Devoir non surveillé

Isométries et groupes diédraux

Partie A – Isométries du plan

On considère le plan euclidien $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On l'identifie au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Une *isométrie* du plan est une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ conservant les distances, c'est-à-dire, pour tous points M et N du plan :

$$f(M)f(N) = MN$$

On note $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ l'ensemble des isométries du plan.

A.1 Montrer que $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ n'est pas vide. Montrer que la composée de deux isométries est une isométrie. Montrer que si f est une isométrie bijective, alors sa bijection réciproque est une isométrie.

A.2 Montrer que l'unique isométrie fixant trois points non alignés est l'identité.
Indication : si A, B, C sont trois points alignés, et M un point du plan, on pourra considérer les cercles de centres respectifs A, B, C et passant par M.

A.3 Soit φ une similitude du plan (directe ou indirecte) de rapport 1, *i.e.* il existe des nombres complexes a et b, a de module 1, tels que l'expression complexe de φ soit $z \mapsto az + b$ (si φ est directe) ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ (si φ est indirecte).

a Montrer que φ est une isométrie bijective.

b On considère les trois points A, B, C d'affixes respectives $0, 1, i$, et trois points A', B', C' formant un triangle rectangle isocèle d'hypothénuse $[B'C']$ de longueur $\sqrt{2}$. Montrer qu'il existe une similitude φ de rapport 1 telle que :

$$\varphi(A) = A', \quad \varphi(B) = B' \quad \text{et} \quad \varphi(C) = C'$$

A.4 Montrer que l'ensemble des isométries du plan est l'ensemble des similitudes de rapport 1.

Étant inclus dans le groupe des permutations de $\mathcal{P}$, on déduit du travail effectué que $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ est un groupe (muni de la loi de composition entre applications).

On note en particulier que toute isométrie du plan est une bijection, que l'image d'un segment $[AB]$ par une isométrie f du plan est un segment de même longueur, d'extrémités $f(A)$ et $f(B)$.

Partie B – Groupes diédraux

Fixons un entier naturel $n \geqslant 3$. On sait que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![1, n]\!]\}$$

Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k le point d'affixe $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, et P_n le polygone convexe régulier $A_1 A_2 \ldots A_n$.

On étudie l'ensemble D_n des isométries f du plan laissant P_n globalement invariant, c'est-à-dire telles que :

$$f(P_n) = P_n$$

B.1 Montrer que D_n n'est pas vide, et que si f, g sont des éléments de D_n, alors fg et f^{-1} appartiennent à D_n. D'après des résultats généraux sur les (sous-)groupes, on peut en déduire que D_n (muni de la composition) est un groupe.

B.2

a Donner l'expression complexe r de la rotation ρ de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{n}$. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$ (ne pas oublier : ici, on a par exemple $\rho^2 = \rho \circ \rho$) sont des éléments de D_n. Que vaut ρ^n ?

b Donner l'expression complexe s de la symétrie orthogonale σ par rapport à l'axe des abscisses. Montrer que $\sigma, \rho\sigma, \ldots, \rho^{n-1}\sigma$ sont des éléments de D_n. Que vaut $(\rho\sigma)^2$?

c En déduire que D_n est de cardinal au moins $2n$.

B.3 Montrer que D_n est de cardinal au plus $2n$.

Indication : on pourra considérer l'image du segment $[A_1A_2]$.

B.4 On considère un groupe G, d'élément neutre e, et engendré par deux de ses éléments a et b (*i.e.* dont tout élément s'exprime comme produit des éléments a, b, a^{-1}, b^{-1}). On suppose également que a et b vérifient les trois relations $a^n = e$, $b^2 = e$ et $(ab)^2 = e$.

a Montrer, pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, la formule :

$$ba^kb = a^{n-k}$$

b Pour tout élément h de G, on introduit l'application

$$\varphi_h \; : \; \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & hg \end{array}$$

de multiplication à gauche par h.

Montrer que pour tout élément h de G, φ_h est une permutation de G, et donner sa bijection réciproque.

c Montrer que G est fini, d'ordre inférieur ou égal à $2n$.

Indication : on pourra introduire l'ensemble $X = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$, et montrer que $\varphi_a(X) = \varphi_b(X) = X$.