Devoir non surveillé

Hyperplans stables par multiplication

Les parties sont liées, la dernière demande plus d'autonomie que les autres.

Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.

On rappelle que la *trace* $\mathrm{tr}(A)$ d'une matrice carrée A est la somme de ses coefficients diagonaux, que la trace définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ (inutile de le prouver).

On rappelle également que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de taille n est une matrice triangulaire supérieure (inutile de le prouver).

Partie A – Préliminaires

A.1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que A et B sont équivalentes si et seulement si il existe $(U, V) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $B = UAV$.

A.2 Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

a Montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(A^k\right)_{k \in [\![0,N]\!]}$ soit liée.

b En déduire que $I_n \in \mathrm{Vect}(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

A.3 Soit $T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Expliquer rapidement pourquoi $T_n(\mathbb{K})$ est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie B – Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

B.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & M & \mapsto & \mathrm{tr}(AM) \end{array}.$$

Montrer que φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

B.2 On introduit l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ & A & \mapsto & \varphi_A \end{array}$$

Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

B.3 Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a Montrer l'existence de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varphi_A)$. Y a-t-il unicité d'une telle matrice ?

b Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, exhiber une matrice $B_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r, et de diagonale nulle.

c En déduire que $\mathcal{H}$ comprend une matrice inversible.

Partie C – Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par multiplication

On considère maintenant un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication, *i.e.*

$$\forall (H_1, H_2) \in \mathcal{H}^2, \quad H_1 H_2 \in \mathcal{H}.$$

La question B.3.a permet de choisir $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

C.1 Montrer que $I_n \in \mathcal{H}$.

C.2 Montrer que pour tout $B \in \mathcal{H}$, BA est colinéaire à A.

C.3 Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Montrer que f est non nul.

On peut donc choisir un vecteur non nul x_1 de $\mathrm{Im}(f)$, que l'on complète en une base $\mathcal{C} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

C.4 Soit $B \in \mathcal{H}$, g l'endomorphisme canoniquement associé à B. Soit B' la matrice de g dans $\mathcal{C}$.

a Écrire B' en fonction de B et P.

b Montrer que tous les coefficients de la première colonne de B', sauf éventuellement le premier, sont nuls.

c Soit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application

$$c \ : \ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & Q^{-1}MQ \end{array}$$

est un automorphisme de l'espace vectoriel et de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

d Montrer que $n = 2$, et que $\mathcal{H}$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel et anneau, à $T_2(\mathbb{K})$.

Partie D – Quelques résultats sur les sous-algèbres

L'expression « algèbre » (resp. « sous-algèbre ») signifie ici espace vectoriel et anneau[1] (resp. sous-espace vectoriel et sous-anneau).

D.1

a Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de E de dimension m. Montrer que

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}} = \{f \in \mathcal{L}(E), \quad f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}\}$$

est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$, et calculer sa dimension (en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel) en fonction de m et n.

b La réciproque est-elle vraie, *i.e.* toute sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ est-elle de cette forme ?

D.2 Déterminer brièvement les dimensions possibles des sous-algèbres de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

1. En réalité, la notion de $\mathbb{K}$-algèbre est plus générale, car on n'impose pas l'associativité de la loi de composition interne de mutiplication, ni l'existence d'un élément neutre pour cette loi.