Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : Un classique

1 Supposons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Il s'agit de montrer que $E \subset \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ (l'autre inclusion étant évidente). Soit $x \in E$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, il existe $z \in E$ tel que $f(x) = f^2(z)$. On a donc $x - f(z) \in \mathrm{Ker}(f)$, et $x = (x - f(z)) + f(z) \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$, d'où une première implication.

Réciproquement, supposons que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Bien sûr, $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ ($\mathrm{Im}(f) \subset E$, donc $f(\mathrm{Im}(f)) \subset f(E)$). réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, $y \in E$ tel que $x = f(y)$. On écrit, grâce à l'hypothèse faite, $y = z + f(t)$, où $z \in \mathrm{Ker}(f)$ et $t \in E$. On a donc $x = f(y) = f(z) + f^2(t) = f^2(t) \in \mathrm{Im}(f^2)$, puis $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

2 Observons déjà que $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ et que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ (si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$), ce sont donc les inclusions réciproques qui contiennent l'information pertinente.

Supposons $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, $y \in E$ tel que $x = f(y)$. On a donc $f^2(y) = f(x) = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$: $x = f(y)$ est donc nul.

Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. On a donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, d'où $f(x) = 0$ par hypothèse : $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2 : Projecteurs de $\mathcal{L}(E)$

1 Soit $x \in E$, $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On a $q(x) = x - p(x) = x_G$, donc q est le projecteur sur G parallèlement à F : $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p)$.

2 F est l'image de l'endomorphisme $u \mapsto u \circ p$ de $\mathcal{L}(E)$ (cette application est linéaire car la composition à droite par une application donnée est linéaire), c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

De même pour G.

3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. En écrivant $f = f \circ (p + q) = f \circ p + f \circ q$, on constate que $f \in F + G$, d'où $F + G = E$.

Soit $f \in F \cap G$. Comme $f \in F$ (resp. $f \in G$), $\mathrm{Ker}(f)$ contient $G = \mathrm{Ker}(p)$ (resp. contient $F = \mathrm{Ker}(q)$). $\mathrm{Ker}(f)$ étant un sous-espace vectoriel de E, il contient donc $F + G$, soit E : $f = 0$.

F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

Remarque : on aurait aussi pu dire que $\varphi_p\ : f \mapsto f \circ p$ et $\varphi_q\ : f \mapsto f \circ q$ sont des projecteurs de somme $\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}$, donc d'images supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 3 : Théorème de Maschke

1 Fait en TD.

2 p est un endomorphisme de E par structure d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$, et pour tout $x \in E$, tout $g \in G$,

$$g \circ q \circ g^{-1}(x) = g(q(g^{-1}(x))) \in g(\mathrm{Im}\, q) = g(F) \subset F.$$

Ceci valant pour tous $g \in G$, $p(x) \in F$, puis, ceci valant pour tout $x \in E$, $\mathrm{Im}(p) \subset F$.

Enfin, soit $x \in F$. Soit $g \in G$: $g^{-1} \in G$ laisse stable F, donc $g^{-1}(x) \in F$, puis $q(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$, et enfin $g \circ q \circ g^{-1}(x) = x$. Ainsi, $p(x) = x$. Cela montre au passage que $\mathrm{Im}(p) = F$ (puisque l'inclusion directe était déjà connue).

Pour tout $x \in E$, $p(x) \in F$, donc $p(p(x)) = p(x)$: p est un projecteur d'image F.

3 L'application $g \in G \mapsto g_0 \circ g$ étant une permutation de G,

$$\begin{aligned}
g_0 \circ p &= g_0 \circ \frac{1}{|G|} \sum g \circ q \circ g^{-1} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum (g_0 g) \circ q \circ g^{-1} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum (g_0 g) \circ q \circ (g_0 g)^{-1} g_0 \\
&= p \circ g_0
\end{aligned}$$

p commute avec chaque élément de G, donc son noyau H, supplémentaire de F dans E car p est un projecteur, est stable par tout élément de G.