DM de MPSI2

Corrigé de devoir non surveillé

.1 τ^{-1} est une bijection de $\mathcal{P}$ dans lui-même, puisque c'est le cas de τ. De plus, si M et M' sont deux points quelconques du plan, alors :

$$\tau^{-1}(M)\tau^{-1}(M') = \tau(\tau^{-1}(M))\tau(\tau^{-1}(M')) = MM'$$

(car τ est une isométrie (première égalité), et $\tau \circ \tau^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ (deuxième égalité)).

τ^{-1} est donc bien une isométrie.

.2 Soient x et y deux points de $\overline{D}$ (on a donc $|x| \leqslant 1$ et $|-y| = |y| \leqslant 1$), vérifiant $|x-y| = 2$. L'inégalité triangulaire pour x et $-y$ est nécessairement une égalité, puisque :

$$2 = |x-y| \leqslant |x| + |-y| \leqslant 2.$$

x et $-y$ sont donc situés sur une même demi-droite issue de O. Comme ils sont tous deux sur le cercle unité, ils sont égaux, et O est donc le milieu de x et $y(=-x)$.

.3 Si $w \in \overline{D}$, la négation de $w \in A$ est $w \in B$ (A et B forment une partition de $\overline{D}$). Par application de l'isométrie τ^{-1}, on a :

$$|w - \tau(0)| = |\tau^{-1}(w) - O| = |\tau^{-1}(w)|$$

Or $\tau^{-1}(w) \in A \subset \overline{D}$, puisque par hypothèse, $\tau(A) = B$. En particulier, $|w - \tau(0)| = |\tau^{-1}(w)| \leqslant 1$. Ceci prouve bien par contraposition que la condition $|w - \tau(0)| > 1$ entraîne $w \in A$.

.4 Grâce à la question précédente, il suffit d'exhiber deux points u et v diamétralement opposés, tels que $|u - \tau(O)| > 1$ et $|v - \tau(O)| > 1$. Soit D la perpendiculaire à la droite $(O\tau(O))$ (il s'agit d'une droite, puisque par hypothèse, O et $\tau(O)$ appartiennent respectivement aux deux ensembles disjoints A et B). Cette droite coupe le cercle unité en deux points distincts u et v, diamétralement opposés, et dont le théorème de Pythagore nous assure qu'ils sont distants de plus de 1 de $\tau(O)$ (encore une fois, on utilise $O \neq \tau(O)$). Les extrémités de ce diamètre $[u, v]$ appartiennent donc à A.

.5 On conserve les notations de la question précédente. L'image du diamètre $[u, v]$ est un segment de longueur 2, d'extrémités $\tau(u), \tau(v) \in B \subset \overline{D}$, et de milieu $\tau(O)$ ($\tau(O)$ est sur la médiatrice de ce segment, et à distance 1 des extrémités de ce dernier). La question **1** nous assure pourtant que le milieu de ce segment est O, ce qui aboutit au fait contradictoire que $O = \tau(O)$.