Corrigé de devoir non surveillé

Utilisation des symboles de somme et de produit, principe de récurrence

Exercice 1 : Encadrement de Gauss de la factorielle

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{ij} &= \left(\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{i}\right)\left(\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{j}\right)\\
&= \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} i \quad \text{(l'indice j est muet)}\\
&= \prod_{i=1}^{n} i \quad \text{(j est déterminé par la valeur de i)}\\
&= n!
\end{aligned}$$

2 Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part

$$ij - (i+j-1) = ij - i - j + 1 = ((i-1)(j-1) \geqslant 0,$$

et, d'autre part

$$\left(\frac{i+j}{2}\right)^2 - ij = \frac{1}{4}(i^2 + 2ij + j^2 - 4ij) = \left(\frac{i-j}{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

d'où le résultat demandé.

3 En combinant les deux premières questions, il vient

$$\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{i+j-1} \leqslant n! \leqslant \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{\left(\frac{i+j}{2}\right)^2},$$

soit

$$\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{n} \leqslant n! \leqslant \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \left(\frac{n+1}{2}\right),$$

soit enfin, puisque chaque produit comporte n termes, l'encadrement demandé :

$$n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 2 : Un encadrement de $\binom{2n}{n}$

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k &= \prod_{i=1}^{n} (2i) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} 2\right)\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) \\ &= 2^n \, n!\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\left(\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k\right)\left(\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k\right) = \prod_{k=1}^{2n} k = (2n)!,$$

d'où

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{(2n)!}{(2^n \, n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Comme $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, on a bien également

$$\frac{(2n)!}{(2^n \, n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que

$$\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k = \prod_{\substack{3 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k,$$

et que ce dernier produit comporte $(n-1)$ termes.

Par ailleurs, le produit $\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k$ comporte n termes. L'idée est d'observer l'entrelacement des termes de ces deux produits : on a

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{3 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{4 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{2i+1}{2i+2} \leqslant \frac{1}{2},$$

et, de même,

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2n} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{3 \leqslant k \leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{2 \leqslant k \leqslant 2(n-1),\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{2i+1}{2i} \geqslant \frac{1}{2n},$$

d'où, grâce à la première question,

$$\frac{1}{2n} \leqslant \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \leqslant \frac{1}{2},$$

puis l'encadrement voulu.