Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Nombres de Liouville

Partie A – Préliminaires sur les fonctions polynomiales

A.1 $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ est bien sûr une partie de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ comprenant son élément unité (la fonction constante de valeur 1), et, si f et g en sont deux éléments, K et K' des majorants respectifs de $|f|$ et de $|g|$, alors $|f-g|$ et $|fg|$ sont respectivement majorées par $K+K'$ et KK' : $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

A.2 $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ comprenant Id et les fonctions constantes : comme $\mathcal{P}$ est le plus petit d'entre eux, il est inclus dans $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$, et en est donc un sous-anneau.

A.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [a,b] \setminus \{\alpha\}$: grâce à la formule sans nom (applicable sans problème dans le corps des nombres réels)

$$\frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \alpha^{n-1-k},$$

donc la fonction $\tau_{\alpha,\mathrm{Id}^n}$ est une fonction polynomiale sur $[a,b]$ dont on a (peut-être) modifié une valeur, celle en α : cette fonction est bornée. C'est évidemment encore le cas pour Id^0, et, plus généralement, pour toutes les fonctions constantes. Comme $\tau_{\alpha,f} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \tau_{\alpha,\mathrm{Id}^k}$, et comme $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ est un anneau, on en déduit que $\tau_{\alpha,f}$ est également bornée.

Partie B – Condition nécessaire d'algébricité

B.1 Écrivons $\lambda_k = \frac{p_k}{q_k}$, où $(p_k, q_k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. En multipliant les rationnels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ par $\prod_{k=0}^{n} q_k (\neq 0)$, on peut se ramener au cas où ces coefficients sont des entiers relatifs.

B.2 Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$: $q^d |f(p/q) - f(\alpha)| = q^d |f(p/q)| = \left| \sum_{k=0}^{d} \lambda_k p^k q^{d-k} \right|$ est un entier, non nul (car f n'a pas de zéro rationnel) et positif, il vaut au moins 1, d'où

$$|f(p/q) - f(\alpha)| \geqslant 1/q^d.$$

B.3 La fonction $\tau_{f,\alpha}$ est bornée sur tout segment, en particulier sur $[\alpha-1, \alpha+1]$: soit M un réel strictement positif tel que, pour tout $x \in [\alpha-1,\alpha+1]$, $|f(x) - f(\alpha)| \leqslant M|x-\alpha|$. D'après la question précédente, on a, pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p/q \in [\alpha-1,\alpha+1]$:

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geqslant \frac{1}{Mq^d}.$$

Si $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ vérifie $p/q \notin [\alpha-1,\alpha+1]$, alors :

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{q^d}.$$

Ainsi, en posant $c = \min(1, 1/M)$, on a bien $c > 0$, et, pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{c}{q^d}.$$

Partie C – Exemples de nombres transcendants

C.1 La suite (s_n) est clairement croissante, ce qui permet de ramener sa convergence au fait qu'elle soit majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^{k!}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{9}{10^k} = 9\frac{1-(1/10)^{n+1}}{1-1/10} \leqslant 10,$$

donc (s_n) est majorée par 10, puis convergente.

C.2 On suppose α algébrique : d'après la question B.3 (et l'irrationalité de α) on peut considérer $(d, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^d}.$$

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, avec $m > n$. Comme à la question précédente, on a :

$$0 \leqslant s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{10^{k!}} \leqslant \frac{1}{10^{(n+1)!-1}},$$

puis, en faisant tendre m vers l'infini (c'est possible car $m > n$) :

$$0 \leqslant \alpha - s_n \leqslant \frac{1}{10^{(n+1)!-1}}.$$

Or s_n est un nombre rationnel, que l'on peut plus précisément écrire $\frac{p_n}{10^{n!}}$ pour un certain entier p_n (en réduisant au même dénominateur), et on obtient donc :

$$\frac{c}{10^{dn!}} \leqslant \frac{1}{10^{(n+1)!-1}}, \text{ puis } c \leqslant \frac{1}{10^{(n+1)!-1-dn!}}$$

et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient l'absurdité $c \leqslant 0$: α est bien un nombre transcendant.