Devoir non surveillé

Quelques aspects de la méthode de Newton

- **Méthode de Newton :** on considère une fonction $f \ : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (où I est un intervalle d'intérieur non vide), on note Γ son graphe, et, pour tout $x \in I$, M_x le point de Γ d'abscisse x.
  On suppose que f s'annule en $\alpha \in \mathbb{R}$, et on cherche à déterminer des valeurs approchées de α.
  Le principe de la méthode de Newton se fonde sur l'espérance que, étant donné une valeur approchée x_0 de α, l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à Γ en M_{x_0} - que l'on suppose donc non horizontale- soit une meilleure approximation de α que x_0.
  On réitère alors le procédé, ce qui conduit dans les cas favorables à la construction d'une suite récurrente (x_n), qui converge vers α. Cette suite est appelée *suite de Newton* associée à la condition initiale x_0 et à la fonction f. On montre aisément (inutile de le prouver) qu'une telle suite est d'itératrice

$$N_f \ : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- On peut mettre en œuvre la méthode de Newton dans un cadre plus général, mais en admettant que la suite construite soit éventuellement finie :
  Suite de Newton associée à f, de terme initial x_0 : soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition réel Ω, à valeurs réelles. On se donne une valeur initiale $x_0 \in \Omega$. Pour tout entier n, si x_n est bien défini, est élément de Ω, et si $f'(x_n) \neq 0$, on définit le terme x_{n+1} par

$$x_{n+1} = N_f(x_n), \text{ où } N_f : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

  La suite (x_n) (éventuellement finie) est la *suite de Newton associée à* (la condition initiale) x_0 et à f. On dit que la suite de Newton (x_n) est ***bien définie*** si, pour tout entier naturel n, on peut définir x_n.
- **Itérés d'une fonction :** pour tout ensemble X et toute fonction $\nabla \ : X \to X$, on définit la suite $(\nabla^{\circ n})_{n \in \mathbb{N}}$ par $\nabla^{\circ 0} = \mathrm{Id}_X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nabla^{\circ(n+1)} = \nabla \circ \nabla^{\circ n}$. Par exemple, $\nabla^{\circ 3} = \nabla \circ \nabla \circ \nabla$.
  On dit qu'un point z de X est *périodique* pour ∇ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $z = \nabla^{\circ n}(z)$.
- Par souci de simplicité, on autorisera l'emploi abusif de la notation $\nabla^{\circ n}$, comme dans l'expression $\tan^{\circ 2}$, qui désignera l'application qui à tout réel x tel que $\tan(x)$ et $\tan(\tan(x))$ soient bien définis, associe ce dernier réel.
- **Convergence au pire géométrique :** étant donné une suite réelle (u_n), convergeant vers un réel α, on dit que la convergence de (u_n) vers α est *au pire géométrique* s'il existe $\gamma \in [0, 1[$ tel que $u_n - \alpha = \mathrm{O}(\gamma^n)$.

Partie A – Résultats généraux et exemples simples

A.1 Montrer que la suite de Newton associée à la condition initiale 2 et à la fonction $\delta\ : x \mapsto x^3 + 16$ n'est pas bien définie.

A.2 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de Newton (x_n) associée à x_0 et à la fonction exponentielle est bien définie, et qu'elle diverge vers $-\infty$.

A.3 On considère la fonction carré $\varphi\ : x \mapsto x^2$: montrer que, pour toute valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}^*$, la suite de Newton est bien définie et converge vers 0, avec une vitesse au pire géométrique.

A.4 On suppose ici f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, que $l \in \mathbb{R}$ est un zéro de f mais pas de f', *i.e.* $f(l) = 0$ et $f'(l) \neq 0$.

a Montrer que $N_f(l) = l$ et $N_f'(l) = 0$. En déduire qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que N_f soit $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathcal{V} =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Montrer que pour tout $x \in \mathcal{V}$,

$$|N_f(x) - l| \leqslant \frac{1}{2}|x - l|.$$

b Montrer que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite de Newton associée à x_0 et f est bien définie et converge vers l, avec une vitesse au pire géométrique.

Que dire d'une suite de Newton associée à f et à une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$, pour laquelle il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que x_{n_0} (soit bien défini et) appartienne à $\mathcal{V}$?

Partie B – Bassin immédiat

Dans cette partie, on considère la fonction $\rho : x \mapsto x^3 - x$. Toutes les suites de Newton de cette partie sont implicitement associées à ρ.

B.1

a Donner l'ensemble des solutions de l'équation $\rho(x) = 0$, et tracer le graphe de ρ.

b Calculer N_ρ, et montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $1 \leqslant N_\rho(x) \leqslant x$.

Indication : on pourra notamment utiliser (et prouver) la convexité de ρ sur $[1, +\infty[$.

c Montrer que pour tout $x_0 > 1$, la suite de Newton de terme inital x_0 est bien définie et converge vers 1.

B.2 On dit qu'un intervalle J est *stylé* s'il comprend 0 et si, pour tout $x \in J$, la suite de Newton de condition initiale x est bien définie et converge vers 0.

On appelle *bassin immédiat* de 0 et on note $I(0)$ la réunion des intervalles stylés.

a Montrer que $I(0)$ est un intervalle borné.

b Montrer que $I(0)$ est ouvert.

Indication : on pourra utiliser A.4

c Le bassin immédiat $I(0)$ de 0 est donc de la forme $]\alpha, \beta[$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, où $\alpha < \beta$. Montrer que $\alpha = -\beta$ (on pourra comparer des suites de Newton de termes initiaux opposés).

d Montrer que $N_\rho(]\alpha, \beta[) \subset]\alpha, \beta[$.

e Montrer que $\rho(\alpha)$ et $\rho(\beta)$ sont non nuls.

f Montrer que $\rho'(\alpha)$ et $\rho'(\beta)$ sont non nuls.

g Montrer que $N_\rho(\alpha) = \beta$, $N_\rho(\beta) = \alpha$.

h Déduire des questions précédentes les valeurs de α et β.

Partie C – La méthode de Newton pour $x \mapsto x^2+1$ conduit au chaos

Dans cette partie, on considère la fonction $\sigma : x \mapsto x^2+1$. Toutes les suites de Newton de cette partie sont implicitement associées à σ.

C.1 Calculer N_σ. Montrer que pour toute valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}$, si la suite de Newton (x_n) est bien définie, alors elle est divergente de seconde espèce (*i.e.* elle n'admet pas de limite).
Indication : on pourra notamment étudier le signe de $x_{n+1} - x_n$.

On considère le cercle unité
$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$
et la fonction carré $D\ : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $z \mapsto z^2$.

C.2

a On définit l'application $\Phi : \mathbb{U} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, qui à $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ (pour un certain réel θ) associe $\mathrm{cotan}(\frac{\theta}{2})$: montrer que cette définition est licite, c'est-à-dire qu'à un élément z de $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ elle associe bien un *unique* réel (indépendent du choix de θ). Montrer que Φ définit une bijection de $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

b Montrer que
$$N_\sigma(\Phi(z)) = \Phi(D(z)),$$
pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1, 1\}$.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $(\Phi(D^{\circ n}(z))$ est la suite de Newton associée à $\Phi(z)$.

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ un point périodique de D. Montrer que $\Phi(z)$ est un point périodique de N_σ.

C.3

a Soit $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $z = e^{i\frac{2\pi k}{2^n-1}}$. Montrer que z est périodique pour D.

b Montrer que l'ensemble Ω des points périodiques pour N_σ est dense dans $\mathbb{R}$.

C.4 Soit $]\alpha, \beta[$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta)$, un intervalle réel ouvert. On pose
$$e^{i]\alpha,\beta[} = \{e^{i\theta}, \theta \in]\alpha, \beta[\}.$$
Il s'agit donc d'une partie de $\mathbb{U}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $D^{\circ n}(e^{i]\alpha,\beta[}) = e^{i]2^n\alpha, 2^n\beta[}$.

En déduire qu'il existe un entier naturel n tel que
$$D^{\circ n}(e^{i]\alpha,\beta[}) = \mathbb{U}$$

Épilogue : tout ceci prouve que N_σ est chaotique au sens de Devaney.