Devoir non surveillé

Convergence d'un produit

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels tous non nuls, et on lui associe la suite (p_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

Cette suite est la *suite produit* associée à (u_n), et on dit qu'elle *converge* si elle admet une limite finie *non nulle*. Sinon, on dit que la suite produit diverge.

Partie A – Découverte

A.1 Montrer que si (p_n) converge, alors la suite (u_n) converge, et préciser sa limite.

A.2 On suppose ici que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire la nature de la suite produit (p_n).

Partie B – Une caractérisation de la convergence d'une suite produit

On considère dans cette partie une suite réelle (u_n) convergeant vers 1.

B.1 Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n > 0$ (*i.e.* $u_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant N$).

On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant N}$, par

$$\forall\, n \geqslant N, \quad S_n = \sum_{k=N}^{n} u_k.$$

B.2 Montrer que la suite (S_n) converge si et seulement si la suite produit (p_n) converge.

On a donc obtenu un premier critère de convergence d'un suite produit.

B.3 On considère dans cette question la suite (u_n) de terme général $\sqrt[n]{n}$ et la suite produit associée (p_n).

a Montrer que pour tout entier $p \geqslant 3$: $\int_p^{p+1} \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(p)}{p}$.

b En déduire la nature du produit (p_n).

Partie C – Un autre critère de convergence d'une suite produit

On considère désormais une suite (v_n) à termes strictement positifs, et la suite produit associée à $(1 + v_n)$.

On définit la suite (T_n) de terme général $\sum_{k=1}^{n} v_k$.

C.1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

C.2 Montrer que si (T_n) converge, alors la suite produit (p_n) converge également.

C.3 Montrer la réciproque.

On a donc obtenu un second critère de convergence d'un suite produit.

C.4 On considère la suite de terme général :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

a Montrer, en utilisant le second critère de convergence d'une suite produit, que cette suite diverge vers $+\infty$.

b En encadrant pour $k \geqslant 2$ l'intégrale $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, trouver un équivalent de (T_n).