Devoir non surveillé

Exercice 1 : Polynômes de Bernstein et approximation uniforme

n et k sont deux entiers naturels, et x est un nombre réel.

1

a Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$, que

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$$

et que

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2.$$

b Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$. On cherche ici à majorer la somme

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

2 On propose une première méthode. On note V (resp. W) l'ensemble des entiers $k \in [\![0,n]\!]$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ (resp. $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$), et on pose

$$S_V(x) = \sum_{k \in V} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{et} \quad S_W(x) = \sum_{k \in W} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

a Montrer que $S_V(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b Montrer que $S_W(x) \leqslant \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

c En déduire que $S(x) \leqslant \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

3 On propose une autre méthode : à l'aide de 1.b, montrer que $S(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n+1}$ euclidien canonique.

4 On munit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la borne supérieure (également appelée norme infinie), notée $\|\cdot\|_\infty$, donnée, pour tout $f \in E$, par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

On confondra tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec l'élément de E qu'il induit.

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein de f, noté $B_n(f)$, par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

a Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(f_0)$, où $f_0 : x \mapsto x^2$ est la fonction carré, et en déduire la valeur de $\|B_n(f_0) - f_0\|_\infty$.

b Dans la suite, f désigne un élement de E. Montrer que f est lipschitzienne, et que, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

c Montrer qu'il existe un réel c tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}.$$