}^*$, alors $K(x) = K([x]) \leqslant 4^{[n]} \leqslant 4^x$.

Partie B – Domination explicite de N

B.1 On a bien sûr $S(x) \leqslant (2 \ln 2)x$.

B.2

a Soit k un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned}
\int_2^{p_k} S(t)f'(t)\mathrm{d}t &= \sum_{j=1}^{k-1} \int_{p_j}^{p_{j+1}} S(t)f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\ln \prod_{1\leqslant i\leqslant j} p_i\right)(f(p_{j+1})-f(p_j)) \\
&= \sum_{j=2}^{k} \left(\ln \prod_{1\leqslant i\leqslant j-1} p_i\right) f(p_j) - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\ln \prod_{1\leqslant i\leqslant j} p_i\right) f(p_j) \\
&= -\sum_{i\in[\![1,k]\!]} \ln(p_i)f(p_i) + S(p_k)f(p_k).
\end{aligned}$$

b On en déduit la relation

$$\sum_{i\in[\![1,N(x)]\!]} \ln(p_i)f(p_i) = S(x)f(x) - \int_2^x S(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

en remarquant que

$$\int_{p_{N(x)}}^x S(t)f'(t)\mathrm{d}t = S(p_{N(x)})(f(x)-f(p_{N(x)})) = S(x)f(x) - S(p_{N(x)})f(p_{N(x)}).$$

B.3 On prend $f = \frac{1}{\ln}$. La précédente l'inégalité donne immédiatement

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant N(x)} 1 = \frac{S(x)}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{S(t)}{t\ln(t)^2}\mathrm{d}t$$

et donc, d'après B.1 :

$$N(x) \leqslant 2\ln 2\left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}\right).$$

B.4

a L'étude demandée est standard : la fonction considérée ψ est strictement décroissante de $\ln 2$ à 2, puis strictement croissante sur $[2,+\infty[$. En cas d'existence de u_0, on doit avoir $u_0 \in [2,+\infty[$, d'où l'unicité (par stricte croissance - donc injectivité- de ψ sur cet intervalle). Comme ψ est continue tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et que $\psi(2) < \psi(\ln 2)$ l'existence est prouvée (théorème des valeurs intermédiaires)

b On en déduit, pour tout $x > e^{u_0}$, en majorant ψ par $\psi(x) = x/(\ln(x))^2$ sur $[\ln(2),\ln(x)]$, puis en intégrant :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^u}{u^2}\mathrm{d}u \leqslant \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^{\ln x}}{(\ln x)^2}\mathrm{d}u = \frac{x}{(\ln x)^2}(\ln x - \ln 2).$$

c En effectuant le changement de variable $t = e^u$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\ln 2, \ln x]$, on obtient :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^u}{u^2}\mathrm{d}u \leqslant \frac{x}{(\ln x)^2}(\ln x - \ln 2) \leqslant \frac{x}{(\ln x)}.$$

L'inégalité demandée résulte alors immédiatement de ce qui précède.