

# Devoir non surveillé

## Exercice 1 : Calculs d'une somme (X MP 05)

Le but de cet exercice est de trouver une expression plus simple de

$$N = (1 \times 2 \times 3) + (2 \times 3 \times 4) + \cdots + (999 \times 1000 \times 1001),$$

par différentes manières.

### 1 (Utilisation du principe de récurrence)

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note  $N_n = (1 \times 2 \times 3) + \cdots + (n-1)n(n+1)$ .

**a** Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a  $N_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$ .

**b** En déduire la valeur de  $N$ .

### 2 (Utilisation du symbole de somme)

**a** Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

**b** Donner et montrer une formule analogue pour  $\sum_{k=0}^n k$ .

**c** En remarquant que  $N = \sum_{k=0}^{1000} (k-1)k(k+1)$ , en déduire la valeur de  $N$ .

### 3 (Utilisation d'un dénombrement)

On considère l'ensemble  $\Omega$  des parties de cardinal 4 de  $\llbracket 1, 1002 \rrbracket$ .

**a** Donner le cardinal de  $\Omega$ .

**b** En regroupant les éléments de  $\Omega$  ayant même maximum, prouver que

$$\sum_{k=3}^{1001} \binom{k}{3} = \binom{1002}{4}.$$

**c** En déduire la valeur de  $N$ .