Devoir non surveillé

On identifie $\mathbb{C}$ au plan euclidien usuel.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, tel que $ad-bc \neq 0$. On appelle *homographie* associée à ce quadruplet la fonction qui, à un nombre complexe z tel que $cz+d \neq 0$, associe $\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Étant donné $z \in \mathbb{C}$ et une homographie f, on s'intéresse à la suite des itérés de z par f, *i.e.* la suite (u_n) donnée par $u_0 = z$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On a donc aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^{\circ n}(z)$, où $f^{\circ n}$ désigne la composée de f n-fois par elle même (par exemple, $f^{\circ 3} = f \circ f \circ f$).

Remarque : il faut noter qu'une telle suite n'existe pas nécessairement, c'est par exemple le cas si z n'appartient pas au domaine de définition de f. Par souci de simplification, nous nous placerons cependant implicitement dans le cas où cette suite est bien définie.

On dira qu'une homographie f vérifie la **propriété** $\mathcal{C}$ si, pour tout nombre complexe z tel que la suite $(f^{\circ n}(z))$ des itérés de z par f existe, les termes de cette suite sont cocycliques (*i.e.* situés sur un même cercle) ou alignés.

L'objet de ce problème est de caractériser les homographies à deux points fixes vérifiant la propriété $\mathcal{C}$.

La première partie ne fait pas référence à la notion d'homographie, et regroupe des résultats utiles pour la suite. On montre dans la deuxième partie des résultats classiques sur les homographies et le birapport. Enfin, la dernière partie consiste en l'étude générale des homographies à deux points fixes vérifiant la propriété $\mathcal{C}$, et se termine par deux exemples.

Partie A – Préliminaires faciles

A.1 Résoudre l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$, d'inconnue complexe z.

A.2 Soit $a, b \in \mathbb{C}$, où $a \neq b$, et $K \in \mathbb{R}_+^*$.

a On suppose ici que $K \in]0,1[$. Exprimer en fonction de a, b, K un nombre complexe c et un réel strictement positif R tel que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad |z-a|^2 = K^2|z-b|^2 \Leftrightarrow |z-c|^2 = R^2.$$

b En déduire la nature géométrique (et selon la valeur de K) de l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}, |z-a| = K|z-b|\}.$$

A.3 Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes respectives a, b, c, d. On « rappelle », et on admet, que A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CB}})\ [\pi].$$

On appelle *birapport* de (a,b,c,d) et on note $\mathcal{B}(a,b,c,d)$ le nombre complexe :

$$\mathcal{B}(a,b,c,d) = \frac{a-c}{a-d}\frac{b-d}{b-c}.$$

Montrer que A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\mathcal{B}(a,b,c,d)$ est réel.

A.4 On dit d'une application f, définie sur une partie de $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$, qu'elle conserve le birapport si, pour tous complexes a, b, c, d distincts tels que $f(a), f(b), f(c), f(d)$ soient bien définis et distincts :

$$\mathcal{B}(f(a), f(b), f(c), f(d)) = \mathcal{B}(a,b,c,d).$$

a Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Montrer que $f\ : z \mapsto \alpha z + \beta$ conserve le birapport

b Montrer que l'application inverse $z \mapsto 1/z$ conserve le birapport.

c Montrer que la composée (bien définie) $f \circ g$ d'applications conservant le birapport conserve le birapport.

A.5 Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $z \in A$, on ait : $|z| \leqslant M$.
Soit $c \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que le cercle de centre c et de rayon R est borné.
On admet que pour tout $(z_0, q) \in (\mathbb{C}^*)^2$, si $|q| > 1$, alors $(z_0 q^n)$ est une suite non bornée.

Partie B – Homographies et birapport

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$, et soit f l'homographie associée à (a, b, c, d). On admet pour la suite que toute homographie est injective.

B.1 Donner le domaine de définition de f.

B.2 Montrer que f conserve le birapport.
Indication : on pourra utiliser A.4.

B.3 On suppose que f admet deux points fixes distincts u_1 et u_2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que z, $f(z)$, u_1 et u_2 soient (bien définis et) distincts deux à deux. Montrer que $\mathcal{B}(f(z), z, u_1, u_2)$ ne dépend pas de z, *i.e.* $\mathcal{B}(f(z), z, u_1, u_2) = \mathcal{B}(f(z'), z', u_1, u_2)$ pour tous complexes z et z' tels que ces birapports soient bien définis.
Indication : on pourra appliquer le résultat de la question précédente au quadruplet (z, z', u_1, u_2).

B.4 En déduire qu'il existe un unique nombre complexe non nul k tel que, pour tout complexe z tel que z, $f(z)$, u_1 et u_2 soient (bien définis et) distincts deux à deux :

$$\frac{f(z) - u_1}{f(z) - u_2} = k \frac{z - u_1}{z - u_2}.$$

Dans la suite, k sera appelé *rapport* de l'homographie f. On observe qu'en échangeant les rôles de u_1 et u_2, $1/k$ est aussi un rapport de l'homographie f.

B.5 Soit z un nombre complexe distinct de u_1 et u_2 tel que $(f^{\circ n}(z))$ soit bien définie. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f^{\circ n}(z) - u_1}{f^{\circ n}(z) - u_2} = k^n \frac{z - u_1}{z - u_2}.$$

Partie C – Homographies à deux points fixes vérifiant la propriété $\mathcal{C}$.

C.1 Soit f une homographie de rapport k à deux points fixes u_1 et u_2.

a On suppose $|k| = 1$. Montrer que f vérifie la propriété $\mathcal{C}$.

b On suppose k réel. Montrer que f vérifie la propriété $\mathcal{C}$.

C.2 On s'intéresse à la réciproque. Soit f une homographie de rapport k à deux points fixes u_1 et u_2, vérifiant la propriété $\mathcal{C}$. Soit g l'homographie $z \mapsto \frac{z-u_1}{z-u_2}$.
On suppose $|k| \neq 1$. On souhaite montrer que k est réel.

a On introduit l'application $m_k\ : z \mapsto kz$. Montrer que $g(f(z)) = m_k(g(z))$, pour tout nombre complexe z pour lequel ces expressions sont bien définies.

b On admet l'existence d'un nombre complexe z_0', distinct de u_1 et de u_2, pour lequel la suite $(f^{\circ n}(z_0'))$ est bien définie.
Montrer que $z_0', f(z_0'), f^{\circ 2}(z_0')$ et $f^{\circ 3}(z_0')$ sont distincts deux à deux.

c On pose $z_0 = g(z_0')$. Montrer que :

$$\mathcal{B}(z_0, m_k(z_0), m_k^{\circ 2}(z_0), m_k^{\circ 3}(z_0)) = \mathcal{B}(z_0', f(z_0'), f^{\circ 2}(z_0'), f^{\circ 3}(z_0')).$$

d En déduire que les termes de $(z_0 k^n)$ sont cocycliques ou alignés, puis que k est réel.

C.3 Dans cette dernière question, destinée à illustrer le travail précédent, on introduit les homographies $f_0\ : z \mapsto -\frac{3z+5}{z-5}$ et $f_1\ : z \mapsto \frac{(1-6i)z-5}{z-1-6i}$.

a Vérifier que ces homographies admettent les deux mêmes points fixes.

b Montrer que ces homographies vérifient la propriété $\mathcal{C}$.