Corrigé de devoir non surveillé

Une suite récurrente

1

a On suppose que $a_n = \mathrm{o}(b_n)$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_0$, $|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n$ (un tel N_0 existe car $a_n = \mathrm{o}(b_n)$). Pour tout $n \geqslant N_0$, $B_n \neq 0$ car $(b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$, et on peut écrire

$$\left|\frac{A_n}{B_n}\right| = \left|\frac{\sum_{k=0}^{N_0-1} a_k + \sum_{k=N_0}^{n} a_k}{B_n}\right| \leqslant \left|\frac{\sum_{k=0}^{N_0-1} a_k}{B_n}\right| + \sum_{k=N_0}^{n} \frac{|a_k|}{B_n} \leqslant \left|\frac{\sum_{k=0}^{N_0-1} a_k}{B_n}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sum_{k=N_0}^{n} b_k}{B_n}$$

Or $0 \leqslant \frac{\sum_{k=N_0}^{n} b_k}{B_n} \leqslant 1$ (toujours parce que $(b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$), et, puisque N_0 est fixé et que $\lim_n B_n = +\infty$: $\lim_n \frac{\sum_{k=0}^{N_0-1} a_k}{B_n} = 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_1$, $\left|\frac{\sum_{k=0}^{N_0-1} a_k}{B_n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Posons enfin $N = \max(N_0, N_1)$. Pour tout $n \geqslant N$: $\left|\frac{A_n}{B_n}\right| \leqslant \varepsilon$. ainsi, $\frac{A_n}{B_n} \to_n 0$, c'est-à-dire $A_n = \mathrm{o}(B_n)$.

$\boxed{\text{Si } a_n = \mathrm{o}(b_n), \text{ alors } A_n = \mathrm{o}(B_n).}$

b Supposons que $a_n \sim b_n$, soit $a_n - b_n = \mathrm{o}(b_n)$. En appliquant le résultat précédent aux suites de termes généraux $a_n - b_n$ et b_n, on obtient $A_n - B_n = \mathrm{o}(B_n)$, soit $A_n \sim B_n$.

$\boxed{\text{Si } a_n \sim b_n, \text{ alors } A_n \sim B_n.}$

2

a Comme $T \geqslant \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, la suite (x_n) est croissante (peu importe son terme initial). Dans le cas présent $x_0 \in]-1, 0[$, et comme $]-1, 0[$ est stable par T, (x_n) est à valeurs dans $]-1, 0[$. La suite est croissante et majorée par 0, donc convergente, vers un point fixe de T par continuité de cette fonction. L'unique point fixe de T étant 0, $\boxed{(x_n) \text{ tend vers } 0.}$

Comme $x_{n+1} = x_n(1 + x_n)$ et $\lim_n(1 + x_n) = 1$, $\boxed{\text{les suites } (x_n) \text{ et } (x_{n+1}) \text{ sont équivalentes.}}$

b Comme la suite (x_n) ne s'annule pas, la suite (a_n) est bien définie, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$$

$\boxed{\text{La suite } (b_n) \text{, constante de valeur 1, est donc équivalente à } (a_n).}$

c En appliquant la question **??** aux suites de la question précédente, on peut affirmer que

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_{n+1}} \sim B_n = n + 1 \sim n.$$

Comme $\frac{1}{x_0}$ est un réel fixé et (x_n) est de limite nulle, $A_n \sim -\frac{1}{x_{n+1}} \sim -\frac{1}{x_n}$. Ainsi, $\boxed{x_n \sim -\frac{1}{n}.}$

3

a L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par T, donc tous les termes de (x_n) sont strictement positifs. Cette suite est croissante ($f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \geqslant 0$), donc tend vers sa borne supérieure (éventuellement infinie). En l'espèce, T n'admettant que 0 pour point fixe, $\boxed{(x_n) \text{ est à termes strictement positifs et tend vers } +\infty.}$

b Remarquons déjà que la suite (y_n) est bien définie, car (x_n) est à termes strictement positifs.

Pour tout entier naturel n :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2^{n+1}} (\ln(x_{n+1}) - 2\ln(x_n)) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\ln(x_n^2(1 + \frac{1}{x_n})) - 2\ln(x_n)\right) = 2^{-(n+1)} \ln(1 + 1/x_n)$$

D'une part, $\ln(1 + 1/x_n) > 0$ car $x_n > 0$. D'autre part, la concavité du logarithme permet d'écrire $\ln(1 + u) \leqslant u$, pour tout $u \in]-1, +\infty[$ (le graphe de cette fonction est sous sa tangente en son point d'abscisse 1).

Ainsi, pour tout entier naturel n : $\boxed{0 < y_{n+1} - y_n \leqslant \frac{2^{-(n+1)}}{x_n}.}$

c Soit $n, m \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$0 < y_{n+m+1} - y_n < \sum_{k=0}^{m} (y_{n+k+1} - y_{n+k}) \leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{2^{-(n+k+1)}}{x_{n+k}}$$

Comme (x_n) est croissante, on peut écrire

$$0 < y_{n+m+1} - y_n < \frac{2^{-n}}{x_n} \sum_{k=0}^{m} 2^{-(k+1)} = \frac{2^{-n}}{x_n} \frac{1 - 2^{-(m+1)}}{2(1 - 1/2)} \leqslant \frac{2^{-n}}{x_n}$$

$$\boxed{0 < y_{n+m+1} - y_n \leqslant \frac{2^{-n}}{x_n}}$$

d En fixant $n = 0$ dans la relation obtenue à la question précédente, on constate que $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est majorée. Comme cette suite est en outre croissante, $\boxed{(y_n) \text{ converge vers un certain réel } \lambda. \text{ En outre, } \lambda > 0}$ car (y_n) est croissante et à termes strictement positifs à partir d'un certain rang ((x_n) tend vers $+\infty$).

En fixant n et en faisant tendre m vers $+\infty$ dans la relation ci-dessus, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \lambda - 2^{-n} \ln x_n \leqslant \frac{2^{-n}}{x_n}.$$

Comme (y_n) est strictement croissante, elle n'atteint pas sa borne supérieure λ, et on peut écrire :

$$\boxed{0 < \lambda - 2^{-n} \ln x_n \leqslant \frac{2^{-n}}{x_n}.}$$

e D'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant \lambda(2^n) - \ln x_n \leqslant \frac{1}{x_n}$$

D'après les propriétés de la fonction exponentielle (et notamment sa croissance) :

$$1 \leqslant \frac{e^{\lambda(2^n)}}{x_n} \leqslant e^{\frac{1}{x_n}}$$

Or $\lim_n e^{\frac{1}{x_n}} = 1$ donc $\boxed{x_n \sim e^{\lambda(2^n)}.}$

4 Si $x_0 \in \{-1, 0\}$, la suite est constante de valeur 0 à partir de son deuxième terme, et converge donc vers 0. Si $x_0 \in]-\infty, -1[$, alors $x_1 > 0$, et le travail précédent montre que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.