Devoir non surveillé

Problème – Minimum d'une somme de distances

I.1 Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Montrer que z et z' ont mêmes arguments si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

I.2

a Montrer que pour tous nombres complexes z et z', $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$, et que cette inégalité est une égalité si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

b Soit $n \geqslant 2$ un entier, $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. Montrer :

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

c Montrer que l'inégalité ci-dessus est une égalité si et seulement si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}_+$.

I.3 Soit $n \geqslant 2$ un entier, z_1, ..., z_n des nombres complexes tous non nuls.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $a_k = \frac{z_k}{|z_k|}$, et on suppose que $a_1 + \cdots + a_n = 0$.

a Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$S(z) = \bar{a}_1(z_1 - z) + \cdots + \bar{a}_n(z_n - z).$$

Montrer que $S(z)$ est un nombre réel positif indépendant de z, que l'on précisera en fonction de $z_1, \ldots, z_n$.

b En déduire que, pour tout nombre complexe z :

$$(\star) \quad : \quad |z_1| + \cdots + |z_n| \leqslant |z - z_1| + \cdots + |z - z_n|.$$

c Montrer de plus que cette inégalité est une égalité si et seulement si :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \bar{a}_k(z_k - z) \in \mathbb{R}_+.$$

I.4 Dans le plan complexe, on note M_1, ..., M_n les points d'affixes z_1, ..., z_n, et N un point d'affixe z. On suppose toujours que $a_1 + \cdots + a_n = 0$. On note O le point d'affixe nulle.

a Interpréter géométriquement les résultats de la question I.3. On pourra faire intervenir la fonction $f\ : N \mapsto NM_1 + \cdots + NM_n$.

b Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points où la fonction f atteint son minimum. On distinguera suivant que les points M_1, ..., M_n sont alignés ou non.

I.5 Dans cette question, on choisit, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = e^{2ik\pi/n}$.

a Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$n \leqslant |z_1 - z| + \cdots + |z_n - z|.$$

b En choisissant une bonne valeur de z, en déduire l'encadrement :

$$\frac{n}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqslant n.$$

c En déduire :

$$\frac{1}{n} \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leqslant \frac{2}{n}.$$