Programme de colles MP2
Semaine 15 (23-27 janvier 2017)

Ensembles finis, dénombrabilité, familles sommables, séries numériques.

Plan de cours

Notion d'ensemble dénombrable, exemples d'ensembles dénombrables et d'ensembles non dénombrables (la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ n'est pas exigible).

Un produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable, une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable (démonstrations non exigibles).

Notion de famille sommable de réels positifs, puis de réels, puis de complexes, et définition des sommes le cas échéant.

Lorsque la famille est indexée par $\mathbb{N}$, lien entre la sommabilité de la famille (u_i), et la convergence absolue de la série $\sum u_i$ (démonstration).

Permutation de l'ensemble des indices d'une famille sommable (démonstration non exigible).

Linéarité de la somme pour les familles sommables (pas de démonstration).

Théorèmes de sommation par paquets : cas réel positif, puis complexe (démonstration hors programme).

Application aux séries doubles : théorèmes de Fubini (démonstration).

Produit de Cauchy. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries numériques absolument convergentes, alors leur produit de cauchy est absolument convergent, et sa somme est le produit des sommes de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ (démonstration).

Exercices

Dénombrabilité, familles sommables.

Révisions sur les séries numériques.

Révisions sur les ensembles finis et le dénombrement : un exo au plus par trinôme (ou binôme) sur le sujet.