Devoir non surveillé

Problème – Trisection

Partie A – La règle et le compas

La trisection de l'angle, qui consiste à partager un angle donné en trois angles égaux, est l'un des trois grands problèmes de la géométrie grecque antique (avec la duplication du cube et la quadrature du cercle).

Les Grecs cherchaient une manière de trisecter un angle, au moyen d'une règle (non graduée) et d'un compas.

A.1 Montrer que la bissection est possible à la règle et au compas, *i.e.* qu'il est possible de partager un angle en deux angles égaux à l'aide de la règle et du compas : on fera un dessin commenté.

A.2 Montrer que la trisection d'un angle droit est réalisable à l'aide d'une règle et d'un compas.

En 1837, un certain Pierre-Laurent Wantzel (un X !) montre que les efforts des Grecs étaient vains : certains angles, comme (celui de mesure) $\frac{\pi}{3}$, ne sont pas trisectables à la règle et au compas. Les trois parties suivantes montrent comment utiliser des courbes paramétrées pour résoudre ce problème [1], et sont largement indépendantes.

Partie B – La trisectrice de Mac-Laurin

On munit le plan d'un repère orthornormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et, pour tout réel θ, on note $\vec{u}_\theta$ le vecteur $\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j}$.

Soit A le point de coordonnées $(2, 0)$. Pour chaque réel θ, on considère la droite $\mathcal{D}_\theta$ (resp. $\Delta_{3\theta}$) passant par O (resp. par A) et dirigée par $\vec{u}_\theta$ (resp. par $\vec{u}_{3\theta}$).

B.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner des équations cartésiennes de $\mathcal{D}_\theta$ et $\Delta_{3\theta}$.

B.2 Déterminer les réels θ tels que $\mathcal{D}_\theta$ et $\Delta_{3\theta}$ soient sécantes (*i.e.* leur intersection est un singleton), et vérifier qu'alors les coordonnées de leur point d'intersection sont données par :

$$x = \frac{3-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y = tx = t\frac{3-t^2}{1+t^2},$$

où l'on a posé $t = \tan(\theta)$.

Indication : on rappelle que si θ est un réel tel que $\tan(\theta)$ et $\tan(3\theta)$ soient bien définis, alors : $\tan(3\theta) = \frac{\tan(\theta)(3-\tan^2(\theta))}{(1-3\tan^2(\theta))}$.

B.3 Étudier soigneusement l'arc paramétré

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{3-t^2}{1+t^2}, t\frac{3-t^2}{1+t^2}\right) \end{array},$$

en :

a donnant son domaine de définition, sa classe, en expliquant comment réduire l'étude à $\mathbb{R}_+$ (on indiquera clairement comment déduire le support de l'arc du support de l'arc restreint).

b étudiant les fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}_+$, et les éventuels points stationnaires de cet arc restreint.

c étudiant la branche infinie en $+\infty$.

d montrant que l'unique point multiple de l'arc est l'origine (pas de calculs indécents SVP), et en déterminant les tangentes à l'arc en ce point.

e traçant son support.

B.4 Illustrer par un dessin (et un bref commentaire) comment utiliser le support de f (appelé *trisectrice de Mac-Laurin)* pour trisecter $\frac{\pi}{3}$.

---

1. il existe beaucoup d'autres manières de trisecter un angle. Par exemple, les adeptes de l'origami connaissent une méthode très efficace.

Partie C – Le folium de Dürer

On considère l'arc paramétré :

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\cos(t)+\cos(3t), \sin(t)+\sin(3t)) \end{array}$$

dont le support est appelé *folium de Dürer*.

C.1 Montrer que pour tout réel t : $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$, et $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$.

C.2

a Montrer comment réduire l'étude de l'arc au segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ (on expliquera clairement comment déduire le support de l'arc du support de l'arc restreint).

Étudier soigneusement l'arc sur ce segment, en :

b étudiant les fonctions coordonnées et les éventuels points stationnaires de cet arc restreint.

c indiquant les valeurs du paramètre pour lesquelles le point est sur l'un des deux axes de coordonnées, et les tangentes en ces points.

d traçant son support.

C.3 Montrer que $\mathcal{F}$ est d'équation polaire : $\quad r = 2\cos(\frac{\theta}{2})$.

C.4 Soit $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre 2, passant par O, de centre P, et tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OP}}) \equiv \theta_0\ [2\pi]$.

Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ ont un point commun M vérifiant : $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}}) \equiv \frac{1}{3}\theta_0\ [2\pi]$.

C.5 Illustrer comment trisecter $\frac{\pi}{3}$ à l'aide du folium de Dürer.

Partie D – Utilisation d'une conchoïde

Considérons un triangle OBC, tel que $OB = OC = 1$. On se place dans le repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OB}$.

On cherche à trisecter l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$, que l'on suppose aigu. Soit $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ une mesure de cet angle. Soit $\mathcal{D}$ la perpendiculaire à (OB) passant par C. Soit Δ la parallèle à (OB) passant par C.

À un point M de $\mathcal{D}$ on associe le point $c(M) = M'$ de la droite (OM) tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$, de sorte que $MM' = 2$, et $M \in [OM']$.

D.1 Faire un dessin illustrant cette construction.

D.2 Soit a l'abscisse de C dans ce repère. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{D}$, M' appartient à l'ensemble Ω d'équation polaire :

$$r = \frac{a}{\cos(\theta)} + 2,$$

appelé *conchoïde (de Nicomède)* de $\mathcal{D}$ par rapport à O, et de module 2.

D.3 Étudier soigneusement et dessiner Ω, dans le cas où $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, en :

a montrant comment réduire le domaine d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

b montrant que l'arc est régulier, que l'unique point multiple de cet arc restreint est le pôle, et en étudiant les branches infinies.

c traçant son support.

D.4 Soit E un point de $\mathcal{D}$ tel que $E'(= c(E))$ soit sur Δ (on en admet l'existence). Soit θ_1 (resp. θ_2) la mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}})$ (resp. de $(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC}})$) dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a Soit F le milieu de $[EE']$. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{E'C}, \overrightarrow{E'E}})$ est de mesure d'angle θ_1, et que $(\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FE}})$ est de mesure d'angle θ_2.

b En déduire que $\theta_2 = 2\theta_1$.

c Montrer que $\theta_1 = \frac{1}{3}\theta_0$.

D.5 Compléter le dessin effectué en D.3 pour illustrer comment la conchoïde dessinée permet de trisecter $\frac{\pi}{3}$.

Remarque : le problème de la conchoïde est qu'elle est à « usage unique », dans le sens où la conchoïde utilisée dépend de l'angle à trisecter. Cependant, elle a l'avantage d'être traçable par un procédé mécanique :

D.6 Expliquer comment un procédé mécanique, par exemple une règle *customisée*, permet de tracer une partie de Ω pour trisecter $\frac{\pi}{3}$.