Corrigé de devoir non surveillé

Homéomorphismes

1 Soit X, Y, Z trois parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. Id_X est clairement un homéomorphisme de X sur lui-même.
2. Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme de X sur Y, alors f^{-1} est une bijection continue de Y sur X, de bijection réciproque f continue : c'est un homéomorphisme de Y sur X.
3. La composée licite de deux bijections est une bijection, la composée licite de deux fonctions continues est continue, donc si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des homéomorphismes, alors $g \circ f$ est une bijection continue de X sur Z et sa réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$ est également continue.

Par conséquent, « être homéomorphe à » est une relation réflexive, symétrique et transitive.

2 $\boxed{\text{Une partie de } \mathbb{R} \text{ homéomorphe à un intervalle est un intervalle,}}$ car image continue d'un intervalle.

3 On pose $X = [-2, -1[\cup [0, 1]$, $Y = [-1, 1]$, et

$$f : \begin{array}{ccl} X & \to & Y \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} x+1 & \text{si} & x \in [-2, -1[\\ x & \text{si} & x \in [0, 1] \end{array} \right. \end{array}$$

L'application f est clairement une bijection continue de X sur Y, mais sa réciproque, qui n'envoie pas le segment Y sur un segment, n'est pas continue.

4 On sait que f est strictement monotone. La fonction f est une bijection continue et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle J, donc sa bijection réciproque est également continue.

$\boxed{\text{Si } f : I \to J \text{ est une bijection continue, alors } f \text{ est un homéomorphisme.}}$

5 Soit $[a, b]$ un segment ($a < b$). Le paramétrage

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \to & [\text{a,b}] \\ \lambda & \mapsto & \lambda a + (1 - \lambda) b \end{array}$$

est une bijection continue de $[0, 1]$ sur $[a, b]$. La question précédente permet donc d'affirmer que $[0, 1]$ et $[a, b]$ sont homéomorphes.

Deux segments de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes à $[0, 1]$, donc sont eux-mêmes homéomorphes.

$\boxed{\text{Toute partie } I \text{ de } \mathbb{R} \text{ homéomorphe à un segment est un segment,}}$ en tant qu'image continue d'un segment.

6

a La fonction logarithme définit une bijection continue de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes (d'après 4).

De même, l'application $x \mapsto -x$ définit une bijection continue de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_-^*$, qui sont donc homéomorphes, et la restriction de la fonction logarithme à $]0, 1[$ est continue et d'image $\mathbb{R}_-^*$: ces deux intervalles sont homéomorphes.

Les intervalles $]0, 1[$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes deux à deux, d'après la première question.

b Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On montre facilement que $]a, b[$ est homéomorphe à $]0, 1[$ (s'inspirer de φ défini plus haut).

L'application $x \mapsto x - a$ réalise un homéomorphisme de $]a, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de $]-\infty, a[$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

$\boxed{\text{Deux intervalles ouverts (non vides) sont homéomorphes,}}$ toujours grâce à la première question.

7 Un intervalle non borné n'étant pas un segment, il ne peut pas être homéomorphe à un segment.

8 Supposons l'existence d'un homéomorphisme $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Comme f est injective et d'image $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$: l'image de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ par l'application continue f n'est donc pas un intervalle, ce qui est tout à fait insensé.

$\boxed{\mathbb{R}_+ \text{ et } \mathbb{R} \text{ ne sont pas homéomorphes.}}$