Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : Une formule

1 Observons déjà que $\frac{x}{2}-1 \in]-1,1[$, donc β est bien défini.
On a

$$\cos(\beta) = \cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)\right) = \boxed{1-\frac{x}{2}.}$$

2 On sait que $\cos^2(\beta/2) = \frac{1+\cos(\beta)}{2}$ et $\sin^2(\beta/2) = \frac{1-\cos(\beta)}{2}$. Or $\beta \in [0,\pi]$, car l'image d'arcsinus est $[-\pi/2,\pi/2]$: $\cos(\beta/2)$ et $\sin(\beta/2)$ sont positifs.

$\boxed{\text{Il vient bien } \cos(\beta/2) = \frac{\sqrt{4-x}}{2} \text{ et } \sin(\beta/2) = \frac{\sqrt{x}}{2}.}$

3 De la question précédente, on déduit $\tan(\beta/2) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}$. Or $\beta/2 \in [0,\pi/2[$, donc $\arctan(\tan(\beta/2)) = \beta/2$: cela prouve bien la formule souhaitée.