Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : Calculs d'une somme (X MP 05)

1

a La propriété est vraie au rang 2, et si on la suppose vraie au rang $n \geqslant 2$ fixé, alors

$$N_{n+1} = N_n + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{4}(n-1+4) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

donc la propriété est héréditaire.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $N_n = \dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$.

b $N = N_{1000} = \frac{999\times 1000\times 1001\times 1002}{4} = 250499749500$.

2

a On montre par exemple ce résultat par récurrence (déjà fait).

b

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k)\right) = \frac{\sum_{k=0}^{n} n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque : on peut également prouver ce résultat par récurrence (si on connaît la formule), ou en considérant la somme télescopique $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}((k+1)^2-k^2)$.

c Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-1)k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} k^3 - \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n-2) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}\end{aligned}$$

Comme $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{1000}(k-1)k(k+1)$, on retrouve bien la valeur de N.

3

a Ω est de cardinal $\binom{1002}{4}$.

b Pour tout $k \in [\![3, 1001]\!]$, notons Ω_k l'ensemble des éléments de Ω dont le plus grand élément vaut $k+1$. Bien sûr, Ω est la réunion disjointe de ces ensembles. De plus, pour tout $k \in [\![3, 1001]\!]$, se donner un élément de Ω_k revient à se donner une partie de cardinal 3 de $[\![1, k]\!]$, donc Ω_k est de cardinal $\binom{k}{3}$. Ainsi,

$$\sum_{k=3}^{1001}\binom{k}{3} = \binom{1002}{4}.$$

c En multipliant la relation obtenue par 6, on obtient à nouveau le résultat voulu :

$$N = \sum_{k=2}^{1000}(k+1)k(k-1) = \sum_{k=3}^{1001} k(k-1)(k-2) = 6\sum_{k=3}^{1001}\binom{3}{k} = 6\binom{1002}{4} = \frac{1002\times 1001\times 1000\times 999}{4}.$$