DM de MPSI2

Corrigé de devoir non surveillé

Sous-groupes à un paramètre dans $\mathrm{GL}(E)$ où E est un plan vectoriel complexe

Partie A – Préliminaires

A.1 On a

$$(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = a^2p + a^2q - (a+b)(ap+aq) + ab(p+q) = 0.$$

On a donc $\mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id}_E) \subset \ker(f - a\mathrm{Id}_E)$ et, puisque $f - a\mathrm{Id}_E$ et $f - b\mathrm{Id}_E$ commutent, $\mathrm{Im}(f - a\mathrm{Id}_E) \subset \ker(f - b\mathrm{Id}_E)$.

Si $x \in \ker(f - a\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - b\mathrm{Id}_E)$, alors $f(x) = ax$ et $f(x) = bx$, puis, a étant différent de b, $x = 0$, donc $\ker(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f - b\mathrm{Id}_4)$ sont en somme directe.

Enfin, pour tout $x \in E$, on a $x = \lambda(f(x) - ax) + \mu(f(x) - bx)$, où $\lambda = -\mu = \frac{1}{b-a}$, donc $x \in \mathrm{Im}(f - a\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id}_E) \subset \ker(f - a\mathrm{Id}_E) + \ker(f - b\mathrm{Id}_E)$, d'où finalement

$$E = \ker(f - a\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - b\mathrm{Id}_E).$$

A.2 $f - a\mathrm{Id}_E = ap + bq - a(p+q) = (b-a)q$ et $f - b\mathrm{Id}_E = (a-b)p$. Comme $a \neq b$ et $(f - a\mathrm{Id}_E)(f - b\mathrm{Id}_E) = 0$, $qp = 0$, et puisque $(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $(f - b\mathrm{Id}_E)$ commutent, $qp = 0$.

De plus, $\mathrm{Id}_E = p + q$, d'où, en composant (à droite ou à gauche) par p, $p = p^2$, et, de même, $q = q^2$: les endomorphismes p et q sont donc des projecteurs.

Ils sont non nuls car f n'est pas une homothétie.

A.3 Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

A.4

a Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On a, d'après ce qui précède

$$(a^n p + b^n q)f^{-n} = (a^n p + b^n q)(a^{-n}p + b^{-n}q) = a^n a^{-n} p^2 + a^n b^{-n} pq + a^{-n} b^n qp + b^n b^{-n} q^2 = p + q = \mathrm{Id}_E,$$

d'où le résultat en multipliant à droite par f^n.

b Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Par un calcul similaire à celui effectué à la question précédente, on trouve

$$\varphi(x)\varphi(y) = (e^{\alpha x}p + e^{\beta x}q)(e^{\alpha y}p + e^{\beta y}q) = e^{\alpha(x+y)}p + e^{\beta(x+y)}q = \varphi(x+y).$$

Cette formule montre, en prenant $y = -x$, que $\varphi(x)$ est bien un automorphisme de E.

φ est donc bien un morphisme de groupes.

Partie B – Sous-groupes à un paramètre dans le cas où E est un plan

B.1 Soit x et y des vecteurs propres associés aux valeurs propres a et b. Comme tout multiple de x est nul ou un vecteur propre pour a, y n'est pas multiple de x, donc (x, y) est libre, puis forme une base du plan E. On considère $F = \mathbb{C}x$ et $G = \mathbb{C}y$, ainsi que le projecteur p sur F parallèlement à G, et son projecteur associé $q = \mathrm{Id}_E - p$. On a bien $p + q = \mathrm{Id}_E$, $f = ap + bq$ et $f^2 = a^2p + b^2q$, puisque ces égalités se vérifient aisément pour les vecteurs de la base (x, y) : on peut donc bien appliquer la première partie.

B.2 Dans ce cas, $f = \lambda\mathrm{Id}_E$, donc, en prenant un « logarithme » complexe α de λ, l'application $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\alpha x)\mathrm{Id}_E$ montre que f vérifie la propriété $\mathcal{K}$.

B.3

a $\ker(g)$ est une droite vectorielle, donc $\mathrm{Im}(g)$ également (par le théorème du rang), dirigée par un vecteur x. Supposons que $g^2 \neq 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(g)$ ne soit pas incluse dans $\ker(g)$: $g(x)$ est alors un vecteur non nul, colinéaire à x, donc il existe $\mu \neq 0$ tel que $g(x) = \mu x$, soit encore $f(x) = (\lambda + \mu)x$, ce qui contredit le fait que λ soit l'unique valeur propre de f : $g^2 = 0$.

b On a $f = \lambda \mathrm{Id}_E + g$, d'où, en appliquant la formule du binôme de Newton (c'est possible car $\lambda \mathrm{Id}_E$ commute avec tout endomorphisme de E), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n = \lambda^n \mathrm{Id}_E + n\lambda^{n-1} g.$$

Ceci nous conduit à poser, pour tout réel x,

$$\varphi(x) = \exp(\alpha x)(\mathrm{Id}_E + \frac{x}{\lambda} g),$$

où $\exp(\alpha) = \lambda$.

Pour tous réels x et y, on a :

$$\varphi(x)\varphi(y) = \left(\exp(\alpha x)(\mathrm{Id}_E + \frac{x}{\lambda} g)\right)\left(\exp(\alpha y)(\mathrm{Id}_E + \frac{y}{\lambda} g)\right) = \exp(\alpha(x+y))(\mathrm{Id}_E + \frac{x+y}{\lambda} g),$$

car $g^2 = 0$, d'où le résultat voulu.