Devoir non surveillé

Problème – Points communs à certaines coniques

Dans tout le problème, P désigne le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de son orientation canonique, et de son repère polaire canonique.

On appellera *conique* toute partie $\mathcal{C}$ (vide ou non) de P ayant une équation de la forme

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0,$$

où A, B, C, D, E, F sont six réels, avec en outre A, B, C non tous nuls.

À tout (A, B, C, D, E, F) élément de $\mathbb{R}^6$ tel que A, B, C soient non tous nuls correspond ainsi une conique $\mathcal{C}$, que l'on pourra noter $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$.

Partie A – Cercle inclus dans une conique

A.1 On suppose que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des réels tels que, pour tout réel θ :

$$(*) \quad \alpha\cos(2\theta) + \beta\sin(2\theta) + \gamma\cos(\theta) + \delta\sin(\theta) + \varepsilon = 0.$$

Montrer qu'alors $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont tous nuls.
Indication : on pourra évaluer $(*)$ pour certaines valeurs de θ, dériver une ou plusieurs fois $(*)$ par rapport à θ, puis évaluer, etc.

A.2 Soit un cercle quelconque du plan P, que l'on supposera de rayon $\rho > 0$. Montrer que si le cercle est inclus dans la conique $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$, alors $A = C$ et $B = 0$. Réciproquement, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A, D, E, F pour que $\mathcal{C}_{(A,0,A,D,E,F)}$ soit un cercle de rayon non nul.

Partie B – Points communs aux éléments de $\mathcal{E}_1$

On note $P' = P \setminus (OY)$ le plan privé de l'axe des ordonnées. On note M_0 un point de coordonnées (x_0, y_0) appartenant à P'.

Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des coniques $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$ satisfaisant aux quatre conditions :

$$M_0 \in \mathcal{C}, A = C, E = 0, F = 0.$$

B.1 Montrer que le seul élément, noté $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{E}_1$ qui soit un cercle a pour équation :

$$x_0(X^2 + Y^2) - (x_0^2 + y_0^2)X = 0.$$

Montrer que $\mathcal{C}_1$ est tangent à l'axe (OY) et indiquer une construction géométrique de son centre.

B.2 Montrer qu'il existe un seul élément, noté $\mathcal{C}_2$, de $\mathcal{E}_1$ qui ait une équation de la forme $BXY + DX = 0$. En indiquer une caractérisation géométrique.

B.3 Déterminer $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. En discuter le nombre d'éléments. En déduire l'ensemble des points communs à tous les éléments de $\mathcal{E}_1$.

Partie C – Une transformation du plan

C.1 On appelle φ l'application de P' dans P qui, au point M de coordonnées polaires (ρ, θ) tel que $\rho \neq 0$ et que pour tout entier relatif k, $\theta \neq (2k+1)\pi/2$, associe M' de coordonnées polaires $\left(\rho\tan\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

Montrer que cette définition de $\varphi(M)$ est *cohérente*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de (ρ, θ) parmi les coordonnées polaires possibles du point M.

C.2 Montrer que $\varphi(M_0)$ appartient à toutes les coniques de $\mathcal{E}_1$. En déduire une construction géométrique de $\varphi(M_0)$ à l'aide d'un cercle et d'une droite.

C.3 Pour $M \in P'$, quand a-t-on $\varphi(M) \in P'$? Que dire alors de $\varphi \circ \varphi(M)$?

C.4

a On appelle γ la courbe d'équation polaire

$$\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \rho = 2a\sin(\theta),$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est donné.

Reconnaître γ.

Montrer que $\gamma' = \varphi(\gamma)$ est la courbe d'équation polaire $\rho = r(\theta)$, où r est l'application $\theta \mapsto 2a\frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$.

b Étudier et tracer cette courbe γ', en :

– réduisant son domaine d'étude (et en précisant le signe de r sur ce domaine).
– étudiant la ou les branches infinies.
– précisant si cet arc présente un point stationnaire.

Partie D – Centres de coniques de $\mathcal{E}_1$ sur une conique

Dans cette question, $M_0(x_0, y_0)$ est un point de P' tel que $|x_0| \neq |y_0|$ et on lui associe $M'_0 = \varphi(M_0)$ comme ci-dessus.

D.1 On fixe ici deux réels non tous nuls λ et μ.

a Montrer qu'il existe un unique réel ν, que l'on calculera, tel que la conique $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ d'équation

$$\lambda(X^2 + Y^2) + 2\mu XY + \nu X = 0$$

appartienne à $\mathcal{E}_1$.

b On suppose ici $|\lambda| \neq |\mu|$. Montrer que $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ a un centre $\Omega_{\lambda,\mu}$ dont on déterminera les coordonnées.

D.2

a Le point M_0 restant fixé, montrer que tous les points $\Omega_{\lambda,\mu}$ (où $|\lambda| \neq |\mu|$) appartiennent à la conique Γ d'équation :

$$X^2 - Y^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2x_0}X + y_0 Y = 0.$$

b Déterminer le type, le centre, les sommets et les axes de Γ.