Devoir non surveillé

Endomorphismes vérifiant $u^2 = ku$

Soit E un espace vectoriel réel non réduit à son vecteur nul.

On appelle *homothétie (de E)* un multiple par un réel de Id_E. Pour tout réel λ, $\lambda\mathrm{Id}_E$ est appelée homothétie de rapport λ.

Soit k un réel donné. On note A_k l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^2 = ku$.

1 Soit f une homothétie de E.

a Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que f soit de rapport λ.

b Montrer que f est inversible (*i.e.* bijective) si et seulement si son rapport est non nul.

2 Soit $u \in A_k$.

a u peut-il être inversible ? Qu'est-ce que u dans ce cas ?

b Déterminer $u(x)$ pour $x \in \mathrm{Im}\, u$.

c Montrer que si $k \neq 0$, $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E. Que dire de $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ si $k = 0$?

Soient u et v deux endomorphismes de E appartenant à A_k. *On suppose dans cette partie que* $k \neq 0$.

3 Montrer que $uv + vu = 0$ implique $uv = vu = 0$.

4

a Montrer que $u + v \in A_k$ si et seulement si $uv = vu = 0$.

On se place dans le cas où $u + v \in A_k$.

b Montrer que : $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.

c Montrer que : $\mathrm{Ker}(u + v) = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$.

5 Montrer que si $uv = vu$, alors uv appartient à un ensemble $A_{k'}$ (pour un réel k' que l'on déterminera), et que dans ce cas

$$\mathrm{Im}\, uv = \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\, uv = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v.$$