Corrigé de devoir non surveillé

Endomorphismes sans racine carrée (Centrale MP 06)

1

a Supposons u nilpotent, mais pourtant $u^n \neq 0$. Soit $x_0 \in E$ tel que $u^n(x_0) \neq 0_E$. On introduit la famille $\mathcal{F} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^n(x_0))$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k(x_0) = 0$. Supposons qu'un des scalaires soit non nul, et posons alors

$$i_0 = \min(k \in [\![0, n]\!], \lambda_k \neq 0) \quad \text{et} \quad j_0 = \max(k \in \mathbb{N}, u^{j_0}(x_0) \neq 0_E\}$$

(j_0 existe et $j_0 \geqslant n \geqslant i_0$ car u est nilpotent et $u^n(x_0) \neq 0_E$).

En appliquant $u^{j_0 - i_0}$ à la combinaison linéaire ci-dessus, on obtient $\lambda_{i_0} u^{j_0}(x_0) = 0_E$, ce qui est absurde car $\lambda_{i_0} \neq 0$ et $u^{j_0}(x_0) \neq 0_E$.

La famille $\mathcal{F}$ est donc libre, ce qui est exclu car une famille de $n+1$ vecteurs de E est liée.

Par conséquent, $\boxed{\text{si } u \text{ est nilpotent, alors } u^n = 0.}$

b On se place dans le cas où $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Supposons l'existence de $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$. On a alors $v^{2n} = 0$, donc v est nilpotent. D'après la question précédente, $v^n = 0$. Par ailleurs, on a $v^{2(n-1)} = u^{n-1} \neq 0$. Ceci impose $n > 2(n-1)$, soit $n < 2$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } n \geqslant 2,\ u^{n-1} \neq 0 \text{ et } u^n = 0, \text{ alors il n'existe pas d'endomorphisme } v \text{ de } E \text{ tel que } v^2 = u.}$

2

a $\boxed{\operatorname{Ker} D \text{ est l'ensemble des fonctions réelles constantes sur } \mathbb{R}.}$

b Comme $V^2 = D$, on a $\operatorname{Ker}(V) \subset \operatorname{Ker}(D)$. $\operatorname{Ker}(D)$ étant une droite vectorielle, $\operatorname{Ker}(V) = \operatorname{Ker}(D)$ ou $\operatorname{Ker}(V) = \{0\}$. Dans ce dernier cas, V serait injective, et, partant, $D(= V^2)$ le serait, ce qui est exclu. Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker} V = \operatorname{Ker} D.}$

c $DV = V^2 V = V^3 = V V^2 = VD$, donc $\boxed{D \text{ et } V \text{ commutent.}}$

d $DV(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}}) = VD(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}}) = V(1) = 0$, donc $V(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}}) \in \operatorname{Ker}(D) = \operatorname{Ker}(V)$, d'où il appert que $D(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}}) = V^2(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}}) = 0$, ce qui est absurde.

$\boxed{\text{Il n'existe donc pas d'endomorphisme } V \text{ de } E \text{ tel que } V^2 = D.}$