Devoir non surveillé

Problème – Nombres de Liouville

Partie A – Préliminaires sur les fonctions polynomiales

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$. On rappelle que $\mathbb{R}^{[a,b]}$, ensemble des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, est un anneau commutatif (pour les lois usuelles).

A.1 Montrer que $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$, ensemble des applications bornées de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

A.2 On appelle *fonction polynomiale* sur un segment $[a, b]$ tout élément du sous-anneau $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ engendré par l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id} : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

et les applications constantes, c'est-à-dire du plus petit sous-anneau (pour l'inclusion) de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ comprenant Id et les applications constantes.

On vérifie facilement (inutile de le faire) qu'un élément f de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe un entier naturel p, des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$, tels que

$$f = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \mathrm{Id}^{\,k}.$$

Par exemple, la fonction $x \mapsto 3x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{12}$ est polynomiale sur tout segment (obtenue pour $p = 3$ et $(\lambda_i)_{i \in [\![0,3]\!]} = (7/12, 1/2, 1, 3)$).

Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-anneau de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.

A.3 Soit $\alpha \in [a, b]$, $f \in \mathcal{P}$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \tau_{\alpha,f} : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \text{ si } x \neq \alpha, 0 \text{ sinon} \end{array}$$

est un élément de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.
Indication : on pourra dans un premier temps traiter le cas où $f = \mathrm{Id}^{\,n}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Partie B – Condition nécessaire d'algébricité

Un nombre réel α est dit *algébrique* s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, des **nombres rationnels** $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$, où $\lambda_d \neq 0$, tels que la fonction polynomiale $f = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k \mathrm{Id}^{\,k}$ s'annule en α (*i.e.* $\sum_{k=0}^{d} \lambda_k \alpha^k = 0$).

Un nombre réel non algébrique est dit *transcendant.*

On considère un nombre algébrique et irrationnel α, et on conserve les notations ci-dessus : on a nécessairement $d \geqslant 2$, on admet que l'**on peut choisir la fonction f de telle sorte qu'elle ne s'annule en aucun nombre rationnel (et on effectue ce choix ...)**.

B.1 Expliquer comment se ramener au cas où $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$ sont des entiers relatifs (c'est ce que nous supposons désormais).

B.2 Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$: $|f(p/q) - f(\alpha)| \geqslant 1/q^d$.

B.3 Montrer l'existence d'un réel strictement positif c, tel que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{c}{q^d}.$$

Indication : utiliser la question précédente ainsi que A.3, et travailler d'abord sur $[\alpha - 1, \alpha + 1]$.

Partie C – Exemples de nombres transcendants

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in (\llbracket 0, 9 \rrbracket)^{\mathbb{N}^*}$, une suite de chiffres, ne stationnant pas en la valeur 0 (*i.e.* pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$ et $a_n \neq 0$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^{k!}}$.

C.1 Montrer que (s_n) converge.

Indication : on pourra appliquer le théorème de la limite monotone.

On note α sa limite, et **on admet qu'elle est irrationnelle**.

C.2 Montrer par l'absurde que α est transcendant.

Indication : on pourra encadrer $s_m - s_n$, où $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $m > n$, puis faire tendre m vers l'infini, et utiliser B.3.