Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Une équation différentielle linéaire à paramètres

Partie A – Le cas où $m = 1$

A.1 Pour $m = 1$, $\mathcal{E}_{m,\beta}$ équivaut à :

$$y' + y = \frac{1}{2}e^{\beta x}.$$

La solution générale de l'équation homogène associée s'écrit $x \mapsto \lambda e^{-x}$, où λ décrit $\mathbb{R}$.

Si $\beta = -1$, une solution particulière de cette équation est $x \mapsto \frac{x}{2}e^{-x}$ (on a intégré la partie polynomiale), de sorte que l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_{m,\beta}$ est :

$$\left\{x \mapsto \left(\frac{x}{2} + \lambda\right) e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si $\beta \neq -1$, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \alpha e^{\beta x}$, pour un certain réel α. Après un calcul simple, on constate que $\alpha = \frac{1}{2(\beta+1)}$ convient : la solution générale de $\mathcal{E}_{m,\beta}$ est donc

$$x \mapsto \frac{1}{2(\beta+1)}e^{\beta x} + \lambda e^{-x},$$

où λ décrit $\mathbb{R}$.

A.2 L'existence et l'unicité d'une telle solution à ce problème de Cauchy est assurée par le cours.

Dans le cas où $\beta = -1$, on trouve $f_\beta \ : x \mapsto \left(\frac{x}{2} + 1\right) e^{-x}$.

Dans le cas où $\beta \neq -1$, on trouve $f_\beta \ : x \mapsto \frac{1}{2(\beta+1)}e^{\beta x} + \frac{2\beta+1}{2(\beta+1)}e^{-x}$.

A.3

Première méthode : en utilisant $\mathcal{E}_{m,\beta}$. La fonction f_β vaut 1 en 0 et, puisqu'elle est solution de $\mathcal{E}_{m,\beta}$:

$$f'_\beta(0) + f_\beta(0) = \frac{1}{2}e^{\beta \cdot 0},$$

d'où $f'_\beta(0) = -\frac{1}{2}$.

Seconde méthode : en utilisant la question précédente.

Dans le cas où $\beta = -1$, on trouve, pour tout réel x :

$$f'_\beta(x) = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{x}{2} + 1\right)\right) e^{-x},$$

donc $f'_\beta(0) = -\frac{1}{2}$.

Dans le cas où $\beta \neq -1$, on trouve, pour tout réel x :

$$f'_\beta(x) = \frac{\beta}{2(\beta+1)}e^{\beta x} - \frac{(2\beta+1)}{2(\beta+1)}e^{x};$$

donc $f'_\beta(0) = -\frac{1}{2}$.

Dans tous les cas, on a donc $f'_\beta(0) = -\frac{1}{2}$.

Partie B – Le cas où $m \neq 1$

B.1 Bien sûr, ψ est deux fois dérivable, en tant que solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (l'un au moins des réels m et m' est différent de 1).

De plus, pour tout réel x :

$$(1) \ : \quad (m-1)\psi''(x)+2m\psi'(x)+(m+1)\psi(x)=e^{\beta x}$$

et

$$(2) \ : \quad (m'-1)\psi''(x)+2m'\psi(x)+(m'+1)\psi(x)=e^{\beta x},$$

puis, en effectuant $\lambda(1)+(1-\lambda)(2)$

$$(\lambda(m-1)+(1-\lambda)(m'-1))\psi''(x)+2(\lambda m+(1-\lambda)m')\psi'(x)+(\lambda(m+1)+(1-\lambda)m')\psi(x)=(\lambda+1-\lambda)e^{\beta x},$$

ce qui, après simplification, montre que ψ est solution de $\mathcal{E}_{m'',\beta}$.

B.2 L'équation caractéristique associée à $\mathcal{E}_{m,\beta}$ est $(m-1)z^2+2mz+(m+1)=0$, de solutions -1 et $\frac{1+m}{1-m}$. On observe que ces solutions sont distinctes (peu importe la valeur de m), donc la solution générale de l'équation homogène associée à $\mathcal{E}_{m,\beta}$ est

$$x \mapsto \lambda e^{-x}+\mu e^{\frac{1+m}{1-m}x},$$

où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

B.3 L'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de Cauchy est assurée par le cours. Il s'agit de déterminer la solution φ de

$$y''-y=-e^{-x}$$

telle que $\varphi(0)=1$ et $\varphi'(0)=-\frac{1}{2}$.

On sait que cette équation admet une solution de la forme $x\mapsto axe^{-x}$, pour un réel a qu'il reste à déterminer. Après calcul, on trouve que le choix $a=\frac{1}{2}$ convient : la fonction $x\mapsto \frac{x}{2}e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation étudiée.

Il existe des réels λ et μ tels que, pour tout réel x :

$$\varphi(x)=\frac{x}{2}e^{-x}+\lambda e^{-x}+\mu e^{x}.$$

Les conditions s'écrivent $\lambda+\mu=1$ et $\frac{1}{2}-\lambda+\mu=-\frac{1}{2}$, ce qui conduit à $\lambda=0$ et $\mu=1$.

La fonction recherchée est donc :

$$\varphi \ : x\mapsto \left(\frac{x}{2}+1\right)e^{-x}.$$

B.4 Il se trouve que φ est également la solution de $\mathcal{E}_{1,\beta}$ valant 1 en 0 (cf. A.3). La question B.1 permet d'affirmer que φ est solution de $\mathcal{E}_{m,\beta}$, pour tout réel m. Elle vérifie par ailleurs évidemment les conditions initiales : d'après le cours, c'est l'unique solution au problème de Cauchy étudié.

B.5 D'après la question précédente, il reste à montrer que si β vérifie la propriété demandée, alors $\beta=-1$. Fixons donc un tel β, et soit g une solution commune. En particulier, g est solution de $\mathcal{E}_{0,\beta}$. D'après la question B.1, cette fonction est également solution de $\mathcal{E}_{1,\beta}$, donc g est solution de

$$(1) \ : \quad y+y'=\frac{1}{2}e^{\beta x} \qquad \text{et} \qquad (2) \ : \quad y''-y=-e^{\beta x}.$$

En dérivant la première équation (c'est possible car g est indéfiniment dérivable), on observe que g est également solution de

$$(3) \ : \quad y'+y''=\frac{\beta}{2}e^{\beta x}.$$

En formant $(3)-(1)$, on déduit que g est solution de

$$(4) \ : \quad y''-y=\frac{\beta-1}{2}e^{\beta x}.$$

En comparant (2) et (4), il apparaît que, nécessairement, $\beta=-1$: le résultat est démontré.

Remarque : on pouvait aussi observer (en prenant deux valeurs de m puis en formant la différence) qu'une telle solution commune était nécessairement solution de

$$y''+2y'+y=0,$$

donc de la forme $x\mapsto (ax+b)e^{-x}$ pour certains réels a et b, ce qui impose[1] $\beta=-1$.

1. ce n'est pas si évident à montrer, je vous laisse y réfléchir