Corrigé de devoir non surveillé

ISUP 04

Partie A – III

A.1 Ces sont des parties de $\mathcal{L}(E)$ non vides et stables par combinaisons linéaires, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$. C'en sont aussi des suos-algèbres, puisqu'en outre, elles comprennent I_n et sont stables par produit.

A.2 $u^{n-1} \neq 0$: soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. On vérifie que $(u^{n-1}(x), \ldots, u(x), x)$ est une base E dans laquelle la matrice de u est N.

A.3 Soit $y \in E$. On écrit $y = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j(x)$. $y \in \mathrm{Ker}(u^k)$ si et seulement si $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^{k+j}(x) = 0$, si et seulement si $\lambda_j = 0$ pour tout j tel que $k + j < n$: une base de $\mathrm{Ker}\, u^k$ est donc $(u^{n-k}(x), \ldots, u^n(x))$.

A.4 C'est une famille clairement génératrice de $Pol(u)$, et elle est libre car son évaluation en x (qui est linéaire) l'est : c'est une base de $Pol(u)$.

A.5 w et $P(u)$ commutent, donc w stabilise $\mathrm{Ker}(P(u))$.

A.6 w stabilise $Ker(u^k)$ pour tout k, donc sa matrice dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.

A.7 L'inclusion indirecte est évidente, et soit $w \in Com(u)$. On écrit $w(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j(x)$. On vérifie alors que w et $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$ et sont donc égaux.
$Com(u)$ est donc de dimension n.

A.8 On prend x tel que $u^{n-2}(x) \neq 0$: on a alors une famille libre $(u^{n-2}(x), \ldots, u(x), x)$, que l'on complète librement en une base de E. Dans cette base seule la dernière colonne n'est pas *a priori* comme on le souhaite. Cependant, son dernier coefficient est nécessairement nul (car u' est nilpotent), et en changeant de base, on obtient bien un dernier vecteur dans le noyau.

A.9 Question beaucoup trop difficile : pour y répondre, écrire une matrice commutant avec N' par blocs, et utiliser le cas de N (pour la taille $n - 1$). On trouve $n + 2$.

Partie B – IV

B.1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent tant pour la somme que pour le produit.

B.2

a Déjà fait (il suffit que l'une des deux matrices soit nilpotente).
L'inégalité est stricte pour $A = B$ d'indice de nilpotence 2.

b Vue dans le cadre plus général des anneaux. Il y a égalité si (pas seulement si !) $B = 0$ par exemple.

B.3

a Il suffit de s'arrêter lorsque les puissances de A sont nulles.

b Il suffit de composer, et d'ailleurs il y a une erreur d'énoncé ($Q(P(x) - 1)$ et non $Q(P(x - 1))$).

B.4 On vérifie d'abord (aisément) que l'on définit bien des applications entre les ensembles considérés, et elles sont réciproques l'une de l'autre, car si par exemple N est nilpotente, alors $Q(P(X)-1)-X$ est un multiple de X^n, donc, en évaluant en N : $Q(P(N) - I_n) = N$.

B.5 On a vu dans un cadre plus général que $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ si A et B commutent.

B.6 On a $\ln(UV) = \ln(U) + \ln(V)$, en écrivant $U = \exp(A)$ et $V = \exp(B)$.