Devoir non surveillé

Exercice 1 : Idéaux et sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif, $\mathcal{I}$ une partie de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{I}$ est un *idéal* de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{I}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{A}, +)$, stable par multiplication par un élément quelconque de $\mathcal{A}$, *i.e.* :

$$\forall (a, i) \in \mathcal{A} \times \mathcal{I}, \quad ai \in \mathcal{I}.$$

1 Soit $x \in \mathcal{A}$. On pose $x\mathcal{A} = \{xa, a \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $x\mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{I}$ est *principal* s'il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{I} = x\mathcal{A}$.

2 Montrer que tout idéal de $\mathbb{Z}$ est principal.
On travaille maintenant dans l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$.

3 Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{Z}^2$. On pose

$$\mathcal{I}_1 = \{x \in \mathbb{Z}, (x, 0) \in \mathcal{I}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2 = \{y \in \mathbb{Z}, (0, y) \in \mathcal{I}\}.$$

- **a** Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$.
- **b** En déduire que $\mathcal{I}$ est principal.

4 Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, d | y - x\}.$$

- **a** Préciser A_0 et A_1.
- **b** Montrer que pour tout entier naturel d, A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$, distinct de A_0.

- **c** Montrer que $\{n \in \mathbb{N}^*, (0, n) \in A\}$ est non vide. On note d son plus petit élément.
- **d** Montrer que $A = A_d$.