Mathématiques MP 2016-2017

Stéphane Flon

Table des matières

Partie 1

Cours

CHAPITRE I

Début d'année

Sommaire

Sauf mention contraire, E, F et G désignent des ensembles.

1. Logique

J'appelle langage formel (ou registre formel), le langage des assertions écrites avec les quantificateurs ($\forall$, $\exists$), les connecteurs logiques (conjonction $\wedge$, disjonction $\vee$, négation $\neg$), etc. Je n'emploie pas de symbole « tel que ».

Rappeler les tables de vérité de la négation, de la conjonction (« et logique ») et de la disjonction (« ou logique ») :

On rappelle notamment que le « ou » logique est inclusif.

Le symbole $\forall$ (resp. $\exists$) permet une sorte de « super-conjonction » (resp. de « super-disjonction »), comme dans l'assertion

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$$

Des assertions sont dites *logiquement équivalentes* si elles ont les mêmes tables de vérité.

Rappeler la table de vérité de l'implication $A \Rightarrow B$:

Rappel (Négation formelle d'une assertion)

Pour reformuler la négation d'une assertion, on peut utiliser les règles suivantes, outre la loi du tiers-exclus (équivalence entre A et $\neg\neg A$) et les lois de De Morgan ($\neg(A \vee B)$ est logiquement équivalent à $(\neg A) \wedge (\neg B)$ et $\neg(A \wedge B)$ est logiquement équivalent à $(\neg A) \vee (\neg B)$:

(1) $\neg(\forall\, x \in \Omega, A(x))$ est logiquement équivalent à $\exists x \in \Omega, \neg A(x)$

(2) $\neg(\exists x \in \Omega, A(x))$ est logiquement équivalent à $\forall\, x \in \Omega, \neg A(x)$

Rappel (Contraposée, ou contraposition)

La *contraposée* de l'implication $A \Rightarrow B$ est $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$. Ces deux assertions sont logiquement équivalentes, et sont aussi logiquement équivalentes à $(\neg A) \vee B$.

Ne pas confondre contraire et contraposée : le contraire de $A \Rightarrow B$ est $\neg(A \Rightarrow B)$, qui est logiquement équivalent à $A \wedge (\neg B)$.

Ne pas confondre une implication $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$.

Rappel (Raisonnement par l'absurde)

Le raisonnement par l'absurde, pour montrer une assertion C, consiste à supposer sa négation, et à en déduire une contradiction (autrement dit, cela consiste à établir l'assertion $(\neg C) \Rightarrow F$ où F désigne la constante « Faux »).
Dans le cas particulier d'une implication $A \Rightarrow B$, raisonner par l'absurde consiste à supposer à la fois A et (pourtant) $\neg B$, puis à en déduire une contradiction.

Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse (également appelé raisonnement par conditions nécessaires et conditions suffisantes), peut se décrire ainsi : on cherche à décrire l'ensemble $\{x \in \Omega,\ \mathcal{R}(x)\}$ des éléments x d'un ensemble Ω, vérifiant une certaine propriété $\mathcal{R}$.
Dans une phase dite d'analyse, on commence par prendre un hypothétique x convenant, puis à cerner, à force de déductions, la ou les valeurs possibles de x.
Une fois les possibilités jugées suffisamment restreintes, on vérifie, dans la phase de synthèse, quelles valeurs, parmi celles imposées par la phase d'analyse, vérifient bien $\mathcal{R}$.

I.a

2. Fonctions, applications

Dans ce cours, les notions de fonction et d'application coïncident.

2.1. Composition des applications

Composée de deux applications.

Exemple (L'identité est neutre pour la composition)

Si f est une application de E dans F, on a $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$.

i

Associativité de la composition.

Puissances n-ièmes d'une fonction

Si f est une application d'un ensemble E dans lui-même et $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n la composée $f \circ \cdots \circ f$ (où f apparaît n fois). Par convention, $f^0 = Id_E$. Ainsi, pour tous entiers p et q, $f^{p+q} = f^p \circ f^q$.
Attention ! Dans certains cas, f^n désigne une composée, dans d'autres, un produit. Le contexte permet souvent de lever l'ambiguïté. S'il ne le permet pas, il s'agit plutôt du produit.
Si on a vraiment besoin à la fois de f^n (au sens du produit) et de l'itérée n fois de f, on peut écrire cette dernière sous la forme $f^{\circ n}$.

I.b

Exemple (Composée ou produit ?)

f est ici une application de E dans E.

(1) Si E est un ensemble ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel abstrait sans structure supplémentaire, f^2 ne peut désigner que $f \circ f \ : x \mapsto f(f(x))$.

(2) Si f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (sans autre hypothèse), f^2 ne peut désigner que $f \times f \ : x \mapsto (f(x))^2$.

(3) Si f est une application de $[0,1]$ dans lui-même, ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f^2 peut désigner $f \circ f$ comme $f \times f$.

ii

2.2. Injectivité, surjectivité

Dans la suite, f est une application de E dans F.

Définition (Injectivité, surjectivité, bijectivité)

On dit que f est *injective* (ou que f est une *injection*) si tout élément de F admet au plus un antécédent dans E par f :

$$\forall x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x').$$

On dit que f est *surjective* (ou que f est une *surjection*) si tout élément de F admet au moins un antécédent :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, y = f(x).$$

On dit que f est *bijective* (ou que f est une *bijection*) de E sur F si tout élément de F admet un unique antécédent, *i.e.* f est injective et surjective :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, \quad y = f(x).$$

I.i

L'injectivité est une conjonction d'unicités, la surjectivité une conjonction d'existences.

Définition (Bijection réciproque)

Soit f une bijection de E sur F. On définit une application de F dans E en associant à tout y de F son unique antécédent par f. Cette application est bijectivé, est appelée *bijection réciproque* de f, et notée f^{-1}.

I.ii

Si f est bijective, on a, pour tout $(x,y) \in E \times F$, l'équivalence :

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Exemple (Bijection réciproque)

(1) La fonction carré définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même, dont la bijection réciproque est appelée fonction racine carrée ;

(2) La fonction cube définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même, dont la bijection réciproque est appelée fonction racine cubique ;

(3) La fonction sinus (resp. cosinus, resp. tangente) n'est pas bijective [a], mais définit par restriction une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (resp. $[0, \pi]$, resp. $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) sur $[-1, 1]$ (resp. $[-1, 1]$, resp. $\mathbb{R}$), et sa bijection réciproque est appelée fonction arcsinus (resp. arccosinus, resp. arctangente).

(4) Si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $y' + 3xy = \sin(x)$, et si a désigne un réel fixé, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathcal{S} & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

est bijective (et c'est même un isomorphisme d'espaces vectoriels).

a. Une fonction périodique n'est jamais injective.

iii

Propriétés élémentaires de la bijection réciproque

Soit f une bijection de E sur F.

(1) L'application f^{-1} est bijective, de bijection réciproque f.

(2) $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

(3) Dans le cas où $E = F$, on définit f^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a alors, pour tous entiers relatifs p et q : $f^{p+q} = f^p \circ f^q$.

I.c

Proposition (Composition et injectivité, surjectivité, bijectivité)

On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

(1) Si f et g sont injectives (resp. surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective) ;

(2) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective :

(3) Si $g \circ g$ est surjective, alors g est surjective ;

I.1

Démonstration

□

Voici une proposition très utile non explicitement au programme

Proposition (Bijectivité et inverse pour la composition)

Si $g : F \to E$ vérifie $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective, et $f^{-1} = g$. I.2

Démonstration

□

Bijection réciproque d'une composée

Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. I.d

2.3. Image directe d'une partie

Définition (Image directe)

Soit $A \subset E$. On appelle *image (directe)* de A par f et on note $f(A)$ le sous-ensemble suivant de F :

$$f(A) \overset{def}{=} \{f(x),\ x \in A\}.$$

L'image $f(E)$ de E par f est appelée l'*image de* f.
On définit ainsi une application $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$, notée abusivement f. I.iii

Caractérisation de l'image d'une partie

Soit A une partie de E, et soit y un élément de F. On a :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x).$$

I.e

Caractérisation de la surjectivité par l'image

$f : E \to F$ est surjective si et seulement si l'image de f est F, *i.e.* $f(E) = F$. I.f

Exemple (Images directes de parties)

(1) $f(\emptyset) = \emptyset$. Si $a \in E$, alors $f(\{a\}) = \{f(a)\}$;
(2) L'image de la fonction sinus est $[-1, 1]$. L'image de la fonction exponentielle est $\mathbb{R}_+^*$, celle de la fonction tangente est $\mathbb{R}$.

iv

Propriétés de l'image directe

- Si A est fini, alors $f(A)$ est fini, et $\mathrm{Card}(f(A)) \leqslant \mathrm{Card}(A)$;
- Si E_1 et E_2 sont deux parties quelconques de E, on a :
  (1) $(E_1 \subset E_2) \Rightarrow (f(E_1) \subset f(E_2))$.
  (2) $f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2)$, et cette inclusion peut être stricte.
  (3) $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$.

I.g

Définition (Restriction)

Si $f : E \to F$ est une application et si $E' \subset E$, alors la *restriction* de f à E' (ou *restriction au départ* de f à E') est l'application de E' dans F, notée $f_{|E'}$, vérifiant : $\forall x \in E', f_{|E'}(x) = f(x)$.

I.iv

On dit que g est un *prolongement* de f si f est une restriction de g.

Définition (Corestriction)

Si $f : E \to F$ est une application et si $f(E) \subset F' \subset F$, alors on peut définir la *corestriction* de f à F' (ou *restriction à l'arrivée* de f à F'), application de E dans F', notée $f^{|F'}$, vérifiant : $\forall x \in E, f^{|F'}(x) = f(x)$.

I.v

Définition (Application induite)

Plus généralement, si $f : E \to F$ est une application, si E' et F' sont des parties respectives de E et de F, et si on a $f(E') \subset F'$, on peut définir $f_{|E'}^{|F'}$, et on dit que cette application (de E' dans F') est *induite* par f.

I.vi

Définition (Partie stable par une application)

Si $f : E \to F$ est une application, et si G est une partie à la fois de E et de F telle que $f(G) \subset G$, on dit que G est *stable* par f. Si tel est le cas, f induit une application de G dans G, parfois notée [a] $f_{||G}$.

[a]. Certains la notent $f_{|G}$, mais je n'emploierai pas cette notation abusive.

I.vii

Exemple (Endomorphisme induit)

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'application f induit une application de F dans F si et seulement si F est stable par f. Si tel est le cas, cette application est aussi linéaire, et appelée endomorphisme de F induit par f.
Par exemple, si D désigne l'endomorphisme de dérivation $f \mapsto f'$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors D induit un endomorphisme sur le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

v

2.4. Image réciproque d'une partie

Définition (Image réciproque (ou préimage)) I.viii

Soit $B \subset F$. On appelle *image réciproque* (ou *préimage*) de B par f et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble $\{x \in E, f(x) \in B\}$ de E.
Ceci définit donc une application $\mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$, notée *abusivement* f^{-1}.

La notation $f^{-1}(\alpha)$ est ambiguë, mais il suffit [1] de voir si α est un élément de F ou une partie de F pour savoir si on considère la bijection réciproque de f (premier cas) ou la préimage d'un ensemble par f (second cas).

Caractérisation de l'image réciproque I.h

On a donc, étant donné $x \in E$, l'équivalence suivante : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Exemple (Préimage) vi

(1) La préimage de $\{0\}$ (resp. $\{2\}$, resp. $[-1, 1]$) par la fonction sinus (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est $\pi\mathbb{Z}$ (resp. $\emptyset$, resp. $\mathbb{R}$).

(2) La préimage de $\{0\}$ (resp. de $\{1\}$, resp. de $[-3, 4]$) par la fonction carré est $\{0\}$ (resp. $\{-1, 1\}$, resp. $[-2, 2]$).

(3) Si $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la préimage de $\{0\}$ par la fonction

$$\begin{array}{rccl} \psi : & E & \to & E \\ & f & \mapsto & f' - f \end{array}$$

est la droite vectorielle $\mathbb{R}\exp$, c'est-à-dire $\{\lambda \exp, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Propriétés de la préimage I.i

L'image réciproque se comporte bien avec les opérations ensemblistes : pour toutes parties F_1 et F_2 de F,

$$f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2),$$
$$f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2),$$
$$f^{-1}(F - F_1) = E - f^{-1}(F_1).$$

3. Relations binaires

3.1. Généralités sur les relations binaires

Définition (Relation binaire) I.ix

On appelle *relation (binaire) sur E* toute partie $\mathcal{R}$ du produit cartésien $E^2 = E \times E$. Pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on dit que x *est en relation* avec y, et on note $x\mathcal{R}y$, lorsque $(x, y) \in \mathcal{R}$.

1. Sauf cas exotique non rencontré en pratique.

Exemple (Relations) vii

(1) Si $\mathcal{R} = E \times E$, la relation binaire obtenue est dite *universelle* (deux éléments quelconques de E sont en relation).
(2) Relation d'égalité $=$.
(3) Relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.
(4) Relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.
(5) Relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{Z}$.
(6) Relation de congruence modulo un entier a dans $\mathbb{Z}$.
(7) Relation de congruence modulo un réel a dans $\mathbb{R}$.

Définition (Propriétés d'une relation) I.x

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite

(1) *réflexive* si chaque élément de E est en relation avec lui-même :
$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x$$
(2) *symétrique* si
$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$
(3) *transitive* si
$$\forall x, y, z \in E, ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$
(4) *antisymétrique* si
$$\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$$

Réécriture de l'antisymétrie I.j

L'antisymétrie de $\mathcal{R}$ peut se reformuler ainsi : pour tout $(x, y) \in E^2$,
$$((x\mathcal{R}y) \wedge (x \neq y)) \Rightarrow (\neg(y\mathcal{R}x)).$$

Éléments en relation I.k

Si $\mathcal{R}$ est symétrique, on peut dire sans ambiguïté que x et y sont ou ne sont pas en relation.

3.2. Relations d'équivalence

3.2.1. Définition et généralités

Définition (Relations d'équivalence) I.xi

Une relation est dite d'*équivalence* lorsqu'elle est réflexive, symétrique, transitive.

Exemple (de relations d'équivalence)

(1) La relation de congruence modulo $a \in \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$, ou modulo $a \in \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
(2) La relation de parallélisme de deux droites dans un espace affine.
(3) Les relations d'équivalence usuelle dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de similitude dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(4) La relation d'équipotence dans un ensemble d'ensembles (qui permet de définir la notion de cardinal d'un ensemble fini).
(5) La relation d'isomorphie sur un ensemble de groupes (ou d'anneaux, de corps, d'espaces vectoriels, etc.)

viii

Définition (Classe d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, et soit $x \in E$.
On appelle *classe d'équivalence* de x dans E pour $\mathcal{R}$, et on note $\overline{x}$, l'ensemble

$$\overline{x} \overset{def}{=} \{y \in E,\ y\mathcal{R}x\}.$$

On appelle *représentant* d'une classe d'équivalence Ω dans E tout $x \in E$ tel que $\Omega = \bar{x}$.
On note souvent $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E.

I.xii

Classes d'équivalence

Étant donnés $x, x' \in E$, on a :

(1) $x \in \overline{x}$.
(2) $x \in \overline{x'}$ si et seulement si $x' \in \overline{x}$.
(3) $\overline{x}$ et $\overline{x'}$ sont soit égales, soit disjointes.

E est donc réunion disjointe de ses différentes classes d'équivalence (on dit que l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E).

I.l

Exemple (Classes d'équivalences)

(1) Pour la relation de congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$, la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$ est

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z},\ b \equiv a[n]\}$$

Par exemple, $\overline{0} = \overline{n} = \overline{-5n} = n\mathbb{Z}$ et $\overline{2} = \{2 + kn, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) On peut définir $\mathbb{K}(X)$ comme l'ensemble des classes d'équivalences sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ pour la relation d'équivalence donnée par

$$(A, B) \sim (P, Q) \Leftrightarrow AQ = BP.$$

ix

3.2.2. Notion de système de représentants

Définition (Système de représentants)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On appelle *système de représentants* de E pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ toute partie X de E telle que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} X & \to & E/\mathcal{R} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

soit bijective.

I.xiii

Cela signifie que pour chaque classe d'équivalence Ω de E pour $\mathcal{R}$, il existe un unique x dans X tel que $\Omega = \overline{x}$.

Exemple (Système de représentants)

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour la relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$, un système de représentants est $[\![0, n-1]\!]$, ou encore $[\![1, n]\!]$. Si n est en outre impair, on peut aussi choisir $[\![-\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}]\!]$.

(2) Pour la relation de congruence modulo 1 dans $\mathbb{R}$, un système de représentants convenable est $[0, 1[$.

(3) Pour la relation de parallélisme des droites dans le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ (sur l'ensemble des droites affines de $\mathcal{P}$), un système de représentants est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathcal{P}$.

(4) Pour la relation d'équivalence permettant de définir $\mathbb{K}(X)$, l'ensemble $\{(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}), A \wedge B = 1 \quad \text{et} \quad B \text{ unitaire}\}$ est un système de représentants.

(5) Pour la relation d'équivalence matricielle usuelle dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, un système de représentants est $\{J_r(n, p), r \in [\![0, \min\{n, p\}]\!]\}$ (avec des notations standard).

(6) Il n'est pas simple de donner un système de représentants pour la relation de similitude matricielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

x

3.2.3. Notion de passage au quotient

Définir naturellement une fonction sur l'ensemble des classes d'équivalence

Étant donné une fonction $f : E \to F$, quand peut-elle définir naturellement une fonction $\overline{f} : E/\mathcal{R} \to F$?
Bien sûr, on souhaite poser, pour toute classe d'équivalence $\Omega = \overline{x}$,

$$\overline{f}(\Omega) \stackrel{def}{=} f(x).$$

Pour que cela définisse une application (*i.e.* qu'à chaque élément de $E/\mathcal{R}$ corresponde une unique valeur), il faut et il suffit que cela ne dépende pas du choix du représentant x de la classe Ω, et ce pour toute classe d'équivalence.
Autrement dit, $\overline{f}$ est bien définie si et seulement si

$$\forall\, x, x' \in E, \quad x\mathcal{R}x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$

Dans un tel cas, on dit que f *passe au quotient*, et qu'elle *induit* $\overline{f}$ sur $E/\mathcal{R}$.

I.m

Exemple (Définition sur un ensemble de classes d'équivalence)

(1) On définit une fonction degré sur $\mathbb{K}(X)$, en posant, pour tout $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$:

$$\deg(F) \stackrel{def}{=} \deg(A) - \deg(B)$$

(2) On définit la trace d'un endomorphisme (d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle) comme la trace de n'importe laquelle des matrices le représentant dans une base donnée. C'est possible car deux matrices semblables ont même trace, *i.e.* la trace passe au quotient pour la relation de similitude matricielle.

(3) On définit le déterminant d'un endomorphisme f comme la quantité $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$, pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$, ce qui revient comme pour le cas de la trace à le définir comme le déterminant de n'importe laquelle des matrices le représentant dans une base donnée.

(4) En revanche, l'application $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \mapsto a_{1,1}$ ne passe pas au quotient pour la relation d'équivalence usuelle matricielle (ni le déterminant pour cette même relation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

xi

Définir une loi de composition interne sur un ensemble de classes d'équivalence

Étant donné une loi de composition interne $\star$ sur un ensemble E, on souhaite en définir une sur $E/\mathcal{R}$. Comme pour la définition d'une fonction, cela sera possible si et seulement si

$$\forall\, x, x', y, y' \in E, \quad (x\mathcal{R}x' \wedge y\mathcal{R}y') \Rightarrow (x \star y)\mathcal{R}(x' \star y')$$

Dans un tel cas, on dira que $\star$ *induit* une loi de composition interne sur $E/\mathcal{R}$.

I.n

Exemple (Loi de composition interne sur un ensemble de classes d'équivalence)

On vérifie que la loi de produit naturelle sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ induit une loi de produit sur $\mathbb{K}(X)$.
Cependant, l'addition naturelle sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ n'est déjà pas une loi de composition interne, et elle ne passe de toute façon pas au quotient.
En fait, l'addition sur $\mathbb{K}(X)$ provient du passage au quotient de l'application

$$\varphi \;:\; \begin{array}{rcl} (\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}))^2 & \to & \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \\ ((P,Q),(R,S)) & \mapsto & (PS + QR, QS) \end{array}$$

xii

3.3. Relations d'ordre

3.3.1. Définition et généralités

Il s'agit d'un cas particulier important de relation binaire.

Définition (Relation d'ordre)

Une *relation d'ordre sur* E est une relation binaire $\mathcal{R}$ réflexive, antisymétrique et transitive.
On dit alors que l'ensemble E est ordonné (par $\mathcal{R}$).

I.xiv

Définition (Ordre strict associé à un ordre)

Si $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E, alors l'*ordre strict* $<$ sur E associé à $\leqslant$ est défini par
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (x < y) \Leftrightarrow ((x \leqslant y) \wedge (x \neq y))$$

I.xv

Exemple (Relation d'ordre)

(1) L'ordre naturel $\leqslant$ (ou usuel) dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$: cet ordre est si naturel qu'il est parfois sous-entendu.

(2) La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.

(3) La relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$ (mais pas dans $\mathbb{Z}$).

(4) Une relation d'ordre strict n'est pas une relation d'ordre (sauf sur l'ensemble vide).

(5) Ordre restreint : si $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E, et si F est une partie de E, alors $\leqslant$ induit une relation d'ordre sur F.

xiii

Définition (Éléments comparables)

Soit $\leqslant$ une relation d'ordre sur E. Deux éléments x et y de E sont dits *comparables* (pour $\leqslant$) si $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.
Si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables, on dit que $\leqslant$ est une relation d'ordre *total*, et que l'ensemble E est *totalement ordonné* par (ou pour) $\leqslant$. Sinon, on dit $\leqslant$ est une relation d'ordre *partiel*.

I.xvi

Exemple (Relations d'ordre total ou partiel)

(1) La relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est bien sûr totale. En revanche, on ne définit en général pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$;

(2) La relation d'inclusion sur l'ensemble des parties d'un ensemble d'au moins deux éléments est une relation d'ordre partiel ;

(3) La divisibilité dans $\mathbb{N}$ définit un ordre partiel ;

(4) On peut définir un ordre sur $\mathbb{R}^2$, en posant :
$$(x,y) \leqslant (x',y') \Leftrightarrow (x \leqslant x') \text{ et } (y \leqslant y')$$
(c'est un ordre partiel appelé *ordre produit*) mais aussi en posant
$$(x,y) \leqslant (x',y') \Leftrightarrow ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y'))$$
Il s'agit d'un ordre total, qui se généralise à $\mathbb{R}^n$, et qui est appelé *ordre lexicographique*.

xiv

3.3.2. Majorant, minorant, ensemble borné

Définition (Majorant, minorant, ensemble borné)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie non vide de E.
On dit qu'un élément x de E est un *majorant* de A dans E (ou qu'il *majore* A) si, pour tout élément de A, on a $a \leqslant x$.
On dit qu'un élément x de E est un *minorant* de A dans E (ou qu'il *minore* A) si, pour tout élément de A, on a $x \leqslant a$.
On dit que A est *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe un majorant (resp. un minorant) de A. On dit que A est *bornée* si elle est majorée et minorée.

I.xvii

Majorant et minorant

En particulier, un majorant ou minorant de A dans E est comparable à tout élément de A, et n'est pas forcément élément de A. Un majorant (ou un minorant) n'a aucune raison d'être unique. On peut aussi observer que la notion de majorant (par exemple) est relative à l'ensemble ordonné E dans lequel on se place.

I.o

Définition (Plus grand ou plus petit élément)

Dans le même contexte, un élément de A est appelé *plus grand élément* (ou élément *maximum*) de A s'il majore A. Un élément de A est appelé *plus petit élément* (ou élément *minimum*) de A s'il minore A. Ces éléments sont notés (s'ils existent) $\max A$ et $\min A$, respectivement.

I.xviii

Plus grand ou plus petit élément

A possède au plus un plus grand élément (et au plus un plus petit élément).

I.p

Exemple (Plus grand ou plus petit élément)

(1) $[1, +\infty[$ admet (dans $\mathbb{R}$) un plus petit élément, et pas de majorant ;
(2) $]-\infty, 2[$ n'admet (dans $\mathbb{R}$) pas de minorant, admet des majorants, mais pas de plus grand élément ;
(3) Dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$, toute partie non vide admet un minimum (mais pas forcément de maximum) ;
(4) Dans $\mathbb{N}^*$ ordonné par la divisibilité, le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$ est 1, mais ne possède pas de plus grand élément ;
(5) Dans $\mathbb{N}$ ordonné par la divisibilité, tout nombre divise 0, 0 est donc plus grand élément pour cette relation dans $\mathbb{N}$;
(6) Toute partie A de $\mathcal{P}(E)$ admet un majorant E (pour l'inclusion) et un minorant $\emptyset$ (dans $\mathcal{P}(E)$), alors que ses éléments ne sont pas forcément comparables.

xv

3.3.3. Borne supérieure, borne inférieure

Définition (Bornes supérieure et inférieure)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et A une partie de E admettant un majorant. On dit que A admet une *borne supérieure dans* E si l'ensemble des majorants de A dans E admet un plus petit élément. Dans ce cas, ce plus petit élément est appelé la *borne supérieure de* A *dans* E, et noté $\sup(A)$.
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et A une partie de E admettant un minorant. On dit que A admet une *borne inférieure dans* E si l'ensemble des minorants de A dans E admet un plus grand élément. Dans ce cas, ce plus grand élément est appelé la *borne inférieure de* A *dans* E, et noté $\inf(A)$.

I.xix

Exemple (Bornes supérieure et inférieure)

(1) Si A admet un plus grand élément $\max(a)$, cet élément est bien sûr la borne supérieure de A. La réciproque est fausse en général, comme le montre l'exemple $[0, 1[$ (dans $\mathbb{R}$) ;
(2) $\{x \in \mathbb{Q}, |x| < \sqrt{2}\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ mais en a une dans $\mathbb{R}$. En fait, $\mathbb{R}$ possède la propriété fondamentale (que nous ne démontrerons pas) que toute partie de non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ;
(3) Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par I. Sa borne supérieure est $\cup_{i \in I} E_i$, sa borne inférieure est $\cap_{i \in I} E_i$;
(4) Soit $m_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ des entiers strictement positifs. La borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble $\{m_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ dans $\mathbb{N}$ est le plus petit commun multiple (resp. le plus grand diviseur) de ces entiers.

xvi

4. Entiers naturels

4.1. Propriétés fondamentales

Nous supposons connu l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Rappel (Propriété fondamentale des entiers naturels)

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

Exemple (Propriété fondamentale des entiers naturels)

Grâce à cette propriété, on définit ou démontre
(1) Le principe de récurrence (voir ci-dessous).
(2) La principalité de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{K}[X]$ (voir le chapitre sur les structures algébriques pour une définition).
(3) La notion d'indice de nilpotence d'un élément nilpotent d'un anneau.

xvii

On déduit de la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$:

Proposition (Partie majorée non vide d'entiers naturels)

Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.

I.3

Démonstration

Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{N}$, et soit Ω l'ensemble des majorants de A (dans $\mathbb{N}$). Par hypothèse, Ω n'est pas vide, et admet donc un plus petit élément b. Il s'agit de montrer que b est un élément de A. Supposer $b \notin A$ conduit aux absurdités $A = \emptyset$ si b est nul, et $b - 1 \in \Omega$ si b n'est pas nul.

□

Exemple (Partie majorée non vide d'entiers naturels)

Grâce à cette proposition, on définit ou démontre :

(1) Le degré d'un polynôme non nul.

(2) La valuation p-adique d'un entier naturel non nul.

(3) L'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme non nul.

(4) Le théorème de la base incomplète.

(5) La proposition sur la dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.

xviii

Notation (Intervalles d'entiers)

Pour tous entiers naturels p, q, où $p \leqslant q$, on pose

$$[\![p, q]\!] = \{n \in \mathbb{N}, p \leqslant n \leqslant q\}$$

On pose également

$$[\![p, +\infty[\![= \{n \in \mathbb{N}, p \leqslant n\}$$

Par convention, $[\![1, 0]\!] = \emptyset$.

I.xx

4.2. Raisonnement par récurrence

Théorème (Raisonnement par récurrence (ou principe de récurrence))

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$ [a] . On suppose que :

(1) $\mathcal{P}(0)$ (est vraie) (*amorçage* ou *initialisation*) ;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*hérédité*).

Pour tout entier naturel n, l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie.

a. on dit aussi que $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un *prédicat* sur $\mathbb{N}$

I.4

Démonstration

On considère l'ensemble Ω des entiers naturels n tels que $\mathcal{P}(n)$ soit fausse. On souhaite montrer que Ω est vide. On raisonne par l'absurde en le supposant non vide : il admet donc un plus petit élément b. La condition d'amorçage montre que b n'est pas nul, et donc $b \geqslant 1$. Or l'entier naturel $b-1$ ne peut être élément de Ω (par définition de b), donc $\mathcal{P}(b-1)$ est vraie, ce qui entraîne, par hérédité, l'absurdité $b \notin \Omega$.

□

Sous une forme plus épurée, le principe de récurrence résulte du fait que l'unique partie de $\mathbb{N}$, comprenant 0, et stable par passage au successeur, est $\mathbb{N}$ elle-même.

Cette récurrence est dite *simple* (ou *faible*), car on déduit $\mathcal{P}(n+1)$ de l'unique assertion $\mathcal{P}(n)$.

Ce principe de récurrence admet de nombreuses variantes : récurrence avec deux prédécesseurs, récurrence forte, etc.

4.3. Suite définie par une récurrence et une condition initiale

Définition (Suite d'éléments de E)

Soit E un ensemble non vide, et A une partie de $\mathbb{N}$. Une *suite d'éléments de E* indexée par A est une famille d'éléments de E indexée par A : c'est donc un élément de E^A (et, d'un autre point de vue, une application de A dans E).

I.xxi

Théorème (Suite récurrente définie par une itératrice)

Soit E un ensemble non vide, et $f : E \to E$ une application. Soit $\alpha \in E$. Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E (indexée par $\mathbb{N}$) vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

I.5

Démonstration

Difficile (voir le cours de MPSI).

□

Définition (Suite récurrente)

Dans le contexte du théorème précédent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite définie par la condition initiale $u_0 = \alpha$ et par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$* (ou l'*itératrice f*). On dit aussi que c'est une suite *récurrente*.

I.xxii

Exemple (Suite récurrente)

Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. La suite (u_n) définie par la condition initiale $u_0 = 1$ et l'itératrice f est bien définie, car $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f et comprend le terme initial u_0.

xix

5. Fonctions trigonométriques

5.1. Domaine de définition et régularité

Les fonctions cosinus, sinus sont définies, continues et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles sont 2π-périodiques. Leur image commune est le segment $[-1;1]$. L'ensemble d'annulation de la fonction cosinus est $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, celui de sinus est $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Elle est continue et indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et π-périodique. Sa restriction à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction cotangente, quotient de la fonction cosinus par la fonction sinus, est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. Elle est continue et indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et π-périodique. Sa restriction à $]0;\pi[$ réalise une bijection strictement décroissante de $]0;\pi[$ sur $\mathbb{R}$.

5.2. Équations simples

On considère deux réels x, y, et on donne les solutions d'équations simples sous forme de tableaux.

x vérifie	$\cos(x)=1$	$\cos(x)=0$	$\cos(x)=\cos(y)$
$\exists k\in\mathbb{Z}$,	$x=2k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=\pm y+2k\pi$

Par exemple, $\cos(x)=\frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$

x vérifie	$\sin(x)=1$	$\sin(x)=0$	$\sin(x)=\sin(y)$
$\exists k\in\mathbb{Z}$,	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$	$x=k\pi$	$x=y+2k\pi$ ou $x=\pi-y+2k\pi$

Par exemple, $\sin(x)=\frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

x vérifie	$\tan(x)=1$	$\tan(x)=0$	$\tan(x)=\tan(y)$
$\exists k\in\mathbb{Z}$,	$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$	$x=k\pi$	$x=y+k\pi$

5.3. Relations fonctionnelles

Les relations suivantes sont valables pour tous réels x et y, sauf mention expresse du contraire.

Les fonctions cosinus et sinus vérifient la relation fondamentale

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1,$$

dont découle la relation suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}, 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

5.3.1. Relations issues de transformations géométriques

Les fonctions sinus et cosinus sont respectivement impaire et paire. Il en résulte que tangente et cotangente sont impaires.

Retenir que l'application $x\mapsto\frac{\pi}{2}-x$ intervertit fonctions sinus et cosinus :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$$

De ceci découlent les formules suivantes :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x),$$
$$\sin(\pi+x)=-\sin(x), \quad \cos(\pi+x)=-\cos(x),$$
$$\sin(\pi-x)=\sin(x), \quad \cos(\pi-x)=-\cos(x).$$

5.3.2. Images trigonométriques d'une somme ou d'une différence

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$
$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$$
$$\sin(x-y)=\sin(x)\cos(y)-\sin(y)\cos(x)$$
$$\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \text{ (lorsque tous ces termes ont un sens)}$$

En particulier,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \text{ (lorsque tous ces termes ont un sens)}$$

5.3.3. Produit de fonctions sinus et cosinus

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

5.3.4. Somme de fonctions sinus et cosinus

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

5.4. Représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de -1

Soit $x \in]-\pi;\pi[$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ceci permet de donner une représentation paramétrique du cercle trigonométrique privé de -1, à l'aide des fonctions rationnelles $t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$, où le paramètre t parcourt $\mathbb{R}$.

5.5. Dérivées successives des fonctions sinus et cosinus

Les formules
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x),$$
permettent d'écrire $\sin' = \sin \circ t$ et $\cos' = \cos \circ t$, où t est la translation dans $\mathbb{R}$ de $\frac{\pi}{2}$ (*i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}$, $t(x) = x + \frac{\pi}{2}$). On en déduit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

5.6. Dérivées de tangente et cotangente

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathrm{cotan}'(x) = -1 - \mathrm{cotan}^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

5.7. La notation exponentielle

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Formule de Moivre. Pour tout réel θ, et tout entier relatif n :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \left(e^{in\theta}\right),$$

soit encore :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Ces formules permettent de retrouver des relations trigonométriques. On retiendra notamment que

- La formule de Moivre permet d'écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynômes en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- Les formules d'Euler (et la formule de Moivre) permettent de « linéariser » les polynômes en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Illustration

CHAPITRE II

Révisions et compléments d'algèbre linéaire

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est (sauf mention contraire) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I est un ensemble.

1. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

1.1. Généralités

Définition (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $+$ d'addition et d'une loi externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda\cdot x \end{array}$$

On dit que $(E,+,\cdot)$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*, si

(1) $(E,+)$ est un groupe commutatif (son élément neutre, noté 0 ou $\overrightarrow{0}$ ou 0_E est appelé *vecteur nul*) ;
(2) $\forall x\in E,\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\quad (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$;
(3) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\forall x\in E,\quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
(4) $\forall x\in E,\quad 1\,x=x$;
(5) $\forall(x,y)\in E^2,\forall\alpha\in\mathbb{K},\quad \alpha\,(x+y)=\alpha\,x+\alpha\,y$

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

II.i

Exemple (Espaces vectoriels)

(1) $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(2) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(3) $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(4) L'ensemble des vecteurs du plan (et de l'espace) constitue un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
(5) Si X est un ensemble, $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations naturelles.
(6) L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(7) Plus généralement, et c'est l'exemple à retenir, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et X un ensemble quelconque, alors $\mathcal{F}(X,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

i

Proposition (Calculs dans un espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous $\alpha\in\mathbb{K}$ et $x\in E$, on a :

(1) $0_K\,x=0_E$.
(2) $\alpha\,0_E=0_E$.
(3) $-(\alpha\,x)=\alpha\,(-x)=(-\alpha)\,x$.
(4) $\alpha\,x=0_E\Rightarrow(\alpha=0\vee x=0_E)$.

II.1

Démonstration

Les trois premiers points résultent du fait que les applications
$$y \in E \mapsto \alpha\, y \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbb{K} \mapsto \beta\, x$$
soient des morphismes de groupes additifs.
Pour le dernier point, supposons que $\alpha x = 0$ et que α soit non nul : il s'agit de montrer que x est nul.
Comme $\mathbb{K}$ est un corps, α est inversible. D'une part, par définition d'un espace vectoriel,
$$\alpha^{-1}(\alpha x) = (\alpha^{-1}\alpha)\, x = 1_{\mathbb{K}}\, x = x,$$
et, d'autre part :
$$\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}\, 0_E = 0_E$$
donc $x = 0_E$, d'où le résultat.

□

Définition (Espace vectoriel produit) II.ii

Si E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, il en est de même pour $E \times F$ muni des lois naturelles. Cet espace vectoriel est appelé *espace vectoriel produit* (de E par F).

1.2. Sous-espaces vectoriels

Définition (Sous-espace vectoriel) II.iii

Soit E' une partie de E. On dit que E' est un *sous-espace vectoriel* de E si
(1) E' est stable par somme ;
(2) E' est stable par la loi de multiplication par un scalaire ;
(3) E' possède 0_E ;
(4) E', muni de ces lois et de cet élément neutre, est un espace vectoriel.

Exemple (Sous-espaces vectoriels) ii

(1) $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces vectoriels *triviaux* de E.
(2) Si G est un sous-espace vectoriel de F et F un sous-espace vectoriel de E, alors G est un sous-espace vectoriel de E. Plus généralement, la relation « être un sous-espace vectoriel de » est une relation d'ordre dans un ensemble donné de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
(3) $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais c'est loin d'être le seul.
(4) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\mathcal{F}(X, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, E)$.
(5) $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, lui-même sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition (Caractérisations des sous-espaces vectoriels)

Soit F une partie de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) F est un sous-espace vectoriel de E.

(2) $0_E \in F$, $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F, \lambda x \in F$ et $\forall x, y \in F, x + y \in F$.

(3) $0_E \in F$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

II.2

On peut remplacer la condition $0_E \in F$ par $F \neq \emptyset$ dans cette proposition.

Proposition (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Si $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors $\cap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

II.3

Démonstration

$\square$

Définition (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)

Soit A une partie de E. il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A (pour la relation d'inclusion). On l'appelle *sous-espace vectoriel engendré par* A (ou par les éléments de A) et on le note $\mathrm{Vect}\, A$ ou $\mathrm{Vect}(A)$.
On définit de même un sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$ engendré par une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E.

II.iv

Le sous-espace $\mathrm{Vect}(A)$ est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant A (grâce à la proposition précédente).

Exemple (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)

(1) Le sous-espace engendré par $\emptyset$ (dans E) est $\{0_E\}$.

(2) Le sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}$ engendré par $\{1\}$ (resp. i) est $\mathbb{R}$ (resp. $i\mathbb{R}$).

(3) Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions s'annulant au moins une fois est $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(4) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\mathrm{Vect}(F) = F$.

iii

Définition (Droite et plan vectoriels)

Si a est un vecteur non nul de E, alors

$$\mathrm{Vect}\{a\}(=\mathrm{Vect}(a)=\mathbb{K}a=\{\lambda a, \lambda\in\mathbb{K}\})$$

s'appelle la *droite vectorielle engendrée par a*.
Si a et b sont deux vecteurs non colinéaires de E (*i.e.* aucun ne peut s'exprimer comme multiple de l'autre par un scalaire), alors $\mathrm{Vect}\{a,b\}$ est le *plan vectoriel* engendré par a et b.

II.v

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, $F_1 \cup F_2$ n'est un sous-espace vectoriel de E que dans le cas évident où $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Définition (Somme de sous-espaces vectoriels)

Soit E un espace vectoriel. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. La *somme* F_1+F_2 de F_1 et F_2 est l'ensemble

$$\{x_1+x_2, \quad (x_1,x_2)\in F_1\times F_2\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

II.vi

On a $\mathrm{Vect}(F_1\cup F_2)=F_1+F_2$.

Cette définition se généralise facilement à un nombre fini de sous-espaces vectoriels. En fait, elle se généralise [1] même à toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E. La somme $\sum_{i\in I} F_i$ est alors égale $\mathrm{Vect}(\cup_{i\in I}F_i)$.

Exemple (Somme de sous-espaces)

(1) Dans un plan vectoriel P, la somme de deux droites vectorielles distinctes est égale à P.
(2) Dans votre cours d'intégration de MPSI, vous avez considéré le sous-espace $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^{[a,b]}$, constitué des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$. En fait, cet espace est la somme de celui des fonctions en escalier et de celui des fonctions continues (sur $[a,b]$).

iv

1.3. Sous-espaces en somme directe, supplémentarité

Si F est un sous-espace vectoriel de E, son complémentaire dans E n'est *jamais* un sous-espace vectoriel de E. De plus, si G est un sous-espace vectoriel de E, F et G ont au moins 0_E en commun.

Définition (Somme directe de deux sous-espaces)

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F_1 et F_2 sont en *somme directe* si

$$\begin{array}{cccc}\varphi : & F_1\times F_2 & \to & E \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & x_1+x_2\end{array}$$

est injective. Dans ce cas, la somme F_1+F_2 peut également se noter $F_1\oplus F_2$.

II.vii

Proposition (Caractérisation d'une somme directe de deux sous-espaces)

F_1 et F_2 sont en somme directe dans E si et seulement si $F_1\cap F_2=\{0_E\}$.

II.4

1. De la même façon que la notion de combinaison linéaire s'étend à une famille infinie, voir la suite.

Démonstration

L'application φ de la définition ci-dessus est linéaire : elle est injective si et seulement si son noyau est trivial. Or son noyau est isomorphe à $F_1 \cap F_2$ via $x \in F_1 \cap F_2 \mapsto (x, -x) \in F_1 \times F_2$.

□

Définition (Sous-espaces vectoriels supplémentaires) II.viii

Deux sous-espaces vectoriels F et F' de E sont dits *supplémentaires* si $F \oplus F' = E$.

F et F' sont donc supplémentaires dans E si et seulement si $F + F' = E$ et $F \cap F' = \{0_E\}$, si et seulement si l'application φ ci-dessus est bijective.

On peut montrer qu'en dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire, *qui n'est presque jamais unique* (seul un sous-espace vectoriel trivial a un supplémentaire unique).

Ne pas confondre *supplémentaire* et *complémentaire* (comme mentionné ci-dessus, cette dernière notion n'a pas d'intérêt dans le cadre des espaces vectoriels, car le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel).

Proposition (Caractérisation de la supplémentarité) II.5

Deux sous-espaces vectoriels F et F' de E sont supplémentaires si et seulement si chaque vecteur x de E s'exprime de façon unique sous la forme $x = x_F + x_{F'}$, où x_F et $x_{F'}$ sont des vecteurs respectifs de F et F'.

Démonstration

La seconde assertion est une reformulation de la bijectivité de φ introduite ci-dessus.

□

Exemple (Sous-espaces supplémentaires) v

(1) Si I est un intervalle centré en 0, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^I$ respectivement constitués des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^I$.

(2) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont supplémentaires.

(3) Si p est un projecteur (vectoriel) de E, $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.

(4) Si s est une symétrie (vectorielle) de E, alors $E = \ker(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \ker(s + \operatorname{Id}_E)$

Définition (Somme directe de plusieurs sous-espaces) II.ix

Plus généralement, on dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ de sous-espaces vectoriels de E est *directe* si l'application

$$S : \begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_p & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array}$$

est injective [a], et on note alors $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ (ou $\oplus_{i \in [\![1,p]\!]} F_i$) leur somme.

a. *i.e.* son noyau est trivial, puisque S est linéaire

En pratique, pour montrer que cette somme est directe, on considère $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$, tel que $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$, et on prouve que tous les x_i sont en fait nuls.

On peut trouver trois sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 d'un espace vectoriel E qui sont en somme directe deux à deux, mais qui ne sont pas en somme directe.

Illustration

Voici l'exemple fondamental de somme directe à retenir (cf. le cours sur la réduction des endomorphismes) :

Exemple (Somme directe de plusieurs sous-espaces)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires distincts deux à deux (où $n \in \mathbb{N}^*$).
Les sous-espaces $\ker(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)$, ..., $\ker(f - \lambda_n \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.

vi

2. Familles de vecteurs

2.1. Généralités, notion de combinaison linéaire

Définition (Sous-famille, surfamille)

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle *sous-famille* de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille d'éléments de E obtenue par restriction de la famille $(x_i)_{i \in I}$ (vue en tant qu'application de I dans E). On appelle *surfamille* de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille dont $(x_i)_{i \in I}$ est une sous-famille.

II.x

Définition (Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est fini. On appelle *combinaison linéaire* de cette famille toute expression de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i,$$

où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires.

II.xi

Définition (Combinaison linéaire d'une famille infinie de vecteurs)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est infini. On appelle *combinaison linéaire* de cette famille toute combinaison linéaire d'une de ses sous-familles finies.

II.xii

Cela revient aussi à prendre une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ à *support fini* (on dit aussi *presque nulle*), *i.e.* telle que l'ensemble

$$\{i \in I,\, \lambda_i \neq 0\},$$

appelé *support* de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$, soit fini, puis à considérer

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

auquel il est facile de donner un sens, puisque dans cette somme, seul un nombre fini de termes sont non nuls.

On dit qu'une combinaison linéaire est à *résultat nul* si le vecteur somme est le vecteur nul.

On dit qu'une combinaison linéaire est *triviale* si tout coefficient est nul.

Une combinaison linéaire triviale est à résultat nul, mais la réciproque est fausse.

Exemple (Combinaison linéaire)

Chaque vecteur du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ s'exprime sous une forme unique comme combinaison linéaire des vecteurs 1 et i (mais aussi $1+i$ et $1-i$ par exemple).
Cela revient d'ailleurs à observer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\,i$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}$ (de même, $\mathbb{R}(1+i)\oplus\mathbb{R}(1-i)=\mathbb{C}$).

vii

Proposition (Sous-espace engendré par une famille)

Soit $(x_i)_{i\in I}\in E^I$. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ de E engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille de vecteurs.

II.6

Démonstration

On revient à la définition de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$, en montrant que l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel de E, contenant $\{x_i, i\in I\}$, et qu'il est contenu dans tout sous-espace vectoriel de E contenant $\{x_i, i\in I\}$. $\square$

Exemple (Sous-espaces engendrés par une partie)

(1) (1) engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, (1) engendre le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et (1) n'engendre pas le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
(2) Une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, non colinéaires, engendre $\mathbb{R}^2$.
(3) Une famille de trois vecteurs non coplanaires de $\mathbb{R}^3$ engendre cet espace vectoriel.
(4) Cependant, une famille de trois vecteurs non colinéaires deux à deux de $\mathbb{R}^3$ n'engendre pas toujours $\mathbb{R}^3$.

viii

Exemple (Sous-espace engendré par une famille infinie)

(1) L'ensemble des suites réelles partout nulles sauf en un indice où elles valent 1 engendre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le sous-espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
(2) De même, dans $\mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Vect}(X^n)_{n\in\mathbb{N}}=\mathbb{K}[X]$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} X^n$ n'est pas un polynôme (cette expression n'a pas de sens pour nous).

ix

2.2. Familles génératrices

Définition (Famille génératrice)

On considère une famille $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ (ou que la partie $\{x_i, i \in I\}$) est *génératrice* (dans E) si

$$\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$$

On dit aussi que $\mathcal{F}$ *engendre* E.

II.xiii

Ainsi, $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ est génératrice (de E) si et seulement si tout vecteur y de E s'exprime (d'au moins une manière) comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille :

$$\forall\, y \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

De même pour une famille infinie.

Toute sur-famille (dans E) d'une famille génératrice de E est génératrice (de E).

2.3. Familles libres

Définition (Famille libre, famille liée)

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ (où $p \in \mathbb{N}^*$) de vecteurs de E est *libre*, ou encore que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont *linéairement indépendants*, si toute combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_p)$ à résultat nul est triviale, *i.e.* :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \right) \Rightarrow (\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad \lambda_i = 0)\,.$$

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est *liée*, ou encore que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont *linéairement dépendants*, si $(x_1, \dots, x_p)$ n'est pas libre, *i.e.* s'il existe une combinaison linéaire non triviale de $(x_1, \dots, x_p)$ à résultat (pourtant) nul :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$$

(*i.e.* il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$).
Une telle combinaison linéaire est appelée *relation de liaison* des vecteurs $x_1, \dots, x_p$.
Une famille infinie $\mathcal{F}$ est dite *libre* si toutes ses sous-familles finies le sont. Cela revient à dire que toute combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ à résultat nul est triviale. Sinon, la famille $\mathcal{F}$ est dite *liée*.

II.xiv

Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Autrement dit, toute surfamille d'une famille liée est liée.

Proposition (Caractérisation des familles liées)

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs est liée si et seulement si l'un (au moins) de ses vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

II.7

Démonstration

□

Proposition (Caractérisation des familles libres)

La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si et seulement si tout vecteur de E s'exprime d'au plus une manière comme combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_p)$.

II.8

Démonstration

S'obtient directement en introduisant

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \to & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^p \lambda_i \, x_i \end{array}$$

En effet : la seconde assertion signifie que φ est injective. Or φ est linéaire, donc φ est injective si et seulement si son noyau est trivial, *i.e.* $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

□

De même pour une famille infinie.

Exemple (Familles libres ou liées)

(1) Une famille constituée d'un unique vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul.
(2) Toute famille comprenant le vecteur nul (resp. dans laquelle un même vecteur apparaît deux fois) est liée.
(3) $(1, i)$ dans $\mathbb{C}$ vu en tant que $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$-espace vectoriel est libre puis liée.
(4) Deux vecteurs forment une famille liée si et seulement si ils sont colinéaires.

x

2.4. Bases

Définition (Base)

Une famille de vecteurs de E est une *base* (de E) si elle est libre et génératrice (dans E).

II.xv

Exemple (Base)

(1) Quelles sont les bases d'une droite vectorielle ? du plan $\mathbb{R}^2$, de l'espace $\mathbb{R}^3$?
(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.
(3) Une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est constituée par les *matrices élémentaires* $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$. Cette base est appelée *base canonique* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
(4) La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}[X]$.

xi

La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$,*i.e.* :

$$\forall y \in E, \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k.$$

Dans ce contexte, les λ_i sont les *coordonnées* (ou *composantes*) de y dans la base $(x_1, \ldots, x_p)$. Plus précisément, λ_i est la composante de y dans $(x_1, \ldots, x_p)$ selon x_i.

De même pour une famille infinie.

Définition (Base adaptée)

Une base est dite *adaptée* à un sous-espace vectoriel F de E si l'une de ses sous-familles est une base de F.
Une base de E est dite *adaptée* à une décomposition en somme directe $E = \oplus_{i \in I} E_i$ (ou à la supplémentarité des sous-espaces si $\mathrm{Card}(I) = 2$) si elle est adaptée à chacun des E_i.

II.xvi

Exemple (Base adaptée)

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est adaptée à la supplémentarité de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (avec des notations usuelles).

xii

2.5. Dimension d'un espace-vectoriel

Considérons un espace vectoriel finiment engendré E (*i.e.* admettant une partie génératrice finie). On montre que cet espace admet une base, que toutes les bases de E ont même cardinal (voir le cours de MPSI), et on appelle *dimension* de E ce cardinal commun.

De plus, on a (voir le cours de MPSI) :

Théorème de la base incomplète

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel finiment engendré, et $(x_1, \ldots, x_m)$ (resp. $(y_1, \ldots, y_n)$) une famille libre (resp. une famille génératrice finie de E) (m et n sont des entiers naturels). Il est possible de compléter la famille $(x_1, \ldots, x_m)$ à l'aide de vecteurs de la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ de manière à former une base de E.

II.9

En corollaire, dans un espace de dimension finie, toute famille libre se complète en une base, et de toute famille génératrice on peut extraire une base.

Un espace vectoriel est de dimension nulle si et seulement si il est réduit au vecteur nul.

Nouvelles définitions d'une droite et d'un plan vectoriel : espaces vectoriels de dimensions 1 et 2 respectivement.

Importance du corps de base : $\mathbb{C}$ est un *plan* vectoriel réel, mais aussi une *droite* vectorielle complexe.

Voilà une proposition très importante en pratique :

Proposition (Caractérisation des bases en dimension finie connue)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n éléments de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

(2) $(x_1, \dots, x_n)$ engendre E.

(3) $(x_1, \dots, x_n)$ est une base.

II.10

Démonstration

Résulte du théorème de la base incomplète, et de la définition de la dimension. $\square$

Bien sûr, cette proposition n'a d'intérêt que si la dimension de E est (finie et) connue. Le plus souvent, on montre la liberté.

La notion de dimension permet de répondre à la question de l'isomorphie pour les espaces vectoriels de dimension finie :

Proposition (Isomorphie et dimension)

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes (*i.e.* il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre) si et seulement si ils ont même dimension.

II.11

Proposition (Dimension d'un produit cartésien)

Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions finies respectives m et n.
L'espace vectoriel produit $E \times F$ est alors de dimension finie, et

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

II.12

Démonstration

On écarte le cas évident où l'un des espaces vectoriels est de dimension nulle.
Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ sont deux bases respectives des espaces vectoriels de dimensions finies E et F $(m, n \in \mathbb{N}^*)$, alors on vérifie que la famille $((e_1, 0), \dots, (e_m, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_n))$ est une base de $E \times F$. En particulier, $\dim E \times F = \dim E + \dim F$. $\square$

Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(E^n) = n \dim(E)$.

Proposition (Dimension d'un sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit F un sous-espace vectoriel de E. L'espace vectoriel F est alors de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, on a l'égalité $\dim E = \dim F$ si et seulement si $E = F$.

II.13

Démonstration

Difficile (voir votre cours de MPSI). □

Exemple (Isomorphisme entre somme et produit en cas de somme directe) xiii

Si F et G sont supplémentaires dans E, alors $E = F \oplus G$ et $F \times G$ sont isomorphes via $(x_F, x_G) \mapsto x_F + x_G$. En particulier, si les espaces vectoriels considérés sont en outre de dimension finie, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

Proposition (Dimension d'un supplémentaire) II.14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire G dans E, et la dimension de tout supplémentaire de F est $\dim E - \dim F$.

Démonstration

Pour l'existence d'un supplémentaire, on peut utiliser le théorème de la base incomplète. Le reste provient de l'exemple ci-dessus. □

Proposition (Dimension d'une somme (Formule de Grassmann)) II.15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On a alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Démonstration

Prendre un supplémentaire H de $F \cap G$ dans F, vérifier que H et G sont supplémentaires dans $F + G$, puis passer aux dimensions. □

Proposition (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie) II.16

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, où E est de dimension finie. Deux quelconques des assertions suivantes entrainent la troisième :

(1) $F + G = E$.

(2) $F \cap G = \{0_E\}$.

(3) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Démonstration

Provient de la formule de Grassmann, et des reformulations des deux premières assertions en $\dim(F+G) = \dim(E)$ et $\dim(F \cap G) = 0$ respectivement.

$\square$

Proposition (Caractérisation de somme directe par les dimensions)

II.17

Soit $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Ces sous-espaces sont en somme directe si et seulement si

$$\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$$

Démonstration

L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F_1 \times \cdots \times F_n & \to & F_1 + \cdots + F_n \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array}$$

est linéaire et surjective : si les F_i sont en somme directe, φ est aussi injective, donc c'est un isomorphisme, et l'égalité voulue en résulte. Sinon, cette application linéaire n'est pas injective, mais est surjective, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \dim(F_i) > \dim(F_1 + \cdots + F_n)$$

$\square$

2.6. Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition (Rang d'une famille finie de vecteurs)

II.xvii

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Le *rang* de la famille $\mathcal{F}$ est la dimension (finie) du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$:

$$\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \dim \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$$

Dans ce contexte, comme $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, le rang r de $\mathcal{F}$ vérifie $0 \leqslant r \leqslant n$. De plus, si E est de dimension finie, le rang r vérifie $r \leqslant \dim E$.

Donner des exemples d'inégalités strictes.

Le rang est nul si et seulement si chacun des vecteurs x_i est nul.

Le rang est égal à 1 si et seulement si au moins un des vecteurs n'est pas nul, et tous les autres vecteurs lui sont colinéaires.

Le rang est égal à deux si et seulement si la famille possède deux vecteurs non colinéaires x_{i_0} et x_{j_0}, et tous les autres x_i sont combinaisons linéaires de ces vecteurs.

En pratique, comment déterminer le rang de $(x_1, \ldots, x_n)$? L'idée naturelle est d'extraire de $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ (si la famille n'est pas nulle), dont le nombre de termes est la dimension de $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, donc le rang de $(x_1, \ldots, x_n)$.

On observe que le rang d'une famille est inchangé si :

(1) On multiplie l'un des vecteurs par un scalaire non nul.

(2) On échange des vecteurs de la famille.

(3) On a ôté à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres (attention aux erreurs de raisonnement lors de l'application de cette observation).

(4) On a supprimé un vecteur combinaison linéaire des autres.

Une fois la famille génératrice $(x_1, \dots, x_n)$ « allégée » en une famille libre, mais toujours génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il suffit d'en calculer le nombre de termes pour obtenir le rang de la famille.

2.7. Écriture matricielle d'une famille de vecteurs dans une base

E et F sont de dimensions finies respectives p et n, et munis de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.

Définition (Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base) II.xviii

Soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_q)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle *matrice associée à la famille de vecteurs* $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de taille $p \times q$ dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur v_j ($j \in [\![1, q]\!]$). Cette matrice est notée $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$.

Dans ce contexte, l'application $\mathcal{V} \mapsto M_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$ est un isomorphisme d'espace vectoriel de E^q dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Exemple (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base) xiv

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice d'un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

3. Applications linéaires

3.1. Définitions

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition (Application linéaire) II.xix

Une application $\phi \ : E \to F$ est dite *linéaire* (ou $\mathbb{K}$-*linéaire*), ou on dit que c'est un *morphisme (d'espaces vectoriels)* si :

(1) $\phi(0_E) = 0_F$

(2) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$

(3) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même est appelée un *endomorphisme*. On note leur ensemble $\mathcal{L}(E)$.
On appelle *isomorphisme* de E sur F toute application linéaire bijective de E sur F.
On appelle *automorphisme* de E tout endomorphisme bijectif de E. Leur ensemble est noté $\mathrm{GL}(E)$.

La première condition résulte en fait de la suivante (et aussi de la dernière).

Proposition (Caractérisation de la linéarité) II.18

$\phi \ : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$$

Si ϕ est linéaire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi(x_k).$$

L'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul. Ainsi, une application n'envoyant pas 0_E sur 0_F ne peut être linéaire. Cette condition nécessaire de linéarité est loin d'être suffisante.

Exemple (Applications linéaires)

(1) L'application nulle $f : x \in E \mapsto 0_F$ montre qu'entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, il existe toujours un morphisme.

(2) L'application identité Id_E est un automorphisme de E.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $x \in E \mapsto \lambda x$, appelée *homothétie de rapport* λ dans (ou de) E, est un endomorphisme de E.

(4) La dérivation $\mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^0(I), f \mapsto f'$ est linéaire.

(5) L'application $f \in \mathcal{C}_{pm}([0,1], \mathbb{R}) \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est (une forme) linéaire.

(6) Soit $g \in \mathbb{R}^I$. L'application $f \mapsto gf$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^I$. Pour quelles fonctions g est-ce également un endomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}^I$?

(7) Soit I un intervalle et $a \in I$. L'application $\varphi : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, f \mapsto f(a)$ est un morphisme d'espaces vectoriels (et d'anneaux), appelé morphisme d'évaluation en a.

(8) Si $f : E \to F$ et $g : E \to G$ sont linéaires, alors $\varphi : E \to F \times G, x \mapsto (f(x), g(x))$ est linéaire.

(9) La seule translation linéaire de E est l'identité (*i.e.* la translation selon le vecteur nul).

xv

Proposition (Espace des applications linéaires sur un espace vectoriel)

L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel.

II.19

Démonstration

On montre que $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

□

Proposition (Composée d'applications linéaires)

La composée licite $v_0 \circ u_0$ ($u_0 \in \mathcal{L}(E,F)$, $v_0 \in \mathcal{L}(F,G)$) de deux applications linéaires est linéaire

II.20

Proposition (Bijection réciproque d'un isomorphisme d'espaces vectoriels)

La bijection réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

II.21

Démonstration

Soit $\phi\ : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels. Fixons $x', y' \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On souhaite montrer que

$$\phi^{-1}(\lambda x' + \mu y') = \lambda\phi^{-1}(x') + \mu\phi^{-1}(y')$$

On vérifie pour ce faire que ces deux vecteurs ont même image par ϕ (qui est injective).

□

Proposition (La composition par une application linéaire donnée est linéaire) II.22

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u_0 \in \mathcal{L}(E, F)$, $v_0 \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors les applications

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{L}(F,G) & \to & \mathcal{L}(E,G) \\ & v & \mapsto & v \circ u_0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \psi : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(E,G) \\ & u & \mapsto & v_0 \circ u \end{array}$$

sont linéaires, *i.e.*

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(F,G), \mathcal{L}(E,G)) \text{ et } \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F), \mathcal{L}(E,G))$$

Démonstration

Les vérifications ne posent pas de problème. On peut cependant noter que la linéarité de u_0 est utile pour montrer que φ est bien définie [a], alors que la linéarité de v_0 intervient pour la bonne définition de ψ, mais aussi pour sa linéarité.

a. Une fois celle-ci établie, on montre la linéarité de φ sans évoquer la linéarité de u_0.

□

3.2. Noyau et image d'une application linéaire

Proposition (Image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par un morphisme) II.23

Soit $f\ : E \to F$ une application linéaire. Pour tout sous-espace vectoriel E' de E, l'image $f(E')$ de E' par f est un sous-espace vectoriel. Pour tout sous-espace vectoriel F' de F, l'image réciproque $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

□

C'est une façon élégante et trop souvent oubliée de prouver qu'un ensemble est un (sous-)espace vectoriel.

Définition (Noyau et image d'une application linéaire)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le *noyau* de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est $f^{-1}(\{0_F\})$. L'*image* de f est $f(E)$, notée $\mathrm{Im}(f)$.

II.xx

Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E, l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition (Caractérisation de l'injectivité par le noyau)

Un morphisme est injectif si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

II.24

Démonstration

$\square$

3.3. Applications linéaires et familles

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p) \in E^p$. On note (abusivement) $f(\mathcal{F})$ la famille $(f(x_1), \ldots, f(x_p))$.

Proposition (Applications linéaires et familles génératrices)

On suppose $\mathcal{F}$ génératrice dans E. La famille $f(\mathcal{F})$ engendre alors $\mathrm{Im}\, f$. En particulier, si f est surjective, la famille $f(\mathcal{F})$ engendre F.

II.25

Démonstration

$\square$

Proposition (Applications linéaires et liberté) II.26

(1) Si la famille $\mathcal{F}$ est liée, alors $f(\mathcal{F})$ est liée.
(2) Si la famille $f(\mathcal{F})$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est libre.
(3) Si f est injective, et si $\mathcal{F}$ est libre, alors $f(\mathcal{F})$ est libre.

Démonstration

$\square$

Voici un résultat fondamental, prouvant que l'on peut construire des morphismes entre espaces vectoriels avec facilité et souplesse :

Proposition (Application linéaire et image d'une base) II.27

On suppose E muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$. Pour toute famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $\forall\, i \in I, f(e_i) = v_i$.

Démonstration

Analyse Soit f une hypothétique telle application. Soit $x \in E$: il existe une (unique) famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$. Par linéarité de f, on a nécessairement

$$f(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$$

Au plus une application est susceptible de convenir, c'est celle donnée par cette formule.
Synthèse La formule ci-dessus définit bien une application de E dans F, par unicité, pour x fixé, de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$.
Pour tout $j \in I$, on a bien $f(e_j) = v_j$: c'est vrai car lorsque $x = e_j$, la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est égale à $(\delta_{i,j})_{i\in I}$.
Enfin, si $x, y \in E$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on vérifie que $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ en revenant à la définition de f et en écrivant $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$.

$\square$

Plus finement, on peut vérifier que

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{L}(E,F) & \to & F^I \\ & f & \mapsto & (f(e_i))_{i\in I} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

De plus, en combinant les derniers résultats :

Proposition (Injectivité, surjectivité et image d'une base) II.28

On reprend le contexte de la proposition précédente.

(1) f est injective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

(2) f est surjective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice dans F.

(3) f est bijective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de F.

Corollaire (Isomorphisme et image d'une base) II.29

f est un isomorphisme si et seulement si il envoie une base donnée de E sur une base de F si et seulement si il envoie toute base de E sur une base de F.

Exemple (Application linéaire définie par image d'une base) xvi

La donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E détermine une application linéaire φ de $\mathbb{K}^p$ dans E, envoyant la base canonique de $\mathbb{K}^p$ sur cette famille.
Le noyau de cette application est l'ensemble des p-uplets de scalaires donnant une combinaison linéaire à résultat nul, l'image est $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
φ est injective (resp. surjective) si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre (resp. génératrice).

Proposition (Application linéaire définie par ses restrictions) II.30

Lorsque $E = \oplus_{i\in I} E_i$, pour toute famille u_i d'applications linéaires de E_i dans F, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout i, u_i soit la restriction de u à E_i.

Démonstration

Les vérifications sont proches de celles effectuées pour une application linéaire définie par l'image d'une base.

$\square$

Plus finement, dans le cadre de cette proposition, on a isomorphisme (d'espaces vectoriels) entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\prod_{i\in I} \mathcal{L}(E_i, F)$ via $f \mapsto (f_{|E_i})_{i\in I}$.

3.4. Rang d'une application linéaire

Définition (Rang d'une application linéaire) II.xxi

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie (par exemple si E ou F est de dimension finie), on dit que f est de rang fini, et on appelle *rang* de f et note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Lemme préparatoire au théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors φ induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} \varphi$ dans E sur $\operatorname{Im} \varphi$.

II.31

Démonstration

Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \varphi$ dans E. On restreint φ à G au départ, et à $\operatorname{Im} \varphi$ à l'arrivée, ce qui donne une application linéaire ψ de G dans $\operatorname{Im} \varphi$. On montre aisément que cette application est surjective et injective : elle réalise donc un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} \varphi$.

□

On utilise surtout ce lemme en dimension finie, mais il est valable en dimension quelconque.
En corollaire immédiat, on a le fameux :

Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\operatorname{rg}(\varphi) + \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E$$

II.32

Démonstration

L'existence d'un supplémentaire G de $\operatorname{Ker} \varphi$ dans E et le lemme précédent donnent immédiatement le résultat.

□

En pratique, cette formule, la *formule du rang*, est très utile, plus que l'isomorphisme du lemme. C'est pour cette raison qu'on a qualifié de lemme la première assertion et de théorème la seconde.

La dimension de F n'intervient pas : il peut très bien ne pas être de dimension finie. En fait, il est facile de s'en rendre compte car en « grossissant » F, on ne change rien au rang de φ et à la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi$ (alors qu'il serait compliqué de « grossir » E).

Même si $E = F$, $\operatorname{Im} \varphi$ et $\operatorname{Ker} \varphi$, sous-espaces vectoriels de E, ne sont pas nécessairement supplémentaires. En revanche, ils le sont si et seulement si ils sont en somme directe (d'après le corollaire II.16 ci-dessus).

En corollaire, on obtient une sorte d'analogue de la proposition sur les applications entre ensembles finis de même cardinal :

Proposition (Isomorphismes en même dimension finie)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de *même* dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est injective ;

(2) f est surjective ;

(3) f est un isomorphisme.

II.33

Démonstration

f est injective (resp. surjective) si et seulement si $\dim\ker(f) = 0$ (resp. $\mathrm{rg}(f) = n$).
La formule du rang ($\mathrm{rg}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = n$) montre donc l'équivalence entre les deux premières assertions. Ces deux assertions sont donc équivalentes à leur conjonction, c'est-à-dire à la dernière.

□

On peut retrouver la proposition II.16, en utilisant la proposition II.33 et en considérant l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (x_F, x_G) & \mapsto & x_F + x_G \end{array}$$

Proposition (Conservation du rang par composition avec un isomorphisme) II.34

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

(1) Si u est un isomorphisme, alors v et $v \circ u$ ont même rang.

(2) Si v est un isomorphisme, alors u et $v \circ u$ ont même rang.

Démonstration

La première assertion est immédiate (il suffit d'ailleurs que u soit surjective pour que $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(v \circ u)$).
La seconde provient du fait que $\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Im}\,u)$, et du fait qu'un isomorphisme envoie un sous-espace vectoriel sur un sous-espace vectoriel de même dimension (il suffit d'ailleurs que v soit injective pour que $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$).

□

On applique très souvent la proposition II.33 dans le cas d'un *endomorphisme* en dimension finie.

Proposition (Inverse unilatéral d'un endomorphisme en dimension finie) II.35

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie. S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $w \in \mathcal{L}(E)$) tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ (resp. $u \circ w = \mathrm{Id}_E$), alors $u \in \mathrm{GL}(E)$, et v (resp. w) est la bijection réciproque de u.

Démonstration

□

Attention, ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie : penser au morphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$, où aux shifts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ce résultat admet une version matricielle :

Proposition (Inverse unilatéral d'une matrice carrée) II.36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) telle que $BA = I_n$ (resp. $AC = I_n$), alors A est inversible, et B (resp. C) est l'inverse de A.

3.5. Applications linéaires et coordonnées

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives m et n non nulles. Se donner une application linéaire f de E dans F revient à donner l'image d'une base $\mathcal{B}$ de E dans F. Si $\mathcal{C}$ est une base de F, nous sommes donc ramenés à donner, pour chacun des m vecteurs de $\mathcal{B}$, ses n coordonnées dans $\mathcal{C}$. Cela signifie que f est déterminée par ces mn nombres (dans un certain ordre).

Plus formellement, on a la :

Proposition (Dimension de $L(E,F)$) II.37

Si E et F sont deux espaces de dimension finies respectives m et n, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie, et :

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = mn$$

Démonstration

On écarte le cas évident où m est nul. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de E. On sait que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{L}(E,F) & \to & F^m \\ & f & \mapsto & (f(e_1), \dots, f(e_m)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'où le résultat.

$\square$

Proposition (Image d'un vecteur par une application linéaire) II.38

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives m et n non nulles, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases respectives de E et F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, soit $\begin{pmatrix} c_{1,k} \\ \vdots \\ c_{n,k} \end{pmatrix}$ le système de coordonnées de $u(e_k)$ dans $\mathcal{C}$.

Soit x un vecteur quelconque de E, de système de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors le système de coordonnées de $y = u(x)$ dans $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, où :

$$\forall\, l \in [\![1, n]\!], \quad \beta_l = \sum_{k=1}^{m} c_{l,k} \alpha_k$$

4. Matrices et applications linéaires

4.1. Écriture matricielle des applications linéaires

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, de dimensions respectives n et p (entiers non nuls), $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F. Soit enfin $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(1) On appelle matrice de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, et on note $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, la matrice de taille $p \times n$, dont la j-ème colonne est le p-uplet des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{C}$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

(2) L'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exemple (Matrices d'une application linéaire)

(1) $M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_p$.

(2) La matrice de l'application partie réelle (de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans la base $(1, i)$ est

(3) La matrice de l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_3[X]$, dans la base canonique, est

(4) Id_E peut ne pas être représentée par I_n dans un couple de bases donné (donner un exemple)

(5) Certains endomorphismes de E distincts de Id_E peuvent être représentés par I_n dans un couple de bases donné (donner un exemple)

(6) La matrice d'une application nulle est toujours nulle.

xvii

Il peut être utile, étant donné une matrice M, de la voir comme représentant un certain morphisme dans une ou plusieurs bases : si le contexte ne nous fait pas préférer une autre interprétation, on considèrera le *morphisme canoniquement associé* à M.

Définition (Morphisme canoniquement associé à une matrice)

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le *morphisme canoniquement associé* à M est l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, représenté par M dans les bases canoniques de ces espaces.

II.xxii

Nous noterons μ_C l'application qui à une matrice associe son morphisme canoniquement associé. En réalité, il arrive que l'on confonde une matrice et le morphisme canoniquement associé, ce qui fait que nous parlerons dans ce cas là d'image et noyau de cette matrice.

Exemple (Morphisme canoniquement associé à une matrice)

(1) Le morphisme canoniquement associé à $0_{n,p}$ est nul.
(2) Le morphisme canoniquement associé à I_n est $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$.
(3) Le morphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ envoie e_1 sur e_2, et réciproquement.
(4) Le morphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ envoie respectivement $e_1(3)$, $e_2(3)$ et $e_3(3)$ sur $e_1(2) + 2e_2(2)$, $2e_1(2)$ et $3e_1(2) + e_2(2)$.
(5) Le morphisme canoniquement associé à une matrice ligne à p colonnes est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$.

xviii

4.2. Construction du produit matriciel

Supposons E, F et G de dimensions respectives q, p et n, de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ et $\mathcal{D} = (g_1, \ldots, g_n)$, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Nous voulons définir un produit matriciel de telle sorte que

$$\boxed{M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)} \qquad (*)$$

Notons $A = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v)$, $B = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, et $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u)$.

Soit $j \in [\![1, q]\!]$: on a $u(e_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} f_k$.

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $v(f_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} g_i$, de sorte que

$$\begin{aligned} v(u(e_j)) &= \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} v(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} g_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \right) g_i. \end{aligned}$$

La formule $(*)$ sera vérifiée si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j},$$

d'où la définition suivante :

Définition (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la *matrice produit* (de A par B) $C = (c_{i,j})$, notée AB, élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, de la manière suivante : pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

II.xxiii

Attention ! La multiplication AB n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Il résulte aisément de la définition du produit matriciel :

Proposition (Produit matriciel) II.39

Le produit matriciel est bilinéaire et associatif.
Linéarité par rapport à la première variable : si A, A' et B sont trois matrices, et si AB et $A'B$ sont bien définis, et λ et λ' sont deux scalaires quelconques, on a :

$$(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B$$

Proposition (Écriture matricielle de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur) II.40

Soit $x \in E$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $y = u(x)$. On note X (resp. Y) le vecteur colonne des composantes de x dans B (resp. de y dans C), et $A = M_{B,C}(u)$. On a alors

$$Y = AX$$

4.3. Transposition

Définition (Transposée) II.xxiv

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice *transposée* de A, notée ${}^tA$ ou A^T, élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par ${}^tA = (c_{i,j})$, où

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], c_{i,j} = a_{j,i}$$

Exemple (Transposées) xix

La transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne, et réciproquement. Une matrice diagonale est invariante par transposition, mais la réciproque est fausse (donner un exemple).

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^{tt}A = A.$

Proposition (La transposition est un isomorphisme) II.41

La transposition est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$$

La transposition est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Bien que la transposition ne soit pas un automorphisme de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dès que $n \geqslant 2$, on a une formule agréable pour la transposée d'un produit :

Proposition (Transposition et produit) II.42

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$

Démonstration

Tout d'abord, ${}^t(AB)$ et ${}^tB{}^tA$ sont de même format $q \times n$. Soit $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$. D'une part,

$$\left[{}^t(AB)\right]_{i,j} = \left[(AB)\right]_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i}$$

D'autre part,

$$\left[({}^tB)({}^tA)\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [{}^tB]_{i,k}[{}^tA]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} a_{j,k},$$

d'où l'égalité matricielle souhaitée. □

En corollaire, si A est une matrice carrée inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} ={}^t (A^{-1})$ (plus généralement, pour tout entier relatif k, $({}^tA)^k ={}^t (A^k)$).

4.4. Matrice de changement de base

Définition (Matrice de passage) II.xxv

On suppose E de dimension n, et on considère deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E. On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On peut la noter $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

La j-ième colonne de $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est constituée des composantes de e'_j dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc aussi la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$. En particulier, une matrice de passage est inversible.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet d'exprimer facilement les vecteurs de $\mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Bien sûr, $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = I_n$.

Proposition (Propriétés des matrices de passage) II.43

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ sont des bases de E, alors

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}$$

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de E, alors $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1}$.

Démonstration

Résulte de l'expression de la composition des applications linéaires par le produit matriciel. □

Proposition (Écriture matricielle d'un changement de base pour un vecteur) II.44

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit x un vecteur de E, et X (resp. X') le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). On a alors :

$$X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} X'$$

Démonstration

Résulte de l'écriture matricielle de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur. □

Ce sont les vecteurs de la *nouvelle* base que l'on a directement comme combinaisons linéaires des vecteurs de l'ancienne base, mais ce sont les *anciennes* coordonnées d'un vecteur que l'on exprime facilement en fonction des nouvelles.

Proposition (Formules de changement de base) II.45

On se donne deux espaces vectoriels E et F, de dimensions respectives non nulles p et n. On se donne deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, et deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de F. On se donne $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit A (resp. B) la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$). On pose $Q = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{C}'}$ et $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. On a alors :

$$B = Q^{-1}AP$$

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, si la base est la même au départ et à l'arrivée, on a donc :

$$B = P^{-1}AP$$

Démonstration

Résulte de l'expression de la composition des applications linéaires par le produit matriciel. □

4.5. Matrices équivalentes

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On dit que B est équivalente à A s'il existe $(Q, P) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que

$$B = Q^{-1}AP$$

Cela définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Deux matrices qui représentent un même morphisme dans des couples de bases sont équivalentes.

Proposition (Caractérisation géométrique de l'équivalence matricielle) II.46

Les matrices A et B sont équivalentes si et seulement si il existe des espaces vectoriels E et F, des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, des bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \quad \text{et} \quad B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$$

Démonstration

Résulte essentiellement de la proposition II.45. □

Proposition (Caractérisation de l'équivalence par le rang) II.47

A et B sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

L'algorithme du pivot de Gauss permet de calculer le rang d'une matrice efficacement. À ce propos, je renvoie à votre cours de MPSI pour réviser les opérations élémentaires sur les matrices et les différents algorithmes du pivot de Gauss.

5. Endomorphismes

5.1. Généralités

La composition dans $\mathcal{L}(E)$ est bilinéaire. $\mathcal{L}(E)$ est un ensemble très structuré : c'est un espace vectoriel, muni de la composition qui est bilinéaire, associative, et possède un élement neutre ((($\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est donc un anneau). On dit que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-*algèbre*. On note souvent la composition multiplicativement (fg désigne $f \circ g$, et $f^2 = f \circ f$ par exemple).

Si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E, on peut calculer $(f+g)^n$. Si f et g commutent, la formule de Newton est valable. En particulier, c'est le cas si f ou g est une homothétie.

Cependant, en général, deux endomorphismes d'un même espace vectoriel ne commutent pas. Donner quelques exemples.

De même, on prendra garde avant d'appliquer la formule de Bernoulli ($f^n - g^n = \dots$).

On fera également attention au fait que $\mathcal{L}(E)$ admet presque toujours des diviseurs de zéro (penser notamment aux éléments nilpotents).

Proposition (Groupe linéaire) II.48

$\mathrm{GL}(E)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Démonstration

C'est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$. □

Définition (Groupe linéaire) II.xxvi

Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ est appelé *groupe linéaire* de E.

En général, ce groupe n'est pas commutatif.

5.2. Écriture matricielle d'un endomorphisme dans une base

Proposition (Algèbre des matrices carrées de taille n) II.49

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, non commutatif dès que $n \geqslant 2$. Cet anneau est canoniquement isomorphe à $(\mathcal{L}(\mathbb{K}^n), +, \circ)$.

L'élément nul (resp. unité) de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est 0_n (resp. I_n).

On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. L'application

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est alors un isomorphisme d'anneaux (et d'espaces vectoriels).

5.3. Matrices semblables

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que B est *semblable* à A s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$B = P^{-1}AP$$

Cela définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Deux matrices qui représentent un même endomorphisme, chacune dans une base, sont semblables.

Proposition (Caractérisation géométrique de la similitude matricielle) II.50

Les matrices A et B sont semblables si et seulement si il existe un espace vectoriel E, des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) \quad \text{et} \quad B = M_{\mathcal{B}'}(f)$$

Contrairement à l'équivalence matricielle, il est délicat de déterminer si deux matrices sont semblables. On peut toutefois remarquer que si A et B sont semblables, alors A et B ont

(1) Même rang.

(2) Même déterminant.

(3) Même trace.

On dit que le rang, le déterminant, et la trace, sont des *invariants de similitude* (nous en découvrirons d'autres en cours d'année).

La réciproque est fausse : des matrices A et B (de même taille n) peuvent avoir mêmes rang, déterminant et trace, sans être semblables.

On peut aussi remarquer que si $B = P^{-1}AP$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$ (et même, pour tout polynôme Q, $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$), de sorte que si A et B sont semblables, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont semblables.

5.4. Trace et déterminant

En dimension finie (non nulle), on peut définir la trace et le déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ le scalaire

$$\sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i}$$

L'application

$$\operatorname{tr} : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \operatorname{tr}(A) \end{array}$$

est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (son noyau est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

De plus, si $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

En particulier, deux matrices semblables ont même trace, ce qui permet de définir la trace d'un endomorphisme f de E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ comme la trace de n'importe quelle matrice le représentant dans une base.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

On a, pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$, tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(fg) = \det(f)\det(g)$ et $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$, mais, en général, $\det(f + g) \neq \det(f) + \det(g)$.

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$

Formule de développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne.

Opérations élémentaires conservant le déterminant.

Comatrice $\operatorname{com}(A)$ d'une matrice carrée A. Formule

$$A\left({}^t\operatorname{com}(A)\right) = \left({}^t\operatorname{com}(A)\right)A = \det(A) I_n,$$

valable pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (même non inversible).

Formules de Cramer.

5.5. Endomorphisme induit

Définition (Sous-espace stable, endomorphisme induit) II.xxvii

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$. Si tel est le cas, l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est linéaire et appelée *endomorphisme de F induit par f*.

Si $E = F \oplus G$, et si F est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, alors, dans une base adaptée à cette supplémentarité, la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

(et si G est aussi stable par f, $B = 0$).

Il faut comprendre que la notion d'endomorphisme induit n'a de sens que pour un sous-espace *stable*.

Il sera donc intéressant d'écrire matriciellement un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base adaptée à des sous-espaces stables $F_1, \dots, F_k$ (en somme directe et de somme E), la matrice obtenue étant alors diagonale par blocs. L'idéal étant que les F_i soient des droites vectorielles (auquel cas la matrice obtenue est diagonale).

5.6. Polynômes d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition (Polynôme en f) II.xxviii

Soit $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On note

$$P(f) \stackrel{def}{=} \sum a_k f^k$$

On appelle *polynôme* en f tout endomorphisme de E de cette forme, *i.e.* un élément de $\mathrm{Vect}(f^k, k \in \mathbb{N})$. On note $\mathbb{K}[f]$ leur ensemble.

L'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres, dont l'image $\mathbb{K}[f]$ est donc également une algèbre.

On définit de même la notion de polynôme d'une matrice carrée.

Exemple (Polynôme de matrice) xx

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 + 1$, alors

$$P(A) = A^2 + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + I_2 = 2A$$

Définition (Polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée) II.xxix

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P *annule* f (resp. A), ou que P est un *polynôme annulateur* de f (resp. de A) si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $P(A) = 0_n$).

Exemple (Polynômes annulateurs)

(1) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $X^2 - 2x + 1$ annule A.

(2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un projecteur si et seulement si $X^2 - X$ annule f.

(3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une symétrie si et seulement si $X^2 - 1$ annule f.

(4) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un endomorphisme nilpotent si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que X^k annule f.

xxi

6. Applications linéaires particulières

6.1. Formes linéaires et hyperplans

Les notions de forme linéaire et d'hyperplan sont au programme, et les formes linéaires coordonnées seront utiles en topologie.

Définition (Formes linéaires, dual)

On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Leur ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé *dual* de E, et noté E' ou E^*.

II.xxx

Lorsque E est de dimension finie, E est isomorphe à son dual.
Une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

Exemple (Formes linéaires)

(1) L'évaluation en a (où $a \in I$) est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$.

(2) Le produit scalaire ou le déterminant (un seul vecteur varie, le ou les autres sont fixés) dans le plan ou dans l'espace est une forme linéaire.

(3) L'application qui à une suite réelle convergente asssocie sa limite est une forme linéaire.

xxii

Définition (Codimension)

La *codimension* d'un sous-espace vectoriel F dans un espace vectoriel E est la dimension de n'importe lequel de ses supplémentaires (lorsque cette dimension commune est finie).

II.xxxi

Lemme pour la définition d'un hyperplan

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) H est de codimension 1 dans E.

(2) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle f sur E.

II.51

Démonstration

Si H est de codimension 1 dans E, on a $E = H \oplus \mathbb{K}x$ pour un certain vecteur non nul x de E. On définit $f \in E^*$ comme étant nulle sur H, et valant 1 en x, puis on vérifie que H en est le noyau.
Réciproquement, si $H = \ker(f)$ où f est une forme linéaire non nulle sur E, on choisit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$ (*i.e.* $x \notin H$), et on vérifie que $E = H \oplus \mathbb{K}x$:
Analyse Soit $y \in E$, supposons que $y = h + \lambda x$, où $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a donc $f(y) = \lambda f(x)$, puis $\lambda = \frac{f(y)}{f(x)}$ (bien défini car $f(x)$ est un scalaire non nul), et enfin $h = y - \frac{f(y)}{f(x)}x$.
Synthèse Réciproquement, on vérifie que ces formules définissent bien des vecteurs de H et de $\mathbb{K}x$ dont la somme vaut y.

$\square$

Définition (Hyperplan) II.xxxii

On dit que H est un *hyperplan* de E lorsque l'une de ces deux conditions équivalentes est vérifiée, et on dit alors que H est défini par f.

Si un sous-espace vectoriel F de E contient un hyperplan H de E, alors $F = E$ ou $F = H$. De façon pompeuse, les hyperplans sont les éléments maximaux pour la relation d'ordre d'inclusion dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels stricts de E.

Pour tout scalaire non nul λ, λf définit encore H. En fait, deux formes linéaires non nulles définissent un même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles (c'est-à-dire liées).

Pour tout vecteur u n'appartenant pas à H, on a $E = H \oplus \mathbb{K}u$.

Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, alors H (sous-espace vectoriel de E) est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

Exemple (Hyperplan) xxiii

(1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x + 2y - z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
(2) $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(3) $\{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}),\ f(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Proposition (Équation d'hyperplan) II.52

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On note $x_1, \ldots, x_n$ les composantes d'un vecteur x de E selon les vecteurs de $\mathcal{B}$. Une partie H de E est un hyperplan (de E) si et seulement si elle admet dans $\mathcal{B}$ une équation du type

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0,$$

où les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas tous nuls.

Démonstration

Introduire la forme linéaire $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ dans un sens, évaluer en x la forme linéaire considérée dans l'autre.

$\square$

Deux équations $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$ (ni les a_i ni les b_i n'étant tous nuls) définissent un même hyperplan si et seulement si il existe un scalaire (non nul) λ tel que $(b_1, \ldots, b_n) = \lambda(a_1, \ldots, a_n)$.

On peut définir la notion d'hyperplan en dimension infinie, en ne conservant que les deux dernières assertions (qui sont bien toujours équivalentes en dimension infinie).

Exemple (Équations d'hyperplans)

(1) $x + 2y = 0$ est une équation d'hyperplan dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une équation de droite.

(2) $x + y + z = 0$ est une équation d'hyperplan dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une équation de plan.

(3) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ est une équation d'hyperplan dans $\mathbb{R}^n$.

xxiv

Dans la suite de cette section, E est supposé de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Définition (Base duale)

On appelle *formes linéaires coordonnées* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ associées à B les formes linéaires sur E données par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$$

Les formes linéaires coordonnées constituent une base B^* de E^*, appelée *base duale* de E.

On utilise souvent la notation $e_i^* \overset{def}{=} \varphi_i$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

II.xxxiii

Démonstration

Justification du fait que $(\varphi_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ soit une base : cette famille est de cardinal n, et $\dim(E^*) = n$: il suffit de montrer la liberté de cette famille. Considérons des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$(\star) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \, \varphi_i = 0$$

Fixons $j \in [\![1,n]\!]$. En évaluant $(\star)$ en e_j, on obtient $\lambda_j = 0$. Ainsi, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre, puis est une base de E^*.

$\square$

Formes linéaires coordonnées

Dans ce contexte, on a, pour tout $x \in E$:

$$x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$$

(le vérifier sur la base B, puis étendre par linéarité).

Autrement dit, pour tout $x \in E$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i^*(x)$ n'est que la i-ème coordonnée x_i de x dans la base B, d'où le terme de formes linéaires coordonnées.

Parler de la forme linéaire coordonnée f_1^* selon un vecteur non nul f_1 n'a pas de sens, car il dépend des autres vecteurs de la base $(f_1, \dots, f_n)$.

II.a

Équations d'hyperplan

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, et soit H son noyau. Puisque $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, il existe un unique n-uplet $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de scalaires tel que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*.$$

On a donc

$$H = \{x \in E, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0\}$$

et on dit que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

est une *équation* de H.

II.b

Système d'équations d'un sous-espace vectoriel

Comme tout sous-espace vectoriel strict F de E est une intersection d'hyperplans, il peut s'écrire comme ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires. Par exemple, la droite $\mathbb{R}(1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ admet le système d'équations :

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

II.c

6.2. Interpolation de Lagrange

Le problème général est le suivant : on considère une fonction $f : I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle (d'au moins deux points), et $n+1$ points distincts $a_0, \dots, a_n$ de I. On cherche un polynôme P de degré au plus n, qui interpole f aux a_i, *i.e.* tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Illustration

Autrement dit, on cherche un antécédent du $(n+1)$-uplet $(f(a_0), \dots, f(a_n))$ par l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$$

Or φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

Par conséquent, le polynôme cherché P est unique, c'est $\varphi^{-1}(f(a_0), \dots, f(a_n))$.
Si on note $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, on peut écrire

$$P = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\varphi^{-1}(e_i)$$

Or, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$P_i \overset{def}{=} \varphi^{-1}(e_i) =$$

de sorte que

$$P = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)P_i =$$

La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est appelée *base d'interpolation de Lagrange* associée au $(n+1)$-uplet $(a_0, \dots, a_n)$. C'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

7. Endomorphismes particuliers

7.1. Projecteurs et symétries

Dans la définition d'un projecteur, il est important de préciser le sous-espace sur lequel on projette, mais aussi le sous-espace (supplémentaire du premier) parallèlement auquel on projette.

Illustration

Supposons que $E = F \oplus G$, soit p (resp. q) le projecteur sur F parallèlement à G (resp. sur G parallèlement à F).

On a

$$F = \operatorname{Im}(p) = \ker(p - \operatorname{Id}_E), \quad G = \ker(p), \quad p + q = \operatorname{Id}_E$$

En particulier,

$$\ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p) = E$$

Exemple (Projecteurs)

(1) Soit $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. L'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à un polynôme associe son reste dans la division euclidienne par B est un projecteur.
(2) Les applications « partie paire » et « partie impaire » de $\mathbb{R}^I$ (où I est un intervalle réel centré en 0) sont des projecteurs.

xxv

Proposition (Caractérisation des projecteurs)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est un projecteur.

(2) $f^2 = f$.

II.53

Démonstration

L'implication (1) ⇒(2) est immédiate. Réciproquement, supposons (2). On vérifie que f est le projecteur sur $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f)$.

□

Proposition (Trace d'un projecteur)

La trace d'un projecteur (en dimension finie) est égale à son rang.

II.54

Démonstration

Écrire la matrice d'un projecteur p dans une base adaptée à la supplémentarité de $\ker(p - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(p)$.

□

Famille de projecteurs associée à une décomposition $E = \oplus_{i\in I} E_i$ (où I est fini) : pour tout $i \in I$, le projecteur d'indice i associé à cette décomposition est le projecteur p_i sur F_i parallèlement à la somme des autres F_j.

7.2. Endomorphismes nilpotents

Définition (Élément nilpotent d'un anneau)

Un élément a d'un anneau A est dit *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = 0$. Dans un tel cas, on appelle *indice de nilpotence* l'entier

$$\min\{k \in \mathbb{N}^*, a^k = 0\}$$

II.xxxiv

Cela s'applique notamment au cas des anneaux $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, permettant de définir les notions d'endomorphisme nilpotent et de matrice nilpotente.

Exemple (Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes)

(1) Toute matrice triangulaire stricte (supérieure ou inférieure) est nilpotente.

(2) La matrice de taille n dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux sur la sur-diagonale qui valent 1 (*i.e.* $\sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$) est nilpotente d'indice n.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente (mais non triangulaire).

(4) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, l'application $\mathbb{R}$-linéaire $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ est nilpotente.

(5) Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la dérivation est nilpotente, mais la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$ n'est pas nilpotente.

xxvi

Proposition (Majoration de l'indice de nilpotence)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et f un endomorphisme nilpotent de E. L'indice de nilpotence p de f est majoré par la dimension de E : $p \leqslant n$.

II.55

Démonstration

(3/2) Soit x un vecteur de E tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrons que $(f^i(x))_{i\in[\![0,p-1]\!]}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![0,p-1]\!]}$ une famille de scalaires telle que

$$(\star) \quad \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i\, f(x)^i = 0$$

Supposons cette famille non nulle, et soit $i_0 \stackrel{def}{=} \min\{i \in [\![0, p-1]\!], \lambda_i \neq 0\}$.
En appliquant f^{p-1-i_0} à $(\star)$, on obtient l'absurdité $\lambda_{i_0} = 0$.
La famille $(f^i(x))_{i\in[\![0,p-1]\!]}$ de p vecteurs de E est libre, donc $p \leqslant n$.
(5/2) Résulte du théorème de Cayley-Hamilton.

□

Ainsi, pour toute matrice nilpotente A de taille n, $A^n = 0_n$.

Proposition (Déterminant et trace d'une matrice nilpotente)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. On a $\det(A) = 0$ et $\operatorname{tr}(A) = 0$.

II.56

Démonstration

A n'est pas inversible (sinon 0_n le serait), donc $\det(A) = 0$.
Il est difficile de montrer le résultat sur la trace sans faire de réduction : pour les 3/2, on peut procéder par récurrence sur n, en montrant (si $n \geqslant 2$) que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0_{n-1,1} & B \end{pmatrix}$, où B est une matrice nilpotente de taille $n-1$.

□

8. Matrices particulières

8.1. Matrice de format particulier

Nous ne revenons pas sur les formats classiques de matrices : matrices carrées, diagonales, triangulaires (supérieure ou inférieure, éventuellement stricte), symétriques, antisymétriques.

On rappelle que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np, et qu'on introduit, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, la matrice $E_{i,j}$, de taille $n \times p$, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i, j), qui vaut 1. On obtient la *base canonique* $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ces matrices sont aussi dites *élémentaires*).

8.2. Matrices par blocs

On définit de manière informelle la notion de matrice par blocs comme une matrice dont les coefficients sont regroupés par blocs matriciels. Par exemple, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est donnée par ses blocs A, B, C, D, et carrée de taille $n + p$.

On définit les notions de matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs : par exemple, lorsque $C = 0_{p,n}$, on dira que M (ci-dessus) est triangulaire supérieure par blocs.

Une matrice par blocs M est souvent carrée, et ses blocs diagonaux souvent carrés : en termes d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E, cela revient à décomposer l'espace ambiant E en somme directe $E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ (et des bases de ces sous-espaces), puis, en introduisant les projections p_i de E sur E_i parallèlement à la somme des autres E_j et les injections canoniques r_i de E_i dans E, à considérer les applications linéaires $p_i \circ u \circ r_j$ (qui correspondra au bloc $M_{i,j}$).

Les blocs non diagonaux de M seront tous nuls si et seulement si chaque E_i est stable par u.

Le résultat principal sur les matrices par blocs est le bon comportement de cette notion avec le produit :

Théorème du produit par blocs II.57

Si les tailles des blocs sont compatibles, le produit de matrices par blocs s'obtient en appliquant la formule du produit matriciel aux blocs de ces matrices.

Démonstration

Admise. $\square$

On a donc, avec des notations évidentes

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

On prendra garde à l'ordre dans les différents produits matriciels (le produit matriciel n'est pas commutatif).

Matrice diagonale par blocs, triangulaire par blocs. Pour une telle matrice, le déterminant est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

CHAPITRE III

Suites et séries numériques

Sommaire

Informellement, une série est une suite (S_n), étudiée non plus selon son terme général S_n, mais selon l'écart entre deux termes consécutifs $u_n = S_n - S_{n-1}$.

S_0 est la position initiale, et u_n est la vitesse, ou l'accroissement, entre les instants $n-1$ et n.

Si on considère qu'une suite modélise un système discret (le temps ne prend que des valeurs entières), le passage aux séries fait étudier l'évolution du processus d'un instant au suivant, par l'écart entre ces deux données.

Nous verrons que le cadre permettant une étude efficace des séries est celui des *séries à terme général positif* : la plupart des résultats portent sur ces séries particulières. La notion de série absolument convergente permet, d'une certaine façon, de se ramener à cette situation.

De nombreuses propriétés des suites se traduisent en des propriétés des séries : la croissance d'une suite se traduit par la positivité du terme général (à partir du rang 1), le théorème des suites adjacentes deviendra le critère spécial des séries alternées, etc.

De plus, de nombreuses suites sont en fait données par des sommes du type $\sum_{k=0}^{n} u_k$, donc par des séries :

- la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$;
- la série $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ des (évaluations des parties régulières des) développements de Taylor d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un point.
- la suite des développements décimaux par défaut d'un réel s'écrit aussi naturellement sous forme d'une série $\sum \frac{a_n}{10^n}$, où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et les a_n appartiennent à $[\![0,9]\!]$ pour tout $n \geqslant 1$.

Enfin, l'analyse asymptotique de u_n nous donnera des renseignements fins sur la série $\sum u_n$. Par exemple, le théorème de Cesàro sera vu comme une conséquence immédiate d'un résultat sur la sommation des relations de comparaison.

Dans le cas où $\sum_{n=0}^{N} u_n$ admet une limite $l \in \mathbb{K}$ lorsque N tend vers l'infini, nous noterons le nombre l sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Nous donnons donc ici un sens à une « somme infinie », comme valeur d'une certaine limite (lorsqu'elle existe).

Nous verrons cependant que non seulement cette notation n'a pas toujours un sens, mais surtout qu'*a priori*, son statut (existence ou non) et son éventuelle valeur dépendent de l'ordre dans lequel on effectue la somme : réindexer les termes de (u_n) peut changer la valeur de la somme.

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

Pour clarifier l'exposition, les séries seront indexées par $\mathbb{N}$ dans les résultats du cours, mais ils s'étendent sans problème à des séries indexées par $\mathbb{N}^*$, ou même $[\![N, \infty[\![$, où $N \in \mathbb{N}$ est fixé. C'est par exemple le cas de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, implicitement indexée par $\mathbb{N}^*$.

1. Généralités sur le corps des nombres réels

1.1. La propriété fondamentale du corps des réels

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est *majorée* (dans $\mathbb{R}$) s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $a \leqslant c$.

Supposons A majorée, et soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que b est la *borne supérieure* de A (dans $\mathbb{R}$) si b est le plus petit des majorants de A, *i.e.* b majore A et pour tout réel c majorant A, on a : $b \leqslant c$. L'ordre sur $\mathbb{R}$ étant total, cela revient à écrire :

$$(\forall\, a \in A, a \leqslant b) \wedge \left(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A, b - \varepsilon < a\right)$$

Illustration

$\mathbb{R}$ se distingue de $\mathbb{Q}$ par la propriété fondamentale suivante :

Fait (Propriété fondamentale du corps des réels)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$).

Corollaire (Propriété de la borne inférieure) III.1

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure (dans $\mathbb{R}$).

Si A est une partie non majorée (resp. non minorée) de $\mathbb{R}$, alors par convention, $\sup(A) = +\infty$ (resp. $\inf(A) = -\infty$).

1.2. Notion de voisinage

On rappelle que la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est obtenue en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux symboles $+\infty$ et $-\infty$, que l'on prolonge l'ordre sur $\mathbb{R}$ en un ordre total sur $\overline{\mathbb{R}}$, et que l'on prolonge partiellement les opérations usuelles à $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition (Voisinage d'un point de la droite numérique achevée) III.i

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
On dit que A est un *voisinage*
– de a (ou que a est *intérieur* à A) si

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset A$$

– de $+\infty$ si

$$\exists M \in \mathbb{R}, [M, +\infty[\subset A$$

– de $-\infty$ si

$$\exists M \in \mathbb{R},]-\infty, M] \subset A$$

Voisinage d'un point

Soit $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Si A est un voisinage de c, et si B contient A, alors B est un voisinage de c.

(2) L'intersection d'un nombre fini de voisinages de c en est encore un

(3) L'intersection d'un nombre quelconque de voisinages de c n'est pas toujours un voisinage de c.

III.a

Exemple (Voisinages)

(1) $\mathbb{R}$ est voisinage de tout réel, de $+\infty$ et de $-\infty$.

(2) $\{-1\} \cup \mathbb{R}_+$ est un voisinage de tout réel strictement positif et de $+\infty$, mais pas de 0, ni de -1.

(3) $]0,1[$ est voisinage de tous ses points.

(4) L'ensemble des points intérieurs à $[0,1]$ (*i.e.* dont $[0,1]$ est un voisinage) est $]0,1[$.

(5) $\mathbb{Z}$ n'est voisinage d'aucun de ses points.

i

Proposition (La droite achevée est séparée)

Deux éléments distincts quelconques de $\overline{\mathbb{R}}$ admettent des voisinages disjoints.

III.2

Illustration

Définition (Voisinage d'un nombre complexe)

Soit A une partie de $\mathbb{C}$, et $a \in \mathbb{C}$.
On dit que A est un *voisinage* de a s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\{z \in \mathbb{C}, |z-a| \leqslant \varepsilon\} \subset A$$

III.ii

Illustration

Proposition (Le corps des nombres complexes est séparé) — III.3

Deux nombres complexes distincts admettent des voisinages disjoints.

Nous noterons $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.

1.3. Convexité, densité

Définition (Partie réelle convexe) — III.iii

Une partie X de $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si elle contient le segment joignant deux quelconques de ses points.

Proposition (Intervalles et convexes) — III.4

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$.

Démonstration

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe : le montrer pour $[a, b[$.

Réciproquement, soit I un convexe de $\mathbb{R}$. Si I est de cardinal 0 ou 1, c'est un intervalle : supposons que I comprenne au moins deux éléments. Si I est borné, soit $a = \inf I$ et $b = \sup I$. On a $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. On va montrer que $]a, b[\subset I$. Soit $c \in]a, b[$: par définition de a et de b, il existe deux éléments x et y de I tels que $x < c < y$. Par convexité de I, $c \in [x, y] \subset I$. On a donc $]a, b[\subset I \subset [a, b]$: dans les quatre cas possibles, I est bien un intervalle.
Si par exemple I est minoré et non majoré, soit $a = \inf I$. On montre que $]a, +\infty[\subset I$. Soit $c \in]a, +\infty[$: il existe deux éléments x et y de I tels que $x < c < y$. Par convexité de I, $c \in I$. Dès lors, I vaut $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$: dans tous les cas, c'est un intervalle.
De même dans les autres cas.

$\square$

Définition (Partie dense de réels) — III.iv

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit A *dense* dans $\mathbb{R}$ si A rencontre tout intervalle ouvert non vide.

A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, où $a < b$, $A \cap]a, b[\neq \emptyset$, ou encore : entre deux réels quelconques, on peut trouver un élément de A.

Illustration

A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi pour tout réel a, A rencontre tout voisinage de a, *i.e.*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall V \in \mathcal{V}_a, A \cap V \neq \emptyset$$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Rappels et compléments sur les suites numériques

2.1. Généralités sur les suites

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ (indexées par $\mathbb{N}$) est à la fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un anneau (on parlera plus tard de $\mathbb{K}$-algèbre) pour les lois usuelles. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il est en outre muni d'un ordre naturel partiel compatible avec l'addition et le produit :

Définition (Ordre sur les suites réelles) III.v

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On écrit $u \leqslant v$ lorsque $u_n \leqslant v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notions de suites réelles majorées, minorées, bornées, de suites monotones, strictement monotones.

Proposition (Caractérisation de bornitude des suites réelles) III.5

Une suite réelle u est bornée si et seulement si $|u|$ est majorée.

Une suite complexe (u_n) est dite *bornée* si la suite réelle $(|u_n|)$ est majorée.
Les notions de minoration, majoration, monotonie, n'ont de sens que pour des suites réelles.
Une suite complexe u est bornée si et seulement si les suites réelles $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ le sont.

2.2. Limite d'une suite

Définition (Limite d'une suite numérique) III.vi

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* (ou *tend*) vers un scalaire $l \in \mathbb{K}$ lorsque

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N) \Rightarrow (|u_n - l| \leqslant \varepsilon).$$

S'il existe un scalaire l tel que la suite converge vers l, on dit que la suite est *convergente*, ou encore qu'elle *admet une limite finie*. Une suite non convergente est dite *divergente*.

Illustration

Définition (Divergence d'une suite réelle vers plus ou moins l'infini)

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* (ou *tend*) vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

$$(\text{resp. } \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant M)$$

III.vii

La divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'a de sens que pour une suite réelle.

Dans le cas où la suite u tend vers une limite l (éventuellement infinie dans le cas réel), on note indifféremment $\lim\limits_{n\infty} u_n = l$,$u_n \to_{n\infty} l$, $u \to l$, ou encore $\lim u = l$.

Limite d'une suite et voisinages

Soit u une suite réelle (resp. complexe) et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$). La suite u tend vers a si et seulement si pour tout voisinage V de a dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$), tous les termes de u appartiennent à V sauf pour un nombre fini d'indices (soit encore : tous les termes de u appartiennent à V à partir d'un certain rang).

III.b

Une suite réelle admet au plus une limite (en vertu de III.2 page 83), mais certaines suites réelles n'admettent pas de limite.

De même, une suite complexe admet au plus une limite (en vertu de III.3).

L'emploi de la notation $\lim u$ présuppose que cette limite existe : il faut l'employer avec précaution.

Proposition (Toute suite convergente est bornée)

Toute suite numérique convergente est bornée.

III.6

Proposition (Suite convergeant vers un réel strictement positif)

Toute suite de nombres réels, convergeant vers un nombre réel strictement positif, est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

III.7

À plus forte raison, si u est une suite réelle convergeant vers $l > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Proposition (De l'ordre de deux suites à l'ordre de leurs limites)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, de limites respectives l et l' dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose $u \leqslant v$. On a alors $l \leqslant l'$.

III.8

Une inégalité stricte ne nous apporterait rien : si $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la conclusion est toujours $l \leqslant l'$, l'égalité pouvant se produire :

Le cas le plus utile est celui où l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) est constante (souvent la constante nulle). Si par exemple (u_n) est majorée par M et de limite l, alors $l \leqslant M$ (notez qu'avoir plus précisément $u_n < M$ pour tout n conduirait à la même conclusion)

Théorème d'encadrement (principe des gendarmes)

Soient u, v, w trois suites réelles. On suppose que $v \leqslant u \leqslant w$, et que v et w convergent vers un même réel a. La suite u est alors convergente, vers a. III.9

Notez que la convergence de u ne fait pas partie des hypothèses.

Proposition (Ordre et limites infinies)

Soit u et v deux suites réelles. On suppose $u \leqslant v$. Si u tend vers $+\infty$ (resp. v tend vers $-\infty$), alors v tend vers $+\infty$ (resp. u tend vers $-\infty$). III.10

Les propositions III.7, III.8 et III.10, ainsi que le théorème III.9 n'ont pas d'analogues dans le cas de suites complexes, car ces résultats sont liés aux propriétés de l'ordre sur $\mathbb{R}$.

Théorème d'opérations algébriques sur les suites (cas réel et complexe).

2.3. Suites monotones. Théorèmes des segments emboîtés.

Cette sous-section ne concerne que des suites réelles.

Théorème de la limite monotone (pour les suites)

Soit u une suite réelle croissante. Si cette suite est majorée, alors elle est convergente, vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Sinon, elle tend vers $+\infty$.
Soit u est une suite réelle décroissante. Si cette suite est minorée, elle est convergente, vers $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Sinon, elle tend vers $-\infty$. III.11

Démonstration

Supposons u croissante non majorée. Si M est un réel fixé, il existe donc un entier N tel que $u_N \geqslant M$. Par croissance de u, on aura $u_n \geqslant M$ à partir du rang N : u diverge vers $+\infty$.
Supposons u croissante majorée, et soit l la borne supérieure de son image (l est réelle). Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de l, il existe un entier N tel que $l - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant l$. À partir du rang N, on aura $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$, par croissance de u (et parce que l majore u).
Le cas où u est décroissante se ramène au précédent en considérant $-u$. □

Définition (Suites adjacentes)

Deux suites réelles u et v sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si leur différence tend vers 0 III.viii

Lemme (Suites adjacentes)

Supposons u croissante, v décroissante, et $u - v$ de limite nulle. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. III.12

Démonstration

La suite $u-v$ est croissante de limite nulle, donc $u-v$ est majorée par sa borne supérieure 0 : $u-v \leqslant 0$.

□

Théorème des suites adjacentes III.13

Soit u et v deux suites adjacentes, avec u croissante et v décroissante. Les suites u et v sont alors convergentes, et ont même limite l. De plus l est l'unique réel x tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant x \leqslant v_n$$

On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - l| \leqslant |u_n - v_n| \quad \text{et} \quad |v_n - l| \leqslant |u_n - v_n|$$

Démonstration

La suite u (resp. v) est croissante majorée (par v_0) (resp. décroissante minorée (par u_0)). Chacune de ces suites est donc convergente, mettons vers l_u et l_v respectivement. Comme $\lim(v-u) = 0$, $l_u = l_v$.
l vérifie bien les inégalités centrales de l'énoncé. Réciproquement, par passage à la limite dans ces inégalités, seul l peut vérifier ces inégalités.
Les dernières inégalités proviennent simplement de $u_n \leqslant l \leqslant v_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

□

Illustration

Théorème des segments emboîtés III.14

On considère une suite $(I_n)_n$ de segments de $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite est décroissante pour l'inclusion, et que la suite (d_n) (où d_n est la longueur du segment I_n) tend vers 0. Alors l'intersection des segments I_n est un singleton.

Démonstration

Pour chaque entier naturel n, on écrit $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ (avec $\alpha_n \leqslant \beta_n$). Notons en particulier que $d_n = \beta_n - \alpha_n$. D'après les hypothèses de l'énoncé, les suites $\alpha = (\alpha_n)$ et $\beta = (\beta_n)$ sont respectivement croissante et décroissante, et $\lim(\beta - \alpha) = 0$. Ces suites sont adjacentes, elles admettent donc admettent une limite commune l.
Par définition, l'intersection des segments I_n est l'ensemble des réels x tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n$$

Cette intersection est donc le singleton $\{l\}$.

□

2.4. Suites extraites, notion de valeur d'adhérence

Définition (Suite extraite)

Soit u et v deux suites indexées par $\mathbb{N}$. On dit que v est *extraite* de u (ou que v est une *sous-suite* de u) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, appelée *extractrice*, telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

III.ix

On rappelle que si $\varphi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on a $\varphi(n) \geqslant n$, pour tout entier naturel n.

Exemple (Suites extraites)

(1) Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de u.
(2) Les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) sont extraites de u.

ii

Théorème (Suite extraite d'une suite convergente)

Supposons qu'une suite u converge vers $l \in \mathbb{K}$. Toute suite extraite de u converge également vers l.

III.15

Démonstration

Soit ε un réel strictement positif quelconque. Il existe un rang N à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. À partir de ce rang N, on a $|v_n - l| \leqslant \varepsilon$, d'après le rappel.

□

Un raisonnement analogue montre que toute suite extraite d'une suite réelle divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Une suite admettant une suite extraite divergente est divergente.

Une suite admettant deux suites extraites convergeant vers deux limites différentes est divergente.

Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

En revanche, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite, alors u tend vers cette limite (voir l'exercice 219).

Se donner une extractrice par son image

La donnée d'une *extractrice* φ (*i.e.* une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) revient à se donner son image. En fait, l'application qui à une extractrice φ associe son image est une bijection de l'ensemble des extractrices sur l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$. Il pourra être pratique de se donner ainsi une extractrice.

III.c

Voici maintenant un résultat fondamental d'analyse (vous pouvez d'ailleurs essayer de suivre sa longue descendance dans votre cours de MPSI) :

Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$, on peut extraire une suite convergente.

III.16

Démonstration

Difficile (voir le cours de MPSI). □

Définition (Valeur d'adhérence) III.x

On dit qu'un scalaire α est *valeur d'adhérence* d'une suite (u_n) s'il existe une sous-suite de (u_n) convergeant vers α.

On peut dès lors reformuler le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ admet une valeur d'adhérence.

Bien entendu, une suite convergente est bornée et n'a qu'une valeur d'adhérence. La réciproque est vraie :

Théorème (Suite bornée avec une seule valeur d'adhérence) III.17

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, bornée, et n'admettant qu'une valeur d'adhérence. Cette suite est alors convergente (vers son unique valeur d'adhérence).

Démonstration

Notons l l'unique valeur d'adhérence de u, et raisonnons par l'absurde, en supposant que u ne converge pas vers l, c'est-à-dire, formellement :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N) \wedge |u_n - l| > \varepsilon$$

L'ensemble

$$\Omega \overset{def}{=} \{n \in \mathbb{N}, |u_n - l| > \varepsilon\}$$

est donc infini : il existe une unique fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, et d'image Ω.

La suite $(u_{\varphi(n)})$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est bornée, et elle admet donc une suite extraite – via une certaine extractrice ψ– convergeant vers un certain élément l' de $\mathbb{K}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{\varphi(\psi(n))} - l| > \varepsilon$$

et donc $|l' - l| \geqslant \varepsilon$ en passant à la limite. En particulier, $l \neq l'$, d'où l'existence (absurde) d'au moins deux valeurs d'adhérence pour u. □

Revoir le cours de MPSI sur les relations de comparaison.

3. Séries numériques

3.1. Généralités sur les séries numériques

Définition (Série)

On appelle *série* de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ le couple $((u_n),(S_n))$, où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (S_n) est appelée *suite des sommes partielles* associée à la série $\sum u_n$. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée *somme partielle d'ordre* n de $\sum u_n$.

III.xi

En fait, on reviendra rarement à cette définition formelle d'une série comme couple de suites (liées par une formule), on parlera simplement de la série $\sum u_n$, de son terme général u_n et de sa somme partielle S_n d'ordre n.

Bien sûr, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $u_0 = S_0$.

Définition (Convergence d'une série)

La série $\sum u_n$ est dite *convergente* (resp. *divergente*) si la suite des sommes partielles associée (S_n) converge (resp. diverge).

En cas de convergence, on appelle *somme* de la série $\sum u_n$ et on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de (S_n).
Toujours en cas de convergence, on appelle *reste* d'ordre n de la série $\sum u_n$ et on note R_n le scalaire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

La *nature* d'une série est sa convergence ou sa divergence (selon le cas).

III.xii

On parle donc de somme d'une série, pas de limite d'une série.
Dans le cas d'une série convergente, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

La nature d'une série est inchangée si on change la valeur de son terme général en un nombre fini d'indices. En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant N} u_n$ ont même nature.

Proposition (Lien entre suite et série)

Soit (α_n) une suite de scalaires. La série $\sum(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ et la suite (α_n) ont même nature.
En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = \lim_{n\infty} \alpha_n - \alpha_0$$

III.18

Démonstration

Il suffit d'observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)=\alpha_{n+1}-\alpha_0$$

□

Une série donnée sous cette forme est dite *télescopique.*

Exemple (Série télescopique)

La série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge (en la voyant comme une série télescopique grâce à une décomposition en éléments simples).

iii

Bien sûr, pour que $\sum u_n$ converge, il faut que son terme général u_n tende vers 0. Cette condition nécessaire de convergence nous donne donc une condition suffisante de divergence : lorsque u_n ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ est divergente (on dit que la divergence est *grossière*).

Exemple (Série grossièrement divergente)

La série $\sum \cos(n)$ est grossièrement divergente (une fois acquise la divergence de $(\cos(n))$, ou même seulement sa non convergence vers 0).

iv

Cependant, une série dont le terme général tend vers 0 peut être divergente, comme $\sum(\ln(n+1)-\ln(n))$ ou $\sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, ou encore :

Exemple (Divergence de la série harmonique par les sommes partielles)

La *série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.
En notant H_n la somme partielle d'indice n de cette série, on a en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_{2n}-H_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

donc (H_n) n'est pas convergente.

v

Exemple (Séries géométriques)

Une série $\sum u_n$ est dite *géométrique* si la suite (u_n) est géométrique. Supposons-la de terme initial non nul, et de raison q. On vérifie que $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q|<1$:

En cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\frac{u_0}{1-q}.$$

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{10^n}=1$, ou, de façon plus imagée, $0,999999...=1$.
Pour le cas **très restreint** des séries géométriques, la divergence équivaut donc à la divergence grossière.

vi

On définit aisément l'addition (ou la somme[1]) de deux séries, et le produit d'une série par un scalaire, conférant à l'ensemble des séries d'éléments de $\mathbb{K}$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

En revanche, nous ne définirons pas ici de produit de deux séries.

Proposition (Linéarité de la somme) III.19

L'ensemble Ω des séries convergentes est un espace vectoriel, et l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{K} \\ \sum u_n & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} u_n \end{array}$$

est une forme linéaire.

Démonstration

Appliquer le théorème d'opérations algébriques sur les suites numériques aux suites de sommes partielles d'éléments de Ω.

□

3.2. Séries à termes positifs

On se restreint ici au cas de séries à termes positifs : l'équivalent pour les suites serait de se restreindre aux suites croissantes[2]. Comme pour les suites, cette hypothèse supplémentaire simplifie considérablement l'étude. Pour les suites par exemple, on sait que toute suite convergente est bornée, que la réciproque est fausse, mais qu'elle devient vraie si on se limite aux suites monotones. Il n'est donc pas étonnant que les résultats à suivre tombent en défaut lorsqu'on ne suppose plus la série à terme général positif.

Ici, $\sum u_n$ sera donc à termes positifs, *i.e.* la suite (u_n) sera positive.

Voici la version « séries » du théorème de la limite monotone (pour les suites) :

Proposition (Condition nécessaire et suffisante de convergence pour une série à termes positifs) III.20

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs : sa suite des sommes partielles est croissante, donc elle est convergente si et seulement si elle est majorée.

□

L'hypothèse de positivité est essentielle :

Proposition (Ordre et séries à termes positifs) III.21

On suppose $0 \leqslant u \leqslant v$.

(1) si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(2) si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

1. Qui n'a bien sûr rien à voir avec la somme d'*une* série
2. Et de termes initiaux positifs, mais cette précision est moins cruciale.

Démonstration

Notons (S_n) et (T_n) les suites des sommes partielles respectives de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On a $S \leqslant T$ par hypothèse.
Supposons que $\sum v_n$ converge. On en déduit que T est majorée, et S l'est donc aussi. Comme $\sum u_n$ est en outre à termes positifs, $\sum u_n$ converge (d'après III.20). D'où (1).
(2) est simplement la contraposée de (1).

□

Il faut bien noter que ce sont les termes généraux des séries que l'on compare dans l'énoncé de cette proposition, et non les sommes partielles[3].

Là encore, l'hypothèse de positivité est essentielle :

Exemple (Ordre et séries à termes positifs) vii

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)},$$

donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (grâce à l'exemple iii).

Proposition (Équivalence et séries à termes positifs) III.22

Si u et v sont positives, et si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Démonstration

Dans un tel cas, on a $\frac{1}{2}u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n$ à partir d'un certain rang, et III.21 permet de conclure.

□

Exemple : exercice 293.

Comme précédemment, l'hypothèse de positivité est essentielle :

3.3. Comparaison série-intégrale dans le cas monotone

On considère une fonction monotone $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue (ou même seulement continue par morceaux), ainsi que la série $\sum f(n)$.

La monotonie de f permet d'encadrer les sommes partielles S_N de cette série (où $N \in \mathbb{N}^*$) :

Si f est croissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) \leqslant \int_n^{n+1} f \leqslant f(n+1),$$

et donc, en sommant de 0 à $N-1$:

$$S_N - f(N) \leqslant \int_0^N f \leqslant S_N - f(0),$$

3. L'objectif de ce cours est précisément d'obtenir des renseignement sur $\sum u_n$ sans avoir à revenir aux sommes partielles, et donc à la notion de suite.

soit encore
$$f(0)+\int_0^N f \leqslant S_N \leqslant f(N)+\int_0^N f$$
Si f est décroissante, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$f(N)+\int_0^N f \leqslant S_N \leqslant f(0)+\int_0^N f$$
Cette technique s'appelle *comparaison série-intégrale*, ou *méthode des rectangles*.

Exemple (Série harmonique par les intégrales)

En prenant $f\ : x\mapsto \frac{1}{x+1}$, on a $H_n\sim \ln(n)$, et même plus précisément
$$H_n=\ln(n)+\mathrm{O}(1).$$
Ceci montre à nouveau la divergence de la série harmonique, et donne même un premier développement asymptotique de H_n.

viii

Exemple (Un équivalent par comparaison série-intégrale)

Par comparaison série-intégrale, on a
$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\sim\frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$
Remarque : on aurait pu retrouver ce résultat en utilisant les sommes de Riemann.

ix

Illustration

Définition (Séries de Riemann)

On appelle *série de Riemann* toute série de la forme $\sum\frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

III.xiii

Proposition (Séries de Riemann)

La série de Riemann $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

III.23

Démonstration

Cas où $\alpha \leqslant 1$ – On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge également.

□

Démonstration

Cas où $\alpha > 1$ – Le terme général étant positif, il suffit de majorer la suite (S_n) des sommes partielles pour établir la convergence.
La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

puis, en sommant de 1 à $N-1 \in \mathbb{N}^*$:

$$S_N - 1 \leqslant \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant S_N - \frac{1}{N^\alpha}$$

Or

$$\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_1^N \leqslant \frac{1}{\alpha - 1}$$

donc la suite (S_n) est majorée (par $1 + 1/(\alpha-1)$), puis $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

□

Cette méthode des rectangles permet d'estimer les sommes partielles de certaines séries divergentes et les restes de certaines séries convergentes, voir l'exercice 301.

On dispose en fait d'un résultat explicitement au programme sur la comparaison série-intégrale :

Proposition (Comparaison série-intégrale) III.24

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante.
La série de terme général

$$u_n \overset{def}{=} \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t - f(n)$$

converge.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par décroissance de f, pour tout $t \in [n-1, n]$:

$$f(n) \leqslant f(t) \leqslant f(n-1)$$

puis, en intégrant sur $[n-1, n]$:

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n-1)$$

et donc (en retranchant $f(n)$)

$$0 \leqslant u_n \leqslant f(n-1) - f(n)$$

Or $\sum f(n-1) - f(n)$ a même nature que la suite $(f(n))$, qui est convergente car f est décroissante et minorée (par 0). On en déduit que $\sum u_n$ converge (grâce à III.21).

□

Exemple (Constante d'Euler)

Ce résultat donne, pour $f(t) = \frac{1}{t+1}$, la convergence de la suite de terme général $H_n - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Sa limite est appelée *constante d'Euler*, et notée γ.
Ainsi,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

ce qui affine le résultat de l'exemple viii page 95.
On a

$$\gamma \simeq 0.5772156649...$$

En fait, on connaît des milliards de décimales de γ, mais on ne sait toujours pas si γ est rationnel.

x

3.4. Séries absolument convergentes

Définition (Convergence absolue)

On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ converge.

III.xiv

Proposition (La convergence absolue implique la convergence)

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. La série $\sum u_n$ est alors convergente.

III.25

Démonstration

Cas réel – On a $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$, donc $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent (proposition III.21), puis $\sum u_n$ converge.
Cela établit le résultat dans le cas réel.

□

Démonstration

Cas complexe – On a $0 \leqslant |\operatorname{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant |\operatorname{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$, donc $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent absolument (proposition III.21), puis convergent (d'après le cas réel que l'on vient d'établir), puis $\sum u_n$ converge.

□

Proposition (Relation de domination et absolue convergence)

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

III.26

Démonstration

Dans une telle situation, il existe $M > 0$ tel que, à partir d'un certain rang, on ait

$$|u_n| \leqslant M|v_n| = M\, v_n$$

d'où l'absolue convergence de $\sum u_n$.

□

On peut remplacer l'hypothèse de positivité de (v_n) et la convergence de $\sum v_n$ par l'absolue convergence de $\sum v_n$.

La proposition admet des analogues dans les cas où $u_n \sim v_n$, ou $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, puisqu'alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

En corollaire, un cas particulier important, provenant de la comparaison à une série géométrique :

Proposition (Critère de d'Alembert (pour les séries numériques)) III.27

Soit (z_n) une suite de complexes tous non nuls. On suppose que la suite de terme général $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

(1) Si $l < 1$, alors $\sum z_n$ est absolument convergente.

(2) Si $l > 1$, alors $\sum z_n$ est divergente.

(3) On ne peut pas conclure lorsque $l = 1$.

Démonstration

(1) Dans ce cas, en prenant $\alpha \in]l, 1[$, il existe un rang N à partir duquel
$$|z_{n+1}| \leqslant \alpha\, |z_n|$$
et donc (par récurrence)
$$|z_n| \leqslant \alpha^{n-N} |z_N|$$
pour tout $n \geqslant N$. Par convergence de $\sum \alpha^n$, on a bien absolue convergence de $\sum z_n$

(2) Dans un tel cas, $(|z_n|)$ est croissante à partir d'un certain rang (et à termes tous non nuls), et $\sum z_n$ est donc grossièrement divergente.

(3) Considérer par exemple les séries de Riemann (cas divergent et convergent).

□

Ces résultats constituent le *critère* (ou la *règle*) *de d'Alembert*. Le cas où $l = 1$ est appelé *cas limite*, ou *cas douteux*.

Exemple (Série exponentielle complexe) xi

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente (d'après le critère de D'Alembert pour $z \neq 0$), donc convergente. On aurait pu prouver l'absolue convergence à partir de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Ceci permet de définir la *fonction exponentielle complexe* :
$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array}$$

3.5. Le critère spécial des séries alternées

Théorème (Critère spécial des séries alternées) III.28

Soit (a_n) une suite réelle positive, décroissante, et de limite nulle.

La série $\sum (-1)^n a_n$ est alors convergente, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|R_n| \leqslant a_{n+1}$$
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de son premier terme $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ (*i.e.* du signe de $(-1)^{n+1}$).

Démonstration

On vérifie que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes (respectivement décroissante et croissante), et donc convergentes de même limite l.
On a de plus
$$S_{2n+1} \leqslant l \leqslant S_{2n+2} \leqslant S_{2n}$$
donc
$$0 \leqslant S_{2n} - l \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$$
et
$$0 \leqslant l - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1}$$
soit respectivement
$$0 \leqslant R_{2n} \leqslant a_{2n+1} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant -R_{2n+1} \leqslant a_{2n+2}$$
ce qui conclut la démonstration.

□

Illustration

Une suite réelle décroissante et de limite nulle étant nécessairement positive, cette dernière hypothèse est contenue dans les deux autres (elle peut éventuellement être omise).

On notera CSSA pour « critère spécial des séries alternées » dans ce cours.

Ce critère est la version « séries » du théorème de convergence des suites adjacentes. On peut noter que c'est un résultat quantitatif, puisqu'on a un contrôle explicite du reste.

Exemple : exercice 265

3.6. Sommation des relations de comparaison

Nous avons déjà vu des résultats mêlant nature de séries et relations de comparaison. En fait, on peut aller beaucoup plus loin. Comme remarqué précédemment, les résultats ne s'appliqueront que dans le cas où la série de référence est à termes positifs.

Théorème de sommation des relations de comparaison, cas de la convergence III.29

On suppose $\sum v_n$ à termes positifs, et convergente.

(1) si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, et
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right).$$

(2) si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est convergente, et
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

(3) si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, et
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right).$$

Démonstration

Supposons que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$. On a donc $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, d'où la convergence absolue de $\sum u_n$.
De plus, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$|u_n| \leqslant \varepsilon\, |v_n| = \varepsilon\, v_n$$

Pour tout $n \geqslant N$, et tout $p \geqslant n$, on a donc (notamment par positivité de (v_n))

$$\left|\sum_{k=n}^{p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{p} |u_k| \leqslant \sum_{k=n}^{p} \varepsilon\, v_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k,$$

puis, en faisant tendre p vers l'infini :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k,$$

ce qui prouve bien le premier résultat.
Le deuxième résultat se montre à partir du premier car $u_n \sim v_n$ se réécrit $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.
Le dernier résultat se montre de manière analogue au premier.

□

Théorème de sommation des relations de comparaison, cas de la divergence

On suppose $\sum v_n$ à termes positifs, et divergente.

(1) si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

(2) si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est divergente, et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

(3) si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

III.30

Démonstration

Montrons le premier point. On suppose donc que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit N un rang à partir duquel

$$|u_k| \leqslant \varepsilon |v_k|$$

On a donc, pour tout $n \geqslant N$:

$$\left|\sum_{k=N}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=N}^{n} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=N}^{n} |v_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

la dernière inégalité utilisant la positivité de (v_k).
De plus, la série $\sum v_n$ étant divergente positive, l'assertion

$$\sum_{k=0}^{N-1} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

est vraie à partir d'un certain rang N'.
À partir du rang $\max(N, N')$, on a donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k,$$

d'où le premier point.
Le deuxième point se déduit du premier, et le dernier se démontre de manière analogue au premier.

□

Il y a donc deux points essentiels à retenir :
- Ces théorèmes supposent la série de référence à termes positifs.
- En cas de convergence, on s'intéresse aux restes, et en cas de divergence, on s'intéresse aux sommes partielles [4].

Exemple (Équivalents et séries de Riemann)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. On en déduit que

$$\frac{1}{n^\alpha} \sim \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

Ces termes étant en outre positifs, on en déduit :
Dans le cas de divergence $\alpha \leqslant 1$ –

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et donc, si $\alpha < 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(1-\alpha)} n^{1-\alpha}$$

ainsi que, pour $\alpha = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Dans le cas de convergence $\alpha > 1$ – On obtient cette fois-ci :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1) n^{\alpha-1}}$$

xii

4. Dans ce cas, les restes de $\sum v_n$ (et peut-être de $\sum u_n$) ne sont d'ailleurs pas définis.

Exemple (Le théorème de Cesàro par sommation des relations de comparaison)

Considérons une suite (u_n) de réels, convergeant vers $l \in \mathbb{R}$.
Si $l > 0$, alors $u_n \sim_n l > 0$, et $\sum l$ diverge, donc

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} l = nl$$

puis $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}\right)$ converge vers l.
De même si $l < 0$.
Si $l = 0$, alors $u_n = \mathrm{o}(1)$ et 1 est le terme général positif d'une série divergente, donc

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \mathrm{o}(\sum_{k=1}^{n} 1) = \mathrm{o}(n)$$

puis $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}\right)$ converge vers 0.
Ainsi, pour tout $l \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}\right)$ converge vers l.

xiii

CHAPITRE IV

Intégration sur un intervalle quelconque

Sommaire

On souhaite étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, en autorisant des intervalles de définition I quelconques (hormis le fait d'être non vides). Plutôt que d'essayer de reprendre la construction de MPSI telle quelle [1], nous allons utiliser un passage à la limite.

Informellement, en prenant l'exemple d'une fonction continue par morceaux f sur $\mathbb{R}_+$: l'intervalle $[0, x]$ « tend vers » l'intervalle $\mathbb{R}_+$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc nous allons définir $\int_{\mathbb{R}_+} f$ comme la limite, *si elle existe et est finie*, de $\int_{[0,x]} f$ lorsque x tend vers $+\infty$. Cela conduira à la notion d'*intégrale convergente*.

En fait, cette notion va s'avérer assez peu pratique, car elle se comportera mal avec les notions de comparaison : on peut par exemple trouver des fonctions continues par morceaux f et g sur $\mathbb{R}_+$ telles que $f = \mathrm{O}(g)$, $\int_{\mathbb{R}_+} g$ converge, mais pas $\int_{\mathbb{R}_+} f$. Cette situation est en revanche impossible si on impose en outre que g soit positive.

Comme dans le cas des séries, la bonne notion sera la convergence *absolue* de l'intégrale, *i.e.* la convergence de l'intégrale pour $|f|$. C'est donc cette notion qui conduira à l'*intégrabilité* d'une fonction.

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tous les intervalles considérés seront d'intérieur non vide, I sera un tel intervalle.

Sauf mention contraire, a est un réel, et b est un point de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $a < b$.

f désignera une fonction continue par morceaux sur son domaine, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Intégration sur un segment (rappels de MPSI)

Dans cette section de rappels de MPSI, a et b sont deux réels, où $a < b$.

Je ne détaille pas la constuction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment (revoir votre cours de MPSI à l'occasion).

Notion de fonction en escalier sur un segment (on note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$), intégrale d'une telle fonction. Propriétes de l'intégrale pour les fonctions en escalier.

Définition (Fonction continue par morceaux sur un segment) — IV.i

On dit qu'une application $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ (pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$), telle que, pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$:

(1) La restriction f_k de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.

(2) Cette restriction est prolongeable par continuité aux points x_k et x_{k+1}.

On dit que la subdivision σ est *adaptée* (ou *subordonnée*) à f.
On note $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$ (ou $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$, et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Ce serait compliqué : il faudrait déjà définir l'intégrale d'une fonction en escalier sur un intervalle quelconque, puis vérifier que l'on peut approcher de manière satisfaisante les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par des fonctions en escalier.

Illustration

- Ne pas oublier la condition (2) ;
- Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée ;
- $\mathcal{E}([a,b]) \subset \mathcal{C}_{pm}([a,b])$ et $\mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{C}_{pm}([a,b])$. En fait, on a même

$$\mathcal{C}_{pm}([a,b]) = \mathcal{E}([a,b]) + \mathcal{C}([a,b])$$

- $\mathcal{C}_{pm}([a,b])$ et $\mathcal{E}([a,b])$ sont des sous-espaces vectoriels et des sous-anneaux de $\mathbb{R}^{[a,b]}$;
- La valeur absolue (ou le module dans le cas complexe) d'une fonction continue par morceaux est continue par morceaux ;
- Toute restriction d'une application continue par morceaux à un segment est continue par morceaux.

Définition (Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque) IV.ii

On dit qu'une application $f : I \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* si, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la restriction de f à $[a,b]$ est continue par morceaux. On note $\mathcal{C}_{pm}(I)$ (ou $\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I, et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque n'est pas nécessairement bornée.
Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux *sur un segment*.

Proposition (Linéarité de l'intégrale) IV.1

L'application

$$\begin{array}{rcccl} \Delta & : & \mathcal{C}_{pm}([a,b]) & \to & \mathbb{K} \\ & & f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array}$$

est une forme linéaire, *i.e.* :

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall\, f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K}), \quad \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

Proposition (Croissance de l'intégrale) IV.2

Soit f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs réelles.

(1) *(Positivité de l'intégrale)* Si $f \geqslant 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.

(2) *(Croissance de l'intégrale)* Si $f \leqslant g$, alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

(3) $|\int_{[a,b]} f| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

Proposition (Stricte croissance de l'intégrale pour les fonctions continues) IV.3

(1) Soit f une application continue et positive sur $[a, b]$, où $a < b$. Si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

(2) Si $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $f \leqslant g$ et $f \neq g$ (ce que l'on note dans ce cours $f < g$), alors $\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$.

La contraposée est souvent employée : si f est continue, non identiquement nulle et positive, alors $\int_{[a,b]} f > 0$. Le point (2) de cette proposition exprime la stricte croissance de la restriction de la fonction Δ à $\mathcal{C}([a, b])$.

Proposition (Inégalités de la moyenne) IV.4

Si f et g sont continues par morceaux sur [a,b], alors :

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

En particulier,

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| (b - a)$$

Proposition (Relation de Chasles) IV.5

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$. On a :

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in [a, b]^3, \quad \int_\alpha^\gamma f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma f(t)\mathrm{d}t$$

Corollaire (Relation de Chasles généralisée) IV.6

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \dots, x_n$ des points de $[a, b]$. On a

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t.$$

On peut définir une application

$$B : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & \int_{[a,b]} fg \end{array}.$$

Proposition (Pseudo-produit scalaire intégral) IV.7

L'application B est une forme bilinéaire, symétrique et *positive* [a].

a. *i.e.* $\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R}), B(f, f) \geqslant 0$.

Par positivité, on peut définir une application $N : \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, envoyant f sur $\sqrt{B(f, f)}$.

Proposition (Semi-norme intégrale)

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ et $N(f)=0$, alors f est nulle sauf en un nombre fini de points.
En particulier, si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $N(f)=0$, alors $f=0$.

IV.8

Ainsi, lorsqu'on restreint B à $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2$, on obtient un produit scalaire (*i.e.* une forme bilinéaire, symétrique, définie positive)

On utilise les notations suivantes : pour tout $f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on note $<f,g>=B(f,g)$ et $\|f\|=N(f)$

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale)

Soit $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continues par morceaux. On a alors :

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

De plus, si f et g sont continues, il y a égalité si et seulement si (f,g) est liée.

IV.9

Démonstration

Partir de l'observation que, pour tout réel λ : $N(f+\lambda g)^2 \geqslant 0$.

□

Dans le cas continu, c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace préhilbertien $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), <\cdot,\cdot>)$ (et son cas d'égalité) :

$$\forall f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \quad |<f,g>| \leqslant \|f\| \, \|g\|$$

Sommes de Riemann. Méthode des trapèzes.

Proposition (Inégalité triangulaire intégrale, cas complexe)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. Alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

IV.10

Démonstration

On a déjà observé que $|f|$ était continue par morceaux.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $k \in [\![0,n]\!]$, notons $x_{n,k} = a + k\,\frac{b-a}{n}$. On a, par inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k})\right| \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{n,k})|$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient l'inégalité voulue d'après le cours de MPSI sur les sommes de Riemann.

□

Définition (Valeur moyenne d'une fonction cpm sur un segment)

On appelle *valeur moyenne* de la fonction continue par morceaux f sur le segment $[a, b]$, le scalaire :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

IV.iii

Exemple (Valeur moyenne)

(1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction affine, alors on peut vérifier que sa valeur moyenne sur $[a, b]$ vaut $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ soit aussi $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

(2) Si $[a, b]$ est centré en 0, et si f est impaire continue par morceaux sur $[a, b]$, alors sa valeur moyenne est nulle.

i

Illustration

Définition (Valeur moyenne d'une fonction périodique cpm)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, périodique de période $T > 0$. On appelle *valeur moyenne* de f le scalaire

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

IV.iv

En fait, dans ce contexte, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la valeur moyenne de f vaut

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$$

et elle est également inchangée si on choisit une autre période.

Exemple (Valeur moyenne d'une fonction périodique)

(1) Une fonction constante de valeur λ a pour valeur moyenne λ.

(2) Les fonctions sinus et cosinus ont une moyenne nulle.

(3) Par calcul (en linéarisant), on peut vérifier que $\cos^2$ et $\sin^2$ ont pour valeur moyenne $\frac{1}{2}$.

On peut retrouver ce résultat en observant que $\sin^2 + \cos^2$ a pour valeur moyenne 1, et que, $\sin^2$ et $\cos^2$ s'obtenant mutuellement par déphasage, elles ont même valeur moyenne.

ii

Illustration

Définition (Primitive)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction de I dans $\mathbb{K}$, dérivable sur I, de dérivée égale à f.

IV.v

Si F est une primitive de $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, alors les primitives de f sont les $F + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Le fait que I soit un intervalle est primordial.

En particulier, si deux primitives d'une même fonction continue f sur I coïncident en un point, alors elles sont égales (cf. la condition de Cauchy).

Par exemple, si $a \in I$, il existe au plus une primitive de f s'annulant en a.

Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, et $a \in I$. La fonction F_a définie par :

$$\forall x \in I, F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

IV.11

On en déduit plusieurs corollaires, le premier sera qualifié de théorème étant donné son importance :

Théorème (Primitives et intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, on a :

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$$

IV.12

Démonstration

$\square$

On peut reformuler ce théorème ainsi : pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'.$$

Proposition (Intégration par parties)

Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on a :

$$\int_{[a,b]} uv' = [uv]_a^b - \int_{[a,b]} u'v.$$

IV.13

Démonstration

$\square$

Cette formule provient donc simplement de la formule de dérivation d'un produit.

Lorsqu'on applique cette méthode, bien préciser u, v (et non pas u et v'), et ne pas oublier de signaler que ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition (Changement de variable sur un segment)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soient α et β deux éléments de J. On a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

IV.14

Démonstration

$\square$

On mentionne ici des primitives classiques.

$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$. $(\alpha \neq -1)$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)^2} = \tan(x) + C$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)^2} = -\operatorname{cotan}(x) + C$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$.

$\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)|\mathrm{d}x$.

Proposition (Primitives d'une exponentielle-polynôme)

IV.15

Si $a \in \mathbb{K}^*$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors la fonction $x \mapsto P(x)e^{ax}$ possède une unique primitive de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax}$, où $Q \in \mathbb{K}[X]$. De plus, Q est de même degré que P.

Démonstration

Pour tout polynôme Q, si on note f la fonction $x \mapsto Q(x)e^{ax}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x
$$f'(x) = (aQ(x) + Q'(x))\ e^{ax}$$
Or on vérifie que
$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ & Q & \mapsto & aQ + Q' \end{array}$$
est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, qui conserve le degré. On en déduit classiquement que φ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$, et que φ^{-1} conserve aussi le degré, d'où le résultat.

$\square$

2. Intégrale généralisée

Pour des raisons pratiques d'exposition, nous privilégions dans ce cours la notion d'intégrale généralisée (ou impropre) sur un intervalle de la forme $[a, b[$. On laisse au lecteur le soin d'adapter aux autres cas les résultats énoncés dans ce seul cas (intervalles de la forme $]a, b]$, ou $]a, b[$).

Définition (Nature d'une intégrale impropre)

IV.vi

Soit $f\ : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est *convergente* (ou encore qu'elle *existe*) si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en b. Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f$ (ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ou encore $\int_{[a,b[} f$) cette limite. Sinon, cette intégrale est dite *divergente*.
La *nature* d'une intégrale impropre est sa convergence ou sa divergence (selon la situation).

Nature d'une intégrale impropre

(1) La convergence de $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ (où f est continue par morceaux sur $[a, b[)$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de b. En particulier, pour tout $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_c^b f$ ont même nature, et, en cas de convergence, on a la *relation de Chasles* :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(2) Bien sûr, si b est finie et si f est en réalité continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b[} f$ converge et a même valeur que $\int_{[a,b]} f$ (qui, elle, n'est pas impropre). La notation $\int_a^b f$, qui désignait chacune de ces intégrales, est donc cohérente.

(3) Ainsi, si f est continue par morceaux sur $[a, b[$, si b est fini et si f se prolonge en une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale impropre $\int_{[a,b[} f$ converge. Cette intégrale est même dite alors *faussement impropre*, puisque sa convergence provient essentiellement de la théorie de l'intégration sur un segment.

IV.a

On étend sans difficulté (par analogie) la notion d'intégrale impropre au cas d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert du type $]a, b]$ -où $b \in \mathbb{R}$, et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$.

Exemple (Nature d'une intégrale impropre)

(1) Pour $f : t \mapsto e^{-t}$, $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge.

(2) $\int_{]0,1]} \ln$ converge, bien que $\ln$ tende vers $-\infty$ en 0.

(3) Pour $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$, $\int_{]0,1]} f$ diverge, ainsi que $\int_{[1,+\infty[} f$. Ce dernier exemple illustre qu'une fonction (continue) peut tendre vers 0 en $+\infty$ sans que son intégrale sur un voisinage de $+\infty$ converge.

(4) Il se peut que $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge sans que f tende vers 0 en $+\infty$.

(5) Pour $f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, l'intégrale $\int_{]0,1]} f$ est faussement impropre.

iii

Définition (Intégrale impropre sur un intervalle ouvert)

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, où $a < b$, et soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
Soit $c \in]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est *convergente* si les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. Si tel est le cas, on note $\int_a^b f$ (ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, ou encore $\int_{]a,b[} f$) le scalaire

$$\int_a^b f \overset{def}{=} \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Sinon, cette intégrale est dite *divergente*.

IV.vii

Cette définition est bien indépendante du choix de c d'après la relation de Chasles ci-dessus (et sa version pour les intervalles de la forme $]\alpha, \beta]$).

Il faut bien étudier séparément les deux bornes. Par exemple, la limite de $\int_{-x}^x t dt$ lorsque x tend vers $+\infty$ existe et vaut 0, mais $\int_{\mathbb{R}} t dt$ est évidemment divergente.

Exemple (Intégrales de Riemann)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et $f\ : t \mapsto \frac{1}{t^a}$.

(1) $\int_{[1,+\infty[} f$ converge si et seulement si $a > 1$, et, le cas échéant : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{a-1}$.

(2) $\int_{]0,1]} f$ converge si et seulement si $a < 1$, et, le cas échéant : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{1-a}$.

(3) $\int_{\mathbb{R}_+^*} f$ est toujours divergente.

Ces intégrales sont appelées *intégrales de Riemann*, et sont très souvent utilisées pour les études d'intégrabilité (voir plus loin).

iv

Proposition (Propriétés des intégrales impropres)

Notons Ω l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, dont l'intégrale converge.

(1) Ω est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(2) L'application

$$\begin{array}{cccc} \nabla & : & \Omega & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & & f & \mapsto & \int_I f \end{array}$$

est linéaire (*linéarité de l'intégrale*).

(3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ∇ est également positive (*i.e.* pour tout $f \in \Omega$ tel que $f \geqslant 0$, on a $\int_I f \geqslant 0$), et croissante. Sa restriction à $\Omega' \overset{def}{=} \Omega \cap \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ est même strictement positive (au sens où si $f \in \Omega'$ et [a] $f > 0$, alors $\int_I f > 0$), et strictement croissante.

(4) Pour tout $f \in \Omega \cap \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{K})$, l'application $G\ : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f$ est dérivable sur $[a,b[$, de dérivée $-f$, et de limite nulle en b.

a. Rappelez vous que $f > 0$ signifie $f \geqslant 0$ et $f \neq 0$ dans ce cours.

IV.16

Démonstration

On traite le cas où $I = [a,b[$ (les autres cas sont analogues). Bien sûr, $0_{\mathbb{K}^I} \in \Omega$.
Soit $f, g \in \Omega$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Pour tout $x \in [a,b[$,

$$\int_a^x (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

donc par opérations algébriques sur les limites, $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ est convergente, et égale à

$$\lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

ce qui établit (1) et (2).
(3) s'obtient de manière analogue.
Pour (4), on peut écrire par relation de Chasles que pour tout $x \in [a,b[$,

$$G(x) = \int_a^b f - \int_a^x f$$

d'où les résultats annoncés.

$\square$

Il ne faudra pas oublier, lorsqu'on utilisera par exemple la linéarité de l'intégrale sur un intervalle quelconque I, de vérifier que les intégrales en jeu convergent effectivement : comme pour toute notion de limite, la convergence d'une intégrale ne va pas de soi.

Comme dans le cours de MPSI, on autorise aux bornes d'intégration d'être égales, ainsi que de ne pas être données dans l'ordre usuel. Si $\int_a^b f$ converge (où $a < b$), on posera par exemple $\int_b^a f \overset{def}{=} -\int_a^b f$ et on dira que cette intégrale converge (et sinon, on dira qu'elle diverge). La relation de Chasles reste valable avec ces notations étendues (pour peu que les intégrales engagées convergent).

Proposition (Caractérisation de la convergence dans le cas positif)

Si f est positive sur $[a, b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée.

IV.17

Démonstration

On suppose f positive.
L'application $x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f$ est croissante, donc elle admet une limite finie en b si et seulement si elle est majorée.

□

Proposition (Ordre et convergence dans le cas positif)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$0 \leqslant f \leqslant g$$

(1) Si $\int_I g$ converge, alors $\int_I f$ converge.

(2) Si $\int_I f$ diverge, alors $\int_I g$ diverge.

IV.18

Démonstration

On traite le cas où $I = [a, b[$ (les autres sont similaires). Les applications $F : x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et $G : x \in [a, b[\mapsto \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ sont croissantes, et $F \leqslant G$.
Si on suppose que $\int_I g$ converge, G est majorée, donc F l'est aussi, ce qui prouve que $\int_I f$ converge d'après la proposition précédente.
Ceci établit (1), et (2) en est la contraposée.

□

On peut aussi observer que dans la situation (1), on a $\int_I f \leqslant \int_I g$.

3. Intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque

Définition (Fonction intégrable)

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que f est *intégrable* sur $[a, b[$, ou encore que l'intégrale $\int_a^b f$ est *absolument convergente* si $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

IV.viii

Évidemment, dans le cas d'une fonction positive (et plus généralement d'une fonction de signe constant), f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\int_{[a,b[} f$ converge.

Exemple (Retour sur les intégrales de Riemann)

(1) Pour α dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

(2) Pour α dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

(3) Pour α dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a, b]$ est intégrable si et seulement si $\alpha < 1$. De même, $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ (où $b < a$ pour une fois) si et seulement si $\alpha < 1$. Ces cas se ramènent en effet au cas (2) par translation de la variable.

v

Comme dans le cas des séries, la convergence absolue d'une intégrale entraine sa convergence :

Proposition (Lien entre intégrabilité et intégrale convergente)

Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I f$ converge.

IV.19

Démonstration

Cas réel – Si f est intégrable sur I, les encadrements

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f^- \leqslant |f|$$

montrent que $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ convergent, d'où le résultat dans le cas réel.

□

Démonstration

Cas complexe – Si f est intégrable sur I, les encadrements

$$0 \leqslant |\operatorname{Re}(f)| \leqslant |f| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |\operatorname{Im}(f)| \leqslant |f|$$

prouvent que $\int_I \operatorname{Re}(f)$ et $\int_I \operatorname{Im}(f)$ convergent (absolument), et donc que $\int_I f$ converge.

□

Proposition (Intégrabilité et relations de comparaison)

Pour f et g deux fonctions réelles continues par morceaux sur I :

(1) Si $I = [a, b[$ et $f(x) = O_{x \to b}(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f ;

(2) Si $I = [a, b[$ et $f(x) \sim_{x \to b} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ équivaut à celle de f.

IV.20

Démonstration

(1) Dans un tel cas, il existe $M>0$ tel que, au voisinage de b dans $[a,b[$ on ait :
$$|f(x)| \leqslant M\,|g(x)|$$
d'où l'implication souhaitée.

(2) Dans un tel cas, on a en effet,
$$f(x) = O_{x\to b}\,(g(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = O_{x\to b}\,(f(x))$$
et le cas (1) permet de conclure.

□

Intégrabilité et relations de comparaison au programme

D'une manière générale, les résultats du cours sur les relations de comparaison permettent de prouver une intégrabilité, c'est-à-dire une *absolue convergence*, dont on peut certes déduire la convergence.
C'est pourquoi pour éviter toute ambiguïté, il est conseillé, dans votre rédaction, de ne parler que d'absolue convergence (ou d'intégrabilité), sauf en conclusion si vous devez établir la convergence.

IV.b

Intégrabilité et relation de comparaison

Cette proposition est très utile pour établir l'intégrabilité d'une fonction. On la combine souvent à l'exemple des intégrales de Riemann. Elle sera approfondie en fin de chapitre pour donner des résultats asymptotiques plus précis.

IV.c

Définition (Espace des fonctions intégrables)

L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables de I dans $\mathbb{K}$ est appelé *espace des fonctions intégrables sur I* (à valeurs dans $\mathbb{K}$), et noté $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{L}^1(I)$ s'il n'y a pas d'ambiguité).

IV.ix

Comme le nom le laisse supposer, l'espace des fonctions intégrables sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Bien sur, si $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, alors $\int_I |f|$ et (donc) $\int_I f$ convergent.

Proposition (Inégalité triangulaire intégrale sur un intervalle quelconque)

Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

IV.21

Démonstration

Il suffit d'appliquer cette inégalité dans le cas d'un segment et de revenir à la définition d'une intégrale généralisée.

□

Proposition (Changement de variable sur un intervalle quelconque)

IV.22

Étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Démonstration

φ est une bijection continue strictement croissante de l'intervalle $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, donc sa bijection réciproque est également continue, strictement croissante, et tend vers α (resp. β) en a (resp. b).
Fixons $\gamma \in]\alpha, \beta[$. Soit $x \in]\alpha, \gamma]$, et $y \in [\gamma, \beta[$.
D'après le théorème de changement de variable sur un segment,

$$\int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(y)} f(t)\mathrm{d}t = \int_\gamma^y f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

et $\lim_\beta \varphi = b$, donc si $\int_\gamma^\beta f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge, alors $\int_{\varphi(\gamma)}^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, et ces deux intégrales sont égales.
Comme φ^{-1} tend vers β en b, la réciproque est vraie.
De même, puisque

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(\gamma)} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^\gamma f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

les deux intégrales $\int_a^{\varphi(\gamma)} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\gamma f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ ont même nature et sont égales en cas de convergence.
La relation de Chasles achève la preuve.

$\square$

Le lecteur adaptera cette proposition au cas où φ est strictement décroissante.

Il faut noter que cette proposition part d'hypothèses relativement restrictives (quoique souvent vérifiées) : f est continue (pas seulement continue par morceaux), et φ est bijective [2]

Le programme vous autorise officiellement à appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).

Théorème d'intégration par parties sur un intervalle quelconque

IV.23

On considère deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]a, b[$. On suppose que fg admet des limites finies en a et en b, et on pose

$$[fg]_a^b \overset{def}{=} \lim_b fg - \lim_a fg.$$

Les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ ont alors même nature, et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

2. Cette hypothèse ne figure d'ailleurs pas dans le théorème IV.14.

Démonstration

$\square$

4. Intégration des relations de comparaison

On considère deux fonctions continues par morceaux $f, g\ : [a, b[\to \mathbb{R}$.

Théorème d'intégration des relations de comparaison, cas de la convergence

IV.24

On suppose g positive et $\int_a^b g$ convergente.

(1) Si $f = \mathrm{o}_b(g)$, alors $\int_{[a,b[} f$ est absolument convergente, et

$$\int_{[x,b[} f = \mathrm{o}_{x \to b}\left(\int_{[x,b[} g\right).$$

(2) Si $f \sim_b g$, alors $\int_{[a,b[} f$ est (absolument) convergente, et

$$\int_{[x,b[} f \sim_{x \to b}\left(\int_{[x,b[} g\right).$$

(3) Si $f = \mathrm{O}_b(g)$, alors $\int_{[a,b[} f$ est absolument convergente, et

$$\int_{[x,b[} f = \mathrm{O}_{x \to b}\left(\int_{[x,b[} g\right).$$

Démonstration

On montre (1) ((2) s'en déduit, et (3) se démontre de manière analogue). On suppose donc que $f = \mathrm{o}_b(g)$. L'absolue convergence de $\int_{[a,b[} f$ est déjà connue.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que, pour tout $t \in [c, b[$,

$$|f(t)| \leqslant \varepsilon\, |g(t)| = \varepsilon\, g(t)$$

puisque g est positive.
En appliquant la proposition IV.18 page 113 (et l'observation qui la suit), on obtient , pour tout $x \in [c, b[$:

$$\left|\int_{[x,b[} f\right| \leqslant \int_{[x,b[} |f| \leqslant \varepsilon \int_{[x,b[} g$$

d'où le résultat voulu.

$\square$

Théorème d'intégration des relations de comparaison, cas de la divergence IV.25

On suppose g positive et $\int_a^b g$ divergente.

(1) si $f = \mathrm{o}_b(g)$, alors
$$\int_{[a,x]} f = \mathrm{o}_{x\to b}\left(\int_{[a,x]} g\right).$$

(2) si $f \sim_b g$, alors
$$\int_{[a,x]} f \sim_{x\to b}\left(\int_{[a,x]} g\right).$$

(3) si $f = \mathrm{O}_b(g)$, alors
$$\int_{[a,x]} f = \mathrm{O}_{x\to b}\left(\int_{[a,x]} g\right).$$

Démonstration

Comme g est positive et $\int_a^b g$ est divergente, $\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers b.
Supposons $f = \mathrm{o}_b(g)$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $c \in [a, b[$ tel que, pour tout $t \geqslant c$, $|f(t)| \leqslant \varepsilon|g(t)|$ *i.e.*
$$|f(t)| \leqslant \varepsilon g(t)$$
puisque g est positive.
Par conséquent, pour tout $x \in [c, b[$, on a :
$$\left|\int_c^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_c^x |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_c^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$
la dernière inégalité provenant encore de la positivité de g.
De plus, d'après la remarque initiale, il existe $d \in [c, b[$ tel que, pour tout $x \in [d, b[$, on ait :
$$\left|\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$
Ainsi, on a, pour tout $x \in [d, b[$:
$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_c^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$
d'où le résultat.
Le deuxième résultat se déduit du premier.
Le dernier résultat se démontre de manière analogue au premier.

□

On peut bien sûr faire l'analogie avec les séries :

(1) La fonction de référence g est positive.

(2) En cas de convergence, on s'intéresse aux « termes résiduels », aux « restes ».

(3) En cas de divergence, on s'intéresse aux « termes partiels ».

Exemple (Théorème de Cesàro intégral)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, de limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.
Si $l > 0$, alors $f(t) \sim_{t \to +\infty} l > 0$ et $\int_{\mathbb{R}_+} l$ est divergente, donc

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \sim_{x \to +\infty} \int_0^x l\mathrm{d}t = xl,$$

puis

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = l$$

De même (ou en considérant $-f$) si $l < 0$.
Si $l = 0$, alors $f(t) = \mathrm{o}_{t \to +\infty}(1)$, $1 > 0$ et $\int_{\mathbb{R}_+} 1$ est divrergente, donc

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\int_0^x 1\mathrm{d}t\right) = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(x)$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = 0$$

vi

CHAPITRE V

Groupes

Sommaire

1. Généralités sur les structures algébriques

1.1. Notion de structure algébrique

La notion de nombre est une première étape vers l'abstraction. Cependant, les nombres, pris isolément, n'ont que peu d'intérêt : ce sont les liens les unissant, par le biais de relations et d'opérations, qui en font la richesse.

Un pas supplémentaire vers l'abstraction a donc consisté en la recherche de propriétés susceptibles d'être satisfaites par les opérations elles-mêmes. Au fil de leurs investigations, les mathématiciens ont ainsi vu émerger la notion de *structure algébrique*.

La plupart des opérations sur des ensembles de nombres sont internes : étant donné un ensemble E, une *loi de composition interne* sur E est une application de $E \times E$ dans E : elle prend en argument un couple d'éléments de E, et les combine pour former un élément de E.

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E. Les propriétés usuelles susceptibles d'être satisfaites par $\star$ sont

– L'*associativité*

$$\forall (a,b,c) \in E^3, \quad (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

– La *commutativité*

$$\forall (a,b) \in E^2, \quad a \star b = b \star a$$

– L'existence d'un *élément neutre* e

$$\forall\, a \in E, \quad a \star e = e \star a = a$$

– L'existence d'un *symétrique* pour un élément x (lorsqu'il existe un élément neutre e) :

$$\exists y \in E, \quad x \star y = y \star x = e$$

– Le fait qu'un élément x soit *simplifiable à gauche* (ou *régulier à gauche*) pour $\star$:

$$\forall\, y, z \in E, \quad x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$$

De même pour le fait que x soit *simplifiable à droite* (ou *régulier à droite*). Un élément simplifiable à gauche et à droite est dit *simplifiable* (ou *régulier*).

Un ensemble E admet au plus un élément neutre (pour une loi de composition interne donnée) :

Si E est un ensemble muni d'une loi associative, et admettant un élément neutre, alors tout élément x de E admet au plus un symétrique :

Si la loi est associative, tout élément symétrisable est simplifiable :

Exemple (Propriétés de lois)

(1) 2 admet un symétrique pour la multiplication dans $\mathbb{Q}$, mais pas dans $\mathbb{Z}$. 2 est simplifiable (pour la multiplication) dans $\mathbb{Z}$, mais 0 ne l'est pas.

(2) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas simplifiable pour la multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(3) La fonction sinus n'est pas simplifiable (pour la multiplication) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, mais l'est dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

i

Il se peut que E soit muni de deux lois $\star$ et $\diamond$. On dit que $\star$ est *distributive à gauche* par rapport à $\diamond$ si

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c)$$

et *distributive à droite* par rapport à $\diamond$ si

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad (a \diamond b) \star c = (a \star c) \diamond (b \star c)$$

La loi $\star$ est dite *distributive* (par rapport à une autre) si elle l'est à droite et à gauche.

Exemple (Distributivité)

(1) Dans $\mathbb{N}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

(2) Dans l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties d'un ensemble A, l'intersection est distributive par rapport à l'union, et inversement.

ii

Enfin, il se peut que E soit muni d'une *loi externe*, c'est-à-dire d'une application de $K \times E$ dans E, où K est un certain ensemble, appelé *domaine d'opérateurs*.

Informellement, une *structure algébrique* est un ensemble de propriétés qu'un ensemble structuré peut posséder, et que l'histoire des mathématiques a jugée suffisamment fécond. Les structures algébriques principales que nous rencontrerons seront les groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, algèbres.

Elle se définit par le respect de certaines propriétés générales (comme l'associativité par exemple) et la présence d'éléments distingués (en pratique, des éléments neutres pour certaines lois).

1.2. Sous-structures

Soit F une partie d'un ensemble structuré E. On dit que F est *stable* par une loi $\star$ de E si, pour tous $a, b \in F$, on a $a \star b \in F$. Dans ce cas, on peut définir une loi de composition interne sur F :

$$: \begin{array}{ccc} F \times F & \to & F \\ (a, b) & \mapsto & a \star b \end{array}$$

Cette loi s'appelle *loi induite* par $\star$ sur la partie stable F de E, et on la note encore souvent (et abusivement) $\star$.

Informellement, une partie F de E est une *sous-structure* de E si F « hérite » de la structure de E, *i.e.*

- F est stable par les opérations de E.
- F possède les éléments distingués de E (les éléments neutres pour les différentes lois).
- Muni de ces lois induites et de ces éléments distingués, F a la structure algébrique voulue.

Exemple (Sous-structures)

Nous verrons de très nombreux exemples explicites de sous-structures, voici plutôt des exemples de parties qui ne sont PAS des sous-structures :

(1) $\mathbb{N}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

(2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(3) $\mathbb{R}^*_-$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$. iii

(4) $\{0_A\}$ n'est pas un sous-anneau de A (à moins que $A = \{0_A\}$).

(5) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}\right\}$ n'est pas un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mais c'est un anneau pour les lois induites par celles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1.3. Sous-structures et opérations ensemblistes

L'intersection de sous-structures (d'un même ensemble structuré) est une sous-structure.
En général, l'union de deux sous-structures n'est pas une sous-structure :

Si E et F possèdent la même structure, $E \times F$ est naturellement muni d'une ou plusieurs lois, qui lui confère(nt) la même structure, sauf dans le cas de la structure de corps. On parlera donc par exemple de groupe produit ou d'espace vectoriel produit, mais PAS de corps produit.

Si E est un ensemble muni d'une certaine structure, et si X est un ensemble quelconque, l'ensemble E^X des fonctions de X dans E peut naturellement être muni d'opérations lui conférant la même structure que E, sauf dans le cas des corps.

Une partie A d'un ensemble structuré E n'a pas de raison d'être une sous-structure. Cependant, parmi les sous-structures de E contenant A, il y en a une contenue dans toutes les autres, qui en est l'intersection : on l'appelle sous-structure *engendrée* par A.

1.4. Morphismes

Étant donné deux ensembles structurés E et F (pour la même structure algébrique), un *morphisme* est une application de E dans F respectant les lois et les éléments distingués.

Un morphisme se comportant bien avec les structures, on a des propriétés générales :
- L'image directe ou réciproque d'une sous-structure par un morphisme est une sous-structure.
- Si un morphisme est bijectif (*i.e.* un *isomorphisme*), sa bijection réciproque est aussi un (iso-)morphisme.
- L'injectivité d'un morphisme de groupes (et donc d'espaces vectoriels, d'anneaux et d'algèbres) peut se tester sur le noyau, qui est l'ensemble des antécédents de l'élément neutre pour la loi de ce groupe.
- La surjectivité d'un morphisme peut se tester sur une partie génératrice.

Le dernier point signifie que si le morphisme permet d'atteindre tous les éléments d'une partie génératrice de l'ensemble d'arrivée, alors il est surjectif.

Par exemple, le morphisme de groupes additifs

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (u, v) & \mapsto & 3u + 2v \end{array}$$

est surjectif, puisque $\varphi(-1, 2) = 1$ (et que 1 engendre le groupe additif $\mathbb{Z}$).

Si on impose l'image d'une partie génératrice de la source, alors il existe au plus un morphisme respectant ces conditions.

2. Groupes

2.1. Définition et exemples

Définition (Groupe)

Un ensemble muni d'une loi de composition interne $(G, \cdot)$ est appelé *groupe* si :
– La loi $\cdot$ est associative.
– G admet un élément neutre (noté e_G ou e s'il n'y a pas d'ambiguïté).
– Tout élément de G admet un symétrique (dans G) pour $\cdot$.
Dans le cas où la loi $\cdot$ est en outre commutative, le groupe $(G, \cdot)$ est dit *abélien* (ou *commutatif*).

V.i

Dans un groupe, tout élément est simplifiable (puisque symétrisable).

On note souvent la loi d'un groupe multiplicativement [1] (le symétrique de x est alors noté x^{-1} et sera parfois appelé *inverse* de x) ou additivement (le symétrique de x est alors noté $-x$, et sera parfois appelé *opposé* de x). Cette dernière notation est réservée au cas d'un groupe abélien. Dans le cas de la notation multiplicative, on peut définir les puissances n-ièmes (où n est un entier relatif) d'un élément x de G. On a alors, pour tout $x \in G$, tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$x^m x^n = x^{m+n} = x^n x^m$$

et

$$(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m$$

mais en général

$$(xy)^n \neq x^n y^n$$

(où $y \in G$). On a cependant bien égalité si x et y commutent, *i.e.* $xy = yx$.

Le symétrique du produit xy est $y^{-1}x^{-1}$, mais pas $x^{-1}y^{-1}$ en général (c'est le cas si et seulement si x et y commutent).

En notation additive, on définit de même nx où $(n, x) \in \mathbb{Z} \times G$, et on a, pour tout $(x, y) \in G^2$ et tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$(m+n)x = mx + nx, \quad m(nx) = (mn)x, \quad m(x+y) = mx + my,$$

la dernière formule provenant de la commutativité de la loi $+$.

Définition (Produit direct de groupes)

Étant donné des groupes $G_1, \dots, G_n$, on définit une structure de groupe (produit) sur $G_1 \times \cdots \times G_n$ en posant, pour tous $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ appartenant à $G_1 \times \cdots \times G_n$:

$$(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) \overset{def}{=} (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

V.ii

1. Si on ne précise pas la loi, c'est d'ailleurs implicitement le cas.

Exemple (Groupes)

(1) Le groupe $\mathcal{S}_E$ des permutations d'un ensemble E (pour la loi de composition des applications).
(2) Le groupe additif dans un anneau, un espace vectoriel ou une algèbre.
(3) Le groupe des inversibles d'un anneau.
(4) Le groupe des automorphismes d'un objet structuré. En particulier, le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (et les versions matricielles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).
(5) Le groupe des isométries vectorielles d'un espace euclidien E.
(6) Si $\mathcal{E}$ est un espace affine : le groupe des translations de $\mathcal{E}$, le groupe des homothéties translations de $\mathcal{E}$, le groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$. Le groupe des isométries préservant une partie de $\mathcal{E}$.
(7) L'ensemble G^X des applications d'un ensemble X à valeurs dans un groupe G, pour la loi naturelle issue de celle de G.

iv

2.2. Sous-groupes

Définition (Sous-groupe)

Soit H une partie de G. On dit que H est un *sous-groupe* de G si :
– H est stable par la loi de G.
– H possède e_G.
– H, muni de la loi induite, est un groupe.

V.iii

On notera dans ce cours $H \leqslant G$ lorsque H est un sous-groupe de G.
Lorsque H est un sous-groupe de G, le symétrique d'un élément de H pour $\cdot$ est le même dans H et dans G :

Si G est abélien, alors tous ses sous-groupes le sont aussi.

Proposition (Caractérisation des sous-groupes)

Soit H une partie de G. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) H est un sous-groupe de G.
(2) H possède e_G, est stable par la loi de G et par passage au symétrique.
(3) H possède e_G et, pour tous $x, y \in H$, xy^{-1} appartient à H.

V.1

Démonstration

□

Dans les deux dernières assertions, on peut remplacer la condition que H possède e_G par le fait que H ne soit pas vide.

Proposition (Opérations sur les sous-groupes)

(1) Une intersection quelconque de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.
(2) L'union de deux sous-groupes H et K de G est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

V.2

Démonstration

□

Exemple (Sous-groupes)

(1) Si $K \leqslant H$ et $H \leqslant G$, alors $K \leqslant G$.

(2) Un groupe ayant plus d'un élément admet au moins deux sous-groupes, G lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre.

(3) $\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Q} \leqslant \mathbb{R} \leqslant \mathbb{C}$, mais aussi $\mathbb{U}_n \leqslant \mathbb{U} \leqslant \mathbb{C}^*$

(4) Centre d'un groupe : si G est un groupe, alors son *centre*

$$Z(G) \overset{def}{=} \{g_0 \in G, \forall\, g \in G, gg_0 = g_0 g\}$$

est un sous-groupe commutatif de G.

(5) Le commutant $\mathcal{C}(g)$ d'un élément g d'un groupe G

$$\mathcal{C}(g) \overset{def}{=} \{g_0 \in G, gg_0 = g_0 g\}$$

est un sous-groupe de G, et le centre de G est l'intersection des commutants des éléments de G.

v

Proposition (Sous-groupes du groupe des entiers relatifs)

Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (additif) sont les $n\mathbb{Z}$, où n décrit $\mathbb{N}$.

V.3

Démonstration

Bien sûr, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ additif.
Réciproquement, soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Si $G = \{0\}$, alors $G = 0\,\mathbb{Z}$. Sinon, G possède un élément non nul et est stable par passage à l'opposé, donc $\mathbb{N}^* \cap G$ admet un plus petit élément n.
Par structure de sous-groupe de G, on a $n\mathbb{Z} \subset G$.
Réciproquement, soit $g \in G$. On effectue la division euclidienne de g par n :

$$g = qn + r,\ \text{où } (q, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, n-1]\!]$$

Par structure de sous-groupe de G, $r = g - qn \in G$, et $0 \leqslant r < n$, donc $r = 0$ par définition de n : $g \in n\mathbb{Z}$.
Finalement, $G = n\,\mathbb{Z}$.

□

Définition (Sous-groupe engendré par une partie)

Soit A une partie de G. On appelle *sous-groupe de G engendré par A* et on note $< A >$ le plus petit sous-groupe de G contenant A.

V.iv

Sous-groupe engendré par un élément

Dans le cas d'un élément a, on note $< a >$ plutôt que $< \{a\} >$ le sous-groupe engendré par a : c'est $\{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ (ou $\{na, n \in \mathbb{Z}\}$ en notation additive).

V.a

2.3. Morphismes de groupes

Définition (Morphisme de groupes) V.v

Soit $\varphi : G \to G'$ une application.
On dit que φ est un *morphisme de groupes* si $\varphi(e_G) = e_{G'}$ et si, pour tout $(a, b) \in G^2$, on a :

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

En fait, la première condition est conséquence de la seconde, et il est donc inutile de la vérifier :

Proposition (Composée de morphismes de groupes) V.4

La composée licite de deux morphismes de groupes en est également un.

Démonstration

$\square$

Un *endomorphisme* d'un groupe G est un morphisme de groupes de G dans lui-même.
Un *isomorphisme* de groupes est un morphisme de groupes bijectif.

Proposition (Réciproque d'un isomorphisme) V.5

La réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.

Démonstration

$\square$

On dit qu'un groupe G est *isomorphe* à un groupe G' s'il existe un isomorphisme de G sur G'.
La relation « être isomorphe à » est une relation d'équivalence :

Un *automorphisme* d'un groupe est un endomorphisme bijectif de ce groupe.
L'ensemble des automorphismes de G est noté $\mathrm{Aut}(G)$.

Proposition (Groupe des automorphismes d'un groupe)

$\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

V.6

Démonstration

$\square$

Exemple (Morphismes de groupes)

(1) La signature $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$.
(2) Le déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$.
(3) La multiplication par un élément donné dans un anneau est un morphisme du groupe additif sous-jacent.
(4) Toute application linéaire est un morphisme entre les groupes additifs sous-jacents.
(5) La conjugaison par un élément g_0 dans un groupe :
$$\begin{array}{rccl} \varphi_{g_0} : & G & \to & G \\ & g & \mapsto & g_0 g g_0^{-1} \end{array}$$
est un automorphisme de G, et l'application
$$\begin{array}{rccl} \Phi : & G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ & g & \mapsto & \varphi_g \end{array}$$
est un morphisme de groupes.

vi

Exemple (Morphisme de groupes partant des entiers relatifs)

Pour tout $g \in G$, il existe un unique morphisme $\psi : \mathbb{Z} \to G$ tel que $\psi(1) = g$: c'est
$$k \in \mathbb{Z} \mapsto g^k$$

vii

Proposition (Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme)

Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes, H et H' des parties respectives de G et de G'. On a :

(1) $\forall x \in G, \quad \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$;

(2) $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$;

(3) $(H \leqslant G) \Rightarrow (\varphi(H) \leqslant G')$;

(4) $(H' \leqslant G') \Rightarrow (\varphi^{-1}(H') \leqslant G)$.

V.7

Démonstration

□

L'image d'un groupe abélien par un morphisme de groupes est abélien.

Définition (Image et noyau d'un morphisme)

Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. L'image $\varphi(G)$ de φ, notée $\mathrm{Im}(\varphi)$, est un sous-groupe de G'. On appelle *noyau* de φ et on note $\ker(\varphi)$ le sous-groupe $\varphi^{-1}(\{e_{G'}\})$ de G.

V.vi

L'injectivité d'un morphisme se teste sur le noyau :

Proposition (Caractérisation d'injectivité d'un morphisme)

Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. Le morphisme φ est injectif si et seulement si $\ker(\varphi) = \{e_G\}$.

V.8

Démonstration

□

Exemple (Injectivité d'un morphisme)

Tout endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E a un noyau trivial, et est donc injectif, puis un automorphisme car E est de dimension finie.

viii

3. Groupes monogènes et cycliques

Définition (Groupe monogène, groupe cyclique)

G est dit *monogène* s'il existe $a \in G$ tel que $G =< a >$. Un groupe monogène et fini est dit *cyclique*.

V.vii

Exemple (Groupe Monogène, groupe cyclique)

$(\mathbb{Z}, +)$ est monogène, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est cyclique.

ix

Lemme pour définir l'addition dans le groupe des entiers modulo n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv a' \, [n]$ et $b \equiv b' \, [n]$. On a alors

$$a + b \equiv a' + b' \, [n]$$

V.9

Définition (Groupe des entiers modulo n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ modulo n. La loi d'addition dans $\mathbb{Z}$ induit une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui lui confère une structure de groupe abélien.

V.viii

Démonstration

Justification de cette définition (il faut en particulier bien comprendre l'importance du lemme pour définir l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) :

□

Groupes des entiers modulo n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si k est un entier relatif, sa classe $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers congrus à k modulo n :

$$\overline{k} = \{k + mn, m \in \mathbb{Z}\}$$

Grâce au théorème de division euclidienne,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

Ces classes étant distinctes deux à deux, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe fini de cardinal n.

V.b

Exemple (Groupe des entiers modulo n)

(1) Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\overline{3} + \overline{4} = \overline{7} = \overline{2}$.

(2) Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\overline{3} + \overline{3} = \overline{0}$.

x

Proposition (Générateurs du groupe des entiers modulo n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$. La classe de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendre ce groupe si et seulement si $k \wedge n = 1$.

V.10

Démonstration

□

Exemple (Générateurs du groupe des entiers modulo n)

(1) Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier, $\overline{k}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$: tout élément non nul engendre le groupe.

(2) Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, les seuls générateurs sont $\overline{1}$ et $\overline{5}$.

xi

4. Ordre d'un élément dans un groupe

Définition (Ordre d'un groupe)

Le cardinal d'un groupe fini est aussi appelé son *ordre*.

V.ix

Définition (Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément)

Soit $g \in G$. Si le morphisme de groupes

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & G \\ k & \mapsto & g^k \end{array}$$

n'est pas injectif, alors il existe un unique entier naturel N non nul tel que $\ker(\varphi) = N\,\mathbb{Z}$. On dit alors que g est d'*ordre fini*, et N est appelé *ordre* de g, et (parfois) noté $o(g)$.

V.x

Si g est d'ordre fini, alors

$$o(g) = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\, g^k = e_G\}$$

Exemple (Ordre d'un élément d'un groupe)

(1) e_G est le seul élément de G d'ordre 1.
(2) Dans $\mathbb{Z}$ additif, seul 0 est d'ordre fini.
(3) Si G est fini, tous ses éléments sont d'ordre fini.
(4) Les transpositions sont d'ordre 2, ainsi que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{S}_4$.
(5) Les symétries vectorielles de E distinctes de Id_E sont d'ordre 2 dans $\mathrm{GL}(E)$.
(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est d'ordre 3 dans $\mathcal{S}_3$. Plus généralement, un p-cycle dans $\mathcal{S}_n$ est d'ordre p.
(7) $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est d'ordre n dans $\mathbb{U}$ (et le sous-groupe qu'il engendre est $\mathbb{U}_n$).

xii

Proposition (Élément d'ordre fini)

Soit $x \in G$ un élément d'ordre fini d. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$.

(1) Si $m \equiv n[d]$, alors $x^m = x^n$.
(2) Si $x^n = e$, alors $d|n$.
(3) L'ordre de x est l'ordre du sous-groupe $< x >$ qu'il engendre dans G.

V.11

Démonstration

$\square$

Théorème de Lagrange (pour les sous-groupes cycliques)

L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

V.12

La démonstration n'est exigible que pour G commutatif, mais le résultat est valable en toute généralité.

Démonstration

Traiter le cas où G est abélien, en considérant le produit $\prod_{g \in G} g$ des éléments de G (bien défini car G est abélien), puis, pour $a \in G$ fixé, effectuer le changement d'indice $g \leftarrow ag$.

□

Le « vrai » théorème de Lagrange (l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe) est proposé en exercice de TD, mais est hors-programme. Le théorème ci-dessus énonce que l'ordre d'un sous-groupe cyclique divise l'ordre du groupe : c'est donc le théorème de Lagrange dans le cas particulier des sous-groupes cycliques.

Proposition (Structure des groupes monogènes) V.13

Soit G un groupe monogène.

(1) Si G est infini, alors G est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

(2) Si G est fini de cardinal d, alors G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, +)$.

Démonstration

Soit a un générateur de G, *i.e.* $G =< a >$.
(1) Pour le premier point, on vérifie

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{Z} & \to & G \\ & k & \mapsto & a^k \end{array}$$

est un isomorphisme.
C'est bien un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers G, surjectif car $G =< a >$. De plus, $\ker(\varphi)$ est réduit à 0 puisque a n'est pas d'ordre fini.
(2) Pour le second point, on vérifie que

$$\begin{array}{cccc} \psi : & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \to & G \\ & \overline{k} & \mapsto & a^k \end{array}$$

est bien une application, et que c'est un isomorphisme de groupes.
C'est une application car si $\overline{k} = \overline{k'}$, alors $k \equiv k'[d]$, donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k = k' + qd$ puis

$$a^k = a^{k'+qd} = a^{k'}(a^d)^q = a^{k'}$$

C'est un morphisme car, pour tous entiers k et k' :

$$\psi(\overline{k} + \overline{k'}) = \psi(\overline{k+k'}) = a^{k+k'} = a^k a^{k'} = \psi(\overline{k})\psi(\overline{k'})$$

ψ est clairement surjective car son image est un sous-groupe de G qui possède a, et qui contient donc $< a >$, c'est-à-dire G.
Comme en outre $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et G ont même cardinal fini, ψ est bien bijective.

□

En particulier, le groupe (multiplicatif) $\mathbb{U}_n$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Groupe symétrique

5.1. Définitions

Soit E un ensemble non vide. On appelle *permutation* de E une application bijective de E sur lui-même. On note $\mathcal{S}_E$ (ou $\mathcal{S}(E)$, $\mathfrak{S}_E$) l'ensemble des permutations de E. Cet ensemble est muni d'une structure de groupe pour la composition. Si E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{S}_E$ est fini de cardinal $n!$.

Définition (Groupe symétrique d'indice n) — V.xi

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le *groupe symétrique* $\mathcal{S}_n$ (ou $\mathfrak{S}_n$) comme le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$, muni de la composition.

Un élément σ de $\mathcal{S}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) peut être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Par exemple, l'élément neutre $e(= \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]})$ de $\mathcal{S}_n$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a $\mathcal{S}_3 =$

Le groupe $\mathcal{S}_n$ est d'ordre $n!$, non commutatif dès que $n \geqslant 3$:

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. L'ensemble

$$\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \quad \sigma(n) = n\}$$

est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, canoniquement isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.

Exemple (Ordre d'une permutation) — xiii

Le seul élément d'ordre 1 de $\mathcal{S}_n$ est son élément neutre. Les permutations $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ sont des éléments d'ordre 2 de $\mathcal{S}_4$.

Définition (Cycle, transposition) — V.xii

Soit $n \geqslant 2$, $p \in [\![2, n]\!]$. Un élément de $\mathcal{S}_n$ est appelé *cycle* de longueur p (ou p*-cycle*) s'il existe p éléments distincts $i_1, \dots, i_p$ de $[\![1, n]\!]$ tels que :

(1) $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{p-1}) = i_p, \sigma(i_p) = i_1$.

(2) Pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_1, \dots, i_p\}, \sigma(j) = j$.

On appelle *support* du p-cycle σ l'ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$.
σ peut être noté $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}$.
Un 2-cycle est aussi appelé *transposition*.
Le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ est appelé *permutation circulaire*.

Toute transposition est d'ordre 2, mais un exemple précédent nous montre que la réciproque est fausse.
Deux cycles de supports disjoints commutent.
Un même cycle peut posséder plusieurs « écritures ». Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Un p-cycle est d'ordre p.

Exemple (Cycles)

(1) L'exemple de
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
montre qu'une puissance d'un cycle n'est pas toujours un cycle.

(2) Soit $n \geqslant 3$ et $j, k \in [\![2, n]\!]$, $j \neq k$. On a $\begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k \end{pmatrix}$.

(3) L'inverse du p-cycle $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} i_p & i_{p-1} & \ldots & i_1 \end{pmatrix}$ (c'est aussi σ^{p-1}).

xiv

$\mathcal{S}_n$ possède $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ transpositions.

5.2. Parties génératrices du groupe symétrique

Définition (Orbite d'un élément sous-l'action d'une permutation)

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle *orbite* de i pour σ (ou sous l'action de σ) l'ensemble
$$\Omega_i = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbb{N}\}$$
Une orbite est dite *triviale* si c'est un singleton.

V.xiii

On a
$$\Omega_i = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbb{N}^*\} = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbb{Z}\}$$
mais aussi, si $\sigma^p(i) = i$:
$$\Omega_i = \{\sigma^k(i),\ k \in [\![1, p]\!]\} = \{\sigma^k(i),\ k \in [\![0, p-1]\!]\}$$

Un élément σ de $\mathcal{S}_n$ est un cycle si et seulement si toutes les orbites de σ, sauf une, sont triviales.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et $i, j \in [\![1, n]\!]$. La relation « appartenir à l'orbite de » ($i \mathcal{R} j$ équivaut à $i \in \Omega_j$) est une relation d'équivalence. En particulier, $[\![1, n]\!]$ est union disjointe des orbites distinctes sous l'action de σ.

Proposition (Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints)

Soit $n \geqslant 2$. Tout élément non trivial de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints. De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

V.14

Démonstration

Unicité : les cycles intervenant dans une telle décomposition (de $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{e\}$) doivent avoir pour supports les différentes orbites non triviales de σ, et pour unne telle orbite, l'action du cycle correspondant s doit coïncider avec celle de σ, ce qui détermine s.

□

Démonstration

Existence : soit σ un élément non trivial de $\mathcal{S}_n$, et $\Omega_{j_1},\dots,\Omega_{j_l}$ les différentes orbites non triviales de $[\![1,n]\!]$ sous l'action de σ. Pour tout $k\in[\![1,l]\!]$, on note p_k le cardinal de l'orbite Ω_{j_k}, de sorte que

$$\Omega_{j_k}=\{j_k,\sigma(j_k),\dots,\sigma^{p_k-1}(j_k)\}.$$

On note $\sigma_k=\begin{pmatrix} j_k & \sigma(j_k) & \dots & \sigma^{p_k-1}(j_k)\end{pmatrix}$. Les permutations σ et σ_k coïncident sur Ω_{j_k}. On sait par ailleurs que les cycles $\sigma_1,\dots,\sigma_l$ commutent deux à deux. Vérifions que $\sigma=\sigma_1\dots\sigma_l$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Cet entier appartient à au plus une des orbites $\Omega_{j_1},\dots,\Omega_{j_l}$:

- S'il n'appartient à aucune d'entre elles, il est laissé fixe par σ, ainsi que par $\sigma_1,\dots,\sigma_l$, de sorte que $\sigma(i)=(\sigma_1\dots\sigma_l)(i)$.
- S'il appartient à l'une d'entre elles, mettons $\Omega_{j_{k_0}}$, alors, il est laissé invariant par tout σ_j tel que $j\neq j_0$, de sorte que $(\sigma_1\dots\sigma_l)(i)=\sigma_{j_{k_0}}(i)=\sigma(i)$.

□

Exemple (Décomposition d'une permutation)

La permutation $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&7&1&8&6&4&2\end{pmatrix}$ admet la décomposition

$$\begin{pmatrix}1&3&7&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&8\end{pmatrix}$$

xv

Proposition (Génération du groupe symétrique par les transpositions)

Soit $n\geqslant 2$. Tout élément de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions.

V.15

Démonstration

D'après la proposition précédente, il suffit de le prouver pour tout cycle. On note que :

$$\begin{pmatrix}i_1&\dots&i_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i_1&i_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_2&i_3\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}i_{p-1}&i_p\end{pmatrix}.$$

□

Cette décomposition n'est pas unique en général, voir l'exemple 2 page 136. De plus, d'après cet exemple, les transpositions $\begin{pmatrix}1&j\end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{S}_n$.

5.3. Signature, groupe alterné

Définition (Signature d'une permutation)

Soit $\sigma\in\mathcal{S}_n$. On appelle *signature* de σ le nombre noté $\varepsilon(\sigma)$, défini par

$$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n-t},$$

où t est le nombre d'orbites de σ.

On dit que σ est de signature *paire* (resp. *impaire*) si $\varepsilon(\sigma)=1$ (resp. $\varepsilon(\sigma)=-1$).

V.xiv

Exemple (Signature d'une permutation)

(1) $\varepsilon(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}) = 1$.
(2) Une transposition est de signature -1.
(3) Un 3-cycle est de signature 1.
(4) Plus généralement, pour tout p-cycle σ, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p+1}$.
(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{S}_4$ est de signature 1.

xvi

Lemme sur la signature

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Alors

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$$

V.16

Démonstration

Écrivons $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ $(i \neq j)$. Soit Ω une orbite sous l'action de σ. On vérifie que
– si Ω ne comprend ni i ni j, alors Ω est aussi une orbite sous l'action de $\sigma \circ \tau$.
– si Ω comprend i et j, alors les orbites de i et j sous l'action de $\sigma \circ \tau$ sont disjointes, d'union Ω.
– si Ω comprend i mais pas j, et si on note Ω' l'orbite de j sous l'action de σ, alors l'orbite de i et de j sous l'action de $\sigma \circ \tau$ est $\Omega \cup \Omega'$.
Ainsi, les nombres d'orbites sous les actions respectives de σ et $\sigma \circ \tau$ n'ont pas même parité, d'où le résultat.

□

Ce lemme permet de prouver la :

Proposition (La signature est un morphisme)

L'application $\varepsilon : (\mathcal{S}_n, \circ) \to (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes multiplicatifs.

V.17

Démonstration

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Le lemme précédent montre que si l'on décompose σ en produit de k transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. Ainsi, si $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de k' transpositions, on a :

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = (-1)^{k+k'} = (-1)^k(-1)^{k'} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma'),$$

d'où le résultat.

□

Cela prouve en particulier que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de p transpositions (resp. de q transpositions), alors p et q ont même parité.

Définition (Groupe alterné d'indice n)

On définit le *groupe alterné* d'indice n, noté $\mathcal{A}_n$ (ou $\mathfrak{A}_n$), comme le noyau du morphisme de groupes $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ (*i.e.* l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ de signature paire).

V.xv

CHAPITRE VI

Anneaux, corps, algèbres

Sommaire

Sauf mention contraire, A désignera un anneau, et K un corps.

En arithmétique, qui est dans sa version abstraite l'étude de la structure d'anneau [1], la notion pertinente n'est pas celle de sous-anneau, mais plutôt d'*idéal* (définie plus loin). La raison principale en est, pour simplifier, que l'ensemble des multiples d'un élément a de A n'est pas, en général, un sous-anneau, mais un idéal.

Révisez vos cours de MPSI sur les anneaux, l'arithmétique, les polynômes et les fractions rationnelles.

1. Anneaux

1.1. Définition et propriétés générales

Définition (Anneau)

On appelle *anneau* un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$, telles que :

(1) $(A, +)$ est un groupe abélien. L'élément neutre pour l'addition est noté 0 (ou 0_A) et appelé *élément nul.*

(2) La multiplication est associative.

(3) A admet un élément neutre pour la multiplication, noté 1 (ou 1_A), et appelé *élément unité.*

(4) La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Le symétrique d'un élément pour l'addition est appelé *opposé* (de cet élément).
S'il existe, le symétrique d'un élément pour la multiplication est appelé *inverse* (de cet élément).
Enfin, un anneau est dit *commutatif* si sa loi de multiplication est commutative.

VI.i

La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition revient à dire que, pour tout $a \in A$, les applications $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$ sont des endomorphismes du groupe $(A, +)$.

On obtient donc immédiatement :

1. L'arithmétique au sens usuel étant l'étude de $\mathbb{Z}$.

Proposition (Premières propriétés calculatoires dans un anneau)

Pour tous $a, b, c \in A$ et tout entier relatif m, on a :
- $a0_A = 0_A a = 0_A$ (on dit que 0_A est *absorbant*) ;
- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$;
- $(-a)(-b) = ab$;
- $(a-b)c = ac - bc$;
- $a(b-c) = ab - ac$;
- $a(mb) = (ma)b = m(ab)$.

VI.1

Exemple (Anneau nul)

Il se peut que $1_A = 0_A$, auquel cas l'anneau est réduit à son élément nul (et dit *nul*).

i

Exemple (Anneaux)

(1) $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.

(2) Si $(A, +, \times)$ est un anneau et X un ensemble non vide, alors $A^X = \mathcal{F}(X, A)$, muni des lois déduites de A est un anneau, d'élément nul l'application nulle et d'élément unité l'application constante de valeur 1. En particulier, il en est ainsi de $\mathbb{R}^I$ et de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (où I désigne un intervalle non vide).

(3) Si A et B sont deux anneaux, on peut définir un anneau produit (comme pour les groupes). En particulier, $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ est un anneau.

(4) Lorsque A est commutatif, on peut construire l'anneau $A[X]$ des polynômes à coefficients dans A à une indéterminée (et donc par exemple $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X, Y]$).

(5) Étant donné un groupe $(G, +)$, l'ensemble $\mathrm{End}(G)$ de ses endomorphismes, muni des lois $+$ et $\circ$ (usuelles) est un anneau.

(6) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{L}(E)$ est un anneau.

(7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels, muni des lois usuelles, est un anneau, non commutatif si $n \geqslant 2$.

ii

Proposition (Distributivité du produit par rapport au symbole sommatoire)

Soit A un anneau, $n \in \mathbb{N}^*$, $b \in A$ et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in A^n$.

$$b\left(\sum_{i \in [\![1,n]\!]} a_i\right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (ba_i)$$

et

$$\left(\sum_{i \in [\![1,n]\!]} a_i\right) b = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i b).$$

VI.2

Démonstration

Récurrence sur n. $\square$

Proposition (Formule de Bernoulli) VI.3

Soit $a, b \in A$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et b commutent. On a :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k\right)(a-b).$$

Démonstration

Cette formule se démontre sans récurrence :

$$\begin{aligned}
(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k\right) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^{k+1}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^k\right) = a^n - b^n.
\end{aligned}$$

De même dans l'autre sens.

□

Proposition (Formule du binôme de Newton) VI.4

Soit $a, b \in A$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et b commutent. On a alors la relation :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration

Par récurrence sur n. L'amorçage est clair, détaillons le calcul principal de l'hérédité :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \quad (\text{car } ab = ba) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \quad (\text{formule du triangle de Pascal})
\end{aligned}$$

□

Pour appliquer ces formules, on vérifiera au préalable que les éléments commutent. Ce sera par exemple le cas si A est commutatif.

Pour ne pas se tromper dans les exposants, on peut vérifier l'homogénéité de ces formules (voir a et b comme des longueurs).

L'exercice 445 de TD est quasiment du cours.

Notation (Éléments inversibles d'un anneau) VI.ii

Soit A un anneau non nul. On note $A^\times$ (ou A^*) l'ensemble des éléments inversibles de A.

Proposition (Les inversibles forment un groupe) VI.5

Soit A un anneau non nul. L'ensemble $A^\times$ est un groupe pour la loi $\times$.

Démonstration

$\square$

Exemple (Éléments inversibles) iii

(1) $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\} (\neq \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

(2) Si G est un groupe additif, $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau : en particulier, $\mathrm{Aut}(G)$, qui en est l'ensemble des inversibles, est un groupe.

(3) L'ensemble des matrices réelles carrées inversibles de taille $n \in \mathbb{N}^*$ forme un groupe multiplicatif.

(4) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{R}^X$ (où X est un ensemble non vide) ?

Définition (Diviseur de zéro) VI.iii

Soit A un anneau non nul, et $a \in A \setminus \{0\}$. On dit que a est un *diviseur de zéro* s'il existe b dans A, non nul, tel que $ab = 0$ ou $ba = 0$.

Un élément non nul a est un diviseur de zéro si et seulement si il est non simplifiable (raisonner sur les endomorphismes $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$ de $(A, +)$).

En particulier, il ne peut être inversible, mais un élément peut ne pas être inversible tout en étant simplifiable (exemple : tout nombre distinct de 0, 1 et -1 dans $\mathbb{Z}$).

Exemple (Diviseurs de zéro)

Dans A^2 (avec $A \neq \{0\}$), $\mathbb{R}^X$ (avec $|X| \geqslant 2$), on a des diviseurs de zéro.

iv

Définition (Anneau intègre)

Un anneau non nul est dit *intègre* s'il est commutatif et sans diviseur de zéro.

VI.iv

Exemple (Anneaux intègres)

(1) Les anneaux usuels $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont intègres, mais pas A^2.
(2) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est intègre si et seulement si $n = 1$ (lorsque $n \geqslant 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif, et a des diviseurs de zéro).
(3) Les anneaux de fonctions sont rarement intègres.

v

1.2. Sous-anneaux

B désigne une partie de A.

Définition (Sous-anneau)

On dit que B est un *sous-anneau* de $(A, +, \times)$ si :
- 0_A et 1_A appartiennent à B ;
- B est stable pour $+$;
- B est stable pour $\times$;
- muni des lois induites, $(B, +, \times)$ possède une structure d'anneau.

VI.v

On peut enlever la condition $0_A \in B$, car elle se déduit des autres. En revanche, il faut vérifier que $1_A \in B$, qui ne résulte pas des suivantes (voyez le contraste avec les sous-groupes).

Donner un exemple de partie non vide de A (non nul) vérifiant toutes les conditions ci-dessus, sauf la condition $1_A \in B$:

Comme pour les sous-groupes, on dispose d'une caractérisation un peu plus pratique des sous-anneaux :

Proposition (Caractérisation des sous-anneaux)

B est un sous-anneau de A si et seulement si
(1) $1_A \in B$;
(2) $\forall\, a, b \in B, \quad a - b \in B$;
(3) $\forall\, a, b \in B, \quad ab \in B$.

VI.6

Exemple (Sous-anneaux)

(1) La relation « être un sous-anneau de » est une relation d'ordre.

(2) On peut appliquer ceci à $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$.

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Q}(i)$ sont des sous-anneaux de $\mathbb{C}$ (voir le TD pour des définitions).

(4) Une intersection de sous-anneaux en est un.

vi

1.3. Morphismes d'anneaux

A et B désignent des anneaux.

Définition (Morphisme d'anneaux)

On dit qu'une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :
– $f(0_A) = 0_B$ et $f(1_A) = 1_B$;
– $\forall a, b \in A, \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$;
– $\forall a, b \in A, \quad f(ab) = f(a)f(b)$.

VI.vi

Encore une fois, la condition $f(0_A) = 0_B$ se déduit des autres, mais pas $f(1_A) = 1_B$, qu'il ne faudra donc pas oublier de vérifier. Par exemple, la fonction constante de A dans B, de valeur 0_B n'est pas un morphisme d'anneaux (à moins que B soit nul), bien qu'elle vérifie toutes les autres propriétés ci-dessus.

On a les propriétés classiques des morphismes. Par exemple, si a est inversible, alors $f(a)$ l'est, d'inverse $f(a^{-1})$. Plus généralement, $f(a^n) = f(a)^n$ pour tout entier pour lequel cela a un sens. L'image directe ou réciproque d'un sous-anneau est un sous-anneau.

Un morphisme d'anneaux f est notamment un morphisme de groupes (additifs). On en déduit en particulier que f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_A\}$ (où $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_B\})$).

Exemple (Morphismes d'anneaux)

(1) Dans $(\mathbb{R}^I, +, \cdot)$, évaluation $f \mapsto f(a)$ en $a \in I$.

(2) Endomorphismes de l'anneau $\mathbb{Z}$: ce sont des endomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, donc de la forme $n \mapsto an$. Comme un tel morphisme doit valoir 1 en 1, on en déduit que c'est $\operatorname{Id}_{\mathbb{Z}}$.

(3) Morphisme naturel d'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (et plus généralement de tout sous-anneau dans un anneau).

(4) Morphisme de dérivation dans un anneau de polynômes : c'est un morphisme de groupes additifs et d'espaces vectoriels, mais pas d'anneaux (il n'envoie pas l'unité sur l'unité, et ne respecte pas la multiplication).

(5) Shifts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (faire attention pour le shift à droite).

(6) Si $b \in A^\times$, alors $a \in A \mapsto bab^{-1}$ est un automorphisme de l'anneau A, appelé *automorphisme de conjugaison par* b.

vii

Contrairement aux groupes, il n'existe pas toujours de morphisme d'anneaux de A dans B. C'est le cas par exemple de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ (en seconde lecture) etc.

2. Corps

Définition (Corps)

Soit K un ensemble muni de deux lois $+$ et $\times$. On dit que $(K,+,\times)$ est un *corps* si $(K,+,\times)$ est un anneau commutatif non nul, dans lequel tout élément non nul est inversible.

VI.vii

Corps

(1) Un corps n'est rien d'autre qu'un anneau commutatif dont les éléments non nuls forment un groupe multiplicatif.

(2) Tout corps est un anneau intègre (et la réciproque est fausse).

VI.a

Exemple (Corps)

(1) $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps.

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$ sont des corps (on montre que ce sont des sous-corps de $\mathbb{C}$, cf. ci-dessous).

(3) Pour tout nombre premier p, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps (en seconde lecture).

(4) Le produit cartésien de deux corps n'est pas un corps.

viii

Définition (Sous-corps)

Une partie L d'un corps $(K,+,\times)$ est appelée *sous-corps* de K si L est un sous-anneau de K, qui, muni des lois induites, est un corps. On dit alors que K est un *surcorps* de L.

VI.viii

Proposition (Caractérisation des sous-corps)

Une partie L d'un corps K en est un sous-corps si et seulement si
– $1_K \in L$;
– $\forall\, x, y \in L, \quad x - y \in L$;
– $\forall (x,y) \in (L - \{0\})^2, \quad xy^{-1} \in L$.

VI.7

Démonstration

$\square$

Définition (Morphisme de corps)

Soient $(K, +, \times)$ et $(L, +, \times)$ deux corps. Une application $f : K \to L$ est un *morphisme du corps* K vers le corps L si f est un morphisme de l'anneau $(K, +, \times)$ vers $(L, +, \times)$.

VI.ix

3. Idéaux d'un anneau commutatif

A désigne ici un anneau commutatif.

Définition (Idéal d'un anneau commutatif)

On dit qu'une partie $\mathcal{I}$ de A en est un *idéal* si :

(1) $\mathcal{I}$ est un sous-groupe de $(A, +)$.

(2) Pour tout $(a, x) \in A \times \mathcal{I}$, ax appartient à $\mathcal{I}$.

VI.x

On pourrait se dire qu'un idéal $\mathcal{I}$ est un super sous-anneau, puisqu'il est stable par la multiplication par un élément *quelconque* de A, mais nous n'imposons pas que $1_A \in \mathcal{I}$, donc $\mathcal{I}$ n'est pas, en général, un sous-anneau de A. D'ailleurs, quel est le seul idéal de A possédant 1_A ?

Exemple (Idéal engendré par un élément)

Soit $a \in A$. L'ensemble

$$aA \overset{def}{=} \{ax, x \in A\}$$

est un idéal, appelé *idéal engendré par a*.

ix

On a $aA = A$ si et seulement si a est inversible.

Définition (Idéal principal, anneau principal)

Un idéal $\mathcal{I}$ de A est dit *principal* s'il est engendré par un élément, *i.e.* s'il existe $a \in A$ tel que

$$\mathcal{I} = aA.$$

L'anneau commutatif A est dit *principal* si tous ses idéaux sont principaux.

VI.xi

Exemple (Idéal principal)

L'anneau $\mathbb{Z}$ est principal.

x

Une intersection quelconque et une somme finie[2] d'idéaux de A sont des idéaux de A.

Voici un exemple typique d'idéal, qui permet également de comprendre pouquoi cette notion intervient souvent en arithmétique :

Proposition (Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal)

Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est alors un idéal de A.

VI.8

2. En revanche, une somme de sous-anneaux n'est pas, en général, un sous-anneau.

Démonstration

□

Exemple (Idéaux d'un corps)

Les seuls idéaux d'un corps K sont $\{0_K\}$ et K lui-même. Réciproquement, un anneau (commutatif non nul) A qui n'a pour idéaux que $\{0_A\}$ et A est-il un corps ?

xi

Définition (Relation de divisibilité dans un anneau commutatif)

Soit $a, b \in A$. On dit que b *divise* a (dans A), ou que a est un multiple de b (dans A), et on note $b|a$, s'il existe $x \in A$ tel que $a = bx$.

VI.xii

Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux

Le fait que b divise a peut se traduire par l'inclusion $aA \subset bA$.

VI.b

Définition (Éléments associés)

Deux éléments a et b d'un anneau A sont dits *associés* s'il existe un élément inversible u de A tel que $a = bu$.

VI.xiii

Cela définit une relation d'équivalence sur A.

4. Les anneaux de congruence

On considère des entiers n et m supérieurs ou égaux à 2. On a défini l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et on lui a conféré une structure de groupe additif lors du cours sur les groupes.

Lemme pour définir la multiplication dans un anneau de congruence

Soit $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $a \equiv a'\ [n]$ et $b \equiv b'\ [n]$. On a alors

$$ab \equiv a'b'\ [n]$$

VI.9

Démonstration

$\square$

Définition (Anneau de congruence modulo n) VI.xiv

La multiplication dans $\mathbb{Z}$ passe au quotient modulo n, et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, muni de l'addition et de cette multiplication induite, est un anneau commutatif. Étant donné $k \in \mathbb{Z}$, on notera $\overline{k}_n$ sa classe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ou plus simplement $\overline{k}$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

Démonstration

Le lemme précédent justifie le passage au quotient (et c'est le point crucial des vérifications).
Les autres propriétés établissant la structure d'anneau commutatif résultent essentiellement de ces mêmes propriétés pour l'anneau $\mathbb{Z}$.
On sait déjà que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On a

$$(\overline{a}\,\overline{b})\,\overline{c} = \overline{ab}\,\overline{c} = \overline{(ab)c} = \overline{a(bc)} = \overline{a}\,\overline{bc} = \overline{a}\,(\overline{b}\,\overline{c}),$$

d'où l'associativité du produit.
De plus

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} = \overline{ba} = \overline{b}\overline{a}$$

$\overline{1}$ est clairement neutre pour la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Enfin

$$\overline{a}\,(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\,\overline{b+c} = \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c}$$

d'où la distributivité.

$\square$

Proposition (Inversibles de l'anneau de congruence modulo n) VI.10

Soit $k \in \mathbb{Z}$. La classe de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si $k \wedge n = 1$.

Démonstration

$\square$

Corollaire (Caractérisation de la structure de corps sur les anneaux de congruence) VI.11

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Démonstration

$\square$

Lemme pour le théorème des restes chinois

On définit une application f de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant $f(\overline{k}_{mn}) = \overline{k}_n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et il s'agit d'un morphisme d'anneaux.

VI.12

Démonstration

$\square$

Théorème (des restes) chinois

On suppose m et n premiers entre eux. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & & \overline{k}_{mn} & \mapsto & \left(\overline{k}_m, \overline{k}_n\right) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

VI.13

Démonstration

On sait d'après le lemme que φ est bien défini, et qu'il s'agit d'un morphisme d'anneaux. On vérifie ensuite l'injectivité en testant le noyau : soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{k}_{mn} \in \ker(\varphi)$. On a donc $\overline{k}_m = \overline{0}_m$ et $\overline{k}_n = \overline{0}_n$, donc k est un multiple de m et de n. Comme m et n sont premiers entre eux, c'est un multiple de mn, *i.e.* $\overline{k}_{mn} = \overline{0}_{mn}$: φ est injectif.
On conclut :

$\square$

Application aux systèmes de congruences.

Théorème des restes chinois

Si on suppose que m et n ne sont pas premiers entre eux, l'application du théorème reste un morphisme d'anneaux, mais n'est plus bijective :

VI.c

Définition (Indicatrice d'Euler)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi(n) \stackrel{def}{=} \operatorname{Card}\{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = 1\}.$$

On définit ainsi une application $\varphi \ : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, appelée *indicatrice d'Euler*.

VI.xv

$\varphi(n)$ est l'ordre du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exemple (Indicatrice d'Euler)

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie que n est premier si et seulement si $\varphi(n) = n - 1$.
(2) Pour tout nombre premier p et tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^r) = (p-1)p^{r-1}$.

xii

Proposition (L'indicatrice d'Euler est multiplicative)

L'indicatrice d'Euler est *multiplicative*, au sens où, si m et n sont premiers entre eux, on a :

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

VI.14

Démonstration

L'isomorphisme d'anneaux du théorème des restes chinois induit un isomorphisme des groupes des inversibles de ces anneaux, qui ont en particulier même cardinal. $\square$

Proposition (Calcul de l'indicatrice d'Euler)

Soit $n = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2, donné avec sa décomposition en facteurs premiers. On a :

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i - 1)p_i^{r_i - 1} = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

VI.15

I : calcul de $\varphi(n)$ à l'aide d'une méthode de crible.

Théorème d'Euler

Soit a un entier relatif, premier avec n. On a :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$$

VI.16

Démonstration

On applique le théorème de Lagrange pour les sous-groupes cycliques à l'élément $\overline{a}$ de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

□

Théorème d'Euler

On retrouve immédiatement, dans le cas où $n = p$ est supposé premier, le petit théorème de Fermat :

$$\forall\, a \in \mathbb{Z},\ a^p \equiv a[p]$$

VI.d

Codage RSA

Le codage RSA (du nom de ses inventeurs Rivest, Shamir et Adleman), est un protocole cryptographique pour transmettre un message sur un canal peu sûr.
Le principe est le suivant :
– Ada choisit deux nombres premiers distincts p et q, et forme leur produit $n = pq$. On a donc $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
– Ada choisit un entier e, premier avec $\varphi(n)$, et détermine d tel que $de \equiv 1\,[\varphi(n)]$ (on dit que d est un *inverse modulaire* de e modulo $\varphi(n)$).
– Ada communique le couple (n, e) à tout le monde. Si Bernice veut lui transmettre un message codé M (un certain entier compris entre 0 et $n-1$), alors Bernice transmet le reste C de la division de M^e par n.
– Ada peut alors décoder le message de Bernice en calculant C^d, puisque

$$C^d \equiv M\,[n]$$

Ce protocole se fonde sur la difficulté de calculer $\varphi(n)$, ce qui revient à connaître $p + q$ puisqu'on connaît déjà pq. En particulier, on espère que récupérer p et q connaissant leur produit n est difficile.

VI.e

5. Anneaux de polynômes à une indéterminée

5.1. Rappels de MPSI sur les polynômes

Dans ce paragraphe, K est un sous-corps de $\mathbb{C}$. On ne revient pas sur la construction de l'anneau $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K et à une indéterminée X.
On rappelle que c'est un anneau commutatif et un K-espace vectoriel.

Définition (Degré d'un polynôme)

Soit $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k \in K[X]$, P non nul. On appelle *degré* de P et note $\deg(P)$ le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.

VI.xvi

Définition (Coefficient dominant, polynôme unitaire)

On appelle *coefficient dominant* d'un polynôme $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ non nul de degré p le coefficient a_p, *i.e.* celui de son terme de plus haut degré. Un polynôme *unitaire* (ou *normalisé*) est un polynôme (non nul) de coefficient dominant égal à 1.
Le *normalisé* d'un polynôme non nul P, de coefficient dominant λ, est le polynôme $\frac{1}{\lambda}P$.

VI.xvii

Proposition (Degré d'une somme, d'un produit)

Soit P et Q deux polynômes de $K[X]$. On a :

(1) $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$, une condition suffisante d'égalité étant $\deg P \neq \deg Q$.

(2) $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

VI.17

L'anneau $K[X]$ est intègre (*i.e.* c'est un anneau commutatif non nul et sans diviseur de zéro).
Les inversibles de $K[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

Proposition (Degrés échelonnés)

Soit $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ une famille de polynômes *tous non nuls*. On suppose que

$$\deg P_1 < \cdots < \deg P_m$$

(on dit que l'on a une famille de polynômes à *degrés échelonnés*).
La famille $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ est alors libre.

VI.18

En application : l'exercice 483.

Définition (Espace des polynômes de degré au plus n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $K_n[X]$ par

$$\{P \in K[X],\ \deg P \leqslant n\}$$

VI.xviii

$K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$, de dimension $n+1$, dont une base (dite *canonique*) est $(1, X, \ldots, X^n)$.
Si $n \geqslant 1$, $K_n[X]$ n'est pas un sous-anneau de $K[X]$, car non stable par multiplication.

Définition (Polynômes associés)

On dit que deux polynômes A et B *sont associés* s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $A = \lambda B$

VI.xix

Proposition (Caractérisations des polynômes associés)

Soit $A, B \in K[X]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) A et B sont associés.

(2) A divise B et B divise A.

(3) A et B ont même degré, et l'un divise l'autre.

VI.19

Théorème de division euclidienne dans l'anneau des polynômes — VI.20

Étant donné deux polynômes A et B de $K[X]$, où $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $K[X]$ vérifiant :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B$$

Dans ce contexte, on appelle Q le *quotient* et R le *reste* de la division euclidienne de A par B.

Proposition (Morphisme d'évaluation d'un polynôme) — VI.21

Soit $\alpha \in K$. L'application $K[X] \to K$, $P \mapsto P(\alpha)$ est à la fois une forme linéaire et un morphisme d'anneaux.

Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ (où $\alpha \in K$) est $P(\alpha)$.

Définition (Racine d'un polynôme) — VI.xx

Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. On dit que α est un *zéro* (ou une *racine*) de P si $P(\alpha) = 0$.

α est une racine de P si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est nul, si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.

Définition (Ordre de multiplicité d'une racine) — VI.xxi

Soit α une racine de P non nul. α est appelée *racine d'ordre (de multiplicité) p* (de P) si p est le plus grand entier tel que $(X - \alpha)^p$ divise P.
On dit que α est racine *multiple* (simple, double, triple, ...) si son ordre vaut 2 au moins (exactement 1, 2, 3, ...).

Proposition (Nombre de racines d'un polynôme comptées avec leur multiplicité) — VI.22

Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Définition (Polynôme dérivé) — VI.xxii

Soit $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \in K[X]$. On définit le *polynôme dérivé* P' de P par

$$P' = \sum_{k \geqslant 1} k a_k X^{k-1} \left(= \sum_{k \geqslant 0} (k+1) a_{k+1} X^k\right)$$

Proposition (Degré du polynôme dérivé) — VI.23

Si $\deg P > 0$, alors $\deg P' = \deg P - 1$.
Le polynôme P est constant si et seulement si $P' = 0$.

La dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel $K[X]$.
Soit $A, B \in K[X]$. On a :

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

On définit la dérivée d'ordre $r \in \mathbb{N}$ de tout polynôme.

Proposition (Formule de Taylor) VI.24

Pour tous $P \in K[X]$, $\alpha \in K$:

$$P(X) = \sum_{p \geqslant 0} \frac{P^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^p$$

Démonstration

Le vérifier pour la base $((X-\alpha)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et propager par linéarité. □

Proposition (Caractérisation de l'ordre d'une racine) VI.25

α est racine d'ordre r de P si et seulement si

$$P(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(r)}(\alpha) \neq 0$$

Démonstration

Pour le sens direct, remarquer si α est d'ordre $r \geqslant 1$ dans P, alors α est d'ordre $r-1$ dans P'.
Le sens indirect provient de la formule de Taylor. □

5.2. Arithmétique dans l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps

Proposition (Idéaux de $K[X]$) VI.26

L'anneau $K[X]$ est principal.

Démonstration

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $K[X]$. Si $\mathcal{I} = \{0\}$, alors $\mathcal{I} = 0\,K[X]$. Supposons $\mathcal{I}$ non nul : l'ensemble

$$\Omega \overset{def}{=} \{\deg(P), P \in \mathcal{I} \setminus \{0\}\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un plus petit élément n. Soit $A \in \mathcal{I}$ tel que $\deg(A) = n$.
Par structure d'idéal de $\mathcal{I}$, on a $A\,K[X] \subset \mathcal{I}$.
Réciproquement, soit $P \in \mathcal{I}$. On effectue la division euclidienne de P par A (non nul) :

$$P = AQ + R$$

où Q et R sont deux polynômes, et $\deg(R) < \deg(A)$. Par structure d'idéal de $\mathcal{I}$, $R \in \mathcal{I}$, puis, par définition de n, $R = 0$: $P \in A\,K[X]$.
Ainsi, $\mathcal{I} = A\,K[X]$, et $K[X]$ est donc principal. □

Tout idéal $\mathcal{I}$ non nul de $K[X]$ admet donc un unique générateur normalisé.

Générateur normalisé

Dans $\mathbb{Z}$, nous savons que les idéaux sont les parties de la forme $a\mathbb{Z}$, où $a \in \mathbb{Z}$. Si l'idéal n'est pas nul, il admet exactement deux générateurs, à savoir a et $-a$: l'arithmétique usuelle, *i.e.* l'étude de l'anneau $\mathbb{Z}$ a privilégié l'unique générateur positif. Pour les idéaux non nuls de $K[X]$, nous privilégions l'unique générateur normalisé.
Ceci permet de parler d'entiers, ou de polynômes (ce que vous aviez fait jusqu'à présent), plutôt que d'idéaux.

VI.f

Définition (PGCD de polynômes)

Soit $A, B \in K[X]$. On appelle *plus grand commun diviseur* (ou *PGCD*) de A et B et on note $A \wedge B$ l'unique générateur nul ou normalisé de l'idéal $A\,K[X] + B\,K[X]$.
Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des éléments de $K[X]$, on appelle PGCD de ces polynômes et on note $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ l'unique générateur nul ou normalisé de

$$A_1\,K[X] + \dots + A_n\,K[X].$$

VI.xxiii

Définition (PPCM de polynômes)

Soit $A, B \in K[X]$. On appelle *plus petit commun multiple* (ou *PPCM*) de A et B et on note $A \vee B$ l'unique générateur nul ou normalisé de l'idéal $A\,K[X] \cap B\,K[X]$.
Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des éléments de $K[X]$, on appelle PPCM de ces polynômes et on note $A_1 \vee \dots \vee A_n$ l'unique générateur nul ou normalisé de

$$A_1\,K[X] \cap \dots \cap A_n\,K[X].$$

VI.xxiv

PGCD et PPCM

Ces définitions correspondent bien au sens usuel des termes PGCD et PPCM : on montre en effet que pour la relation d'ordre de divisibilité dans l'ensemble Ω des polynômes nuls ou unitaires, $A \wedge B$ (resp. $A \vee B$) est le plus grand élément de l'ensemble des éléments de Ω divisant A et B (resp. multiples de A et B).

VI.g

Définition (Polynômes premiers entre eux)

Soit $A, B, A_1, \dots, A_n$ des polynômes sur K. On dit que A et B sont *premiers entre eux* si $A \wedge B = 1$.
On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont *premiers entre eux deux à deux* si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts, A_i et A_j sont premiers entre eux.
On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont *premiers entre eux dans leur ensemble* si $A_1 \wedge \dots \wedge A_n = 1$.

VI.xxv

Théorème de Bézout

Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(U, V) \in K[X]^2$ tel que

$$AU + BV = 1.$$

VI.27

Démonstration

□

De même, $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe des polynômes $U_1, \dots, U_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} U_i A_i = 1.$$

Si $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux deux à deux, alors ils le sont dans leur ensemble, mais la réciproque est fausse.

Algorithme d'Euclide étendu VI.h

Pour trouver une relation de Bézout sur des entiers ou des polynômes A et B de manière algorithmique, on peut utiliser les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice [a]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & B \end{pmatrix}$$

afin d'obtenir $A \wedge B$ sur la dernière colonne : les coefficients de la ligne correspondante donnent un couple (U, V) convenable.

a. Cette suite d'opérations suivant l'algorithme d'Euclide classique.

Théorème (Lemme de Gauss) VI.28

Soit A, B et C trois polynômes. On suppose que A divise BC et que $A \wedge B = 1$. Le polynôme A divise alors C.

Démonstration

□

Corollaire (PPCM de polynômes premiers entre eux) VI.29

Soit A et B deux polynômes sont premiers entre eux. $A \vee B$ est alors le normalisé de AB.

Démonstration

□

Définition (Irréductible de $K[X]$)

Un polynôme A non constant est dit *irréductible* (sur K, ou dans $K[X]$) si tout polynôme de $K[X]$ le divisant est constant ou associé à A.

VI.xxvi

Exemple (Polynômes irréductibles)

(1) Tout polynôme de degré 1 est donc irréductible.
(2) Un polynôme de degré 2 n'est pas toujours irréductible, mais peut l'être.
(3) Un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 est non irréductible s'il possède une racine et *a fortiori* s'il est scindé, mais ces conditions ne sont pas nécessaires.
(4) En revanche elles le deviennent si le degré du polynôme est 2 ou 3.
(5) En particulier, un polynôme réel de degré impair $\geqslant 3$ n'est jamais irréductible sur $\mathbb{R}$.

xiii

Tout polynôme est évidemment divisible par les polynômes constants non nuls et par les polynômes qui lui sont associés : un polynôme irréductible est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs sont ces diviseurs évidents.

Si P est irréductible et si A est un polynôme quelconque, alors P et A sont premiers entre eux ou P divise A (puisque $A \wedge P$ est soit égal à 1, soit égal au normalisé de P).

Proposition (Polynôme irréductible divisant un produit)

Un polynôme irréductible qui divise un produit de polynômes divise (au moins) un des termes de ce produit.

VI.30

Démonstration

Si un polynôme irréductible P ne divise pas des polynômes $A_1, \dots, A_m$, alors il est premier avec chacun d'entre eux, donc avec leur produit, et ce dernier n'est donc pas divisible par P.

□

Lemme Existence d'un diviseur irréductible

Tout polynôme non constant A admet au moins un diviseur irréductible.

VI.31

Démonstration

Considérer un diviseur non constant de A de degré minimal (après avoir justifié qu'il en existait), et montrer son irréductibilité.

□

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles VI.32

Pour tout polynôme non constant A, il existe des polynômes irréductibles unitaires $P_1, \dots, P_k$ sur K, distincts deux à deux, des entiers naturels $r_1, \dots, r_k$ tous non nuls, et un scalaire non nul λ, tels que

$$A = \lambda \prod_{i=1}^{k} P_i^{r_i}.$$

De plus, cette décomposition est unique à réindexation près des couples $(P_1, r_1), \dots, (P_k, r_k)$.

Démonstration

L'existence se montre par récurrence forte sur le degré de A.
L'unicité provient essentiellement de la proposition VI.30.

□

Proposition (Irréductibles dans les cas complexe et réel) VI.33

(1) Les irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont les polynômes de degré 1.

(2) Les irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 sans racine réelle.

Démonstration

Il est clair que les polynômes mentionnés sont bien irréductibles sur le corps considéré.
Réciproquement, si $A \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{C}$, alors il n'est pas constant, et admet donc une racine α : A est irréductible et multiple du polynôme non constant $X - \alpha$, donc ces polynômes sont associés et A est de degré 1.
Si $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$, alors il admet une racine α dans $\mathbb{C}$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors comme précédemment, A est de degré 1. Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors on vérifie que $\overline{\alpha}$ est aussi racine de A, puis que A est multiple du polynôme à coefficients réels $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$, et donc qu'il lui est associé (par irréductibilité de A) : A est de degré 2 sans racine réelle.

□

La description des irréductibles sur d'autres corps, notamment $\mathbb{Q}$, est bien plus délicate.

6. Algèbres

6.1. Généralités

Définition (Algèbre)

On appelle *algèbre sur* K (ou K-*algèbre*) tout ensemble A muni de lois de composition internes d'addition et de multiplication, et d'une loi externe de multiplication par un scalaire, lui conférant à la fois une structure de K-espace vectoriel et d'anneau, et telle que

$$\forall (\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A \times A, \quad (\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b).$$

VI.xxvii

Exemple (Algèbres)

$K[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(K)$, $\mathcal{F}(X, K)$ sont des K-algèbres.

xiv

Définition (Sous-algèbre)

On dit qu'une partie B d'une K-algèbre A en est une *sous-algèbre* si

(1) B est stable par les lois de A.

(2) B possède 0_A et 1_A.

(3) Muni des lois induites, B a une structure de K-algèbre.

VI.xxviii

« Être une sous-algèbre de » est une relation d'ordre.

Proposition (Caractérisation des sous-algèbres)

Soit A une K-algèbre, B une partie de A. B est une sous-K-algèbre de A si et seulement si

(1) $1_A \in B$.

(2) B est stable par combinaisons linéaires.

(3) B est stable par produit.

VI.34

Démonstration

$\square$

Exemple (Sous-algèbres)

(1) $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^I$ pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(2) $\mathcal{T}_n(K)$ (ensemble des matrices triangulaires supérieures) est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(K)$, et l'ensemble des matrices diagonales de taille n en est elle-même une sous-algèbre.

(3) $K[X^2] \overset{def}{=} \mathrm{Vect}(X^{2k}, k \in \mathbb{N})$ est une sous-algèbre de $K[X]$.

(4) Si L est un surcorps de K, et si A est une L-algèbre, alors A est naturellement munie d'une structure de K-algèbre.

xv

Définition (Morphisme d'algèbres)

Soit A et B deux K-algèbres. On dit qu'une application $f : A \to B$ est un *morphisme* de K-algèbres si f est à la fois un morphisme d'anneaux et de K-espaces vectoriels.

VI.xxix

On définit classiquement les notions d'endomorphisme et d'automorphisme d'une K-algèbre, d'isomorphisme de K-algèbre, et le fait que deux K-algèbres soient isomorphes.

Proposition (Caractérisation des morphismes d'algèbres)

Soit A et B deux K-algèbres, et $f : A \to B$ une application. f est un morphisme de K-algèbres si et seulement si

(1) $f(1_A) = 1_B$.

(2) $\forall (\lambda,\mu) \in K^2, \forall (x,y) \in A^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

(3) $\forall (x,y) \in A^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.

VI.35

Exemple (Morphismes d'algèbres)

(1) Soit X un ensemble non vide, et $a \in X$. L'évaluation en a

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & K^X & \to & K \\ & f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres.

(2) Pour tout $a \in K$, l'évaluation en a :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & K[X] & \to & K \\ & P & \mapsto & P(a) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres.

(3) Pour tout $C \in K[X]$, la composition à droite par C :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & K[X] & \to & K[X] \\ & P & \mapsto & P(C) \end{array}$$

est un endomorphisme de la K-algèbre $K[X]$.

(4) Pour tout élément inversible b d'une algèbre A, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \to & A \\ & a & \mapsto & bab^{-1} \end{array}$$

est un automorphisme de l'algèbre A, appelé *conjugaison* par b.

(5) Pour tout espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et toute base $\mathcal{B}$ de E, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

xvi

Si $\varphi\ : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, alors, pour toutes sous-algèbres A' et B' de A et de B respectivement, $\varphi(A')$ et $\varphi^{-1}(B')$ sont des sous-algèbres respectives de B et de A.

Grâce à l'exercice 474, on déduit :

Exemple (Éléments inversibles d'une sous-algèbre de dimension finie)

L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.
De même pour les matrices diagonales, triangulaires inférieures, triangulaires par blocs (de tailles imposées), les matrices en damier, les polynômes en une matrice donnée, etc.

xvii

6.2. Sous-algèbre des polynômes en un élément d'une algèbre

Cette sous-section est préparatoire au cours sur la réduction des endomorphismes : vous pouvez la lire afin de faciliter l'assimilation du cours sur la réduction, mais ce n'est pas une obligation.

La K-algèbre $K[X]$ possède une propriété importante (dite universelle) : pour toute K-algèbre A, et tout $\alpha \in A$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\varphi\ : K[X] \to A$ tel que $\varphi(X) = \alpha$. C'est celui donné par

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

pour tout polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Son image s'appelle la K-algèbre des polynômes en α, c'est une sous-algèbre commutative de A. On la note $K[\alpha]$. Elle est monogène en tant que K-algèbre, *i.e.* c'est une sous-algèbre engendrée par un singleton, ici $\{\alpha\}$.

Pour tout $P \in K[X]$, l'élément $\varphi(P)$ est noté $P(\alpha)$, et appelé évaluation de P en α.

Ainsi, on a, pour tous $P, Q \in K[X]$, tous $\lambda, \mu \in K$:

$$(\lambda P + \mu Q)(\alpha) = \lambda P(\alpha) + \mu Q(\alpha), (PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha), \quad \text{et} \quad 1(\alpha) = \alpha^0 = 1_A$$

Cela s'applique notamment à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E)$. Au sujet de ce dernier exemple, il faudra bien prendre garde au fait que si $P \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, alors $(P(u))(x)$ a un sens (on évalue l'endomorphisme $P(u)$ en le vecteur x de E), mais $P(u(x))$ *n'a aucun sens a priori* (on tente d'évaluer un polynôme en un vecteur de E, alors que la multiplication de vecteurs d'un espace vectoriel E n'est pas définie).

On dira qu'un polynôme $P \in K[X]$ annule α si $P(\alpha) = 0_A$. Comme $\varphi\ : P \in K[X] \mapsto P(\alpha)$ est un morphisme d'algèbres, son noyau est un sous-espace vectoriel et surtout un idéal de $K[X]$, appelé idéal annulateur de α. Si ce noyau n'est pas trivial, *i.e.* si φ n'est pas injective, alors l'idéal annulateur admet un unique générateur unitaire.

CHAPITRE VII

Fonctions réelles d'une variable réelle, convexité

Sommaire

Dans tout ce chapitre, les applications considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et f et g sont de telles fonctions (sauf mention contraire).

1. Généralités

1.1. Notions élémentaires

Définition (Valeur absolue, inf et sup) VII.i

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit la fonction *valeur absolue* de f, notée $|f|$ par
$$\forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$$
Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$. On définit les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ par
$$\forall x \in I, \quad \sup(f,g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\} = \max\{f(x), g(x)\}$$
et
$$\forall x \in I, \quad \inf(f,g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\} = \min\{f(x), g(x)\}$$

Fonction bornée

Une fonction f est bornée si et seulement si il existe un réel positif K tel que pour tout $x \in I$, on ait $|f(x)| \leqslant K$. Autrement dit, f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

VII.a

Définition (Extremum global d'une fonction)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet un *maximum* (ou un *maximum global*) s'il existe un élément x_0 de I pour lequel on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

Pour un tel x_0, on dit que f *présente* (ou *admet*) un maximum en x_0. On note $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$, ou $f(x_0) = \max_I f$.

Une fonction f à valeurs réelles admet un *minimum* (ou un *minimum global*) s'il existe un élément x_0 de I pour lequel on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

Pour un tel x_0, on dit que f *présente* (ou *admet*) un minimum en x_0. On note $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$, ou $f(x_0) = \min_I f$.

Une fonction f admet un *extremum (global)* (en $x_0 \in I$) si elle admet un maximum ou un minimum (en x_0).

VII.ii

Une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum :

Une fonction peut présenter un (même) maximum en plusieurs points distincts :

Illustration

Une fonction f présente un minimum en $x_0 \in I$ si et seulement si $-f$ présente un maximum en $x_0 \in I$.

Définition (Extremum local d'une fonction)

Une fonction f admet un *maximum* (resp. *minimum*, *extremum*) *local* en $x_0 \in I$ si f admet un maximum (resp. minimum, extremum) en x_0 au voisinage de x_0, *i.e.* il existe un intervalle non vide $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ tel que $f_{|]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\cap I}$ présente un maximum (resp. minimum, extremum) en x_0.

VII.iii

Évidemment, un extremum global d'une fonction est un extremum local, mais la réciproque est fausse :

Illustration

Définition (Borne supérieure, borne inférieure)

La *borne supérieure* (resp. la *borne inférieure*) de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est la borne supérieure (resp. inférieure) de $f(I)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On la note $\sup_{x\in I} f(x)$ (resp. $\inf_{x\in I} f(x)$) ou $\sup_I f$ (resp. $\inf_I f$)).

VII.iv

Définition (Fonction lipschitzienne)

Soit k un réel positif ou nul. Une fonction f est *lipschitzienne de rapport* k ou k-*lipschitzienne* si

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Une fonction f est dite *lipschitzienne* si elle est k-lipschitzienne pour un certain $k \in \mathbb{R}_+$.

VII.v

Illustration

Fonction lipschitzienne

Une fonction k-lipschitzienne est une fonction dont tous les taux d'accroissement sont compris (au sens large) entre $-k$ et k : on se doute déjà que le caractère k-lipschitzien sera lié au comportement de la fonction dérivée de f (si cette dérivée existe).

VII.b

1.2. Préliminaires topologiques

Définition (Point adhérent à un ensemble de nombre réels)

Un point c de $\overline{\mathbb{R}}$ est dit *adhérent* à une partie A de $\mathbb{R}$ si tout voisinage de c rencontre A.

VII.vi

Proposition (Caractérisation d'un point adhérent à un ensemble de nombres réels)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Le point c est adhérent à A si et seulement si il existe une suite de points de A de limite c.

VII.1

Démonstration

$\square$

Illustration

Exemple (Point adhérent à un ensemble)

(1) Si $a \in A$, alors a est adhérent à A.
(2) 0 est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$, bien que 0 n'appartienne pas à $\mathbb{R}_+^*$.
(3) Si A contient un voisinage de $+\infty$, alors $+\infty$ est adhérent à A.
(4) $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{Z}$, bien que $\mathbb{Z}$ ne contienne pas de voisinage de $+\infty$.
(5) 0 est adhérent à $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Plus généralement, pour toute suite réelle u de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, l est adhérent à $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

i

Définition (Adhérence d'un ensemble de nombres réels)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle *adhérence* de A (dans $\mathbb{R}$) et on note $\overline{A}$ l'ensemble des réels adhérents à A.

VII.vii

Exemple (Adhérence d'un ensemble de nombres réels)

(1) Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $A \subset \overline{A}$.
(2) L'adhérence de l'ensemble vide est l'ensemble vide.
(3) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. En fait, une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{A} = \mathbb{R}$.
(4) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$. Les intervalles $]a, b[$, $[a, b]$, $]a, b]$ et $[a, b[$ ont même adhérence, et cette adhérence est égale à $[a, b]$.
(5) L'adhérence de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$, et la notation $\overline{\mathbb{R}}$ est donc ambiguë. Par défaut, elle désigne $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
(6) (Preuve technique) Si une suite réelle u converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors l'adhérence de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$.
(7) (Preuve technique) L'adhérence de $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est $[-1, 1]$.

ii

Adhérence d'un ensemble de nombres réels

L'adhérence de A (partie de $\mathbb{R}$) est l'ensemble des limites des suites convergentes de points de A.

VII.c

Dans un souci d'unification, on dit (abusivement) qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un voisinage de a dans $\mathbb{R}$. Par exemple, nous dirons que la fonction logarithme est à valeurs strictement négatives *au* voisinage de 0 (bien qu'elle ne soit pas définie *sur* un voisinage de 0).

1.3. Préliminaires barycentriques. Parties convexes d'un espace vectoriel réel.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que l'on munit de sa structure affine (ses éléments sont vus comme des points, via le choix d'une origine).

Définition (barycentre)

Soit $((A_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n éléments de $E \times \mathbb{R}$, telle que $\mu \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.
Le point B défini par
$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$
est appelé *barycentre* de $((A_i, \lambda_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$.
Chaque couple (A_i, λ_i) est appelé *point pondéré* A_i de poids λ_i (ou affecté du poids λ_i), μ est appelé *poids total* de la famille $((A_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points pondérés.
Dans le cas où chaque λ_i vaut 1, le barycentre de la famille des points pondérés est appelé *isobarycentre* de la famille de points $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

VII.viii

Par définition, le poids total est *non nul*. Il faut vérifier que $\mu \neq 0$ avant d'utiliser le (et même de parler du) barycentre d'une famille de points pondérés [1].

Si l'on change l'ordre d'apparition des points pondérés (A_i, λ_i) dans la famille $((A_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, le barycentre reste inchangé : on peut dire qu'il y a « commutativité » du barycentre.

Par abus de langage, on parle d'isobarycentre d'un ensemble de points, pour désigner l'isobarycentre de la famille constituée, dans l'ordre de son choix, de la famille de ces points, affectés du poids 1.

En PC et SI, vous utilisez la notion de centre de masse (ou de gravité).

1. On pourra omettre de le signaler dans les cas les plus évidents, comme pour le barycentre d'un couple de points pondérés $((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$, où $\lambda \in \mathbb{R}$

Illustration

Par définition du barycentre, on connaît très facilement ses coordonnées lorsqu'on connaît celles des points le définissant. Cela se traduit aussi en termes complexes : si A_i est d'affixe a_i, alors B est d'affixe $b = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$.

Proposition (Barycentre) VII.2

(1) *(Le barycentre est indépendant de l'origine)* Pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MA_i}$$

(2) *(Caractérisation du barycentre)* Le barycentre B de la famille des points pondérés (A_i, λ_i) est l'unique point solution de l'équation suivante (d'inconnue M) :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$$

(3) *(Homogénéité du barycentre)* Si l'on multiplie tous les poids par un même réel non nul, le barycentre est inchangé ;

(4) *(Associativité du barycentre)* Soit $m \in [\![2, n]\!]$ tel que $\mu_m \overset{def}{=} \sum_{k=m}^{n}\lambda_k \neq 0$, et soit B_m le barycentre de $((A_i, \lambda_i))_{m\leqslant i\leqslant n}$. B est alors le barycentre de

$$((A_1, \lambda_1), \dots, (A_{m-1}, \lambda_{m-1}), (B_m, \mu_m)).$$

Démonstration

(1) Simple relation de Chasles ;

(2) Cette équation équivaut à $\mu\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ d'après (1), sont unique solution est B puisque $\mu \neq 0$;

(3) Immédiat par définition du barycentre.

(4) B_m est bien défini car $\mu_m \neq 0$. De plus, d'après (2) et (1) on obtient

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{BA_i} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \sum_{i=m}^{n}\overrightarrow{BA_i} = \mu_m\overrightarrow{BB_m}$$

de sorte que

$$\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i\overrightarrow{BA_i} + \mu_m\overrightarrow{BB_m} = \overrightarrow{0}$$

et le résultat s'ensuit d'après (2).

□

Exemple (Les médianes sont concourantes)

Grâce à l'associativité du barycentre, les médianes d'un (vrai) triangle ABC sont concourantes, en l'isobarycentre de (A, B, C).

iii

Définition (segment)

Soit A et B deux points de E. Le *segment* $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de $((A, \lambda), (B, 1-\lambda))$, où λ décrit $[0, 1]$.

VII.ix

Définition (Partie convexe)

Une partie $\mathcal{A}$ de E est dite *convexe* si elle contient le segment joignant deux quelconques de ses points.

VII.x

Illustration

Exemple (Parties convexes)

(1) Une partie de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si c'est un intervalle.
(2) Une intersection quelconque de convexes est convexe.
(3) Les disques (fermés ou ouverts) du plan sont convexes.

iv

Proposition (Caractérisation des parties convexes)

Une partie $\mathcal{A}$ de E est convexe si et seulement si tout barycentre à poids positifs de points de $\mathcal{A}$ est encore dans $\mathcal{A}$.

VII.3

Démonstration

Le sens indirect est clair, puisque tout point d'un segment $[AB]$ est barycentre de A et de B affectés de certains poids positifs.
Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est convexe, alors on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que tout barycentre de n points de $\mathcal{A}$ affectés de poids positifs est encore dans $\mathcal{A}$, l'hérédité se montrant avec l'associativité du barycentre.

□

Proposition (Enveloppe Convexe) VII.4

Soit Ω une partie de E. Il existe une plus petite partie convexe $\mathcal{C}$ de E contenant Ω, pour la relation d'ordre d'inclusion, *i.e.* :

(1) $\Omega \subset \mathcal{C}$;

(2) $\mathcal{C}$ est convexe ;

(3) Si $\mathcal{C}'$ est un convexe contenant Ω, alors $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$.

Démonstration

L'unicité se prouve en remarquant que deux ensembles vérifiant les conditions de l'énoncé doivent se contenir mutuellement, et donc être égaux.
Existence : on pose

$$\mathcal{C} \overset{def}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{C}' \text{ convexe} \\ \Omega \subset \mathcal{C}'}} \mathcal{C}',$$

et on vérifie aisément que c'est une partie de E, contenant Ω (car intersection de telles parties), convexe (comme intersection de telles parties), et contenue dans tout convexe contenant Ω (par construction).

□

Définition (Enveloppe Convexe) VII.xi

Dans le contexte de la proposition précédente, $\mathcal{C}$ est appelée *enveloppe convexe* de Ω.

Bien entendu, tout ensemble convexe est sa propre enveloppe convexe. Comme on l'a vu, l'enveloppe convexe de Ω est l'intersection de tous les convexes contenant Ω.

Illustration

Proposition (Enveloppe convexe d'un nombre fini de points)

L'enveloppe convexe $\mathcal{C}$ d'un ensemble de p points $A_1, \dots, A_p$ de E est l'ensemble Ω des barycentres de $A_1, \dots, A_p$ affectés de poids positifs (non tous nuls).

VII.5

Démonstration

On montre que Ω

(1) contient $\{A_1, \dots, A_p\}$ (en choisissant les bons poids) ;
(2) est convexe (par associativité du barycentre) ;
(3) est contenu dans tout convexe contenant $\{A_1, \dots, A_p\}$ (par la proposition précédente).

Ainsi, Ω est donc bien l'enveloppe convexe de $\{A_1, \dots, A_p\}$.

□

2. Notions locales

2.1. Propriété ou notion locale

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dira qu'une propriété $\mathcal{P}$ que f est susceptible de vérifier est *locale* si elle ne dépend que du comportement de f au voisinage d'un certain point a de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I. Autrement dit, si une fonction g coïncide avec f au voisinage de a, alors ou bien f et g vérifient cette propriété $\mathcal{P}$, ou bien aucune des deux ne vérifie cette propriété. S'agissant de la propriété locale $\mathcal{P}$, peu importe ce qu'il se passe pour f hors d'un voisinage donné de a.

De même, on dira qu'une notion susceptible d'être définie pour f en a est *locale* si sa définition de dépend que du comportement de f au voisinage de a.

Exemple (Notions locales, ou pas)

(1) La notion de limite en un point, et donc celles de continuité en un point et de dérivabilité en un point, sont locales.
(2) Le fait d'être borné (resp. majoré, minoré, continu, dérivable, lispchitzien, uniformément continu) sur I n'est pas une notion locale.
(3) Évidemment, le fait d'être borné (resp. majoré, minoré, continu, dérivable, lispchitzien, uniformément continu) au voisinage de a est une notion locale.

v

Notion locale

Attention, *a priori*, une notion locale ne dépend pas uniquement de la valeur de f en a, mais aussi du comportement de f au voisinage de a.
Par exemple, si je considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que je connais sa valeur en 0, cela ne me dit rien de sa continuité en 0.
En revanche, si je connais $f(x)$ pour tout $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (si petit soit-il), alors je peux déterminer (en théorie du moins) si f est continue en 0.

VII.d

2.2. Limite, continuité en un point

2.2.1. Généralités

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I, et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Vous avez vu comment définir formellement le fait que f admette l pour limite en a : il y a neuf définitions à donner. En voici quelques exemples

(1) (Si a et l sont réels) Par définition, on dit que f tend vers l en a si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

(2) (Si $a = +\infty$ et b est réel) Par définition, on dit que f tend vers l en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x \geqslant x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

(3) (Si a est réel et $b = +\infty$) Par définition, on dit que f tend vers l en a si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant M$$

La notion de voisinage permet d'unifier ces définitions :

Définition (Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine)

On dit que f admet l pour limite en a si pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage W_a de a tel que $f(W_a \cap I) \subset V_l$, *i.e.*

$$\forall V_l \in \mathcal{V}_l, \exists W_a \in \mathcal{V}_a, \quad f(W_a \cap I) \subset V_l$$

soit encore

$$\forall V_l \in \mathcal{V}_l, \exists W_a \in \mathcal{V}_a, \forall x \in I, \quad ((x \in W_a) \Rightarrow (f(x) \in V_l))$$

VII.xii

Le fait d'unifier ainsi les différents cas permet de donner des preuves valables dans toutes les situations, par exemple pour le théorème de composition des limites. En contrepartie, cela nécessite un certain effort d'abstraction.

Attention : l'existence d'une limite (pour une fonction en un point adhérent à son domaine) ne va pas de soi.

Illustration

Proposition (Unicité de la limite)

La fonction f admet au plus une limite en a.

VII.6

Démonstration

En effet, deux éléments distincts l et l' de la droite numérique achevée admettent des voisinages disjoints $\mathcal{V}_l$ et $\mathcal{V}_{l'}$. Supposer que f ait pour limites l et l' en a entraînerait l'existence de deux voisinages $\mathcal{V}_a$ et $\mathcal{V}'_a$ de a tels que $f(\mathcal{V}_a \cap I) \subset \mathcal{V}_l$ et $f(\mathcal{V}'_a \cap I) \subset \mathcal{V}_{l'}$ et donc tels que

$$f(\mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a \cap I) \subset \mathcal{V}_l \cap \mathcal{V}_{l'} = \emptyset$$

ce qui est absurde, puisque $\mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}'_a$ est un voisinage de a, et que a est adhérent à I.

$\square$

Définition (Continuité ponctuelle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et $a \in I$. On dit que f est *continue* en a si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a.

VII.xiii

Lorsque $a \in I$, dire que f admet une limite finie en a équivaut à la continuité de f en ce point (car la seule limite envisageable en a, c'est $f(a)$).

Définition (Prolongement par continuité)

Si a est une extrémité finie de I n'appartenant pas à I, et si f admet une limite finie l en a, on pose

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in I, \text{ et } \tilde{f}(a) = l$$

La fonction $\tilde{f}$ ainsi définie sur $I \cup \{a\}$ est continue en a. On dit que f se *prolonge par continuité en* a, et $\tilde{f}$ est appelée le *prolongement par continuité* de f en a.

VII.xiv

Exemple (Prolongement par continuité)

La fonction $f \ : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^2 \cos(1/x)$ est prolongeable par continuité en 0.

vi

Définition (Limites à gauche et à droite)

Soit a un point intérieur à I. On dit que f admet une *limite à gauche* (resp. une *limite à droite*) en a si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ (resp. à $I \cap]a, +\infty[$) admet une limite en a. Cette limite est alors notée $\lim_{a^-} f$ (resp. $\lim_{a^+} f$). On dit que f est *continue à gauche* (resp. *à droite*) en a si f admet $f(a)$ pour limite à gauche (resp. à droite) en a.

VII.xv

Bien remarquer que pour les limites à gauche et à droite, les intervalles considérés sont $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$, et non $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ (en fait, si on prend ces derniers ensembles, on tombe sur les continuités à gauche et à droite de f en a, ce qui est différent).

Proposition (Continuités à gauche et à droite) VII.7

Une fonction f est continue en un point a intérieur à I si et seulement si elle est continue en a à droite et à gauche.

Démonstration

Si f est continue en a, elle y est évidemment continue à droite et à gauche. Si réciproquement f est continue à droite et à gauche en a, soit ε un réel strictement positif. Il existe des réels strictement positifs δ_+ et δ_- tels que

$$(\forall x \in [a-\delta_-, a[, |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon) \quad \text{et} \quad (\forall x \in]a, a+\delta_+], |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon)$$

En posant $\delta = \min(\delta_+, \delta_-)$, on a, pour tout x de $[a-\delta, a+\delta]$:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

(c'est évidemment vrai pour $x = a$).

□

Ne surtout pas confondre limites à gauche et droite, et continuité à gauche et droite : une fonction peut admettre une même limite finie à gauche et à droite en un point sans être continue à gauche ou droite en ce point.

Illustration

2.2.2. Limite et ordre

Proposition (Limite finie et bornitude locale) VII.8

Toute fonction admettant une limite finie l en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de ce point.

Proposition (Limite strictement positive et minoration) VII.9

Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif.

Proposition (De la comparaison des fonctions à celle des limites) VII.10

On suppose que les fonctions f et g admettent respectivement pour limites l et l' en a et que $f \leqslant g$ au voisinage de a. On a alors $l \leqslant l'$.

Démonstration

On traite le cas où l et l' sont finis (les autres cas sont plus faciles et moins intéressants). Soit ε un réel strictement positif quelconque. Comme les assertions $l - \varepsilon \leqslant f(x)$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant l' + \varepsilon$ sont vraies au voisinage de a, leur conjonction l'est également, et donc $l - \varepsilon \leqslant l' + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on a $l \leqslant l'$. □

Comme dans le cas des suites, on applique souvent cette proposition dans le cas où l'une des fonctions est constante : par exemple, si g est minorée par 0 au voisinage de a, et si elle admet une limite l' en a, alors $l' \geqslant 0$ (on a pris pour f la fonction nulle).

Des inégalités strictes ne nous apporteraient rien.

Proposition (théorème d'encadrement, ou principe des gendarmes) VII.11

Si $g \leqslant f \leqslant h$, et si g et h tendent vers $b \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a.

Démonstration

Seul le cas d'une limite finie b est intéressant. Soit ε un réel strictement positif. Les assertions $g(x) \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ et $h(x) \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ sont vraies pour x au voisinage de a, donc l'assertion $f(x) \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ est vraie pour x au voisinage de a. □

2.2.3. Opérations algébriques sur les limites

Théorème (Opérations algébriques sur les limites) VII.12

On considère deux fonctions f et g de limites respectives l et l', éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) $\lim\limits_a |f| = |l|$ (en notant $|\pm\infty| = +\infty$).

(2) $\lim\limits_a (f + g) = l + l'$ (si $l + l'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$).

(3) $\lim\limits_a (fg) = ll'$ (si ll' existe dans $\overline{\mathbb{R}}$).

(4) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda l$ (la limite vaut 0 si $\lambda = 0$).

(5) Si $l' \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a, et $\lim\limits_a \frac{1}{g} = \frac{1}{l'}$ (en posant $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

(6) Si outre $\frac{l}{l'}$ n'est pas indéterminée, alors $\lim\limits_a \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$.

Soit $a \in \bar{I}$ (*i.e.* I rencontre tout voisinage de a). L'ensemble Ω_a des fonctions tendant vers une limite finie en a est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^I$, et l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \Omega_a & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \lim_a f \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres (et une forme linéaire).

Proposition (Limite d'une composée) VII.13

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, avec $f(I) \subset J$. On suppose que f admet une limite b en a, et que g admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en b. Alors $g \circ f$ admet l pour limite en a.

Démonstration

Soit $\mathcal{V}_l$ un voisinage de l. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_b$ de b tel que $g(J \cap \mathcal{V}_b) \subset \mathcal{V}_l$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ tel que $f(I \cap \mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_b$. On a alors $(g \circ f)(I \cap \mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_l$.

$\square$

Corollaire (Continuité ponctuelle d'une composée) VII.14

Si f est continue en a, et si g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

2.2.4. Limites et monotonie

Théorème de la limite monotone, aux bornes VII.15

On suppose que $I =]\alpha, \beta[$ ($\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha < \beta$), et que $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone. Alors f admet des limites (éventuellement infinies) en α et β. Plus précisément, si f est croissante, alors (les bornes sont prises dans $\overline{\mathbb{R}}$)

(1) $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = \sup\limits_I f$.

(2) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \inf\limits_I f$.

Si f est décroissante, alors

(1) $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = \inf\limits_I f$.

(2) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \sup\limits_I f$.

Théorème de la limite monotone, en un point intérieur

On suppose que a est intérieur à I, et que $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone. Alors f admet une limite finie l^- à gauche et une limite finie l^+ à droite en a. Plus précisément, si f est croissante, alors

(1) $\lim\limits_{x \to a^-} f = \sup\limits_{I \cap]-\infty, a[} f$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f = \inf\limits_{I \cap]a, +\infty[} f$

(2) $l^- \leqslant f(a) \leqslant l^+$

Si f est décroissante, alors

(1) $\lim\limits_{x \to a^-} f = \inf\limits_{I \cap]-\infty, a[} f$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f = \sup\limits_{I \cap]a, +\infty[} f$.

(2) $l^- \geqslant f(a) \geqslant l^+$.

VII.16

Illustration

Une fonction monotone est continue en un point intérieur à I si et seulement si ses limites à gauche et à droite en ce point sont égales.

2.2.5. Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition (Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite l en a si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de I tendant vers a, la suite des images $(f(u_n))$ tend vers l.

VII.17

Démonstration

On se place dans le cas où a et l sont finis (les autres cas sont analogues).
On suppose que f est de limite l en a. Soit u une suite d'éléments de I, de limite a. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un réel strictement positif δ tel que, pour tout x de I :

$$|x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$$

Il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - a| \leqslant \delta$. On a donc, pour tout $n \geqslant N$, $|f(u_n)-l| \leqslant \varepsilon$: la suite de terme général $f(u_n)$ tend donc vers l.
Montrons la réciproque par contraposition : on suppose que f n'est pas de limite l en a, et on va construire une suite (u_n) d'éléments de I telle que $(f(u_n))$ ne tende pas vers l.
Comme f ne tend pas vers l en a, on a :

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \delta \wedge |f(x)-l| > \varepsilon)$$

Pour un tel ε, on applique ce résultat à une suite (δ_n) de réels strictement positifs tendant vers 0 (par exemple donnée par : $\delta_n = 2^{-n}$). Pour chaque entier n, il existe $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| \leqslant \delta_n$ et $|f(u_n)-l| > \varepsilon$). La suite (u_n) tend vers a, et $(f(u_n))$ ne tend pas vers l.

□

Cette caractérisation s'utilise surtout dans le sens direct, pour déterminer la limite d'une suite, ou, par contraposition, pour montrer que f n'admet pas de limite, en exhibant (u_n) tendant vers a telle que $(f(u_n))$ diverge (ou en exhibant des suites (u_n) et (v_n) tendant vers a telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'aient pas la même limite). Par exemple, on l'utilise souvent pour l'étude des suites récurrentes : si (u_n) d'itératrice $f\ : I \to I$ tend vers un point l de I en lequel f est continue, alors l est un point fixe de f, *i.e.* $f(l) = l$.

Exemple (Limite de sinus en l'infini)

La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, car bien que les suites $(2n\pi)$ et $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ tendent vers $+\infty$, les suites $(\sin(2n\pi))$ et $(\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))$ ne tendent pas vers la même limite.

vii

Grâce à cette proposition, l'étude de limites de fonctions ne ressemble pas seulement à l'étude de limite d'une suite, elle en *résulte*.
En fait, cette proposition est surtout utilisée pour caractériser la continuité (et l'importance de ce corollaire justifie l'appellation de théorème) :

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Une fonction $f\ : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de I convergeant vers a, la suite des images $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

VII.18

Ce critère est très utile pour prouver la non continuité d'une fonction : il suffit en effet pour ce faire d'exhiber au choix

(1) une suite convergeant vers a, mais d'image ne convergeant pas vers $f(a)$;

(2) une suite convergeant vers a, mais d'image divergente ;

(3) deux suites convergeant vers a, mais dont les images par f ont des limites différentes.

Dans les deux derniers cas, on prouve même qu'aucun changement de la valeur de f en a ne rendra f continue en a.

2.3. Dérivabilité en un point

2.3.1. Premières définitions

Définition (Taux d'accroissement)

Soit x et y deux points distincts de I. On appelle *taux d'accroissement* de f entre x et y la quantité
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

VII.xvi

Définition (Dérivabilité ponctuelle)

On dit que f est *dérivable* en un point a de I si
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
admet une limite finie lorsque x tend vers a ($x \in I \setminus \{a\}$).
Le cas échéant, cette limite est appelé *nombre dérivé* (ou *dérivée*) de f en a et est notée $f'(a)$, ou $D(f)(a)$, ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

VII.xvii

Interprétation géométrique : soit $a \in I$, et $x \in I \setminus \{a\}$. Dire que f est dérivable en a, c'est dire que la droite (AM) ($A(a, f(a))$, $M(x, f(x))$) possède une position limite *non verticale* Δ, de coefficient directeur $f'(a)$, lorsque x tend vers a. On dit que Δ est la *tangente* à Γ (graphe de f) en son point d'abscisse a :

Illustration

Une équation de Δ est $y = f(a) + (x-a)f'(a)$.

Interprétation cinématique de la dérivée

$f'(a)$ est la limite en a des taux d'accroissement de f en a : le taux d'accroissement de f entre x et a peut s'interpréter comme la vitesse moyenne algébrique entre les instants x et a (on voit f comme une fonction d'une variable temporelle dont les valeurs sont des positions) : la dérivée de f en a s'interprète donc comme la vitesse instantanée de f en a.

VII.e

Pour étudier la dérivabilité de f en $a \in I$, on peut toujours se ramener à une étude en 0 en posant $x = a+h$.

Proposition (Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1)

f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, et, dans le cas où f est dérivable en a, ce développement limité est donné par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)l + \mathrm{o}_{x \to a}((x-a))$$

VII.19

Illustration

En corollaire, si f est dérivable en a, alors elle est continue en a, mais la réciproque est fausse, donnez des exemples :

2.3.2. Opérations sur les applications dérivables en un point

Proposition (Linéarité de la dérivation)

Soient f et g deux applications dérivables au point a. Pour tous scalaires α, β, l'application $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable en a, et

$$h'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

VII.20

Cette *linéarité* de la dérivation peut s'interpréter comme une linéarité de la dérivation dans certains espaces vectoriels fonctionnels : notons $\mathcal{D}_a(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, dérivables en a. La proposition précédente permet d'affirmer que $\mathcal{D}_a(I)$ est un espace vectoriel [2] et que [3]

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_a(I) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f'(a) \end{array}$$

est linéaire (c'est donc une forme linéaire).

Proposition (Dérivation d'un produit)

Soient f et g deux applications dérivables en un point a. Alors $h = fg$ est dérivable en a, et

$$h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

VII.21

2. D'après l'existence de la dérivée de h en a.
3. D'après la valeur de la dérivée de h en a.

Démonstration

On introduitpar « relation de Chasles » un terme mixte, en écrivant $f(x)g(x)-f(a)g(a) = f(x)(g(x)-g(a))+g(a)(f(x)-f(a))$, puis on revient à la définition de la dérivée en a.

□

Proposition (Dérivée d'un quotient) VII.22

Si g est dérivable en a, avec $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a, $h = \frac{1}{g}$ (définie au voisinage de a) est dérivable en a, et

$$h'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

Si en outre f est dérivable en a, alors $h = \frac{f}{g}$ (définie au voisinage de a) est dérivable en a, avec

$$h'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

Proposition (Dérivée d'une composée) VII.23

Soit $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ une application dérivable en un point a de I et $g : J \to \mathbb{R}$ une application dérivable en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable au point a, et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)(g' \circ f)(a)$$

Démonstration

(Esquisse)
On utilise la caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. On écrit :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_a(x)$$

et

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + (y-b)\varepsilon_b(y)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & g \circ f(x) \\ = & (g \circ f)(a) + f'(a)g'(f(a))(x-a) + (x-a)\left(g'(b)\varepsilon_a(x) + (f'(a)+\varepsilon_a(x))\varepsilon_b(f(x))\right) \end{aligned}$$

□

Proposition (Dérivation et bijection réciproque) VII.24

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue strictement monotone sur I, dérivable en a, et telle que $f'(a) \neq 0$. L'application f est alors une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$, et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Démonstration

Voir le cours de MPSI. □

Pour retrouver cette formule *(mais non pour la démontrer)*, on peut également dériver la relation $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$ en a.

Illustration

On retrouve ainsi les dérivées des applications réciproques des fonctions trigonométriques arcsin, arccos et arctan.

Proposition (Dérivée d'une puissance)

Soit f dérivable en a. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable en a, et

$$(f^n)'(a) = nf'(a)f^{n-1}(a)$$

Cette formule reste valable si $n \in \mathbb{Z}$ si en outre $f(a) \neq 0$.

VII.25

2.3.3. Dérivée à gauche, dérivée à droite

Comme pour la notion de limite, il existe des notions de dérivabilité à gauche et à droite :

Définition (Dérivabilité ponctuelle à gauche ou à droite)

Soit $a \in I$, distinct de l'extrémité gauche de I (resp. de l'extrémité droite de I). On dit que f est *dérivable à gauche (resp. à droite)* en a si l'application $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en a.
Si elle existe, cette limite est appelée *(nombre) dérivé(e) à gauche (resp. à droite)* en a, et notée $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).

VII.xviii

f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a si et seulement si $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ (resp. $f_{|I\cap[a,+\infty[}$) est dérivable en a. Par conséquent, la dérivabilité à gauche (resp. à droite) entraîne la continuité à gauche (resp. à droite).

Illustration

f est dérivable en a (intérieur à I) si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a, et si $f_g'(a) = f_d'(a)$. La dérivée vaut alors cette valeur commune.

Bien sûr, les résultats généraux sur les opérations entre fonctions dérivables en a admettent des analogues pour les fonctions seulement dérivables à gauche en a, ou seulement dérivables à droite en a, peu utilisés en pratique (faites seulement attention à la composition).

3. Continuité sur un intervalle

3.1. Définition et premiers exemples

Définition (Continuité sur un intervalle) VII.xix

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue sur* I si elle est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}(I)$ (ou $\mathcal{C}^0(I)$) l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Sur la quantification de la continuité globale VII.f

f est continue sur I si et seulement si :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in I, \quad (|x-y| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Bien remarquer qu'*a priori*, l'η est fonction de ε et de x, et que cette assertion n'a pas de raison d'être équivalente à

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in I, \quad (|x-y| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

De l'étude menée précédemment, on déduit des résultats généraux sur les fonctions continues sur un intervalle :

Proposition (Structure sur l'ensemble des fonctions continues sur I) VII.26

$\mathcal{C}(I)$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^I$.

On a aussi, par exemple, si f, g sont continues sur I et si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ continue sur I.

Proposition (Composée d'applications continues) VII.27

Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont continues sur I et J respectivement, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple (Fonctions globalement continues) viii

(1) Une fonction lipschitzienne est continue sur I :

(2) Les fonctions constantes, l'identité, les fonctions polynomiales, la fonction valeur absolue, sont continues sur $\mathbb{R}$.

(3) La fonction carré, bien que non lipschitzienne, est continue. De même pour la fonction racine carrée (sur $\mathbb{R}_+$).

(4) Les fonctions usuelles (sinus, cosinus, tangente, exponentielle, logarithme, etc.) sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

(5) Une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) est continue sur tout intervalle où elle est définie.

(6) Si f, g sont continues sur I, alors $|f|, \sup(f,g), \inf(f,g)$ le sont.

(7) Si J est un intervalle contenu dans I, et que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, alors $f_{|J}$ est continue sur J.

(8) Si a est une extrémité finie de I n'appartenant pas à I, et si f est continue sur I, et admet une limite finie en a, alors le prolongement par continuité de f en a est une fonction continue sur $\{a\} \cup I$.

(9) Si f et g sont continues sur $]a,b]$ et $[b,c[$ respectivement, et si $f(b) = g(b)$, alors la fonction h définie par recollement sur $]a,c[$ est continue sur $]a,c[$.

(10) La fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur I.

La continuité globale permet de prouver des résultats par des arguments de densité : par exemple, si une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur une partie dense Ω de $\mathbb{R}$, alors elle est identiquement nulle.

3.2. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires VII.28

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose

(1) f continue sur $[a,b]$;

(2) $f(a)f(b) \leqslant 0$.

Il existe alors un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration

Voir le cours de MPSI. □

Illustration

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme un résultat d'existence, pas d'unicité (il n'y a d'ailleurs pas toujours unicité).

Exemple (Polynôme réel de degré impair)

Tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle.

ix

Corollaire (Reformulation du théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$. Soit t un élément du segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. Il existe alors un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = t$.

VII.29

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $x \mapsto f(x) - t$. □

Théorème (Image continue d'un intervalle)

L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

VII.30

Démonstration

On démontre que l'image d'un convexe est un convexe, ce qui nous ramène au corollaire précédent. □

Proposition (Continuité et injectivité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I.
On suppose f est continue et injective. La fonction f alors elle est strictement monotone.

VII.31

Démonstration

Par hypothèse, f est injective, donc pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, $f(y) - f(x) \neq 0$.
Considérons a, b, c, d dans I tels que $a < b$ et $c < d$, et montrons que $f(b) - f(a)$ et $f(d) - f(c)$ ont même signe (cela montrera bien que f est strictement monotone : strictement croissante si $f(b) - f(a) > 0$, strictement décroissante si $f(b) - f(a) < 0$).
À cet effet, on introduit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & \lambda & \mapsto & f(\lambda d + (1-\lambda)b) - f(\lambda c + (1-\lambda)a) \end{array}$$

Cette fonction est continue (car f l'est), et ne s'annule pas car pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(\lambda d + (1-\lambda)b) > (\lambda c + (1-\lambda)a)$ et f est injective : elle garde donc un signe constant (d'après le théorème des valeurs intermédiaires). En particulier, $\varphi(0) = f(b) - f(a)$ et $\varphi(1) = f(d) - f(c)$ ont même signe, d'où le résultat.

$\square$

3.3. Fonctions continues sur un segment

Théorème (Image continue d'un segment)

L'image continue d'un segment est un segment.

VII.32

Démonstration

On considère une application f continue sur un segment $[a, b]$. $f(I)$ est donc un intervalle.
Notons $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$. On sait que $]m, M[\subset f(I)$ (par définitions des bornes supérieure et inférieure, et convexité d'un intervalle). Montrons que m et M sont des éléments de $f(I)$ (en particulier, m et M sont finis), ce qui impose $f(I) = [m, M]$.
Montrons que $M \in f(I)$ (on démontre de manière analogue que $m \in f(I)$). Que M soit fini ou pas, il existe une suite (y_n) d'éléments de $f(I)$ tendant vers M. Pour chaque entier naturel n, il existe un élément x_n de $[a, b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite (x_n) est une suite de $[a, b]$, et admet donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$, convergente, vers un élément c de $[a, b]$.
La suite des images de cette suite extraite est une suite extraite de (y_n), donc tend vers M. Par continuité de f en c, on a $f(c) = M$: M est un élément de $f(I)$.
De même pour m. Finalement, $f(I) = [m, M]$.

$\square$

Théorème (Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, *i.e.* il existe c et c' éléments de $[a, b]$ tels que

$$f(c) = \sup_{[a,b]} f \text{ et } f(c') = \inf_{[a,b]} f$$

VII.33

Exemple (Minoration d'une fonction continue sur un segment)

On suppose que f est continue sur I, et que pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$.

(1) Si I est un segment, alors f est minorée par un réel strictement positif (*i.e.* il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \geqslant \alpha$).

(2) Si I n'est pas un segment, il n'existe pas toujours un tel α.

x

3.4. Réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Lemme (Condition suffisante de continuité pour une fonction monotone)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone sur un intervalle I. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

VII.34

Démonstration

On sait que f admet des limites à gauche (resp. à droite) en tout point où cela a un sens. Si l'image est un intervalle, les limites à gauche et à droite éventuelles en a doivent valoir $f(a)$.

□

Théorème de la bijection réciproque

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$, et on suppose que la fonction f est

(1) continue sur I ;

(2) strictement monotone sur I.

La fonction f réalise alors une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que f.

VII.35

Démonstration

La fonction f est clairement une bijection de I sur J (l'injectivité résulte de la stricte monotonie). La continuité de la réciproque résulte du lemme.

□

Exemple (Continuité de la racine n-ième)

(1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La fonction racine n-ième (définie sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair et sur $\mathbb{R}$ si n est impair) est continue.

(2) L'application $f\ : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto xe^x + \ln(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, et sa bijection réciproque est continue sur $\mathbb{R}$.

xi

4. Dérivabilité sur un intervalle

4.1. Définition et premières propriétés

Définition (Dérivabilité sur un intervalle)

On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point de I. L'application, notée $f' : I \to \mathbb{R}$, qui à tout point de I associe son nombre dérivé est appelée *fonction dérivée* de f. Elle peut également être notée $D(f)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ (ou simplement $\mathcal{D}(I)$) l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I.

VII.xx

La dérivabilité sur I est donc une accumulation de propriétés locales : comme pour la continuité, cette accumulation va permettre de trouver des propriétés *globales*.

Définition (Fonction continûment dérivable)

On dit que $f \in \mathbb{R}^I$ est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I. On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications. On dit également que f est *continûment dérivable.*

VII.xxi

Bien sûr, une application f dérivable sur I (et *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^1$ sur I) est continue sur I.
Comme conséquence des résultats sur la dérivabilité en un point, on obtient les résultats suivants sur les opérations entre applications dérivables sur I.

Proposition (Fonction dérivée d'une combinaison linéaire)

Soient f et g deux applications dérivables sur I. Pour tous scalaires α, β, l'application $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I, et
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

VII.36

Proposition (Fonction dérivée d'un produit)

Soient f et g deux applications dérivables sur I. Alors fg est dérivable sur I, et
$$(fg)' = f'g + fg'$$

VII.37

Proposition (Fonction dérivée d'un quotient)

Si g ne s'annule pas sur I et est dérivable sur I, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I, et
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$
Si en outre f est dérivable sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I, et
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

VII.38

Proposition (Fonction dérivée d'une composée) VII.39

Soit $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ une application dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur J. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I, et

$$(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$$

Proposition (Fonction dérivée d'une puissance) VII.40

Soit f dérivable sur I. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable sur I, et

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}$$

Cette formule reste valable si $n \in \mathbb{Z}$ si en outre f ne s'annule pas.

Proposition (Fonction dérivée et bijection réciproque) VII.41

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue strictement monotone sur I, dérivable sur I. Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, et pour tout a tel que $f'(a) \neq 0$, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$, et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Bien sûr, ces résultats admettent des analogues pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Structurellement, on en déduit notamment que $\mathcal{C}^1(I)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

4.2. Extremums d'une fonction dérivable. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Proposition (Extemum local et dérivée) VII.42

On suppose que f admet un extremum local en a intérieur à I, et que f est dérivable en a.
On a alors :

$$f'(a) = 0$$

Démonstration

Par hypothèse, on peut considérer un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $\mathcal{V} \subset I$ et tel que $f_{|\mathcal{V}}$ admette un extremum (global) en a, disons un maximum pour fixer les idées. Soit $x \in \mathcal{V} \setminus \{a\}$. Le taux d'accroissement de f entre x et a est positif ou nul si $x < a$, et négatif ou nul si $x > a$. On a donc $f'_g(a) \geqslant 0$ et $f'_d(a) \leqslant 0$. Par dérivabilité de f en a, on a donc $f'(a) = 0$. □

Illustration

La réciproque est bien sûr fausse :

Illustration

Attention à la condition a intérieur à I :

Illustration

Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

VII.43

Démonstration

Si f est constante, le résultat est clair (tout point c de $]a, b[$ convient). Supposons donc f non constante. Continue sur le segment $[a, b]$, la fonction f est bornée et atteint ses bornes m et M. N'étant pas constante, l'une de ces bornes ne vaut pas la valeur commune de f en a et b : l'une de ces bornes est atteinte en un point c de $]a, b[$. La fonction f présente un extremum global donc local en le point c intérieur à $]a, b[$: f est de dérivée nulle en c.

□

Illustration

Théorème (Égalité des accroissements finis) VII.44

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Démonstration

Interpoler f en a et b par une fonction affine g, puis appliquer le théorème de Rolle à $h = f - g$.

□

Illustration

Le travail principal a donc été effectué pour le théorème de Rolle : l'égalité des accroissements finis en est à la fois une extension et un corollaire.

Il n'y a aucune raison que les « c » dont il est question dans ces deux théorèmes soient uniques.

Théorème (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a,b]$, avec $a<b$, à valeurs réelles. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
On suppose qu'il existe un réel m (resp. M) tels que $m\leqslant f'$ (resp. $f'\leqslant M$. Pour tous élements x et y de $[a,b]$ vérifiant $x\leqslant y$, on a :

$$m(y-x)\leqslant (f(y)-f(x))(\text{resp. } f(y)-f(x)\leqslant M(y-x))$$

VII.45

Démonstration

Soit x et y des éléments de $[a,b]$. Si $x=y$, l'assertion est évidente. Sinon, il existe c strictement compris entre x et y tel que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)$. Le résultat s'ensuit immédiatement.

□

Corollaire (Caractère lipschitzien et dérivation)

Soit f une application continue sur I, dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I. La fonction f est k-lipschitzienne sur I si et seulement si

$$\forall x\in\mathring{I},\quad |f'(x)|\leqslant k$$

VII.46

Démonstration

Si f est k-lipschitzienne, on fixe $x\in\mathring{I}$, et on fait tendre y vers x dans $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, ce qui donne $|f'(x)|\leqslant k$. Si réciproquement $|f'|\leqslant k$ sur $\mathring{I}$, alors l'inégalité des accroissements finis donne immédiatement le résultat.

□

Exemple (Fonction continûment dérivable)

(1) La fonction arctan est 1-lipschitzienne.
(2) Les fonctions sinus et cosinus sont 1-lipschitziennes.
(3) La fonction racine carrée est $1/2$-lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.
(4) Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est donc $(\max|f'|)$-lipschitzienne.

xii

4.3. Étude aux bornes

Proposition (Fonctions continûment dérivables, étude aux bornes)

Soit f une application continue de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$. On suppose que f' possède une limite finie l en a à droite. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$, avec $f'(a)=l$.

VII.47

Démonstration

Il ne reste qu'à prouver la dérivabilité de f en a et que $f'(a) = l$ (f' sera alors continue en a). Soit $x \in]a, b[$. Il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} = f'(c_x)$. Comme c_x tend vers a lorsque x tend vers a, on constate que f est dérivable en a, et que $f'(a) = l$.

□

Illustration

Si on remplace la condition « f' possède une limite finie l en a à droite » par « f' possède une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ en a à droite », alors la courbe représentative de f admet au point $(a, f(a))$ une demi-tangente verticale (la démonstration est analogue).

Illustration

On a bien sûr un résultat analogue en b. On utilise souvent cette proposition sous la variante suivante :

Théorème du prolongement continûment dérivable VII.48

On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, admettant une limite finie en a, ainsi que sa dérivée. La fonction f est alors prolongeable par continuité en a, en une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple (Théorème du prolongement continûment dérivable) xiii

La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^3 \sin(1/x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et elle admet 0 pour limite en 0, ainsi que sa dérivée : elle se prolonge donc par continuité en 0 en une fonction de clase $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

4.4. Dérivabilité et monotonie

Proposition (Dérivation et constance) VII.49

Toute application constante $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I, et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$. Réciproquement, si f est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de l'intervalle I et si f' est l'application nulle, alors f est constante sur I.

Démonstration

Le sens direct est trivial, l'autre résulte aisément de l'égalité des accroissements finis. □

On aurait aussi pu appliquer le corollaire VII.46 de la page 192 dans le cas particulier où $k = 0$.

Proposition (Fonctions de même dérivée) VII.50

f, g dérivables sur un intervalle I ont des dérivées égales si et seulement si elles diffèrent d'une constante, *i.e.* :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad g(x) = f(x) + \lambda$$

Proposition (Dérivée et monotonie) VII.51

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. L'application f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$).

Démonstration

Si f est croissante, alors tous les taux d'accroissements de f entre deux réels sont positifs ou nuls. Pour tout x de I, le nombre dérivé $f'(x)$ est donc positif ou nul. Réciproquement, si $f' \geqslant 0$, alors l'égalité des accroissements finis montre que tout taux d'accroissement de f est positif ou nul, *i.e.* f est croissante. Considérer $-f$ si f est décroissante. □

Proposition (Dérivée et stricte monotonie) VII.52

Soit f une application dérivable et monotone.
L'application f est strictement monotone sur I si et seulement si le lieu de non annulation de f' est dense dans I (*i.e.* f' n'est nulle sur aucun sous-intervalle de I d'intérieur non vide).

Démonstration

Sachant que f est monotone, f est strictement monotone si et seulement si elle est injective si et seulement si il n'existe pas a et b distincts tels que $f(a) = f(b)$, si et seulement si il n'existe pas a et b distincts tels que f soit constante sur [a,b], si et seulement si f n'est constante sur aucun sous-intervalle de longueur non nulle, si et seulement si f' n'est nulle sur aucun sous-intervalle de longueur non nulle.

$\square$

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Corollaire (Condition suffisante de stricte monotonie)

Si f, dérivable sur I, est de dérivée à valeurs strictement positives (resp. strictement négatives), alors f est strictement croissante (resp. est strictement décroissante).

VII.53

Attention cependant, cette condition suffisante n'est pas nécessaire : donner un exemple de fonction strictement monotone (et dérivable) dont la dérivée s'annule une fois (puis une infinité de fois)

Illustration

5. Dérivées successives

5.1. Premières définitions

Définition (Dérivée d'ordre n)

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On pose $f^{(0)} = f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est définie et dérivable sur I, on pose :

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I, et $f^{(n)}$ est appelée *(application) dérivée n-ième*, ou *dérivée d'ordre* n de f sur I.
L'application $f^{(n)}$ peut également être notée $D^n(f)$ ou encore $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

VII.xxii

On note souvent f'' et f''' pour les dérivées seconde et troisième de f (lorsqu'elles existent).

Une fonction n fois dérivable (pour $n \geqslant 1$) est continue, ainsi que $f^{(k)}$, pour tout $k < n$.

Si f est dérivable n fois sur I, alors pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $f^{(k)}$ est dérivable $n - k$ fois sur I, et $f^{(n)} = (f^{(k)})^{(n-k)}$.

Définition (Fonction k fois continûment dérivable)

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application k fois dérivable. On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^k$ sur I, ou que f est k *fois continûment dérivable* sur I, si, de plus, $f^{(k)}$ est continue sur I.
On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^k(I)$) l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur I, ou que f est *indéfiniment dérivable* sur I, si elle est k fois dérivable, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$.

VII.xxiii

Une application appartenant à $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ n'est donc rien d'autre qu'une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Bien entendu, pour tout $k \geqslant 1$, on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$$

De plus

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$$

En particulier, toutes les dérivées d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont continues.

Exemple (La fonction inverse est indéfiniment dérivable)

La fonction inverse inv est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. sur $\mathbb{R}_-^*$), et, pour tout entier naturel k, tout réel non nul x :

$$inv^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

xiv

5.2. Opérations sur les applications k fois dérivables

Dans ce paragraphe, k désigne un entier non nul. On laissera le lecteur déduire de ces résultats les analogues pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition (Classe et combinaisons linéaires)

Soient f, g, k fois dérivables, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est k fois dérivable sur I, et

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\lambda f + \mu g$ l'est également.

VII.54

Proposition (Formule de Leibniz)

Soient f, g k fois dérivables. La fonction fg est alors k fois dérivable sur I, et :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors fg l'est également.

VII.55

Proposition (Classe et composition)

Soit $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ de classe k fois dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ k fois dérivable sur J. Alors $g \circ f$ est k fois dérivable sur I. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $g \circ f$ l'est également.

VII.56

Notez que l'on ne donne pas de formule pour $(g \circ f)^{(k)}$ (c'est trop laid).

Proposition (Classe et inverse)

Si f est k fois dérivable et f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est k fois dérivable. Si f est en outre de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\frac{1}{f}$ l'est également.

VII.57

Proposition (Classe et bijection réciproque)

Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$$

ou que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) < 0$$

Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et sa bijection réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

VII.58

Exemple (Fonctions indéfiniment dérivables)

(1) Les applications polynomiales, exponentielle, cosinus, sinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(2) ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(3) La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
(4) Les applications $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(5) Les applications $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(6) Les applications arcsin et arccos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$. La fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

xv

6. Uniforme continuité

Définition (Uniforme continuité)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *uniformément continue* sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, \quad (|x - y| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Un η pour un tel ε est appelé *module d'uniforme continuité* pour f et ε.

VII.xxiv

Illustration

Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Nous verrons des exemples montrant que les deux réciproques sont fausses. Cependant, on a une réciproque partielle :

Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

VII.59

Démonstration

On considère une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On raisonne par l'absurde, en supposant f non uniformément continue :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in I, \quad (|x - y| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon)$$

On construit deux suites (x_n) et (y_n) telles que $(x_n - y_n)$ tende vers 0 (on prend $\eta = 2^{-n}$), et dont la suite des images vérifie $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente, vers un point c du segment $[a, b]$. La suite $(y_{\varphi(n)})$ tend également vers c, et on arrive, par continuité de f en c, à l'absurdité $0 \geqslant \varepsilon$.

□

Exemple (Continuité (uniforme) et caractère lipschitzien)

(1) La fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

(2) La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$ mais non uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

xvi

7. Fonctions convexes

7.1. Définition, premières propriétés, lemme des trois pentes

Définition (Fonction convexe) VII.xxv

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Une application f est dite *concave* si $-f$ est convexe, *i.e.* pour tous points a et b de I, tout scalaire $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Pour toute fonction f, on a égalité ci-dessus en prenant $\lambda \in \{0,1\}$: une fonction est donc convexe si et seulement si les inégalités ci-dessus ont lieu pour tout $\lambda \in]0,1[$.

Interprétation géométrique : la convexité signifie que « tout sous-arc est sous sa corde ». Plus précisément, soit A (resp. B) le point du graphe Γ de f, d'abscisse a (resp. b).

Fixons $\lambda \in [0,1]$:

(1) $f(\lambda a + (1-\lambda)b)$ est l'ordonnée du point de Γ d'abscisse $\lambda a + (1-\lambda)b$.

(2) $\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ est l'ordonnée du point $((A,\lambda),(B,(1-\lambda))$

Lorsque λ parcourt $[0,1]$, $((A,\lambda),(B,(1-\lambda)))$ décrit la corde $[AB]$.

Illustration

Bien entendu, la concavité signifie que tout sous-arc est au-dessus de sa corde.

Exemple (Fonctions convexes) xvii

(1) Les applications affines sont à la fois convexes et concaves. Ce sont les seules.

(2) Si $f_1, \dots, f_n$ sont convexes, alors pour tous réels *positifs ou nuls* α_i ($i \in [\![1,n]\!]$), l'application $\sum_{k=1}^n \alpha_i f_i$ est convexe.

Proposition (Épigraphe et convexité) VII.60

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On considère l'ensemble :

$$\Omega = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R}, \quad y \geqslant f(x)\}$$

(on l'appelle *épigraphe* de f sur I). L'application f est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Illustration

Démonstration

□

f est concave si et seulement si la partie de $\mathbb{R}^2$ située sous la courbe de f est convexe.

Proposition (Inégalité de convexité généralisée (ou inégalité de Jensen discrète)) VII.61

Soit f une fonction convexe sur I. Alors pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, pour tous points $x_1, \ldots, x_n$ de I, tous réels positifs ou nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de somme 1, on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

Démonstration

Cela provient de la convexité de l'épigraphe de f et de la proposition VII.3 page 169.

□

Lemme Coefficients d'un barycentre de réels VII.62

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$, où $x < z$ et $y \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $y = \lambda x + (1 - \lambda) z$.

(2) $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$.

(3) $(1 - \lambda) = \frac{y-x}{z-x}$.

Démonstration

Simple calcul. □

Lemme des trois pentes

VII.63

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. L'application f est convexe si et seulement si pour tous points x, y, z de I, tels que $x < y < z$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Démonstration

Soit $x < y < z$ trois éléments de I. L'inégalité

$$f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$$

est équivalente à chacune des deux inégalités suivantes :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad \text{et} \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

La fonction f est convexe si et seulement si la première inégalité a lieu pour tous éléments x, y, z de I, $x < y < z$. On a donc prouvé un peu mieux que prévu. □

Illustration

Cette interprétation graphique permet de retrouver ce résultat très rapidement.

Interprétation fonctionnelle : f est convexe si et seulement si, pour tout point a de I, l'application $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$. Ce résultat, important pour les démonstrations à venir, peut s'interpréter comme la croissance des pentes dont on a fixé une extrémité.

Illustration

7.2. Convexité et régularité

L'étude de la régularité des applications convexes n'est pas explicitement au programme. Voici en exercice les propriétés qu'on peut montrer :

Proposition (Caractérisations de la convexité d'une fonction dérivable)

VII.64

Soit f une application dérivable sur I. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) L'application f est convexe.

(2) f' est croissante.

(3) La courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes, *i.e.* :

$$\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a).$$

Illustration

Démonstration

Procéder par implications cycliques (pour (1) ⇒(2), utiliser le lemme des trois pentes, pour (2) ⇒(3), utiliser l'égalité des accroissements finis, et pour (3) ⇒(1), fixer $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$ et appliquer (3) pour $a = y$) :

□

Corollaire (Caractérisation pratique de la convexité) — VII.65

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. La fonction f est convexe (resp. concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (resp. $f'' \leqslant 0$).

Dans la pratique, c'est souvent ce résultat que l'on utilise pour prouver la convexité d'une fonction.

Interprétation graphique d'un *point d'inflexion* a ($f''(a) = 0$, et f'' change de signe au point a) : exemples de sin, sh, th.

Illustration

Exemple (Encore des fonctions convexes)

(1) L'application exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (ainsi que ch), l'application ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit notamment

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$$

(2) L'application sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (et même sur $[0, \pi]$). Il en résulte l'encadrement très utile :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

(3) Les applications $x \mapsto a^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

(4) L'application $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est concave si $\alpha \in [0, 1]$ et convexe si $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup [1, +\infty[$. On a donc, lorsque $\alpha \geqslant 1$, pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$$

xviii

Illustration

CHAPITRE VIII

Espaces vectoriels normés

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est de généraliser, assez considérablement, une bonne partie du cours d'analyse de MPSI : suites et séries numériques, fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes, continuité. On se fonde, par analogie avec la situation dans le cas réel ou complexe, sur la notion de norme. Une fois un espace vectoriel E muni d'une norme, on peut définir une topologie sur E : se donner une topologie sur un ensemble, c'est donner un sens aux termes intuitifs d'ouvert, fermé, intérieur, fermeture, voisinage, point adhérent, etc. Formellement, on définit une topologie sur un ensemble en donnant celles de ses parties que l'on considère comme *ouvertes*, cet ensemble devant en outre satisfaire une certaine axiomatique.

On voit aussi se dégager la notion de compacité, permettant par exemple de généraliser le théorème de Heine, ou le fait qu'une fonction continue sur un segment et à valeurs réelles soit bornée et atteigne ses bornes.

On définit enfin et étudie la notion de connexité par arcs, qui permet de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et même des espaces vectoriels normés à partir de la deuxième section (topologie d'un espace vectoriel normé).

A est une partie de E, et f est une fonction de A dans F.

1. Normes et espaces vectoriels normés

Définition (Norme)

Une *norme* sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant

(1) *(axiome de séparation)* $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

(2) *(inégalité triangulaire)* $\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

(3) *(homogénéité)* $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

Une *structure d'espace vectoriel normé* (en abrégé : *evn*) consiste en la donnée d'un couple $(E, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

VIII.i

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn, alors $\|0_E\| = 0$. On a aussi la *seconde inégalité triangulaire* :

$$\forall x, y \in E, \quad |\, \|x\| - \|y\|\, | \leqslant \|x+y\|\,,$$

ou encore

$$\forall x, y \in E, \quad |\, \|x\| - \|y\|\, | \leqslant \|x-y\|\,.$$

Exemple (Premiers exemples de normes)

(1) L'application $|\cdot|\; : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ (valeur absolue dans $\mathbb{R}$, module dans $\mathbb{C}$) est une [a] norme. C'est la norme que nous considérerons par défaut sur $\mathbb{K}$.

(2) Si $N_1, \ldots, N_p$ sont des normes sur E, alors pour tous réels positifs *non tous nuls* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$,
$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i N_i$$
est une norme sur E.

(3) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn, et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme sur F appelée *norme induite* sur F par la norme $\|\cdot\|$ de E (on dit aussi que la structure d'evn sur E induit une structure d'evn sur F).

a. D'ailleurs, quelles sont normes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$?

i

Exemple (Norme associée à un produit scalaire)

Étant donné un espace préhilbertien réel $(E, <\cdot,\cdot>)$, on peut définir la norme
$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\| & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{<x,x>} \end{array}$$
appelée *norme associée au produit scalaire* $<\cdot,\cdot>$ (ou à la structure préhilbertienne) de E.

La norme asssociée à un produit scalaire vérifie une propriété particulière, l'*identité du parallélogramme* :
$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

ii

Illustration

Exemple (Normes classiques sur des espaces de dimension finie)

Sur $\mathbb{K}^n$, on peut associer classiquement

(1) La *norme* 1, notée $\| \|_1$, donnée par

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_1 \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

(2) La *norme* 2, notée $\| \|_2$, donnée par

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_2 \overset{def}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

On reconnaît d'ailleurs dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

(3) La *norme infinie*, notée $\| \|_\infty$, donnée par [a]

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_\infty \overset{def}{=} \sup\{|x_i|, i \in [\![1, n]\!]\}$$

a. Ici, ce sup est un max, mais l'emploi de la norme infinie va vite se généraliser à des espaces où la borne supérieure ne sera pas toujours atteinte.

iii

Plus généralement, si un espace vectoriel E de dimension finie admet une base canonique, comme c'est par exemple le cas de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut définir la norme 1, la norme 2 et la norme infinie.

Par exemple,

$$\forall\, P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X], \quad \|P\|_1 \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$

et

$$\forall\, A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_2 \overset{def}{=} \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2}$$

Exemple (Norme de la convergence uniforme)

Soit X un ensemble non vide. Notons $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}$. La norme de la *convergence uniforme* sur cet espace, notée $\|\cdot\|_\infty$, est donnée par

$$\forall\, f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty \overset{def}{=} \sup\{|f(x)|,\, x \in X\}$$

On l'utilise particulièrement dans le cas où X est un intervalle, ainsi que dans le cas où $X = \mathbb{N}$ (cela définit alors une norme sur l'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$).

iv

Exemple (Normes sur l'espace des fonctions numériques continues sur un segment)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$. Posons $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$.
On définit

(1) La *norme de la convergence en moyenne* sur E, notée $\|\cdot\|_1$, par

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_{[a,b]} |f|$$

(2) La *norme de la convergence en moyenne quadratique* sur E, notée $\|\cdot\|_2$, par

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2}$$

On reconnaît d'ailleurs dans le cas réel la norme associée au produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{[a,b]} fg$ sur E.

(3) La norme infinie sur $\mathcal{B}([a,b], \mathbb{K})$ induit une norme sur E (et, dans ce cas restreint, le sup est en fait un max).

v

Exemple (Produit fini d'espaces vectoriels normés)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces vectoriels normés. L'application

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\| : & E_1 \times \cdots \times E_n & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \|x\| \overset{def}{=} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|_i \end{array}$$

confère à $E_1 \times \cdots \times E_n$ une structure d'evn, dite structure d'*evn produit* sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

vi

Notion de norme d'algèbre

Si E n'est pas seulement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel mais aussi une $\mathbb{K}$-algèbre, et qu'on le munit d'une norme, il est naturel d'espérer que $\|\cdot\|$ se « comporte bien » non seulement pour le produit par un scalaire (homogénéité) et pour la somme (inégalité triangulaire), mais aussi pour le produit interne. En considérant l'exemple des endomorphismes ou des matrices non nul(le)s nilpotent(e)s, on voit qu'il n'est pas raisonnable de vouloir que $\|uv\| = \|u\| \, \|v\|$ pour tous $u, v \in E$.
Aussi définit-on la notion de *norme d'algèbre* sur la $\mathbb{K}$-algèbre E comme une norme vérifiant en outre :

$$\forall u, v \in E, \quad \|uv\| \leqslant \|u\| \, \|v\| \, .$$

On dit alors que $(E, \|\cdot\|)$ est une $\mathbb{K}$-*algèbre normée*.
La norme infinie sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ (où X est un ensemble non vide) est une norme d'algèbre car pour toutes fonctions f et g de X dans $\mathbb{K}$, on a

$$\sup_X |fg| \leqslant \sup_X |f| \, \sup_X |g|$$

Cette notion n'est pas explicitement au programme.

VIII.a

Définition (Vecteur unitaire)

Un vecteur d'un evn E est dit *unitaire* s'il est de norme 1.

VIII.ii

Exemple (Vecteur unitaire)

(1) Pour tout vecteur non nul x d'un evn E, $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

(2) Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont unitaires pour la norme 1, la norme 2, et la norme infinie.

(3) Dans $\mathbb{R}^2$, $(1,1)$ est unitaire pour la norme infinie, mais pas pour les normes 1 et 2.

vii

Définition (Distance associée à une norme)

Étant donné une norme $\|\cdot\|$ sur E, l'application

$$\begin{array}{rccl} d\ : & E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array}$$

est appelée *distance associée à la norme* $\|\cdot\|$.

VIII.iii

Dans ce contexte, d vérifie :

(1) *(axiome de séparation)* $\forall\, x,y \in E,\quad d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

(2) *(symétrie)* $\forall\, x,y \in E,\quad d(x,y)=d(y,x)$.

(3) *(inégalité triangulaire)* $\forall\, x,y,z \in E,\quad d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

Définition (Distance d'un point à une partie non vide)

Soit $x \in E$ (où E est un evn) et A une partie non vide de E. On appelle *distance de x à A* et on note $d(x,A)$ le réel

$$d(x,A) \overset{def}{=} \inf\{d(x,a),\ a \in A\}.$$

VIII.iv

Démonstration

Justification de l'existence de cette borne inférieure :

□

On observera que si $x \in A$, alors $d(x,A)=0$, mais qu'on peut trouver des exemples de x et A tels que $d(x,A)=0$ et, pourtant, $x \notin A$:

Plus généralement, il n'existe pas nécessairement $a \in A$ tel que $d(x,A)=d(x,a)$: on dit que la distance de x à A n'est pas nécessairement atteinte.

Illustration

2. Topologie d'un espace normé

On rappelle que E est un evn.

2.1. Boules, sphères, parties bornées

Définition (Boules fermées, boules ouvertes, sphères)

Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
- L'ensemble $\{x \in E,\ d(x,a) \leqslant r\}$ est appelé *boule fermée* de centre a et de rayon r, et noté $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$.
- L'ensemble $\{x \in E,\ d(x,a) < r\}$ est appelé *boule ouverte* de centre a et de rayon r, et noté $\mathcal{B}(a,r)$.
- L'ensemble $\{x \in E,\ d(x,a) = r\}$ est appelé *sphère* de centre a et de rayon r, et noté $\mathcal{S}(a,r)$.

La *boule unité* (fermée ou ouverte selon le cas) est celle de centre 0_E et de rayon 1. De même pour la sphère unité.

VIII.v

Illustration

Inclusions respectives de boules fermées et ouvertes concentriques

Soit $r, r' \in \mathbb{R}_+$ tels que $r < r'$. On a, pour tout $a \in E$:

$$\mathcal{B}(a,r) \subset \overline{\mathcal{B}}(a,r) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{B}}(a,r) \subset \mathcal{B}(a,r')$$

VIII.b

Exemple (Boules réelles)

Dans le cas de l'evn $\mathbb{R}$ (muni de la norme valeur absolue), on a $\mathcal{B}(a,r) =]a-r, a+r[$ et $\overline{\mathcal{B}}(a,r) = [a-r, a+r]$ pour tout $(a,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

viii

Proposition (Les boules sont convexes)

Soit $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+$. Les boules $\mathcal{B}(a,r)$ et $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ sont convexes.

VIII.1

Démonstration

$\square$

Illustration

Exercice (d'assimilation) conseillé : 673.

Définition (Parties, suites, fonctions bornées)

Une partie A de E est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall\, a \in A,\ \|a\| \leqslant M.$$

Une suite ou une fonction à valeurs dans E est dite *bornée* si son image l'est.

VIII.vi

Parties bornées

(1) Une partie de E est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (fermée ou ouverte, peu importe) centrée en 0_E.
(2) L'union d'un nombre fini de parties bornées est bornée.
(3) Une partie d'une partie bornée est bornée.
(4) Toute boule est bornée.

VIII.c

Illustration

2.2. Ouverts et fermés d'un evn

Définition (Voisinage d'un point)

Soit $a \in E$, et soit A une partie de E. On dit que A est un *voisinage* de a, ou que a est *intérieur* à A, s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathcal{B}(a, \varepsilon) \subset A$$

VIII.vii

a est intérieur à A si et seulement si

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathcal{B}(a, \varepsilon) \subset A,$$

ce qui équivaut à

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \overline{\mathcal{B}}(a, \varepsilon) \subset A,$$

Illustration

On retrouve bien la définition d'un voisinage (dans $\mathbb{K}$) d'un point de $\mathbb{K}$, donnée dans le chapitre sur les suites et séries numériques.

Voisinage d'un point dans un evn

(1) Toute partie de E contenant un voisinage de a est un voisinage de a.

(2) L'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a (mais l'intersection d'un nombre infini de voisinages de a n'est pas toujours un voisinage de a).

(3) Étant donné deux points distincts a et b de E, il existe des voisinages respectifs V_a et V_b de a et b tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$.

VIII.d

Définition (Ouvert d'un espace normé)

Une partie A de E est dite *ouverte* si elle est voisinage de chacun de ses points.

VIII.viii

Illustration

Exemple (Ouverts)

(1) E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.

(2) Toute boule ouverte est un ouvert.

(3) Les intervalles de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$, sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

ix

Ouvert

(1) Une union quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.

(2) Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

(3) Une intersection quelconque d'ouverts de E n'est pas toujours un ouvert de E.

VIII.e

Définition (Fermé d'un espace normé)

Une partie A de E est dite *fermée* si son complémentaire dans E est un ouvert de E.

VIII.ix

Exemple (Fermés)

(1) E et $\emptyset$ sont des fermés de E.
(2) Toute boule fermée est un fermé. Toute sphère est fermée. En particulier, les singletons sont fermés.
(3) Les intervalles de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$, sont des fermés de $\mathbb{R}$.

x

Fermé

(1) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
(2) Une union finie de fermés de E est un fermé de E.
(3) Une union quelconque de fermés de E n'est pas toujours un fermé de E.

VIII.f

Une boule fermée est rarement ouverte, et une boule ouverte est rarement fermée.
Attention ! Une partie de E peut être à la fois fermée et ouverte, ou ni fermé ni ouverte :

Illustration

2.3. Intérieur, adhérence, frontière

Définition (Point adhérent) VIII.x

Un point a de E est *adhérent* à une partie A de E si A rencontre tout voisinage de a, *i.e.* pour tout voisinage V de a, $V \cap A \neq \emptyset$.

Point adhérent à une partie VIII.g

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) a est adhérent à A.

(2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(3) $d(a, A) = 0$.

Définition (Intérieur, adhérence, frontière d'une partie) VIII.xi

- On appelle *intérieur* de A et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
- On appelle *adhérence* de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
- On appelle *frontière* de A (et on note parfois $\mathrm{Fr}(A)$ ou ∂A) l'ensemble des points adhérents à A et à son complémentaire.

Avec cette définition de la frontière, on a immédiatement $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(E \setminus A)$. Certains auteurs définissent la frontière de A comme $\overline{A} \setminus \mathring{A}$, voir l'exercice 690 page 567.

Un point appartient à $\mathrm{Fr}(A)$ si et seulement si il est à distance nulle de A et de son complémentaire.

Illustration

Bien sûr, si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Lemme (Adhérence, intérieur et complémentaire)

Un point a de E est soit adhérent à A, soit intérieur à $E \setminus A$, *i.e.*

$$E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$$

VIII.2

Démonstration

Soit $a \in E$. Le fait que a soit adhérent à A s'écrit formellement

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Le fait que a ne soit pas adhérent à A se reformule donc en

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(a, \varepsilon) \cap A = \emptyset$$

soit encore

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(a, \varepsilon) \subset E \setminus A$$

soit enfin $a \in \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$.

□

Lemme (Nature topologique de l'intérieur et de l'adhérence)

$\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A, et $\overline{A}$ est un fermé contenant A.

VIII.3

Démonstration

Soit $a \in \mathring{A}$: il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{B}(a,\varepsilon) \subset A$. En particulier, $a \in A$ (et donc $\mathring{A} \subset A$, puisque ceci vaut pour tout $a \in \mathring{A}$). De plus, $\mathcal{B}(a,\varepsilon)$ est un ouvert, donc est voisinage de chacun de ces points : comme en outre $\mathcal{B}(a,\varepsilon) \subset A$, il s'ensuit que tout point de $\mathcal{B}(a,\varepsilon)$ est intérieur à A. Ceci prouve bien que $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A.

Comme $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$ est un ouvert inclus dans $E \setminus A$, on obtient en passant au complémentaire que $(E\setminus(\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}))$ est un fermé contenant A, et le lemme précédent (donnant $(E\setminus(\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}})) = \overline{A}$) permet de conclure.

$\square$

Proposition (Caractérisation de l'intérieur et de l'adhérence) VIII.4

Soit A une partie de E.

(1) L'intérieur de A est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) de E contenu dans A.

(2) L'adhérence de A est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) de E contenant A.

Démonstration

Le second point se déduit du premier par passage au complémentaire. Montrons donc le premier point. On sait déjà que $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A. Soit U un ouvert inclus dans A. Soit $a \in U$. Comme U est ouvert, U est voisinage de a, et comme A contient U, A est voisinage de a, *i.e.* a est intérieur à A : $a \in \mathring{A}$. Il vient bien $U \subset \mathring{A}$.

$\square$

Illustration

On retiendra que $A \subset \overline{A}$ (resp. $\mathring{A} \subset A$), l'égalité se produisant si et seulement si A est fermée (resp. ouverte).

Exemple (Adhérence, intérieur et frontière)

Pour tout $r > 0$ et tout $a \in E$, $\mathcal{B}(a,r)$ et $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ ont même adhérence $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$, même intérieur $\mathcal{B}(a,r)$ et même frontière $\mathcal{S}(a,r)$.

xi

Exemple (Parties réelles d'intérieur vide)

(1) Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide si et seulement si I est vide ou est un singleton, si et seulement si I est fini.

(2) $\mathbb{N}$ est infini et d'intérieur vide (mais n'est pas un intervalle).

xii

3. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Définition (Suite convergente, divergente)

Soit (u_n) une suite d'éléments de E, et $l \in E$. On dit que la suite (u_n) *converge* vers l si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N) \Rightarrow (\|u_n - l\| \leqslant \varepsilon).$$

Dans ce cas, on note $u_n \to_n l$ ou $\lim_n u_n = l$.

La suite (u_n) est dite *convergente* s'il existe un élément de E vers lequel elle converge. Une suite non convergente est dite *divergente*.

VIII.xii

Voici deux reformulations possibles du fait que (u_n) converge vers l :

(1) Que la suite *réelle* de terme général $\|u_n - l\|$ converge vers 0.

(2) Que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang à partir duquel u_n appartient à la boule[1] de centre l et de rayon ε.

Illustration

1. ouverte ou fermée, cela ne change rien

Exemple (Suites convergentes)

(1) Vous avez déjà vu beaucoup d'exemples en MPSI dans le cadre des suites réelles ou complexes, n'hésitez pas à les revoir.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n \ : x \in [0,1] \mapsto x^n$. La suite (g_n) converge vers la fonction identiquement nulle dans l'evn $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, mais pas dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

(3) On reprend les fonctions $g_n \ : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Pour tout $a \in]0,1[$ la suite (h_n) des restrictions des g_n à $[0,a]$ converge vers la fonction identiquement nulle dans $(\mathcal{C}([0,a],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, mais la suite (s_n) des restrictions des g_n à $[0,1[$ ne converge pas vers la fonction identiquement nulle dans $(\mathcal{C}([0,1[,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, bien que $[0,1[= \cup_{a\in]0,1[}[0,a]$.

(4) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la suite $(A + \frac{1}{k}B)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour n'importe laquelle des normes sur cet espace).

xiii

Proposition (Unicité de la limite dans un evn)

Toute suite d'éléments de E admet au plus une limite.

VIII.5

Démonstration

Si une suite u admettait deux limites l et l', alors en prenant deux voisinages disjoints V_l et $V_{l'}$ respectifs de l et l', il existerait un rang N à partir duquel $u_n \in V_l \cap V_{l'} = \emptyset$, ce qui est absurde. □

Proposition (Caractère borné d'une suite convergente)

Toute suite convergente d'un evn est bornée.

VIII.6

Démonstration

Il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans l'assertion formelle de convergence pour constater qu'une suite convergente est bornée à partir d'un certain rang, et qu'elle est donc bornée. □

Il se peut que pour des normes différentes N et N', une même suite soit convergente pour N, mais qu'elle diverge pour N'.

Exemple (Le comportement asymptotique d'une suite dépend de la norme)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n \ : x \in [0,1] \mapsto \sqrt{n}\, x^n$. On peut vérifier que (g_n) converge pour la norme 1, mais qu'elle n'est pas bornée (et donc qu'elle n'est pas convergente) pour la norme infinie.

xiv

Théorème (Opérations algébriques sur les suites convergentes)

VIII.7

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites convergentes d'éléments de E. L'ensemble $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$, et l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & E \\ u & \mapsto & \lim u \end{array}$$

est linéaire.
Si de plus $(E, \|\cdot\|)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, alors $\mathcal{C}$ est [a] une $\mathbb{K}$-algèbre, et φ est un morphisme d'algèbres.

a. pour la structure induite par celle sur $E^{\mathbb{N}}$

Démonstration

Bien sûr, la suite nulle d'éléments de E est convergente, *i.e.* $0_{E^{\mathbb{N}}} \in \mathcal{C}$.
Soit $u, v \in \mathcal{C}$, de limites respectives l_u et l_v, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Il s'agit de montrer que la suite réelle de terme général $\|\lambda\, u_n + \mu\, v_n - (\lambda\, l_u + \mu\, l_v)\|$ tend vers 0. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme donnent

$$\|\lambda\, u_n + \mu\, v_n - (\lambda\, l_u + \mu\, l_v)\| \leqslant |\lambda|\, \|u_n - l_u\| + |\mu|\, \|v_n - l_v\|$$

Comme la suite de terme général $|\lambda|\, \|u_n - l_u\| + |\mu|\, \|v_n - l_v\|$ tend vers 0 (d'après le cours de MPSI), $\lambda\, u + \mu\, v$ converge bien vers $\lambda\, l_u + \mu\, l_v$, ce qui établit à la fois la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{C}$ et la linéarité de φ.
Dans le cas où $(E, \|\cdot\|)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, il est clair que la suite constante de valeur 1_E est convergente, et qu'elle admet 1_E pour limite, donc φ envoie bien l'unité sur l'unité.
Enfin, la majoration (valable pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$\|u_n v_n - l_u l_v\| = \|u_n v_n - u_n l_v + u_n l_v - l_u l_v\| \leqslant \|u_n\|\, \|v_n - l_v\| + \|l_v\|\, \|u_n - l_u\|$$

montre que $(u_n v_n)$ converge vers $l_u l_v$.

$\square$

Proposition (Produit d'une suite numérique et d'une suite vectorielle)

VIII.8

Soit (λ_n) une suite convergente de scalaires, et μ sa limite, ainsi que (u_n), suite d'éléments de E, convergeant vers un vecteur v. La suite $(\lambda_n u_n)$ converge alors vers μv.

Démonstration

Provient de la majoration (valable pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$\|\lambda_n u_n - \mu v\| = \|\lambda_n u_n - \lambda_n v + \lambda_n v - \mu v\| \leqslant |\lambda_n|\, \|u_n - v\| + |\lambda_n - \mu|\, \|v\|$$

$\square$

Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés

VIII.h

Une suite à valeurs dans un produit d'evn est convergente si et seulement si ses suites coordonnées sont convergentes.

Définition (Suites extraites, valeurs d'adhérence)

On appelle *extractrice* toute fonction strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Soit $(u_n), (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que (v_n) est *extraite* de (u_n) s'il existe une extractrice φ pour laquelle $v = u \circ \varphi$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

On appelle *valeur d'adhérence* de (u_n) toute limite d'une suite extraite convergente de (u_n).

VIII.xiii

Suites extraites, valeurs d'adhérence

(1) Si (u_n) converge, alors sa limite est sa seule valeur d'adhérence.
(2) Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
(3) Une suite n'a pas toujours de valeur d'adhérence.
(4) La relation « est extraite de » sur l'ensemble des suites d'éléments de E (supposé non nul) est réflexive et transitive, mais ni symétrique, ni antisymétrique.

VIII.i

Proposition (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Un point a de E est adhérent à A si et seulement si a est limite d'une suite de points de A.

VIII.9

Démonstration

Supposons a adhérent à A : pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $A \cap \mathcal{B}(a, \varepsilon) \neq \emptyset$: on prend une suite (ε_n) de réels strictement positifs, de limite nulle (par exemple $(1/2^n)$) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n \in A$ tel que $\|\alpha_n - a\| \leqslant \varepsilon_n$. La suite (α_n) d'éléments de A converge alors vers a.
Réciproquement, supposons que a soit limite d'une suite (α_n) d'éléments de A. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de la convergence, il existe un rang N à partir duquel $\|\alpha_n - a\| \leqslant \varepsilon$. En particulier, $\overline{B}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ceci valant pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \overline{A}$. □

On en déduit une caractérisation des fermés (et on comprend peut-être mieux la terminologie employée) :

Corollaire (Caractérisation séquentielle des fermés)

A est une partie fermée de E si et seulement si pour toute suite convergente (u_n) de points de A, $\lim\limits_n u_n$ appartient à A.

VIII.10

Définition (Partie dense)

Une partie A de E est dite *dense* si $\overline{A} = E$.

VIII.xiv

A est dense dans E si et seulement si A rencontre toute boule de E de rayon non nul.

Corollaire (Caractérisation séquentielle de la densité)

A est dense dans E si et seulement si tout point de E est limite d'une suite de points de A.

VIII.11

Exemple (Parties denses)

(1) Si E n'est pas réduit à un point, alors, pour toute partie finie M de E, $E \setminus M$ est dense dans E.
(2) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ (et d'intérieur vide).
(3) $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ (et d'intérieur vide).

xv

Exemple (Densité de l'ensemble des matrices inversibles (à connaître))

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait que l'application

$$f \ : \lambda \in \mathbb{K} \mapsto \det(A - \lambda I_n)$$

est polynomiale, non nulle puisque de degré n. Son lieu d'annulation est donc fini, puis $\left(A - \frac{1}{p} I_n\right)_p$ est une suite de matrices inversibles (à partir d'un certain rang du moins), qui converge vers A.

xvi

4. Topologie induite

Ici, A désigne une partie d'un evn E.

Définition (Topologie induite)

Soit A une partie de E. On appelle *ouvert relatif* (resp. *fermé relatif*) de A toute intersection d'un ouvert (resp. d'un fermé) de E avec A.
Soit $a \in A$. On appelle *voisinage relatif* de a dans A toute intersection d'un voisinage de a dans E avec A.

VIII.xv

Ces notions définissent ce qu'on appelle la *topologie de A induite par (celle de) E*.
Tout fermé, ouvert de A, tout voisinage relatif dans A, est une partie de A.
Si B est une partie de A, fermée, ouverte, ou voisinage de a dans E, alors c'est un fermé, ouvert, voisinage de a relatif dans A, mais la réciproque est fausse.
B est un ouvert relatif de A si et seulement si son complémentaire dans A est un fermé relatif de A.
A est un ouvert relatif et un fermé relatif de lui-même.
Une union quelconque et une intersection finie d'ouverts relatifs de A en est encore un.
Une intersection quelconque et une union finie de fermés relatifs de A en est encore un.

Illustration

Proposition (Caractérisation des ouverts relatifs)

Soit B une partie de A. B est un ouvert relatif de A si et seulement si pour tout $b \in B$, B est un voisinage relatif de b dans A.

VIII.12

Démonstration

Si B est un ouvert relatif de A, alors il existe un ouvert U de E tel que $B = A \cap U$. Pour tout $b \in B$, B est l'intersection de A et du voisinage U de b, donc B est un voisinage relatif de b dans A.
Reciproquement, on suppose que B est un voisinage relatif de tous ses points. Pour tout $b \in B$, il existe $\varepsilon_b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que B contienne $\mathcal{B}(b, \varepsilon_b) \cap A$. On a donc

$$B = \bigcup_{b \in B} (A \cap \mathcal{B}(b, \varepsilon_b)) = A \cap \left(\bigcup_{b \in B} \mathcal{B}(b, \varepsilon_b) \right)$$

et donc B est l'intersection de A et de l'ouvert (car union d'ouverts) $\bigcup_{b \in B} \mathcal{B}(b, \varepsilon_b)$: B est un ouvert relatif.

$\square$

Proposition (Caractérisation séquentielle des fermés relatifs)

Soit B une partie de A. B est un fermé relatif de A si et seulement si, pour tout suite (x_n) de points de B, convergeant dans A, la limite de (x_n) appartient à B.

VIII.13

Démonstration

Si B est un fermé relatif de A, alors il existe un fermé Z de E tel que $B = A \cap Z$. Soit (x_n) une suite de points de B convergeant vers l dans A. Par hypothèse, $l \in A$, et, puisque Z est fermé, on a aussi $l \in Z$, puis $l \in A \cap Z = B$, d'où l'implication directe.
Supposons, réciproquement, que B vérifie cette propriété séquentielle. Comme $B \subset A$ et $B \subset \overline{B}$, on a $B \subset A \cap \overline{B}$. Réciproquement, soit $\alpha \in A \cap \overline{B}$. Par appartenance de α à $\overline{B}$, il existe une suite de points de B , convergeant vers α. Comme en outre $\alpha \in A$, l'hypothèse donne $\alpha \in B$. Ainsi, B est l'intersection de A et du fermé $\overline{B}$ de E : c'est un fermé relatif de A.

$\square$

5. Étude locale d'une application, continuité

Ici, f est une fonction de A (partie d'un evn E) dans F (un evn), et a est adhérent à A.

5.1. Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine

Définition (Limite en un point adhérent à une partie A)

Soit $f : A \to F$ une application, a un point de E adhérent à A, et $l \in F$.
On dit que f admet l pour *limite* en a si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, \, (\|x-a\| \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(x)-l\| \leqslant \varepsilon).$$

On écrit alors $f \to_a l$, $f(x) \to_{x \to a} l$, $l = \lim_a f$, ou encore $l = \lim_{x \to a} f(x)$.

VIII.xvi

On peut remarquer que l'assertion

$$\forall x \in A, \, (\|x-a\| \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(x)-l\| \leqslant \varepsilon)$$

peut se réécrire

$$f(A \cap \overline{\mathcal{B}}(a,\delta)) \subset \overline{\mathcal{B}}(l,\varepsilon)$$

Reformulation de la limite

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f admet l pour limite en a.

(2) Pour toute boule $\mathcal{B}$ de rayon non nul centrée en l, il existe une boule de rayon non nul $\mathcal{B}'$, centrée en a, telle que $f(A \cap \mathcal{B}') \subset \mathcal{B}$.

(3) Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de l dans F, il existe un voisinage relatif $\mathcal{V}'$ de a dans A tel que $f(\mathcal{V}') \subset \mathcal{V}$.

(4) Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de l dans F, $f^{-1}(\mathcal{V})$ est un voisinage relatif de a dans A.

VIII.j

Une fonction admet au plus une limite en un point adhérent à son domaine, mais n'en admet pas toujours.
On étend sans problèmes la notion de limite aux cas suivants :

(1) Limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

(2) Limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$.

(3) Limite infinie en a adhérent à A pour une fonction à valeurs réelles.

En utilisant la notion de voisinage[2] de $+\infty$ ou de $-\infty$ dans $\mathbb{R}$, ces extensions admettent encore des reformulations en termes de voisinages. Par exemple, f tend vers $+\infty$ en a si et seulement si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{V})$ est un voisinage relatif de a dans A.

Les deux dernières reformulations dans la remarque VIII.j sont valables dans toutes les situations : elles synthétisent à elles-seules ce que signifie, pour une fonction et même pour une suite (en prenant $A = \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$), le fait d'admettre une limite en un point adhérent à son domaine (en $+\infty$ pour les suites).

2. Une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $[M, +\infty[\subset A$ (resp. $]-\infty, M] \subset A$)

Proposition (Caractérisation séquentielle de la limite)

f admet l pour limite en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) de points de A, de limite a, la suite $(f(u_n))$ tend vers l.

VIII.14

Démonstration

Supposons f de limite l en a. Soit (u_n) une suite de points de A, de limite a. Soit V un voisinage de l. Il existe un voisinage W de a tel que $f(A \cap W) \subset V$. Comme u tend vers a, il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait $u_n \in W$. Ainsi, à partir du rang N, on a $f(u_n) \in V$: la suite $(f(u_n))$ tend vers l.
Montrons la réciproque par contraposition. Pour simplifier l'exposition, nous considérons le cas où $a \in E$. Supposons que f ne tende pas vers l en a : il existe un voisinage V de l tel que, pour tout voisinage W de a, $f(A \cap W)$ ne soit pas inclus dans V. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $u_n \in A \cap \overline{\mathcal{B}}\left(a, \frac{1}{2^n}\right)$ tel que $f(u_n) \notin V$.
Bien que la suite (u_n) converge vers a (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n - a\| \leqslant \frac{1}{2^n}$), la suite $(f(u_n))$ ne tend pas vers l.

$\square$

Proposition (Limite d'une fonction à valeurs dans un evn produit)

Supposons que F soit un evn produit $F_1 \times \cdots \times F_p$. Soit $l = (l_1, \ldots, l_p) \in F$ et $f = (f_1, \ldots, f_p)$ une fonction de A dans F.
La fonction f tend vers l en a si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la fonction f_k tend vers l_k en a.

VIII.15

Démonstration

Dire que f tend vers l en a, c'est dire que

$$g \overset{def}{=} \sup\{\|f_1 - l_1\|, \ldots, \|f_p - l_p\|\}$$

tend vers 0 en a.
Si f tend vers l en a, alors, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, f_k tend vers l_k en a, puisque $\|f_k - l_k\| \leqslant g$.
Réciproquement, si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, f_k tend vers l_k en a, alors f tend vers l en a, puisque $g \leqslant \sum_{k=1}^{p} \|f_k - l_k\|$.

$\square$

Théorème (Opérations algébriques sur les limites dans un evn)

Si f et g (une fonction de A dans F) admettent respectivement l_f et l_g pour limites en a, alors pour tous scalaires λ et μ, $\lambda f + \mu g$ admet $\lambda l_f + \mu l_g$ pour limite en a.
Si en outre F est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, alors fg tend vers $l_f l_g$ en a.

VIII.16

Démonstration

On peut adapter la preuve du théorème VIII.7. Mieux, on peut utiliser ce dernier théorème pour établir le résultat souhaité, en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite.

$\square$

Proposition (Limite d'une composée dans un evn)

On suppose g définie sur l'image B de f, et à valeurs dans un evn H, que f admet b pour limite en a et que g admet l pour limite en b. La fonction $g \circ f$ admet alors l pour limite en a.

VIII.17

Démonstration

Soit V un voisinage de l dans H. Comme g admet l pour limite en b, il existe un voisinage W de b tel que $g(B \cap W) \subset V$. Comme f admet b pour limite en a, il existe un voisinage Y de a dans E tel que $f(Y \cap A) \subset V$. On a donc $(g \circ f)(Y \cap A) \subset W$, d'où le résultat. □

5.2. Continuité ponctuelle

Ici, on suppose plus précisément que a est en fait un point de A.

Définition (Continuité en un point)

f est dite *continue* en $a \in A$ si elle admet une limite en a.

VIII.xvii

Bien sûr, f est continue en a si et seulement si elle admet $f(a)$ pour limite en a.
Grâce à l'étude générale de la notion de limite, on a :

Proposition (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)

f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) de points de A de limite a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

VIII.18

C'est surtout l'implication directe qui est intéressante : elle permet de justifier la convergence d'une suite (de la forme $(f(u_n))$), mais aussi, par contraposition, de montrer qu'une fonction n'est pas continue en a (en exhibant une suite (u_n) telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$).

Théorème (Opérations algébriques sur les applications continues)

Si f et g (des fonctions de A dans F) sont continues en a, alors toute combinaison linéaire de f et de g l'est aussi.
De même pour leur produit lorsque F est une $\mathbb{K}$-algèbre normée.

VIII.19

Proposition (Continuité du produit dans une algèbre normée)

Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre normée. Pour tout entier $p \geqslant 2$, soit

$$\varphi_p \ : \ \begin{array}{ccc} E^p & \to & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & x_1 \dots x_p \end{array}$$

L'application φ_p est alors continue en tout point (on a muni E^p de sa structure naturelle d'evn produit).

VIII.20

Démonstration

En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité ponctuelle, on est ramené à montrer qu'un produit de suites convergentes d'éléments de E est convergente, vers le produit des limites : le théorème VIII.16 justifie ce fait.

$\square$

Proposition (Composition de deux applications continues) VIII.21

On suppose g définie sur l'image de f, et à valeurs dans un evn H. Si f est continue en a, et si g est continue en $b \overset{def}{=} f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Si f et g coïncident au voisinage (relatif) d'un point a de A, alors f est continue en a si et seulement si g est continue en a.

Lorsque f est à valeurs réelles, on peut utiliser l'ordre sur $\mathbb{R}$ pour généraliser les résultats de MPSI utilisant l'ordre à l'arrivée : si f tend vers l en a et est majorée par M au voisinage de a, alors $l \leqslant M$, théorème d'encadrement (principe des gendarmes).

En revanche, les résultats utilisant aussi un ordre au départ, en particulier ceux concernant la monotonie, n'ont pas lieu d'être généralisés.

Si f admet une limite finie l en un point α adhérent à son domaine, mais n'appartenant pas à A, alors on définit le *prolongement par continuité* de f en α comme la fonction $\tilde{f}$ définie sur $A \cup \{\alpha\}$ coïncidant avec f sur A, et valant l en α.

5.3. Continuité globale

Définition (Continuité globale) VIII.xviii

La fonction $f : A \to F$ est dite *continue sur* A si elle est continue en chaque point de A. On note $\mathcal{C}(A, F)$ ou $\mathcal{C}^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A, à valeurs dans F.

L'ensemble des fonctions continues de A dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et même une $\mathbb{K}$-algèbre lorsque F est une $\mathbb{K}$-algèbre normée.

Si E est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, l'application

$$\varphi_p : \begin{array}{rcl} E^p & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & x_1 \ldots x_p \end{array}$$

est continue sur E^p (muni de sa structure d'EVN produit), pour tout entier $p \geqslant 2$.

Nous verrons beaucoup d'exemples de fonctions continues lors de la section suivante.

Exemple (Applications continues) xvii

Soit $E \overset{def}{=} \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. La fonction $\varphi : f \in E \mapsto f(1)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Proposition (Caractère local de la continuité) VIII.22

$f : A \to F$ est continue sur A si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe un voisinage relatif $\mathcal{V}_a$ de a (dans A) tel que $f_{|\mathcal{V}_a}$ soit continue sur $\mathcal{V}_a$.

Démonstration

Le sens direct est clair (pour tout $a \in A$, le choix $\mathcal{V}_a = A$ convient.
Réciproquement, supposons disposer, pour tout $a \in A$, d'un voisinage relatif $\mathcal{V}_a$ de a tel que $f_{|\mathcal{V}_a}$ soit continue sur $\mathcal{V}_a$.
Soit $a \in A$, et soit W un voisinage de $f(a)$. Par continuité de $f_{|\mathcal{V}_a}$, il existe un voisinage relatif V de a dans $\mathcal{V}_a$ tel que $f(V) \subset W$. Or V est aussi un voisinage relatif de a dans A, d'où la continuité de f en a.

□

Exemple (Caractère local de la continuité) xviii

Par exemple, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si sa restriction à tout segment est continue. Cela paraît sans intérêt pour l'instant, mais cet exemple prendra tout son sens lors du cours sur les suites et séries de fonctions.

Caractère local de la continuité VIII.k

Ne faites par dire à ce résultat ce qu'il ne dit pas. Prenons l'exemple de la fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on notera f. Sa restriction à $[0,1[$ est continue sur $[0,1[$, mais f n'est pas continue (sur $\mathbb{R}$), ni même en tout point de $[0,1[$.

Théorème (Caractérisation des applications continues) VIII.23

Soit $f : A \to F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue sur A.

(2) Pour tout ouvert X de F, $f^{-1}(X)$ est un ouvert relatif de A.

(3) Pour tout fermé X de F, $f^{-1}(X)$ est un fermé relatif de A.

Démonstration

L'équivalence entre (2) et (3) est claire, puisque pour toute partie X de F, $f^{-1}(F \setminus X) = A \setminus f^{-1}(X)$, et qu'une partie B de A en est un ouvert relatif de A si et seulement si son complémentaire dans A en est un fermé relatif.
Supposons (1). Soit X un ouvert de F, et soit $a \in f^{-1}(X)$, *i.e.* $f(a) \in X$. Comme X est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(f(a), \varepsilon) \subset X$. Comme f est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que $f(A \cap \mathcal{B}(a,\delta)) \subset \mathcal{B}(f(a),\varepsilon) \subset X$, et donc $A \cap \mathcal{B}(a,\delta) \subset f^{-1}(X)$: $f^{-1}(X)$ est un voisinage relatif de a dans A. Ceci valant pour tout point a de $f^{-1}(X)$, $f^{-1}(X)$ est un ouvert relatif de A (grâce à la proposition VIII.12), d'où (2).
Réciproquement, supposons (2) : soit $a \in A$, et montrons que f est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{B}(f(a),\varepsilon)$ est un ouvert de F, $f^{-1}(\mathcal{B}(f(a),\varepsilon))$ est un ouvert relatif de A, et c'est en particulier un voisinage relatif de a dans A, d'où l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$A \cap \mathcal{B}(a,\delta) \subset f^{-1}(\mathcal{B}(f(a),\varepsilon))$$

et donc tel que $f(A \cap \mathcal{B}(a,\delta)) \subset \mathcal{B}(f(a),\varepsilon)$.
Ainsi, f est continue en a. Ceci valant pour tout point a de A, f est continue sur A.

□

Ce théorème est très utile pour montrer qu'une partie d'un evn est ouverte (ou fermée).

Dans le cas où $A = E$, f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. un fermé) de E.

Il n'y a rien de tel pour les images directes : l'image directe par une fonction continue d'un ouvert (resp. d'un fermé) n'est pas, en général, un ouvert (resp. un fermé).

Exercices (d'assimilation) conseillés : 700 et 701.

Proposition (Prolongation d'une égalité par densité et continuité) VIII.24

Deux applications continues f et g de E dans F, qui coïncident sur une partie dense, sont égales

Démonstration

Soit $h = f - g$. L'ensemble $\Omega \overset{def}{=} \{x \in E, f(x) = g(x)\}$ est égal à $h^{-1}(\{0_F\})$: c'est la préimage du fermé $\{0_F\}$ par la fonction continue h, donc c'est un fermé de E. Comme en outre Ω est dense dans E,

$$\Omega = \overline{\Omega} = E$$

et donc $f = g$.

□

5.4. Uniforme continuité, caractère lipschitzien

Définition (Applications uniformément continues) VIII.xix

f est dite *uniformément continue* sur A si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in A, \quad \|y - x\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce contexte formel, un tel η est appelé *module d'uniforme continuité* pour f et ε.

Toute fonction uniformément continue sur A est continue, mais la réciproque est fausse :

Définition (Applications lipschitziennes) VIII.xx

Soit $K \in \mathbb{R}_+$. f est dite *K-lipschitzienne*, ou *lipschitzienne de rapport K*, si

$$\forall x, y \in A, \quad \|f(y) - f(x)\| \leqslant K \|y - x\|.$$

f est dite *lipschitzienne* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ pour lequel f est K-lipschitzienne.

Applications lipschitziennes

(1) Si f est K-lipschitzienne, alors elle est K'-lipschitzienne pour tout $K' \geqslant K$.
(2) Toute fonction lipschitzienne sur un domaine borné est bornée.
(3) Toute application lipschitzienne est uniformément continue, mais la réciproque est fausse.

VIII.1

Exemple (Applications lipschitziennes)

L'application $\|\cdot\|\ : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne, et donc (uniformément) continue.

xix

Exercice conseillé (classique et utile) : 697.

Illustration

5.5. Caractérisation de continuité des applications linéaires

Proposition (Caractérisation de continuité des applications linéaires)

Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$

VIII.25

Démonstration

L'existence d'un tel C est une condition suffisante de continuité, puisqu'alors u est C-lipschitzienne (par linéarité), et donc (uniformément) continue.
Si réciproquement, u est continue, alors exploitons la seule continuité en 0_E, pour $\varepsilon = 1$ par exemple : il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout x de E tel que $\|x\| \leqslant \delta$, on ait $\|u(x)\| \leqslant 1$.
Soit x un vecteur non nul de E. Le vecteur $y \overset{def}{=} \delta \frac{x}{\|x\|}$ est de norme δ, et donc $\|u(y)\| \leqslant 1$ *i.e.*

$$\|u(x)\| \leqslant \frac{1}{\delta}\,\|x\|$$

et cette inégalité est évidemment vérifiée si $x = 0_E$.
Le choix $C = 1/\delta$ convient donc.

□

Autrement dit, une application linéaire est continue si et seulement si elle est lipschitzienne.

Une application linéaire est continue si et seulement si elle est uniformément continue, si et seulement si elle est continue en 0_E.

On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Il est clair que $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

Exercice conseillé : 709.

6. Comparaison des normes

Parmi les différentes normes dont on peut munir un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, certaines ne diffèrent pas fondamentalement, dans le sens où elles définissent les mêmes notions topologiques (ouverts, fermés, etc.).

Si par exemple N est une norme sur E, il est clair que $N' \overset{def}{=} 2N$ en est également une, et que, bien que les boules unités de E pour ces normes soient distinctes (sauf si $E = \{0_E\}$), les parties bornées (resp. fermées, ouvertes) de E pour N et N' sont les mêmes.

Un peu plus finement, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent encore les mêmes notions topologiques sur $\mathbb{R}^2$.

Illustration

Définition (Normes équivalentes) — VIII.xxi

Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que ces normes sont *équivalentes* s'il existe des réels strictement positifs α et β tels que

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1 .$$

Normes équivalentes — VIII.m

(1) Cela définit une relation d'équivalence [a] sur l'ensemble des normes sur E.

(2) Pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes, on pourra trouver une suite (u_n) d'éléments tous non nuls de E telle que $\left(\frac{\|u_n\|_2}{\|u_n\|_1}\right)$ tende vers $+\infty$ (ou vers 0).

a. L'expression « sont équivalentes » laissait supposer le caractère symétrique.

Exemple (Équivalence des normes) — xx

Vérifions que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ et $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$,

$$\|x\|_1 \leqslant n \|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_\infty ,$$

donc $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$, et elles sont par transitivité elles-mêmes équivalentes.

Boules et normes équivalentes

Dire que deux normes sont équivalentes, c'est dire que la boule unité de chacune contient une boule de rayon non nul pour l'autre centrée en 0_E.
Plus précisément, les assertions suivantes sont équivalentes (β désigne un réel strictement positif) :

(1) $\forall x \in E,\ \|x\|_2 \leqslant \beta\, \|x\|_1$.
(2) $\overline{\mathcal{B}}_1(0_E, 1) \subset \overline{\mathcal{B}}_2(0_E, \beta)$ (l'indice pour $\mathcal{B}$ faisant référence à la norme pour laquelle on considère la boule).
(3) $\forall a \in E, \forall r \in \mathbb{R}_+,\ \overline{\mathcal{B}}_1(a, r) \subset \overline{\mathcal{B}}_2(a, \beta r)$.

On en déduit que, pour tous réels α et β strictement positifs, les assertions suivantes sont équivalentes :

i $\forall x \in E,\ \alpha\, \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\, \|x\|_1$.
ii $\overline{\mathcal{B}}_2(0_E, \alpha) \subset \overline{\mathcal{B}}_1(0_E, 1) \subset \overline{\mathcal{B}}_2(0_E, \beta)$ (l'indice pour $\mathcal{B}$ faisant référence à la norme pour laquelle on considère la boule).
iii $\forall a \in E, \forall r \in \mathbb{R}_+,\ \overline{\mathcal{B}}_2(a, \alpha\, r) \subset \overline{\mathcal{B}}_1(a, r) \subset \overline{\mathcal{B}}_2(a, \beta\, r)$.

VIII.n

Proposition (Caractérisations de l'équivalence de deux normes)

Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Ces normes sont équivalentes.
(2) La boule unité pour chacune de ces normes est un voisinage de 0_E pour l'autre norme.
(3) Ces normes définissent les mêmes parties bornées.
(4) Ces normes définissent les mêmes voisinages.
(5) Ces normes définissent les mêmes ouverts.
(6) Ces normes définissent les mêmes fermés.

VIII.26

Démonstration

Les assertions (5) et (6) sont clairement équivalentes (par définition d'un fermé).
La remarque précédente permet d'établir l'équivalence entre (1), (2) et (3) (parce (3) équivaut à ce que chaque boule unité pour l'une des normes soit incluse dans une boule pour l'autre norme, centrée en 0_E), ainsi que l'implication de (1) vers (4) (grâce au point *iii*).
Pour conclure, on observe que (5) entraîne (2) (la boule unité ouverte de E est un voisinage de 0_E pour la norme considérée), et que (4) entraîne (5) (être ouvert, c'est par définition être voisinage de chacun de ses points).

□

Considérons deux normes N et N' équivalentes sur E, et (u_n) une suite d'éléments de E. Il est clair que (u_n) converge pour N si et seulement si elle converge pour N', et que les limites sont égales le cas échéant. De même pour la limite d'une fonction à valeurs dans E, en un point adhérent à son domaine.

Nous admettons provisoirement (y compris pour la section à venir) le résultat très important suivant :

Théorème (Équivalence des normes sur un espace de dimension finie)

Soit E un evn de dimension finie. Toutes les normes sur E sont alors équivalentes.

VIII.27

Démonstration

Selon le programme, aucune démonstration n'est exigible. □

Cela généralise donc considérablement l'exemple ci-dessus d'équivalence des normes de $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.

La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels faisant partie des capacités attendues des étudiants, on conseille l'exercice 647, qui donne un exemple de normes non équivalentes.

7. Le cas de la dimension finie

7.1. Continuité, topologie

Ici, E est de dimension finie.

Nous rappelons que toutes les normes sur E sont équivalentes. En particulier, il y a invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.

De plus, la convergence d'une suite (ou l'existence et la valeur de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Proposition (Continuité des applications linéaires en dimension finie) VIII.28

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Démonstration

□

Toute forme linéaire sur un EVN de dimension finie est continue : on en déduit que toutes les formes linéaires coordonnées associées à une base sont continues, et que tout hyperplan est fermé (comme préimage d'un fermé par une application continue).

Exemple (Sous-espace d'un evn de dimension finie) xxi

Soit E un evn de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. F est fermé : c'est évident si $F = E$, et sinon, c'est une intersection d'hyperplans.

Plus généralement, nous verrons à la proposition VIII.40 qu'un sous-espace de dimension finie d'un evn (de dimension éventuellement infinie) est fermé.

7.2. Continuité des applications multilinéaires, fonctions polynomiales

Proposition (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie) VIII.29

Soit E_1, …, E_n des EVN de dimension finie, F un EVN, et φ une application n-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F. L'application φ est alors continue.

Démonstration

Montrons-le dans le cas où $n = 2$ (le cas général est similaire). On se donne des bases $(a_1, \dots, a_p)$ et $(b_1, \dots, b_q)$ de E_1 et E_2 respectivement.
Pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$, écrivons

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j b_j$$

On a, par bilinéarité de φ

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \mu_j \varphi(a_i, b_j)$$

or les formes linéaires $x \mapsto \lambda_i$ et $y \mapsto \mu_j$ sont continues (E_1 et E_2 sont de dimension finie), ainsi que le produit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \mapsto \lambda\mu$, d'où la continuité de φ.

□

Exemple (Continuité des applications multilinéaires)

(1) Si H est un espace euclidien, alors l'application $(u, v) \in H^2 \mapsto (u|v)$ est continue, car bilinéaire en dimension finie.

(2) L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K} \times E & \to & E \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

est bilinéaire (en dimension finie) donc continue.

(3) Le produit matriciel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est bilinéaire (en dimension finie) donc continu. De même pour la composition dans $\mathcal{L}(H)$ où H est un espace vectoriel de dimension finie.

(4) Si H est un espace vectoriel de dimension finie n, si $\mathcal{B}$ est une base de H, alors

$$\begin{array}{rccc} \det_{\mathcal{B}} : & H^n & \to & \mathbb{K} \\ & (v_1, \dots, v_n) & \mapsto & \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

est n linéaire (en dimension finie), donc continue.

xxii

On rappelle que $\mathbb{K}^E$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre, héritée de celle sur $\mathbb{K}$: pour toutes fonctions f et g de E dans $\mathbb{K}$, tout scalaire λ, on définit les fonctions $f + g$, $f \cdot g$ et λf par les formules

$$\forall x \in E, \quad (f+g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) \stackrel{def}{=} f(x)g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) \stackrel{def}{=} \lambda f(x)$$

Définition (Application polynomiale)

On appelle *sous-algèbre des applications polynomiales* sur E la sous-algèbre de $\mathbb{K}^E$ engendrée, en tant qu'algèbre, par les formes linéaires sur E.

VIII.xxii

On peut décrire la sous-algèbre Ω des applications polynomiales sur E comme l'intersection des sous-algèbres de $\mathbb{K}^E$ qui contiennent le dual $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ de E, mais ce n'est pas très éclairant. Il vaut mieux décrire Ω par l'« intérieur ».

Définition (Monôme)

On appelle *monôme* sur E tout produit $\varphi_1 \dots \varphi_n$ de formes linéaires sur E.

VIII.xxiii

Une application de E dans $\mathbb{K}$ est *polynomiale* si et seulement si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de monômes sur E : on vérifie en effet que l'ensemble Δ de ces combinaisons linéaires est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^E$, et que toute sous-algèbre contenant $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ doit contenir Δ.

Les applications polynomiales sont continues (chaque monôme l'est car les formes linéaires et les applications multilinéaires le sont en dimension finie).

L'ensemble des applications polynomiales sur E est une $\mathbb{K}$-algèbre (engendrée en tant qu'espace vectoriel par les monômes, et en tant qu'algèbre par les formes linéaires sur E).

Exemple (Applications polynomiales)

(1) Les fonctions polynomiales usuelles de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, comme $x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^4 - 6x^3 + 2x + 5$, sont des polynômes (ce sont des polynômes en la forme linéaire $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$).

(2) (important) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, l'application

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

est une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$. L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}^n$ est engendré (en tant qu'espace vectoriel) par ces fonctions.

Par exemple, l'application $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 4xy^2z^5 - 3xy + 8x^2z^3 - 3x + 2$ est polynomiale sur $\mathbb{R}^3$.

(3) Si E est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, toute forme linéaire φ sur E, l'application

$$\begin{array}{rccl} \tilde{P} : & E & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \varphi(P(x)) \end{array}$$

est polynomiale. Par exemple, les fonctions coordonnées de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^2$ dans la base canonique sont polynomiales.

(4) L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K} \\ & P & \mapsto & \prod_{k=0}^n P(k) \end{array}$$

est polynomiale.

xxiii

Exemple (Continuité du déterminant (important))

Le déterminant, vu comme application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{K}$, où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, est une application polynomiale, donc continue. De même pour l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

xxiv

Exercice (classique et utile) conseillé : 696.

7.3. Séries à valeurs dans un evn

E est ici de dimension finie.

Nous avons déjà fait l'essentiel du cours sur les séries, en nous limitant aux séries numériques. Beaucoup de ce qu'on a fait alors se généralise sans difficulté au cas de séries à valeurs dans un evn de dimension finie. Voici les notions au programme.

Sommes partielles. Convergence, divergence. La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.

Somme (notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$) et restes d'une série convergente.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.

Lien suite-série. La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Définition (Série absolument convergente dans un evn) VIII.xxiv

La série $\sum u_n$ d'éléments de E est dite *absolument convergente* si la série numérique $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème (Série absolument convergente dans un evn) VIII.30

Toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Démonstration

Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il suffit de le vérifier pour une norme donnée. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E, et on considère la norme infinie pour cette base. Si $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ (où les λ_i sont des scalaires),

$$\|x\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max\{|\lambda_i|, i \in [\![1,p]\!]\}$$

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente dans E pour cette norme : cela signifie que $\sum \|u_n\|_{\infty,\mathcal{B}}$ est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{n,i} e_i$$

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant |\lambda_{n,i}| \leqslant \|u_n\|_{\infty,\mathcal{B}}$. Sachant que $\sum \|u_n\|_{\infty,\mathcal{B}}$ converge, on en déduit que $\sum_n \lambda_{n,i}$ converge absolument, puis converge (le cas des séries numériques a déjà été traité), et ce pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Ainsi, la série $\sum u_n$ est convergente.

$\square$

Exemple (Séries matricielles) xxv

Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est convergente, car absolument convergente pour une norme d'algèbre.
La somme de cette série est appelée *exponentielle* de la matrice A.

En revanche, beaucoup de compléments sur les séries numériques n'ont plus de sens dans un evn abstrait, comme la règle de d'Alembert, le critère spécial des séries alternées, la comparaison série-intégrale, etc.

On peut tenter de se ramener à des séries numériques :

(1) En travaillant sur les coordonnées.

(2) En travaillant sur les normes (*i.e.* en travaillant avec l'absolue convergence).

Exercices (classiques et utiles) conseillés : 725 et 726.

8. Compacité

8.1. Parties compactes d'un espace normé

Définition (Partie compacte) VIII.xxv

Soit A une partie de E. On dit que A est *compact*, ou que A vérifie la *propriété de Bolzano-Weierstrass*, si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A.

Exemple (Compacts)

(1) Toute boule fermée dans $\mathbb{K}$ est compacte.
(2) Plus généralement, tout fermé borné de $\mathbb{K}$ est compact.
(3) Les intervalles compacts non vides de $\mathbb{R}$ sont les segments.

xxvi

L'union d'un nombre fini de compacts est compacte. En revanche, l'union d'un nombre infini de compacts n'est pas toujours compacte.

Proposition (Une partie compacte est fermée et bornée)

Une partie compacte est fermée et bornée.

VIII.31

Démonstration

Pour montrer qu'une partie compacte est fermée, on pourra utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

Pour montrer qu'une partie compacte est bornée, on pourra, étant donné une partie non bornée, construire une suite d'éléments de cette partie sans valeur d'adhérence.

□

Exemple (Compact non vide)

Si K est un compact non vide de $\mathbb{R}$, alors il admet un plus grand et un plus petit élément :

xxvii

Proposition (Partie fermée d'un compact)

Une partie fermée B de E incluse dans un compact A de E est compacte.

VIII.32

Démonstration

□

En conséquence, l'intersection d'un fermé et d'un compact est un compact (autrement dit : tout fermé relatif d'un compact est compact).

Théorème (Caractérisation de la convergence dans un compact)

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

VIII.33

Démonstration

Bien sûr, toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence, à savoir sa limite. Montrons qu'une suite divergente (u_n) d'une partie compacte C admet plusieurs valeurs d'adhérence. Elle en admet déjà une, mettons l, et on sait que (u_n) ne converge pas vers l :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, \|u_n - l\| > \varepsilon$$

Pour un tel ε, l'ensemble $\Omega \overset{def}{=} \{n \in \mathbb{N}, \|u_n - l\| > \varepsilon\}$ est infini : il lui correspond une extractrice φ. La suite $(u_{\varphi(n)})$ admet une valeur d'adhérence l', qui est aussi valeur d'adhérence de (u_n), et qui ne peut pas être égale à l, car $\|l' - l\| \geqslant \varepsilon$ en considérant la relation

$$\left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| > \varepsilon,$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

C'est un résultat fin assez peu utilisé aux concours.

Proposition (Produit d'une famille finie de compacts)

Le produit d'une famille finie de compacts est un compact (pour la topologie induite par la structure d'evn produit).

VIII.34

Démonstration

En procédant par récurrence (sur le cardinal de la famille), on se ramène à montrer que le produit cartésien $A \times B$ de deux compacts A et B est compact. Soit $((u_n, v_n))$ une suite d'éléments de $A \times B$.
Comme A est compact, il existe une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge dans A.
Comme B est compact, il existe une extractrice ψ telle que $(v_{\varphi(\psi(n))})$ converge dans B.
Ainsi, la suite extraite $((u_{\varphi(\psi(n))}, v_{\varphi(\psi(n))}))$ de $((u_n, v_n))$ converge dans $A \times B$, d'où le résultat.

□

Exemple (Produit d'un nombre fini de compacts)

Dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, la boule fermée centrée en 0 de rayon $R \geqslant 0$ est compacte, car c'est le produit de n exemplaires du compact $\{z \in \mathbb{K}, |z| \leqslant R\}$ de $\mathbb{K}$.

xxviii

8.2. Applications continues sur une partie compacte

Théorème (Image d'une partie compacte par une application continue)

Soit A un compact de E, et $f : A \to F$ une application continue. L'ensemble $f(A)$ est alors un compact de F.

VIII.35

Démonstration

Soit (v_n) une suite d'éléments de $f(A)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in A$ tel que $f(u_n) = v_n$. Comme A est compact, on peut extraire de (u_n) une suite convergente $(u_{\varphi(n)})$, vers un certain $a \in A$. Comme f est continue, elle est continue en a, et la suite $(f(u_{\varphi(n)}))$ converge donc vers $f(a) \in f(A)$, d'où la compacité de $f(A)$. □

Exercice (classique) conseillé : 720.
En corollaire :

Théorème des bornes atteintes

Si $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un compact non vide A de E, alors f est bornée et atteint ses bornes.

VIII.36

Démonstration

□

Attention cependant, rien ne dit que $f(A)$ soit un segment (un compact non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours un segment).

Exemple (Théorème des bornes atteintes)

Par exemple, lorsque A est un compact non vide de E, pour tout $x \in E$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$ (car $a \in A \mapsto d(x, a) \in \mathbb{R}$ est continue).

xxix

Exercice (classique) conseillé : 727.

Théorème de Heine sur un compact

Toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

VIII.37

Démonstration

Considérons une fonction $f : A \to F$ non uniformément continue sur un compact A :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists (a,b) \in A^2, \|a-b\| \leqslant \eta \wedge \|f(a)-f(b)\| > \varepsilon$$

Pour un tel ε, on considère une suite (η_n) qui converge vers 0, pour laquelle il existe des suites (a_n) et (b_n) d'éléments de A telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n - b_n\| \leqslant \eta_n \wedge \|f(a_n) - f(b_n)\| > \varepsilon$$

De (a_n), on peut extraire une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$, vers un certain $\alpha \in A$. Puisque $(b_n - a_n)$ tend vers 0, $(b_{\varphi(n)})$ tend aussi vers α. Cependant, si f était continue en α, alors on obtiendrait l'absurdité

$$0 \geqslant \varepsilon$$

en passant à la limite dans la relation

$$\left\|f(a_{\varphi(n)}) - f(b_{\varphi(n)})\right\| > \varepsilon,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où le résultat par contraposition.

$\square$

8.3. Compacité en dimension finie

On suppose dans toute cette sous-section que E est de dimension finie.

Nous pouvons désormais montrer qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (démonstration non exigible) :

Démonstration

Traitons d'abord le cas où $E = \mathbb{K}^n$.
Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on peut trouver $a > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \|x\| \leqslant a \|x\|_\infty$$

ce qui montre que l'application $\|\cdot\|$ est lipschitzienne, donc continue pour $\|\cdot\|_\infty$.
Or la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.
Considérons à présent la fonction $\|\cdot\|$ sur la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe des réels strictement positifs α et β tels que

$$\forall x \in E, \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow \alpha \leqslant \|x\| \leqslant \beta$$

puis

$$\forall x \in E, \alpha \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \beta \|x\|_\infty$$

$\|\cdot\|$ est donc équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
Pour le cas général, il suffit d'utiliser un isomorphisme φ entre E et $\mathbb{K}^n$ si $n = \dim(E)$.

$\square$

Théorème (Caractérisation des compacts en dimension finie)

A, partie de E (de dimension finie) est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

VIII.38

Démonstration

Le sens direct est connu. Supposons A fermée et bornée.
Nous avons traité le cas où $E = \mathbb{K}^n$, et où E est normé par $\|\cdot\|_\infty$.
En introduisant un isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^n$, traiter le cas général :

$\square$

Exemple (Compacité du groupe orthogonal d'indice n)

Le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), MM^T = I_n\}$ d'indice n est compact. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit de montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné.
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé :

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné :

xxx

Théorème (Caractérisation de la convergence en dimension finie)

Une suite bornée de E (de dimension finie) converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

VIII.39

Démonstration

$\square$

Proposition (Un sous-espace de dimension finie est fermé)

Soit E un evn, et F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie. Le sous-espace F est alors fermé dans E.

VIII.40

Démonstration

Montrons ceci séquentiellement : soit (u_n) une suite de points de F, convergeant vers un point a de E. La suite (u_n) est convergente, donc bornée. L'image de (u_n) est une partie bornée de F : soit B une boule fermée de F qui la contient. B est une partie compacte (car F est de dimension finie), donc (u_n) a au moins une valeur d'adhérence dans B, et donc dans F. Cette valeur d'adhérence ne pouvant être que a, on a $a \in F$. Ainsi, F est fermé.

$\square$

9. Connexité par arcs

Définition (Chemin) — VIII.xxvi

Soit $a, a' \in A$. On appelle *chemin (continu)* dans A joignant a à a' toute fonction continue f de $[0,1]$ dans A telle que $f(0) = a$ et $f(1) = a'$. L'image de f est alors appelée *arc* associé à f, $f(0)$ est l'origine de cet arc, et $f(1)$ en est son extrémité.
Lorsqu'il existe un tel chemin, on dit que l'on peut joindre a à a' par un chemin (continu) dans A.

Cela définit une relation d'équivalence sur A.

Définition (Composantes connexes par arcs) — VIII.xxvii

Dans ce contexte, les classes d'équivalence sont appelées les *composantes connexes par arcs* de A.

Illustration

Définition (Partie connexe par arc) — VIII.xxviii

On dit que A est *connexe par arcs* si A n'a qu'une composante connexe par arcs.

Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs : par exemple, tout segment, tout cercle est connexe par arcs, ou encore $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

Illustration

Exemple (Parties connexes par arcs) xxxi

(1) Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

(2) Plus généralement, s'il existe $a \in A$ tel que pour tout $b \in A$, on ait $[a, b] \subset A$ (on dit alors que A est une partie *étoilée* de E), alors A est connexe par arcs.

Illustration

Proposition (Connexes de la droite numérique) VIII.41

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration

Tout intervalle est convexe donc connexe par arcs.
Réciproquement soit C un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in C$, où $a \leqslant b$: il existe une fonction continue $f\ : [0,1] \to C$ tel que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel entre a et b est une valeur prise par f, donc $[a, b] \subset f([0,1]) \subset C$, puis C est convexe, *i.e.* C est un intervalle.

$\square$

Proposition (Image continue d'une partie connexe par arcs)

Soit $f : A \to F$ une fonction continue, où A est une partie connexe par arcs de E. L'image $f(A)$ de f est alors connexe par arcs.

VIII.42

Démonstration

□

Exemple (Cas particulier des applications à valeurs réelles)

Lorsque $F = \mathbb{R}$, on obtient une nouvelle extension du théorème des valeurs intermédiaires : l'image continue d'un connexe par arcs est un intervalle.

xxxii

Exemple (Non connexité par arcs des groupes linéaires réels)

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

xxxiii

Exercice (classique et utile) conseillé : 738.

CHAPITRE IX

Fonctions vectorielles

Sommaire

Au chapitre sur les evn, nous avons entre autres étendu la notion de continuité d'une application. En suivant le cours de MPSI, il est naturel de se demander comment étendre la notion de dérivation. Cela ne peut pas se faire de manière évidente pour une fonction définie sur une partie d'un evn, à valeurs dans un evn, puisqu'on ne voit pas comment définir l'équivalent d'un taux d'accroissement dans ce cadre général. Cependant, si la fonction considérée est *vectorielle*, c'est-à-dire à valeurs dans un evn mais à variable réelle, il est facile de définir un taux d'accroissement, puis la notion de dérivée.

Le fait de supposer en outre l'evn d'arrivée de dimension finie nous permettra de raisonner sur les fonctions composantes, et, partant, de nous ramener au cas déjà traité des fonctions à variable réelle et à valeurs numériques. Cela fait de la théorie des fonctions vectorielles une extension simple et naturelle de celle des fonctions numériques.

Nous verrons plus tard que « grossir » l'ensemble de départ, *i.e.* travailler avec des fonctions définies sur un evn et à valeurs dans un evn, va nécessiter beaucoup plus de travail pour définir de façon satisfaisante une extension de la notion de dérivée d'une application.

De même, nous aimerions définir l'intégrale d'une fonction sur son domaine. Là encore, si on travaille avec une fonction définie entre deux evn, l'extension de la définition ne va pas de soi. On va se ramener au cas déjà connu des fonctions numériques d'une variable réelle en nous limitant au cas des fonctions vectorielles à valeurs dans un evn de dimension finie.

Enfin, en interprétant les vecteurs comme des points (*i.e.* en passant d'une structure vectorielle à une structure affine), les fonctions vectorielles fournissent un cadre théorique d'étude de points mobiles, de trajectoires, et des notions associées : vecteurs vitesse et accélération par exemple. Cela fait l'objet de la dernière section (arcs paramétrés), mais vous pouvez avoir cette interprétation cinématique en tête tout au long de ce chapitre.

Sauf mention contraire, on fixe les notations suivantes :

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I et J sont des intervalles d'intérieur non vide, a, b, t, t_0 et x seront des points de I. On note $|a,b|$ le segment d'extrémités a et b : si $a \leqslant b$, c'est $[a,b]$, et si $b \leqslant a$, c'est $[b,a]$. La notation $[a,b]$ indique implicitement que $a \leqslant b$.
- E, F, G, H sont des evn sur $\mathbb{K}$, de dimension finie (non nulle). On note $p \in \mathbb{N}^*$ la dimension de E, et on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E.
- f et g seront des applications de I dans E.
- n est un entier naturel.

Ceux qui ne sont pas à l'aise avec les formes linéaires coordonnées pourront supposer, en première lecture, que $E = \mathbb{K}^p$, et que $\mathcal{B}$ est la base canonique de E (c'est le cas le plus souvent rencontré en pratique).

1. Généralités sur les fonctions vectorielles

1.1. Définition, fonctions coordonnées dans une base

Définition (Fonction vectorielle)

On appelle *fonction vectorielle* une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans un evn E.

IX.i

Il est intéressant de voir les éléments de A comme mesurant des instants, et les éléments de E, qui sont des vecteurs, seront souvent interprétés comme représentant une position d'un point mobile à un instant donné.

En pratique, A est un intervalle d'intérieur non vide I, et E est de dimension finie.

L'ensemble des fonctions vectorielles de I dans E peut se noter $\mathcal{F}(I, E)$ ou E^I. Grâce à la structure d'espace vectoriel de E, on peut munir E^I d'une loi d'addition et d'une loi externe de multiplication, qui lui confèrent une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si E est en outre une $\mathbb{K}$-algèbre, alors on en déduit une structure de $\mathbb{K}$-algèbre sur E^I. On rappelle que la loi de multiplication interne est alors continue (vue comme application de E^2 dans E), puisque bilinéaire en dimension finie.

Définition (Application norme d'une fonction vectorielle)

On appelle application *norme de* f et on note $\|f\|$ la fonction

$$\begin{array}{rccc} \|f\| : & I & \to & \mathbb{R}_+ \\ & t & \mapsto & \|f(t)\| \end{array}$$

IX.ii

Il faut bien noter ici que $\|f\|$ désigne la composée $\|\cdot\| \circ f$, et non la norme d'un élément de E^I. Nous n'avons pas muni E^I d'une structure d'evn.

Définition (Fonctions coordonnées associées à une fonction vectorielle dans une base)

On appelle p-uplet des fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$, l'unique p-uplet $(f_1, \dots, f_p)$ de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, tel que, pour tout $t \in I$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t) e_i$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i s'appelle la *i-ème fonction coordonnée de f* dans la base $\mathcal{B}$.

IX.iii

Nous fixons ces notations pour la suite de ce cours.

En principe, f_i dépend (évidemment de i, mais aussi) de $\mathcal{B}$, et une notation moins ambiguë pourrait être $f_{i,\mathcal{B}}$ par exemple.

Exemple (Fonctions coordonnées)

Si E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et si $\mathcal{B} = (1, i)$, alors les fonctions coordonnées de f sont les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ vues l'année dernière.

i

1.2. Continuité d'une fonction vectorielle

I étant une partie de l'evn $\mathbb{R}$, le cours sur les evn s'applique : on peut définir la *continuité* de f en un point, sur I tout entier. On peut même définir $\mathcal{C}(I, E)$, et constater que c'est un sous-espace vectoriel de E^I, et même une sous-algèbre si E est une $\mathbb{K}$-algèbre.

On sait aussi :

(1) que f est continue, que ce soit ponctuellement ou globalement, si et seulement si ses fonctions coordonnées (dans une base quelconque) le sont.

(2) que la continuité (ponctuelle ou globale) de f ne dépendra pas de la norme choisie sur E, puisqu'elles sont toutes équivalentes (on rappelle que E est de dimension finie).

1.3. Comparaison des fonctions vectorielles

On peut étendre sans difficulté au cadre des fonctions vectorielles les relations de comparaison sur les fonctions numériques vues en première année :

Définition (Relations de comparaison pour les fonctions vectorielles)

On considère ici des fonctions $f : I \to E$ et $g : I \to F$.

(1) On notera $f(t) = \mathrm{o}_{t \to t_0}(g(t))$, et on dira que f *est négligeable devant* g *en* t_0, si $\|f(t)\| = \mathrm{o}_{t \to t_0}(\|g(t)\|)$, *i.e.* s'il existe une fonction ε, de I dans $\mathbb{R}_+$, de limite nulle en t_0, telle que $\|f(t)\| = \varepsilon(t)\,\|g(t)\|$ sur un voisinage relatif de t_0 dans I.

(2) (Ici, $F = E$, de façon à donner un sens à $f - g$) On notera $f(t) \sim_{t \to t_0} g(t)$, et on dira que f *est équivalente à* g *en* t_0, si $f(t) - g(t) = \mathrm{o}_{t \to t_0}(g(t))$.

(3) On notera $f(t) = \mathrm{O}_{t \to t_0}(g(t))$, et on dira que f *est dominée par* g *en* t_0, si $\|f(t)\| = \mathrm{O}_{t \to t_0}(\|g(t)\|)$, *i.e.* s'il existe une fonction β, de I dans $\mathbb{R}_+$, bornée au voisinage de t_0, telle que $\|f(t)\| = \beta(t)\,\|g(t)\|$ sur un voisinage relatif de t_0 dans I.

IX.iv

On ne développe pas plus cette partie, mais le lecteur pourra réfléchir à ce qui, dans son cours de première année sur les relations de comparaison, s'étend (ou pas) à ce nouveau cadre.

2. Dérivation des fonctions vectorielles

2.1. Définition, dérivabilité à gauche et à droite

Définition (Fonction de taux d'accroissement d'une fonction en un point)

On appelle fonction *taux d'accroissement de* f *en* t_0 et on note $\tau_{t_0}(f)$ l'application

$$\tau_{t_0}(f) : \begin{array}{rcl} I \setminus \{t_0\} & \to & E \\ t & \mapsto & \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \end{array}$$

IX.v

Cette fonction est bien définie, car la division par $t - t_0$ n'est que la multiplication par le *réel* $\frac{1}{t-t_0}$ (lui-même bien défini car $t - t_0$ est un élément non nul du corps $\mathbb{R}$).

Définition (Dérivabilité en un point d'une fonction vectorielle)

On dit que f est *dérivable* en t_0 si l'application $\tau_{t_0}(f)$ admet une limite finie l en t_0.
Si tel est le cas, l est appelée *dérivée* de f en t_0, et notée $f'(t_0)$.

IX.vi

Dans le cas où $E = \mathbb{K}$, on retrouve la définition de la dérivabilité vue en première année.

Interprétation cinématique de la dérivée pour les fonctions vectorielles

Si on interprète f comme une fonction d'une variable temporelle t, et dont les valeurs représentent des positions, le taux d'accroissement de f entre t et t_0 peut être interprété comme la vitesse vectorielle moyenne entre les instants t_0 et t : en faisant tendre t vers t_0, on obtient la vitesse vectorielle instantanée en t_0.

IX.a

Illustration

Proposition (Dérivabilité et développement limité à l'ordre un)

f est dérivable en t_0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0, *i.e.* il existe $\gamma \in E$ tel que

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\gamma + \mathrm{o}_{t \to t_0}(t - t_0).$$

Si tel est le cas, on a $\gamma = f'(t_0)$.

IX.1

Démonstration

□

Dérivabilité et approximation affine

Ainsi, f est dérivable en t_0 si et seulement si elle est égale à une fonction affine [a], à un négligeable devant $t \mapsto (t - t_0)$ en t_0 près.

a. *i.e.* la somme d'une fonction constante et d'une fonction linéaire.

IX.b

Illustration

Corollaire (Lien entre dérivabilité et continuité d'une fonction vectorielle)

Si f est dérivable en t_0, alors elle est continue en t_0.

IX.2

Bien évidemment, la réciproque est fausse.

Traduction de la dérivabilité à l'aide des coordonnées

La fonction f est dérivable en t si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, les fonctions coordonnées f_i sont dérivables en t, et on a alors :

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(t) e_i$$

La dérivabilité d'une fonction vectorielle s'écrit donc comme une conjonction de dérivabilités de fonction numériques, et il nous sera donc possible de recourir au cours de première année.

IX.c

Dans le cas banal où $E = \mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de E, on a

(1) $f = (f_1, \ldots, f_p)$.

(2) Équivalence entre la dérivabilité de f en t et celle de chaque f_i.

(3) Le cas échéant :

$$f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_p'(t))$$

Exemple (Dérivabilité d'une fonction vectorielle)

La fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin(t), e^t + 3t, t^3)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ est dérivable en tout réel t_0, et

$$f'(t_0) = (\cos(t_0), e^{t_0} + 3, 3t_0^2)$$

ii

Définition (Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point)

On dit que f est *dérivable à gauche* en t_0 si $\tau_{t_0}(f)$ admet une limite finie l_g à gauche en t_0. On appelle alors *dérivée à gauche* de f en t_0, et on note $f_g'(t_0)$, le vecteur

$$f_g'(t_0) \stackrel{def}{=} l_g$$

On définit de même la *dérivabilité à droite* de f en t_0 (ainsi que la *dérivée à droite* en t_0 et la notation $f_d'(t_0)$).

IX.vii

Exemple (Dérivabilité à gauche et à droite)

La fonction $f : t \mapsto (|t-1|, t^2)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est dérivable à gauche à droite en 1, mais non dérivable en 1. Elle est dérivable en tout autre réel.

iii

Lorsque $t_0 \in \overset{\circ}{I}$, on a équivalence entre :

(1) f est dérivable en t_0.

(2) f est dérivable à gauche et à droite en t_0, et $f_g'(t_0) = f_d'(t_0)$.

Le fait que f soit dérivable à gauche et à droite en t_0 n'est pas une condition suffisante pour que f soit dérivable en t_0 (en revanche, c'est une condition suffisante de continuité en t_0) :

Illustration

2.2. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition (Combinaison linéaire de fonctions dérivables)

L'ensemble Ω des fonctions de I dans E, dérivables en a est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & \Omega & \to & E \\ & f & \mapsto & f'(a) \end{array}$$

est linéaire.

IX.3

Démonstration

□

Il n'y a pas de formule générale pour la dérivation d'une composée, car la notion de dérivée n'a de sens pour le moment que pour une fonction d'une variable réelle : on peut cependant proposer des formules lorsqu'on compose à gauche par des applications linéaires (proposition IX.4), bilinéaires (proposition IX.5), ou quand on compose à droite par une fonction réelle d'une variable réelle (proposition IX.6).

Proposition (Dérivation et composition par une application linéaire)

Si f est dérivable en a, et si $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $L \circ f$ est dérivable en a, et

$$(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$$

IX.4

Démonstration

$\square$

Exemple (Dérivation et composition par une application linéaire)

Si $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application dérivable en a, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et si on note ψ la fonction $t \mapsto \mathrm{tr}(BA(t))$, alors ψ est dérivable en a, et :

$$\psi'(a) = \mathrm{tr}(BA'(a))$$

iv

Proposition (Dérivation et composition avec une application bilinéaire)

Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables en a, et si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, alors $B(f, g)$ est dérivable en a, et

$$(B(f, g))'(a) = B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a)).$$

IX.5

Démonstration

$\square$

Exemple (Opérations sur les fonctions dérivables)

On suppose f et g dérivables en a.

(1) Dans le cas particulier où E est une $\mathbb{K}$-algèbre, et où $B : (u,v) \mapsto uv$ est la multiplication dans E, on a
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
En particulier, dans le cas où $E = \mathbb{K}$, on retrouve la formule de dérivation d'un produit vue en première année.

(2) Dans le cas particulier où $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien réel, $(f|g)$ est dérivable en a, et
$$(f|g)'(a) = (f'(a)|g(a)) + (f(a)|g'(a))$$

(3) Dans le cas particulier où E est un plan vectoriel, $\det(f,g) : t \mapsto \det(f(t), g(t))$ est dérivable en a (où det désigne le déterminant dans une base fixée de E), et
$$(\det(f,g))'(a) = \det(f'(a), g(a)) + \det(f(a), g'(a))$$

(4) Dans le cas particulier de $B : (\alpha, u) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \alpha u$, et si $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est dérivable en a, alors λf est dérivable en a, et :
$$(\lambda f)'(a) = \lambda'(a)f(a) + \lambda(a)f'(a)$$

v

Exemple (Dérivée d'un produit de fonctions à valeurs matricielles)

Si A et B sont des fonctions de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dérivables en a, alors AB est dérivable en a et
$$(AB)'(a) = A'(a)B(a) + A(a)B'(a)$$

vi

Proposition (Composée d'applications dérivables)

Soit $\varphi : J \to I$ une fonction dérivable en $b \in J$. On suppose f dérivable en $a \overset{def}{=} \varphi(b)$. La fonction $f \circ \varphi$ est alors dérivable en b, et
$$(f \circ \varphi)'(b) = \varphi'(b)f'(\varphi(b)) = \varphi'(b)f'(a)$$

IX.6

Démonstration

On a
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\gamma(x),$$
où γ est une fonction de limite nulle en a, et
$$\varphi(t) = \varphi(b) + (t-b)\varphi'(b) + (t-b)\delta(t) = a + (t-b)\varphi'(b) + (t-b)\delta(t),$$
où δ est de limite nulle en b, de sorte que
$$\begin{aligned} f(\varphi(t)) &= f(\varphi(b)) + ((t-b)\varphi'(b) + (t-b)\delta(t))f'(a) \\ &+ ((t-b)\varphi'(b) + (t-b)\delta(t))\gamma(\varphi(t)) \end{aligned}$$
soit
$$f(\varphi(t)) = f(\varphi(b)) + (t-b)\varphi'(b)f'(a) + o_{t\to b}(t-b)$$
d'où le résultat.

□

2.3. Dérivabilité globale

Définition (Dérivabilité globale) IX.viii

On dit que f est *dérivable sur* I si elle est dérivable en chaque point de I. On peut alors définir l'*application dérivée* de f de I dans E, notée f'.
On note $\mathcal{D}(I, E)$ l'ensemble des applications dérivables de I dans E.

Les résultats ci-dessus sur la dérivabilité ponctuelle fournissent de nombreux résultats naturels sur la notion de dérivabilité globale : si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathcal{D}(I,E) & \to & E^I \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

est linéaire, et, si E est une $\mathbb{K}$-algèbre, alors $\mathcal{D}(I, E)$ est une sous-algèbre de E^I, et, pour tout $(f, g) \in \mathcal{D}(I, E)^2$:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

De même pour la dérivée de $B(f, g)$ si B est bilinéaire, etc.

2.4. Dérivées successives

Définition (Dérivabilité à l'ordre k d'une fonction vectorielle) IX.ix

On appelle *dérivée à l'ordre* 0 de f et on note $f^{(0)}$ l'application f elle-même.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si la dérivée $f^{(k-1)}$ de f à l'ordre $k-1$ de f existe et est dérivable, alors on dit que f est k *fois dérivable*, et on appelle *dérivée à l'ordre* k de f et on note $f^{(k)}$ la fonction

$$f^{(k)} \stackrel{def}{=} (f^{(k-1)})'$$

On note $\mathcal{D}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de I dans E, k fois dérivables.

Plus finement, si f est k fois dérivable, et si $f^{(k)}$ est dérivable en a, alors on définit la dérivée de f en a à l'ordre $k+1$, et on note $f^{(k+1)}(a)$, le vecteur $(f^{(k)})'(a)$.
Si f est k fois dérivable, alors, pour tous entiers naturels i et j de somme k : $(f^{(i)})^{(j)} = f^{(k)}$.
La linéarité de la dérivation permet d'obtenir immédiatement :

Proposition (Dérivation à l'ordre k) IX.7

Soit $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{D}^k(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi_k : & \mathcal{D}^k(I,E) & \to & E^I \\ & f & \mapsto & f^{(k)} \end{array}$$

est linéaire.

Si E est une $\mathbb{K}$-algèbre, on a la formule de Leibniz :

Proposition (Formule de Leibniz vectorielle) IX.8

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si f et g sont k fois dérivables, alors fg est k fois dérivable, et

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

En fait, on a une formule plus générale, que l'on peut encore appeler formule de Leibniz :

Proposition (Formule de Leibniz généralisée vectorielle) IX.9

Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont k fois dérivables, alors $B(f,g)$ l'est également, et

$$(B(f,g))^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)})$$

Démonstration

□

Exemple (Formule de Leibniz généralisée) vii

Cette formule s'applique notamment au cas de λf, où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction numérique k fois dérivable.

Proposition (Composition de fonctions k fois dérivables) IX.10

Soit $\varphi : J \to I$ une application. On suppose que f et φ sont k fois dérivables. L'application $f \circ \varphi$ est alors k fois dérivable.

Démonstration

□

En revanche, on ne donne pas de formule simple pour la dérivée k-ième d'une composée.

Définition (Applications continûment dérivables)

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^k$, ou que f est *k fois continûment dérivable*, si f est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue.
On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^\infty$, ou que f est *indéfiniment dérivable*, si f est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de I dans E, de classe $\mathcal{C}^k$.

IX.x

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}^{k+1}(I, E) \subset \mathcal{C}^k(I, E) \subset \mathcal{D}^k(I, E)$$

et

$$\mathcal{C}^\infty(I, E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I, E).$$

Proposition (Opérations sur les applications continûment dérivables)

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, E)$, muni des lois usuelles, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. C'est même une $\mathbb{K}$-algèbre si E est une $\mathbb{K}$-algèbre.

IX.11

Démonstration

$\square$

Vecteur accélération

Si f est deux fois dérivable, et si elle a un argument temporel et des valeurs donnant une position, alors le taux d'accroissement de f' entre t_0 et t (supposés distincts) s'interprète comme l'accélération moyenne de f entre t_0 et t, et la limite de ce taux lorsque t tend vers t_0 est l'accélération instantanée de f en t_0.

IX.d

3. Intégration sur un segment

3.1. Définition, sommes de Riemann

On rappelle que $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$.

Définition (Continuité par morceaux d'une fonction vectorielle)

On dit que f est *continue par morceaux* si chacune de ses fonctions coordonnées (dans une base quelconque) l'est.

IX.xi

Définition (Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment)

IX.xii

On appelle *intégrale de f sur* $[a,b]$ et on note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ le vecteur

$$\int_{[a,b]} f \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) e_i$$

Démonstration

Du fait que cette définition ne dépende pas de la base choisie : considérons une base $(e'_1, \dots, e'_n)$, et notons $M = (m_{i,j})$ la matrice de cette base dans $(e_1, \dots, e_n)$. On a donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$$

On sait aussi que si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ sont les n-uplets de coordonnées d'un vecteur x de E dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x'_j$$

Ainsi, si on note $(g_1, \dots, g_n)$ le n-uplet des fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}'$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\mathrm{d}t \right) e'_j &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\mathrm{d}t \right) \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\mathrm{d}t \right) m_{i,j} e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} g_j(t)\mathrm{d}t \right) \right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) e_i
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

Vous avez déjà calculé ce genre d'intégrales en physique et en SI, par exemple lors de l'intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.

Grâce aux propriétés de l'intégrale d'une fonction numérique continue par morceaux sur un segment, on obtient immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition (Linéarité de l'intégrale pour les fonctions vectorielles)

IX.12

L'application

$$\begin{array}{cccc} \Delta : & \mathcal{C}_{pm}([a,b], E) & \to & E \\ & f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array}$$

est linéaire.

Proposition (Relation de Chasles pour les fonctions vectorielles) IX.13

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$, tout $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$, on a :

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma f(t)\mathrm{d}t.$$

Définition (Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière) IX.xiii

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *somme de Riemann* de f associée à la subdivision régulière de $[a, b]$ de pas $\frac{b-a}{n}$ pointée à droite et on note $S_{n,d}(f)$ le vecteur

$$S_{n,d}(f) \overset{def}{=} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

On appelle *somme de Riemann* de f associée à la subdivision régulière de $[a, b]$ de pas $\frac{b-a}{n}$ pointée à gauche et on note $S_{n,g}(f)$ le vecteur

$$S_{n,g}(f) \overset{def}{=} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Illustration

En reprenant le cours de première année, et la définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle, on a immédiatement :

Proposition (Convergence des sommes de Riemann) IX.14

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$, alors pour tout $(a, b) \in I^2$, où $a \leqslant b$, les suites $(S_{n,g}(f))$ et $(S_{n,d}(f))$ convergent vers $\int_a^b f$.

Proposition (Inégalité triangulaire intégrale) IX.15

Pour tout $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$:

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|.$$

Démonstration

Utiliser les sommes de Riemann. □

En revanche, il n'y a pas lieu, dans ce contexte généralisé où E n'est pas supposé ordonné, d'étudier la positivité ou la croissance de l'intégrale, ni la stricte croissance pour les fonctions continues.

Exercice (classique) conseillé : 762.

3.2. Intégrale fonction de sa borne supérieure

Définition (Primitive d'une fonction vectorielle continue) IX.xiv

On suppose f continue. On appelle *primitive* de f (sur I) toute fonction F de I dans E, dérivable sur I, de dérivée f.

Si F est une fonction dérivable de I dans E, et si on note $(F_1, \dots, F_p)$ le p-uplet de ses fonctions composantes dans $\mathcal{B}$, F est une primitive de f si et seulement si F_i est une primitive de f_i pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Proposition (Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante) IX.16

Deux primitives F et G de f sur I diffèrent d'un vecteur constant.
En particulier, si deux primitives F et G de f sur I coïncident en un point, alors elles sont égales.

Démonstration

Cela résulte immédiatement de la propriété analogue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ (établie dans le cours de MPSI). □

Théorème fondamental de l'analyse (vectoriel) IX.17

On suppose f continue. La fonction

$$F : \begin{array}{rcl} I & \to & E \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Démonstration

L'unicité est claire d'après la proposition précédente. Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in I$. On a

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - f(x)\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\mathrm{d}t\right\| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \|f(t)-f(x)\|\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in I$ tel que $|t-x| \leqslant \delta$, on ait :

$$\|f(t)-f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leqslant \delta$ et $x+h \in I$, on a :

$$\left\|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right\| \leqslant \varepsilon$$

d'où le résultat (on a clairement $F(a) = 0$).

□

Théorème (Inégalité des accroissements finis pour les fonctions vectorielles) IX.18

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],E)$. On suppose que M est un majorant de la fonction $\|f'\|$. On a alors

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant M(b-a).$$

Démonstration

D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$f(b)-f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$$

donc

$$\|f(b)-f(a)\| = \left\|\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}t = M(b-a)$$

□

On peut prendre $M = \sup\{\|f'(t)\|, t \in [a,b]\}$, et on peut noter que ce sup est un max.

Dérivée bornée et caractère lipschitzien IX.e

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$, $K \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est K-lipschitzienne si et seulement si la fonction $\|f'\|$ est majorée par K.

Théorème du prolongement continûment dérivable pour les fonctions vectorielles IX.f

Si $f\ :]a,b] \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et si f et f' sont prolongeables par continuité en a, alors f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

3.3. Techniques de calcul d'intégrales et de primitives

Nous avons revu en début d'année les techniques de calcul de primitives.

La définition de l'intégrale permet d'établir des formules de changement de variable, et d'intégration par parties, dans le cadre des fonctions vectorielles :

Proposition (Intégration par parties pour les fonctions vectorielles)

Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire, $g : I \to F$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors, pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b B(f'(t), g(t))\mathrm{d}t = [B(f(t), g(t))]_a^b - \int_a^b B(f(t), g'(t))\mathrm{d}t$$

IX.19

Démonstration

Il suffit d'intégrer sur le segment $[a, b]$ la relation

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$$

□

L'intégration par parties sert :

(1) à se « débarrasser » des fonctions telles que ln, arctan, voire arcsin.

(2) à analyser un comportement asymptotique ou une limite (par exemple, pour montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente).

Proposition (Changement de variable pour les fonctions vectorielles)

Soit $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f est supposée continue. On a alors, pour tous $a, b \in J$:

$$\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

IX.20

Démonstration

□

Enfin, on a :

Proposition (Image d'une intégrale par une application linéaire)

On suppose f continue. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

$$L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f$$

IX.21

Démonstration

Considérons les applications $x \in [a,b] \mapsto L\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$ et $x \in [a,b] \mapsto \int_a^x (L \circ f)(t)\mathrm{d}t$. Ces deux applications sont dérivables, de même dérivée $L \circ f$, et égales en a : elles sont donc égales sur l'intervalle $[a,b]$ (en particulier en b).

$\square$

4. Formules de Taylor

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral) IX.22

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,E)$. On a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

On montre ce résultat par récurrence en effectuant une intégration par parties dans l'hérédité.

$\square$

Exemple (Formule de Taylor avec reste intégral) viii

(1) Cas de la fonction exponentielle. Pour tout réel x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t.$$

(2) Cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t.$$

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n) IX.23

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I,E)$. On suppose la fonction $\left\|f^{(n)}\right\|$ majorée par un réel M. On a alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|b-a|^n}{n!} M$$

Démonstration

On applique la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}
\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| &= \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t \right\| \\
&\leqslant \left| \int_a^b \frac{|b-t|^{n-1}}{(n-1)!} \left\| f^{(n)}(t) \right\| \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| \int_a^b \frac{|b-t|^{n-1}}{(n-1)!} M \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_a^b \frac{(t-b)^{n-1}}{(n-1)!} M \mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{|b-a|^n}{n!} M
\end{aligned}$$

□

On peut prendre $M = \sup\{\left\| f^{(n)}(t) \right\|, t \in |a, b|\}$.
À l'ordre 1, on retrouve bien l'inégalité des accroissements finis.

Exemple (Inégalité de Taylor-Lagrange, cas de l'exponentielle)

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

ix

Exemple (Inégalité de Taylor-Lagrange, cas du logarithme)

Cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Pour tout $x \in]-1, 0]$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}.$$

x

Exemple (Inégalité de Taylor-Lagrange, cas du sinus)

Pour tout réel x,
$$x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}\leqslant \sin(x)\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$
et
$$x-\frac{x^3}{6}-\frac{|x|^5}{5!}\leqslant \sin(x)\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{|x|^5}{5!}.$$
Quelle inégalité préférez-vous ? (on pourra tracer des graphes pour comparer les encadrements)
Trouver une approximation rationnelle de $\sin(1)$ à 10^{-2} près, puis à 10^{-5} près.

xi

Théorème (Formule de Taylor-Young à l'ordre n)

Soit $f\in\mathcal{C}^n(I,E)$. On a :
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\mathrm{o}_{x\to a}((x-a)^n)$$

IX.24

Démonstration

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction auxiliaire
$$g\ :x\mapsto f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$$
g est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, ses dérivées en a jusqu'à l'ordre n compris sont nulles en a, et sa dérivée n-ième sur $|a,x|$ est majorée par $\sup\{\left\|g^{(n)}(t)\right\|,t\in|a,x|\}$, donc l'inégalité de Taylor-Lagrange fournit
$$\|g(x)\|\leqslant\frac{|x-a|^n}{n!}\sup\left\{\left\|g^{(n)}(t)\right\|,t\in|a,x|\right\}$$
On montre ensuite, en revenant à la définition formelle de la continuité, que $\sup\{\left\|g^{(n)}(t)\right\|,t\in|a,x|\}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a (car $g^{(n)}$ est continue et nulle en a), obtenant le résultat voulu.

□

Hiérarchie des formules de Taylor

La formule de Taylor-Young est une conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange, elle-même issue de la formule de Taylor avec reste intégral : c'est donc cette dernière qui est la plus forte et la plus fine. Elle l'est d'ailleurs tellement que l'on n'y recourt pas si souvent que cela.

IX.g

Nature des formules de Taylor

La formule de Taylor avec reste intégral est la seule à être une égalité (la formule de Taylor-Young fournit la description d'un comportement local, pas une égalité exploitable globalement).

IX.h

Formules de Taylor : aspect local-global

La formule de Taylor-Young donne une information *locale* sur le comportement de f : elle ne présente pas d'intérêt si on étudie le comportement global de f (on rencontre très souvent cette erreur).
En revanche, la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange donnent des renseignements globaux sur la fonction étudiée.

IX.i

Exercice conseillé : 768.

5. Arcs paramétrés

Définition (Arc paramétré)

On appelle *arc paramétré* sur E toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans E.
On appelle *support* de l'arc f, l'image $f(I)$ de f.

IX.xv

Un arc paramétré est essentiellement une fonction vectorielle, mais dont on voit les valeurs plus comme des points que des vecteurs. On note d'ailleurs souvent $M(t)$ le point mobile à l'instant t pour un arc donné.

Un arc ne se confond pas avec son support, de même que la fonction sinus ne se confond pas avec son image $[-1, 1]$. En pratique, on n'étudie que des arcs plans (c'est-à-dire lorsque $E = \mathbb{R}^2$), et on représente graphiquement leur support (qui est une partie de $\mathbb{R}^2$), pas leur graphe (qui est une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$).

Définition (Arc paramétré régulier)

Soit $f : I \to E$ un arc paramétré. On dit que $t_0 \in I$ est un *paramètre régulier (pour l'arc f)* (resp. un *paramètre singulier, ou stationnaire*) si $f'(t_0) \neq 0$ (resp. si $f'(t_0) = 0$). On dit que l'arc f est *régulier* si tout point de I est un paramètre régulier pour f.

IX.xvi

Interprétation géométrique de la dérivée

Si t est un paramètre régulier, la tangente au support à l'instant t est dirigée par le vecteur vitesse $f'(t)$. Dans le cas d'un arc plan, la normale au support à ce même instant est la droite admettant $f'(t)$ pour vecteur normal, et passant par $M(t)$.

IX.j

Illustration

Une étude d'arc paramétré pourra s'organiser ainsi :

(1) Détermination du domaine de définition de l'arc paramétré, puis réduction éventuelle de celui-ci pour obtenir, par des considérations de symétrie ou de périodicité, le « domaine utile » ;

(2) Étude sur ce dernier domaine de la courbe paramétrée, c'est-à-dire de ses fonctions coordonnées (classe, variations et, dans une moindre mesure, signe) ;

(3) Tracé (du support) de la courbe.

Pour rendre le tracé plus précis, on pourra éventuellement s'intéresser aux points suivants (et pour chacun d'entre eux, on déterminera la tangente) :

(1) Points situés sur un des axes de coordonnées ($x(t) = 0$ ou $y(t) = 0$).

(2) Points réguliers où la tangente est verticale ($x'(t) = 0$) ou horizontale ($y'(t) = 0$). Cela comprend notamment les points réguliers où l'abscisse ou l'ordonnée présente un extremum local, et où t est intérieur au domaine d'étude.

(3) Points multiples, *i.e.* les points physiques auxquels on se trouve en deux instants distincts ou plus. Pour éviter les points multiples non pertinents, on aura d'abord restreint le domaine de manière à obtenir tout le support, mais pour lequel les points multiples sont en nombre fini. Par exemple, si l'arc est périodique, alors tout point est multiple.

CHAPITRE X

Suites et séries de fonctions

Sommaire

L'étude assez générale et théorique menée dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés peut s'adapter à l'étude de suites et de séries de fonctions.

Le contexte sera le suivant : on considère une suite (f_n) de fonctions ou une série de fonctions $\sum u_n$, où les u_n et f_n sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé H de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie.

On a muni A d'une topologie afin de pouvoir se poser des questions sur la régularité des f_n et u_n, et surtout des éventuelles limites de (f_n) et $\sum u_n$ (en un sens à préciser).

On verra dans un premier temps que la notion la plus évidente de convergence, la convergence simple, est trop peu exigeante : le fait que les f_n vérifient certaines propriétés ne garantit aucunement que leur limite les vérifie aussi.

On introduira alors la notion de convergence uniforme, beaucoup plus adaptée : par exemple, la continuité « passera » à la limite uniforme.

Le plus souvent, A sera un intervalle réel (on pourra alors s'intéresser à la dérivabilité de f), et E sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Outre ces question de régularité, on se posera souvent la question de la légitimité de l'interversion de limites. Par exemple, sous quelles conditions (suffisantes) peut-on affirmer que

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

que

$$\lim_n \int_{[a,b]} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} \lim_n f_n(t)\mathrm{d}t$$

ou, pour les séries de fonctions, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to a} u_n(x) = \lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[a,b]} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$$

Pour toute partie non vide B de A, et toute fonction g de A dans E telle que $g_{|B}$ soit bornée, nous noterons

$$\|g\|_{\infty,B} \stackrel{def}{=} \sup\{\|g(x)\|, x \in B\}$$

Lorsqu'en outre $B = A$, nous noterons simplement $\|g\|_\infty$ le réel $\|g\|_{\infty,A}$.

1. Convergence simple, convergence uniforme

1.1. La convergence simple

Définition (Convergence simple sur A)

On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge simplement* vers une fonction f (de A dans E) si, pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. On dit alors que f est *limite simple* de (f_n).

X.i

La convergence simple est donc une accumulation de convergences ponctuelles, sans lien entre elles.

Illustration

Il y a unicité de la limite simple d'une suite de fonctions, mais pas toujours existence.

Exemple (Convergence simple)

(1) On considère la suite (g_n) de fonctions $g_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Cette suite converge simplement vers la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, nulle sur $[0,1[$, et valant 1 en 1.

(2) La suite (h_n) de fonctions $h_n : x \in \mathbb{R} \mapsto n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ converge simplement vers $h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$.

i

Le premier exemple montre que la continuité ne passe pas à la convergence simple : chaque fonction g_n est continue en 1, mais la limite simple g ne l'est pas. Il est naturel de se demander si certaines propriétés sont malgré tout conservées par passage à la limite simple, *i.e.* si, lorsque chaque fonction f_n vérifie une propriété $\mathcal{P}$, alors la limite simple f de (f_n) vérifie également cette propriété. C'est le cas de :

(1) La croissance, la décroissance, la monotonie.

(2) La positivité, le fait d'être minoré (ou majoré) par un réel donné [1], d'avoir une image incluse dans une partie fermée donnée.

(3) Le fait d'être inférieure ou égale (ou supérieure ou égale) à une fonction donnée.

(4) La convexité, la concavité.

(5) Le fait d'être K-lipschitzien (où K est un réel positif donné).

(6) La linéarité.

En revanche, les propriétés suivantes ne passent pas à la limite simple :

1. Le même pour toutes les fonctions f_n.

(1) La continuité (ponctuelle ou globale), la dérivabilité (ponctuelle ou globale).

(2) L'injectivité, la surjectivité.

(3) La stricte croissance, la stricte décroissance, la stricte monotonie, etc. Plus généralement, on se souviendra que les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite.

(4) Le fait d'être majoré, minoré, borné, et le fait de ne pas l'être.

(5) Le fait d'être lipschitzien.

Illustration

On retiendra que la limite simple ne conserve que les propriétés qu'elle conserve de manière évidente, *i.e.* celles dont on prouve la conservation par une analyse immédiate de la question.

On peut aussi se demander si la notion de limite simple se comporte bien avec certains opérateurs, et notamment l'intégrale sur un segment. La réponse est non. Par exemple, on peut trouver une suite (f_n) de fonctions continues sur $[0,1]$, convergeant simplement vers la fonction nulle, et vérifiant pourtant $\int_{[0,1]} f_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc dans ce cas :

$$\lim_n \int_{[0,1]} f_n(t)\mathrm{d}t \neq \int_{[0,1]} \lim_n f_n(t)\mathrm{d}t$$

Illustration

La notion de limite simple d'une suite de fonctions ne transmet pas suffisamment de propriétés pour se suffire à elle-même : cela motive l'introduction d'un nouveau mode de convergence.

Exercice (d'assimilation) conseillé : étude de la convergence simple dans l'exercice 778.

1.2. La convergence uniforme

Définition (Convergence uniforme sur A, sur une partie de A)

On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément (sur A)* vers une fonction f (de A dans F) si la suite $(\|f - f_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang [a] et tend vers 0.
On dit alors que f est *limite uniforme* de (f_n).
Plus généralement, si B est une partie de A, on dit que (f_n) *converge uniformément vers f sur B* si la suite des restrictions des f_n à B converge uniformément vers la restriction de f à B, *i.e.* la suite $(\|f - f_n\|_{\infty,B})$ est définie à partir d'un certain rang, et tend vers 0.

a. *i.e.* $f - f_n$ est bornée, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de n.

X.ii

Lorsqu'on évoque une convergence uniforme, il est important de préciser sur quel domaine elle a lieu. Bien sûr, si (f_n) converge uniformément sur A, alors elle converge uniformément sur toute partie de A.

Convergence uniforme et convergence simple

Le fait que (f_n) converge simplement vers f s'écrit

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

alors que le fait que (f_n) converge uniformément vers f s'écrit [a]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Clairement, la convergence uniforme (vers f) entraîne la convergence simple (vers la même fonction f), mais la réciproque est fausse :

a. Certains définissent d'ailleurs la convergence formule par cette assertion formelle. Cela équivaut à la définition donnée dans ce cours.

X.a

Illustration

Montrer une non convergence uniforme

Pour montrer que la suite (f_n) de fonctions ne converge pas uniformément vers f, et si le calcul de $\|f - f_n\|_\infty$ n'est pas évident, on pourra trouver une suite (x_n) de points de A telle que la suite de terme général $\|f(x_n) - f_n(x_n)\|$ ne converge pas vers 0. Dans le cas où f est la limite simple de (f_n), les suites (x_n) stationnaires ne permettront pas de conclure : en général, les suites (x_n) choisies tendront vers un point adhérent à A mais non dans A, ou vers $\pm\infty$ (dans le cas où A est un intervalle, non majoré ou non minoré).

X.b

Exemple (Convergence uniforme)

(1) Dans l'exemple de la suite (g_n) ci-dessus, la convergence n'est pas uniforme car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g - g_n\|_\infty = 1$, ou encore car si on pose $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $(g(x_n) - g_n(x_n))$ ne tend pas vers 0.

(2) Dans l'exemple de la suite (h_n) ci-dessus, la convergence n'est pas uniforme.

ii

Convergence uniforme sur tout compact et convergence uniforme

Il est évident que si (f_n) converge uniformément, alors elle converge uniformément sur tout compact inclus dans A, mais la réciproque est fausse :

X.c

Exercice (d'assimilation) conseillé : l'étude de convergence uniforme dans l'exercice 778.

1.3. Convergence uniforme et opérations algébriques

On considère ici deux suites de fonctions (f_n) et (g_n) de A dans E, et on se pose la question de la stabilité de la convergence uniforme par opérations algébriques. Pour ce faire, on tente d'appliquer le cours sur les espace vectoriel normés.

La suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si la suite $(f_n - f)$ est à valeurs dans l'espace vectoriel[2] $\mathcal{B}(A, E)$ à partir d'un certain rang n_0, et la suite $(f_n - f)_{n \geqslant n_0}$ converge vers la fonction nulle dans l'EVN $(\mathcal{B}(A, E), \|\cdot\|_\infty)$.

La convergence uniforme rentre donc partiellement dans le cadre général de la convergence d'une suite dans un evn : on a en particulier immédiatement équivalence entre la convergence uniforme de (f_n) vers f et la convergence uniforme de chacune des suites de fonctions coordonnées des f_n dans une base donnée vers la fonction coordonnée correspondante de f.

De plus, grâce au théorème VIII.7 :

Proposition (Convergence uniforme d'une combinaison linéaire)

Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers f et g respectivement, alors, pour tout scalaires λ et μ, $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

X.1

Attention cependant, on ne peut pas dire que la convergence uniforme de (f_n) vers f soit équivalente à la convergence de la suite (f_n) vers f dans l'EVN $(\mathcal{B}(A, E), \|\cdot\|_\infty)$, pour la simple raison que les fonctions f_n et

2. $\mathcal{B}(A, E)$ est l'ensemble des fonctions bornées de A dans E.

la fonction f ne sont pas supposées bornées *a priori* (c'est la différence $f_n - f$ qui l'est, à partir d'un certain rang).

Dans le cas où (f_n) converge uniformément vers f, les fonctions f_n sont bornées à partir d'un certain rang si et seulement si f est bornée :

Pour des fonctions bornées (ce qui sera souvent le cas en pratique), (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si la suite (f_n) de l'evn $(\mathcal{B}(A,E), \|\cdot\|_\infty)$ converge vers f. Si en outre E est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, l'EVN $(\mathcal{B}(A,E), \|\cdot\|_\infty)$ est aussi une $\mathbb{K}$-algèbre normée, et donc :

Proposition (Convergence uniforme d'un produit dans le cas de fonctions bornées) X.2

On suppose que E est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, et que (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers f et g respectivement.
Si les fonctions f_n et g_n sont en outre bornées (pour tout n, ou du moins à partir d'un certain rang n_0), alors $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Démonstration

Dans une telle situation, $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(g_n)_{n \geqslant n_0}$ convergent respectivement vers f et g dans la $\mathbb{K}$-algèbre normée $(\mathcal{B}(A,E), \|\cdot\|_\infty)$ (f et g sont bornées par convergence uniforme et car les fonctions f_n g_n le sont à partir d'un certain rang), donc $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg (cas particulier du théorème VIII.7). □

On peut bien sûr retrouver ce résultat directement, en introduisant un terme mixte par relation de Chasles dans l'expression $f_n g_n - fg$.

Cette proposition s'applique notamment au cas où $E = \mathbb{R}$ (normé par la valeur absolue) ou $E = \mathbb{C}$ (normé par le module).

Exemple (Opérations algébriques et convergence uniforme) iii

Pour tout $(x,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) \overset{def}{=} x + \frac{1}{n}$. La suite de fonctions *bornées* (f_n) converge uniformément vers $f \ : x \in [0,1] \mapsto x$, donc la suite $(f_n^3 + 2f_n + 3)$ converge uniformément vers $x \mapsto x^3 + 2x + 3$ sur $[0,1]$.

Si on ne suppose plus les fonctions f_n et g_n bornées, la suite $(f_n g_n)$ ne converge pas toujours uniformément vers fg :

1.4. Opérations sur les domaines où la convergence d'une suite de fonctions donnée est uniforme

Considérons une suite de fonctions (f_n) de A dans E, convergeant simplement sur A vers une fonction f. On s'intéresse à l'ensemble Ω des parties de A sur lesquelles la convergence est uniforme.

(1) Si B appartient à Ω, alors toute partie de B appartient à Ω.

(2) Si B et C appartiennent à Ω, alors $B \cup C$ appartient à Ω (plus généralement, s'il y a convergence uniforme sur $B_1, \ldots, B_n$, alors il y a convergence uniforme sur $B_1 \cup \cdots \cup B_n$).

(3) Tout singleton de A appartient à Ω (et donc toute partie finie de A appartient à Ω).

On en déduit la remarque importante suivante :

Enlever un point au domaine n'aide pas à la convergence uniforme

Supposons que B soit une partie stricte de A, et que c soit un point de $A \setminus B$.
La suite (f_n) converge uniformément sur $B \cup \{c\}$ si et seulement si (f_n) converge uniformément sur B.
Ainsi, *il est illusoire d'enlever un point à un domaine sur lequel il n'y a pas convergence uniforme pour espérer obtenir la convergence uniforme* : en pratique, on enlèvera plutôt un voisinage relatif de ce point.
Par exemple, la suite (g_n) de l'exemple i ne converge pas uniformément sur $[0,1]$, mais pas non plus sur $[0,1[$.

X.d

Ω est stable par union finie, mais pas par union quelconque (si tel était le cas, la convergence simple entrainerait la convergence uniforme, en écrivant A comme union de singletons).

2. Conservation de propriétés par limite uniforme

2.1. Généralités

Bien évidemment, la convergence uniforme conserve toute propriété conservée par convergence simple, comme la convexité, ou la positivité par exemple.

Elle conserve également le fait d'être majoré, minoré, ou borné.

2.2. Continuité

On s'attend également à ce que la convergence uniforme, bien plus exigeante que la convergence simple, conserve d'autres propriétés, notamment la continuité. C'est bien le cas :

Théorème (Continuité ponctuelle et convergence uniforme)

Si les f_n sont continues en a et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de a (relatif à A), alors f est continue en a.

X.3

Démonstration

$\square$

Illustration

Autrement dit, sous les hypothèses de l'énoncé :

$$\lim_{n\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n\infty} f_n(x)$$

Corollaire (Limite uniforme de fonctions continues) X.4

Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.

Exemple (Continuité d'une limite uniforme) iv

Cela prouve (à nouveau) que $g_n \; : x \mapsto x^n$ ne converge pas uniformément vers g sur $[0, 1]$, puisque g n'a pas hérité de la continuité des g_n.

Voici une remarque absolument pas facultative, qui explique pourquoi le théorème X.3 suppose une convergence uniforme *au voisinage de a* :

Convergence uniforme au voisinage de tout point et continuité X.e

Considérons une suite (f_n) de fonctions continues sur A, convergeant simplement vers f.
Nous aimerions nous assurer de la continuité de f : la convergence simple ne suffit pas.
La convergence uniforme suffit, mais n'est pas toujours satisfaite.
Grâce au caractère local de la continuité, pour prouver la continuité de f, il suffit que pour tout $a \in A$, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de a (relatif dans A).
Par exemple, si I est un intervalle, et s'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans I, alors la fonction f sera continue.
Ne pas oublier toutefois que cette convergence sur tout segment inclus dans I n'entraîne pas, en général, la convergence uniforme sur I.

Ces résultats seront surtout utilisés dans leur version « séries de fonctions », car, le plus souvent la somme de la série de fonctions ne sera pas facile à expliciter, et sa continuité ne se lira donc pas aisément.

Exemple (Non conservation de la dérivabilité par convergence uniforme)

La dérivabilité ne passe pas à la limite uniforme : par exemple, on peut expliciter une suite de fonctions (f_n) dérivables sur $[-1,1]$, convergeant uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$.

v

2.3. Double limite

La continuité étant un cas particulier de limite, il est naturel de se demander si on peut étendre le théorème X.3. Le théorème suivant apporte une réponse positive :

Théorème de la double limite X.5

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans E, et soit a un point adhérent à A. On suppose que

(1) (f_n) converge uniformément vers f sur A.

(2) pour tout n, f_n admet une limite finie $\ell_n \in E$ en a.

La suite (ℓ_n) admet alors une limite ℓ, f admet une limite en a, et ces limites sont égales :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Démonstration

Cette démonstration n'est pas exigible.
Quitte à considérer la suite (f_n) à partir d'un certain rang, on peut supposer que la suite $(f_n - f)$ est bornée.
Le plus difficile consiste à montrer la convergence de (l_n). Pour tous entiers p et q, tout $x \in A$, on a :

$$\|f_q(x) - f_p(x)\| \leqslant \|f_q - f_p\|_\infty$$

d'où, en faisant tendre x vers a :

$$\|l_q - l_p\| \leqslant \|f_q - f_p\|_\infty$$

Or la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ est majorée par un certain réel M, donc, par inégalité triangulaire,

$$\|l_q - l_p\| \leqslant 2M$$

La suite $(l_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est donc bornée (fixer $p = 0$ par exemple), il en existe donc une suite extraite convergente via une extractrice φ, vers un certain élément l de E.
On a donc, pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\left\|l_{\varphi(q)} - l_q\right\| \leqslant \left\|f_{\varphi(q)} - f_q\right\|_\infty$$

donc la suite de terme général $l_{\varphi(q)} - l_q$ converge vers 0, puis la suite (l_q) converge vers l.
Une fois ceci établi, la démonstration est similaire à celle du théorème X.3

□

On peut donc écrire, sous les hypothèses du théorème (*i.e.* [3] la convergence uniforme, et l'existence, pour tout n, de $\lim_{x \to a} f_n(x)$) :

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

d'où le nom donné à ce théorème. Il est d'ailleurs aussi appelé *théorème d'interversion des limites*.

Il faut noter que le fait que (ℓ_n) admette une limite fait partie de la conclusion, et non des hypothèses. De même pour le fait que f admette une limite en a.

Dans le cas où $a \in A$, on retrouve X.3

Lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), ce théorème admet une adaptation évidente (figurant au programme), au cas où $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$). Cela s'applique notamment au cas où $A = \mathbb{N}$ (pour lequel on considère des suites de suites).

Voir à ce sujet (en fin de chapitre l'exercice) 841.

Il faut bien noter que l'hypothèse de convergence uniforme est cruciale (et d'ailleurs, ce théorème donne une manière de montrer qu'une convergence n'est pas uniforme) :

Exercice d'application conseillé : 840.

2.4. Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Nous avons vu que la convergence simple ne permettait pas d'intervertir limite et intégrale sur un segment. La convergence uniforme, elle, le permet :

Théorème (Intégration d'une limite uniforme sur un segment) X.6

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E, a un point de I.
On suppose qu'il existe une fonction $f : I \to E$ vers laquelle (f_n) converge (simplement, et) uniformément sur tout segment de I.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit

$$F_n(x) = \int_a^x f_n \quad \text{et} \quad F(x) = \int_a^x f.$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.
En particulier, si (f_n) converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\int_{[a,b]} f_n \to_n \int_{[a,b]} f.$$

3. Ou encore : la convergence uniforme, et l'existence des limites internes.

Démonstration

Tout d'abord, F est bien définie, car f est continue (comme limite uniforme sur tout segment d'une suite de fonctions continues).
Montrons la CVU sur tout segment dont une extrémité est a (tout segment inclus dans I est inclus dans l'union de deux tels segments) : soit $b \in I$, et soit x dans le segment S d'extrémités a et b. On a

$$\begin{aligned} \|F_n(x) - F(x)\| &= \left\| \int_a^x (f_n - f)(t) \right\| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left| \int_a^x \|(f_n - f)(t)\| \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant |x-a| \, \|f_n - f\|_{\infty,S} \\ &\leqslant |b-a| \, \|f_n - f\|_{\infty,S} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in S$:

$$\|F_n(x) - F(x)\| \leqslant |b-a| \, \|f_n - f\|_{\infty,S} \,,$$

et donc

$$\|F_n - F\|_{\infty,S} \leqslant |b-a| \, \|f_n - f\|_{\infty,S}$$

ce qui prouve la convergence uniforme de (F_n) vers F sur S.
En particulier, si (f_n) CVU vers f sur $[a,b]$, alors $(F_n(b))$ tend vers $F(b)$, *i.e.*

$$\int_{[a,b]} f_n \to_n \int_{[a,b]} f.$$

□

Exemple (Intégration d'une limite uniforme sur un segment)

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, et la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, en considérant les primitives nulles en 1, la suite de fonctions $\left(x \mapsto \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)\right)$ converge uniformément vers la fonction logarithme sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

vi

À nouveau, ce théorème permet de montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

Exemple (Non convergence uniforme par intégration sur un segment)

La suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = n\cos(x)\sin(x)^n$$

ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

vii

2.5. Dérivation d'une suite de fonctions

Nous avons déjà indiqué que la convergence uniforme ne conservait pas la dérivabilité. Il existe cependant un théorème qui, sous des conditions assez restrictives, fournit la dérivabilité d'une limite d'une suite de fonctions :

Théorème de dérivation d'une suite de fonctions

On suppose que A est un intervalle I de $\mathbb{R}$, et que
(1) Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$.
(2) (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.
(3) (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.
La suite (f_n) converge alors uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

X.7

Démonstration

Nous partons de la relation fondamentale

$$(*) \quad f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t,$$

valable pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ (d'après le point (1)).
La suite de fonctions de terme général $x \mapsto \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, d'après le théorème X.6 et (3). Par ailleurs, la suite de fonctions constantes de terme général $x \mapsto f_n(a)$ converge uniformément vers $x \mapsto f(a)$ sur tout segment de I (et même sur I tout entier), d'après (2).
Ainsi, d'après $(*)$, la suite (f_n) CVU sur tout segment vers $x \mapsto f(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. Or cette suite converge simplement vers f (d'après (2)), et donc, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

d'où les affirmations voulues.

□

Dérivations successives d'une suite de fonctions

Ce résultat s'étend immédiatement aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (où $k \in \mathbb{N}^*$), sous l'hypothèse de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I.
De même, on adaptera cet énoncé pour montrer qu'une suite de fonctions est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

X.f

Ce théorème sera surtout utile dans sa version série de fonctions.

3. Approximation uniforme

Quand on travaille dans l'espace $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions bornées sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme infinie, on peut chercher, étant donné une fonction f d'un certain type (continue, par exemple) une suite de fonctions d'un type plus restreint, de limite f.

On dispose à cet effet de deux théorèmes, le premier provenant de votre cours de MPSI :

Théorème (Approximation uniforme par des fonctions en escalier)

Toute fonction continue par morceaux f sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme de fonctions en escalier.

X.8

Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.

X.9

Démonstration

Non exigible (admise). □

Conservation de régularité par convergence uniforme

Nous avons vu que la continuité passait à la limite uniforme. Le théorème de Weierstrass montre qu'on ne peut pas espérer conserver une régularité plus forte (dérivabilité à l'ordre k, classe $\mathcal{C}^k$, où $k \geqslant 1$, ou classe $\mathcal{C}^\infty$), puisque toutes les fonctions polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

X.g

4. Séries de fonctions

4.1. Généralités

On considère ici une suite de fonctions (u_n) de A dans E. La *série de fonctions* $\sum u_n$ de terme général correspond à la suite de fonctions (S_n), où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

S_n étant appelée *somme partielle* d'ordre (ou d'indice) n de la série de fonctions $\sum u_k$.

Définition (Convergence simple, uniforme, d'une série de fonctions)

La *convergence simple* (resp. la *convergence uniforme*) de la série de fonctions $\sum u_n$, est la convergence simple (resp. uniforme) de la suite (S_n) des sommes partielles.
En cas de convergence simple, on peut définir la *somme* S de cette série de fonctions, notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, définie par

$$\forall x \in A, \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)(x) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

et le *reste* R_n d'ordre (ou d'indice) n, noté $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, défini par

$$\forall x \in A, \quad R_n(x) \overset{def}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

X.iii

Ainsi, en cas de convergence simple, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k = S_n + R_n$$

Supposons que $\sum u_n$ converge simplement. Cette série de fonctions converge uniformément si et seulement si la suite de ses restes converge *uniformément* vers 0.

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement (resp. uniformément), alors le terme général u_n converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle lorsque n tend vers l'infini. Cette condition nécessaire de convergence de $\sum u_n$ n'est évidemment pas suffisante, elle sert le plus souvent à donner une condition suffisante de divergence (la *divergence grossière*).

4.2. Convergence normale d'une série de fonctions

Dans le cas des séries de fonctions, on peut définir un nouveau mode de convergence, qui entraîne la convergence uniforme, et dont l'étude nous ramène au cas des séries numériques :

Définition (Convergence normale)

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge normalement* si la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.
Plus généralement, pour toute partie B de A, on dit que $\sum u_n$ *converge normalement sur* B si la série numérique $\sum \|u_n\|_{\infty,B}$ converge.

X.iv

Bien sûr, la convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point, et donc la convergence simple.

Comment montrer la convergence normale en pratique ?

Pour montrer que $\sum u_n$ est normalement convergente, il n'est pas nécessaire de calculer explicitement les $\|u_n\|_\infty$ (ce qui pourrait s'avérer ardu) : il suffit de trouver une *suite majorante* (α_n) de $(\|u_n\|_\infty)$, *i.e.* telle que $\|u_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle que $\sum \alpha_n$ converge.

X.h

Exemple (Convergence normale)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction

$$u_n \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(n^2x+x^2)e^{-n(x+\ln(1+x))}}{n^2} \end{array}$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

viii

Théorème (La convergence normale implique la convergence uniforme)

On suppose que $\sum u_n$ converge normalement. Cette série de fonctions converge alors uniformément.

X.10

Démonstration

Tout d'abord, on rappelle que la convergence normale entraîne la convergence simple : la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est donc bien définie.
Reste à vérifier que la suite des restes converge uniformément vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout entier $p > n$, et tout $x \in A$:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n+1}^{p} u_k(x) \right\| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|u_k(x)\| \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|u_k\|_\infty \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty
\end{aligned}$$

En faisant tendre p vers l'infini (c'est possible par convergence simple), il vient :

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty$$

Ceci valant pour tout $x \in A$, on obtient

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty$$

d'où le résultat puisque $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini par convergence normale de $\sum u_n$.

□

On peut dire que la convergence normale sert à cela : prouver une convergence uniforme. Il n'y a pas d'autre théorème que celui-ci pour lequel la convergence normale figure parmi les hypothèses.

On peut aussi observer (en reprenant la démonstration du théorème) que, si $\sum u_n$ converge normalement, alors

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty$$

et plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty$$

Exemple (Convergence normale et fonction zêta de Riemann)

La *fonction zêta de Riemann* est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour tout nombre complexe s pour lequel la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge.
On peut montrer que l'ensemble de définition de la fonction zêta de Riemann est

$$\mathcal{D} \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 1\}$$

On peut aussi montrer que la convergence est normale sur tout $\mathcal{D}_a$, où $a > 1$ et

$$\mathcal{D}_a \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \geqslant a\}$$

ix

4.3. Convergence uniforme et série de fonctions

Le travail effectué pour les suites de fonctions s'adapte sans difficulté au cas des séries de fonctions.

Théorème (Continuité ponctuelle et convergence uniforme pour une série de fonctions)

Si les u_n sont continues en a et si $\sum u_n$ converge uniformément vers S sur un voisinage de a (relatif à A), alors S est continue en a.

X.11

Comme dit précédemment, la transmission de la continuité sous hypothèse de convergence uniforme a surtout servi à montrer une non convergence uniforme (par contraposition) pour les suites de fonctions. Cette même transmission, pour les séries de fonctions, sert avant tout à montrer la continuité de la somme.

Corollaire (Limite uniforme d'une série de fonctions continues)

Si toutes les u_n sont continues sur A, et si la convergence de $\sum u_n$ est uniforme, alors la fonction somme $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur A.

X.12

Exemple (Continuité de la fonction zêta de Riemann)

La fonction zêta de Riemann est continue sur $\mathcal{D}$ car sa restriction à tout $\mathcal{D}_a$, où $a > 1$, l'est (par convergence normale sur ce domaine d'une série de fonctions continues).

x

Exemple (Continuité de l'exponentielle matricielle)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \\ & A & \mapsto & \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \end{array}$$

est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

xi

Théorème de la double limite pour les séries de fonctions

Soit a un point adhérent à A. On suppose que

(1) $\sum u_n$ converge uniformément vers S sur A.

(2) pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a.

La série $\sum \ell_n$ est alors convergente, S admet une limite en a, et ces limites sont égales :

$$S(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n.$$

X.13

Autrement dit, sous les conditions du théorème

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Il s'agit bien encore d'une double limite, l'une d'entre elles correspondant à la considération de la somme d'une série.

Exercice (d'application) conseillé : 842

Théorème (Intégration d'une limite uniforme d'une série de fonctions sur un segment)

Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E, a un point de I. On suppose que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction S.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit

$$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad \mathfrak{S}(x) = \int_a^x S.$$

Alors $\sum U_n$ converge uniformément vers $\mathfrak{S}$ sur tout segment de I.
En particulier, si $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[a,b]} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t.$$

X.14

Théorème de dérivation d'une série de fonctions

On suppose que A est un intervalle I de $\mathbb{R}$, et que

(1) Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$.

(2) $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction S.

(3) $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction T.

La série $\sum u_n$ converge alors uniformément vers S sur tout segment de I, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = T$.

X.15

En particulier, sous les hypothèses du théorème, la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'$$

C'est pourquoi ce théorème est également appelé *théorème de dérivation terme à terme.*

Exemple (Dérivation terme à terme d'une série de fonctions)

La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{3^n}$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, de dérivée

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(2^n x)$$

xii

Exemple (Dérivation d'une série de fonctions)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \exp_A & : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \\ & & t & \mapsto & \exp(tA) \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout réel t :

$$\exp_A'(t) = A \exp_A(t) = \exp_A(t) A$$

xiii

Comme pour les suites de fonctions, ce théorème se généralise pour établir le caractère $\mathcal{C}^k$ (où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$), et calculer la dérivée k-ième (si k est fini), de la somme d'une série de fonctions.

Exemple (Dérivées successives de la fonction zêta)

La fonction zêta de Riemann est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$ car, pour tout $a > 1$, tout $k \in \mathbb{N}$ la série de fonctions de terme général

$$s \mapsto \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^s}$$

est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.
On a de plus, pour tout $s \in]1, +\infty[$, tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^s}$$

On notera en particulier que ζ est décroissante et convexe sur $]1, +\infty[$.

xiv

Beaucoup d'exercices consistent en une étude plus ou moins poussée de série de fonctions. On pourra consulter le cadre 81 de la feuille de TD.

CHAPITRE XI

Le théorème de convergence dominée et les intégrales à paramètre

Sommaire

On suppose la notion de dérivée partielle connue.
On a vu au chapitre sur les suites et séries de fonctions un théorème d'interversion entre limite et intégrale. Ce théorème s'appliquait sous des hypothèses très restrictives :

(1) La convergence devait être uniforme.
(2) La convergence avait lieu sur un segment.
(3) Les fonctions considérées étaient continues.

On aimerait

(1) Se passer d'une convergence uniforme et supposer seulement la convergence simple.
(2) Travailler sur tout type d'intervalle (non vide).
(3) Considérer une suite de fonctions intégrables [1].

On pourrait formuler l'espoir qu'une convergence simple suffise, mais il serait vite déçu, par exemple par une « bosse glissante » :

Illustration

Un des résultats les plus spectaculaires de cette année affirme qu'avec UNE hypothèse supplémentaire, dite *de domination*, pas forcément très naturelle, on peut se passer de la convergence uniforme, et l'appliquer à des fonctions intégrables sur un intervalle quelconque. C'est aussi l'un des résultats les plus puissants de cette année, en un double sens : ce théorème aura de nombreux corollaires très utiles, mais il est aussi puissant au sens où il se contente de peu (dans ses hypothèses), et donne beaucoup (dans sa conclusion).

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide.

1. On pourrait même seulement demander l'existence des intégrales impropres, mais nous avons vu que la notion pertinente était celle d'intégrabilité, lors du chapitre sur les intégrales généralisées.

1. Les théorèmes de convergence dominée, et d'intégration terme à terme

1.1. Le théorème de convergence dominée

Théorème de convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. On suppose

(1) que (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.

(2) que f est continue par morceaux.

(3) *(Hypothèse de domination)* qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \varphi.$$

La fonction f est alors intégrable sur I, et :

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f.$$

XI.1

Démonstration

Hors programme (admise). □

Bien que ce résultat soit admis, on peut noter qu'il serait immédiat d'établir l'intégrabilité de f : l'essence du théorème est la légitimité de l'interversion entre la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Hypothèse de continuité par morceaux

Dans l'énoncé, on suppose f continue par morceaux. Cependant, cette hypothèse est imposée par les limitations du programme.
Elle a été rajoutée parce que les seules intégrales auxquelles nous avons donné un sens sont celles de fonctions continues par morceaux. Dans un cadre dépassant le programme de MP, nous aurions pu nous passer de cette hypothèse de continuité par morceaux de f.

XI.a

L'hypothèse de continuité par morceaux de f n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination, qui est quant à elle cruciale :

Illustration

Exemple (Théorème de convergence dominée)

Supposons que (f_n) converge simplement vers f, que les fonctions f_n soient continues par morceaux, définies sur un segment $[a, b]$, ainsi que f. Supposons enfin qu'il existe un réel M tel que M majore chaque fonction $|f_n|$. On peut alors intervertir limite et intégrale.
Par exemple, les suites définies par

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \mathrm{sh}(t^n)\mathrm{d}t,$$

convergent vers 0.
Ces exemples très simples illustrent déjà la puissance du théorème de convergence dominée (prouvez ces résultats avec des outils de MPSI si vous n'êtes pas convaincus).
D'ailleurs, cela s'applique au cas (déjà connu) où (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$ (la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée car convergente).

i

Exercice d'assimilation conseillé : 845

Théorème de convergence dominée et changement d'intervalle d'intégration

Dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, toutes les fonctions sont intégrées sur le même intervalle I. Si l'intervalle d'intégration I_n dépend de n, il est toutefois envisageable d'appliquer le théorème de convergence dominée sur la réunion I des I_n (ou un intervalle contenant cette réunion), quitte à étendre les fonctions intégrées à cet intervalle en leur donnant la valeur 0 sur $I \setminus I_n$ (tout en vérifiant la continuité par morceaux).

XI.b

Exercice conseillé : 907

Grâce à la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction, on obtient une version à paramètre réel du théorème de convergence dominée :

Corollaire (théorème de convergence dominée, cas d'un paramètre réel)

XI.2

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une famille $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. Soit a un point de J ou une extrémité (éventuellement infinie) de J. On suppose qu'il existe une fonction f, continue par morceaux, telle que

$$\forall x \in I, \quad \lim_{\lambda \to a} f_\lambda(x) = f(x),$$

et qu'il existe $\varphi\ : I \to \mathbb{K}$ positive et intégrable telle que

$$|f_\lambda| \leqslant \varphi$$

pour λ au voisinage (relatif à J) de a (*hypothèse de domination (locale en a)*).
La fonction f est alors intégrable sur I, et

$$\lim_{\lambda \to a} \int_I f_\lambda = \int_I f.$$

Démonstration

$\square$

Cela ouvre notamment la porte à une justification de continuité d'une fonction définie par une intégrale, voir le théorème XI.4

1.2. Le théorème d'intégration terme à terme

En cherchant à adapter le théorème de convergence dominée à une série de fonctions, on peut montrer [2] que si (u_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I telle que

(1) les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ convergent simplement vers des fonctions S et T continues par morceaux sur I,

(2) la série $\sum \int_I |u_n(t)|\mathrm{d}t$ converge,

alors S est intégrable sur I et

$$\int_I S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(t)\mathrm{d}t.$$

En fait, une analyse plus fine permet d'affaiblir les hypothèses :

2. Mais c'est déjà difficile.

Théorème d'intégration terme à terme

Si (u_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que

(1) la série $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I,

(2) la série $\sum \int_I |u_n(t)| \mathrm{d}t$ converge,

alors S est intégrable sur I et

$$\int_I S(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(t) \mathrm{d}t.$$

XI.3

Démonstration

Hors programme (admise). □

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème :

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(t) \mathrm{d}t.$$

Comme précédemment, l'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |u_n|$ (qui est parfois appelée *hypothèse de sommation*).

Le fait que chaque u_n soit intégrable est contenu dans le fait que la série $\sum \int_I |u_n(t)| \mathrm{d}t$ converge.

Exercice d'entraînement conseillé : 862.

L'hypothèse demandée est assez forte : si elle n'est pas satisfaite, on pourra essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles. Ce sera souvent le cas lorsqu'on rencontrera une série de fonctions « alternée ». On pourra regarder l'exercice 918 de TD à titre d'illustration.

2. Intégrales à paramètre

2.1. Continuité d'une intégrale à paramètres

Comme nous l'avons pressenti, le théorème de convergence dominée permet de montrer la continuité d'applications définies par une intégrale, et plus précisément de la forme $x \mapsto \int_I f(x,t) \mathrm{d}t$:

Théorème (Continuité d'une intégrale à paramètre)

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose

(1) que f est continue par rapport à la première variable.

(2) que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable.

(3) *(hypothèse de domination)* qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $|f(x,.)| \leqslant \varphi$, *i.e.*

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

XI.4

Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t) \mathrm{d}t$$

est définie et continue sur A.

Démonstration

□

(1) La première hypothèse est naturelle : on veut montrer que g est continue par rapport à sa variable x, il n'est pas surprenant de demander que f le soit aussi. On peut remarquer qu'il n'y a pas *a priori* de « gain » en régularité en passant de f à g, ce qui se comprend bien si on constate que l'intégration se fait selon t et non selon x (on pourra songer au cas où $I = [0, 1]$ et où f est constante à x fixé pour se convaincre).

(2) La deuxième hypothèse est imposée par les limitations du programme, et permet surtout de s'assurer de la bonne définition de g (associée à l'hypothèse de domination).

(3) La dernière hypothèse est naturelle si on a le théorème de convergence dominée (et son extension) en tête. Ne pas oublier que l'on veut une domination uniforme en le paramètre, c'est-à-dire x dans le cas présent.

Exemple (Continuité d'une intégrale à paramètres)

Si K est un compact, et si $f : K \times [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue sur $K \times [a, b]$, alors $g : x \mapsto \int_{[a,b]} f(x, t)\mathrm{d}t$ est continue sur K.

ii

La continuité étant une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de domination par le fait que pour tout a dans A, il existe un voisinage relatif $\mathcal{V}_a$ de a dans A et une fonction φ_a positive et intégrale sur I telle que, pour tout x de $\mathcal{V}_a$, tout $t \in I$:

$$|f(x, t)| \leqslant \varphi_a(t)$$

Par exemple, dans le cas où A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit, pour conclure à la continuité de g, que l'hypothèse de domination soit satisfaite sur tout segment de A (puisque tout point de A admet un voisinage relatif de ce type dans A).

Vous avez utilisé ce genre d'intégrale à paramètre en SI : la transformée de Laplace.

Exercice classique conseillé : 911.

2.2. Dérivation d'une intégrale à paramètre

Voici sans doute les théorèmes les plus techniques de l'année :

Théorème (Dérivation d'une intégrale à paramètre)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose

(1) que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable.

(2) que, pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

(3) que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est
  - définie sur $J \times I$.
  - continue par rapport à la première variable.
  - continue par morceaux par rapport à la seconde variable.

(4) qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)| \leqslant \varphi$.

Alors
$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :
$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

XI.5

Démonstration

Observons déjà que g est bien définie grâce aux points (1) et (2).
De plus, la fonction $g_2\ : x \in J \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$ est bien définie, et est continue sur J, d'après les points (3) et (4) et le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
Il reste donc à établir que g est dérivable sur J, et que $g' = g_2$.
Soit $x \in J$ et $\delta \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \delta \in J$. On a
$$\begin{aligned} \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta} &= \frac{\int_I f(x+\delta,t)\mathrm{d}t - \int_I f(x,t)\mathrm{d}t}{\delta} \\ &= \int_I \frac{f(x+\delta,t) - f(x,t)}{\delta}\mathrm{d}t \end{aligned}$$
Or $\frac{f(x+\delta,t)-f(x,t)}{\delta}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ lorsque δ tend vers 0. Nous allons appliquer le théorème de convergence dominée dans le cas d'un paramètre réel. On a bien continuité par morceaux de $t \mapsto \frac{f(x+\delta,t)-f(x,t)}{\delta}$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur I.
De plus, puisque, à t fixé (dans I), $y \mapsto f(y,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, de dérivée $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(y,t)$, on a
$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x+\delta,t) - f(x,t)}{\delta}\right| &= \left|\int_x^{x+\delta} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,t)}{\delta}\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|\delta|}\left|\int_x^{x+\delta} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\right| \mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|\delta|}\left|\int_x^{x+\delta} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}y\right| \\ &= \varphi(t) \end{aligned}$$
Cette domination montre bien que $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta} = g_2(x)$, d'où le résultat souhaité.

$\square$

Ce théorème s'appelle aussi théorème de Leibniz, théorème de dérivation sous le signe somme, ou théorème de dérivation sous l'intégrale.

Dérivation d'une intégrale à paramètre

– Les points (1) et (2) permettent de définir la fonction g.
– Les points (3) et (4) permettent d'appliquer à $\frac{\partial f}{\partial x}$ le théorème de continuité.
– La démonstration permet en outre de faire le lien entre g et la fonction continue $x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

XI.c

Affaiblissement des hypothèses pour le théorème de Leibniz

Si on analyse la preuve, le résultat demeure si on remplace l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ pour tout $x \in J$ par la convergence de l'intégrale $\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in J$.

XI.d

Comme pour le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, en vertu du caractère local de la dérivabilité, on peut étendre le théorème XI.5 au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J.

Le théorème XI.5 admet une extension dans une autre direction, pour montrer qu'une intégrale à paramètre est de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème de dérivations successives à paramètres

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose

(1) que $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est définie sur $J \times I$

(2) l'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.)$ pour tout x de J et tout $j \in [\![0, k-1]\!]$.

(3) la continuité, pour tout $t \in I$, de $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$.

(4) la continuité par morceaux, pour tout $x \in J$, de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$.

(5) la domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$.

g est alors de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$:

$$\forall\, x \in J, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

XI.6

Démonstration

On procède bien sûr par récurrence sur k, le cas où $k = 1$ étant une conséquence du théorème de Leibniz.
Dans l'hérédité, le passage délicat consiste à justifier que si on a une domination pour tout segment de $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, .)$, alors on en a également une pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, .)$. C'est ce passage qu'on détaille : soit donc $[a, b]$ un segment inclus dans J, et soit φ une fonction intégrable sur I telle que, pour tout $x \in [a, b]$, tout $t \in I$:

$$\left|\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Soit $x \in [a, b]$. On a, pour tout $t \in I$ fixé :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \int_a^x \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(y, t) \mathrm{d}y + \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t)$$

(d'après le théorème fondamental de l'analyse). On a donc

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\right| &\leqslant \left|\int_a^x \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(y, t) \mathrm{d}y\right| + \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t)\right| \\ &\leqslant \int_a^x \left|\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(y, t)\right| \mathrm{d}y + \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t)\right| \\ &\leqslant \int_a^x \varphi(t) \mathrm{d}y + \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t)\right| \\ &= (x - a)\varphi(t) + \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t)\right| \\ &\leqslant (b - a)\varphi(t) + \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t)\right| \end{aligned}$$

Les hypothèses assurent l'intégrabilité de $t \mapsto (b - a)\varphi(t) + \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t)\right|$, d'où l'hérédité, puis le résultat.

$\square$

PC : transformée de Fourier.
SI : théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.

CHAPITRE XII

Réduction des endomorphismes

Sommaire

Ce chapitre continue à tisser les liens entre l'aspect matriciel de l'algèbre linéaire (aspect synthétique et calculatoire) et l'aspect géométrique (notions de vecteurs, droites, plans, et plus généralement espaces et sous-espace vectoriel, endomorphismes, etc.). Il faut avoir une bonne intuition de ces deux aspects, et savoir passer de l'un à l'autre.

Parmi les matrices carrées, celles pour lesquelles les calculs s'effectuent le plus simplement sont les matrices diagonales : on calcule aisément les puissances d'une matrice diagonale, et, partant, on évalue facilement tout polynôme en une telle matrice. Si une matrice carrée A est semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les calculs sur A se réduisent à des calculs sur D. Plus précisément, si $A = P^{-1}DP$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $Q(A) = P^{-1}Q(D)P$, *i.e.*

$$Q(A) = P^{-1} \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P$$

Ce transport provient du fait que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ soit un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il est donc très utile de savoir si une matrice est semblable à une matrice diagonale, *i.e.* de savoir si elle est *diagonalisable.*

Malheureusement, une matrice carrée quelconque n'est pas, en général, diagonalisable : par exemple les seules matrices nilpotentes qui sont diagonalisables sont nulles.

On cherchera donc une autre notion, beaucoup moins exigeante (et moins pratique) que la diagonalisabilité, pour se ramener à une forme de matrice facilitant malgré tout les calculs : nous nous demanderons si une matrice carrée est semblable à une matrice triangulaire supérieure, *i.e.* si elle est *trigonalisable.*

L'objet de ce chapitre, à savoir la réduction d'un endomorphisme ou une matrice (carrée), peut se résumer ainsi :

(1) On se demande s'il ou elle est diagonalisable.

(2) Si c'est le cas, on peut chercher à rendre effective cette diagonalisation (on explicite une matrice P de changement de base comme ci-dessus).

(3) Sinon, on se demande s'il ou elle est trigonalisable.

(4) Si c'est le cas, on peut chercher à rendre effective cette trigonalisation.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, on peut insister sur l'importance du corps des scalaires dans lequel on travaille. Pour un endomorphisme, ce corps est implicite, mais une matrice à coeffficients dans un corps $\mathbb{K}$ peut aussi être vu comme à coefficients dans un surcorps quelconque $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$. Par exemple, nous verrons qu'une matrice réelle n'est pas toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais que si on la voit comme une matrice complexe, alors elle est trigonalisable.

Dans ce chapitre, il faudra avoir conscience que l'on a fixé (parfois implicitement) un corps des scalaires dans lequel on travaille, et que toute notion faisant référence à un corps suppose implicitement que l'on travaille dans ce corps. Par exemple lorsque nous parlerons d'un polynôme scindé, il s'agira d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n sera un entier naturel non nul, E sera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u, v, f, g désigneront des endomorphismes de E. A et B désigneront des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Généralités

1.1. La relation de similitude matricielle

Définition (Matrices semblables) XII.i

Deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP$$

La relation « est semblable à » est une relation d'équivalence, appelée relation de *similitude (matricielle)*.

Si A et B sont semblables, alors elles sont équivalentes, mais la réciproque est fausse, même pour des matrices carrées :

Pour que A et B soient semblables, il faut qu'elles aient même rang, même trace, même déterminant [1]. On dit que le rang, la trace et le déterminant sont des *invariants de similitude*.

Un invariant de similitude a une traduction en termes d'endomorphismes : on définit cet invariant pour u comme l'invariant commun à tous ses représentants matriciels (dans une base donnée). C'est comme cela qu'on a défini la trace d'un endomorphisme par exemple.

Si $B = P^{-1}AP$, alors par une simple récurrence, ou parce que la conjugaison par P^{-1}, *i.e.* l'application $M \mapsto P^{-1}MP$, est un (auto)morphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$B^k = P^{-1}A^kP$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, et cette relation s'étend aux entiers négatifs si A (et donc B) est inversible.

Bien souvent, pour calculer une puissance k-ième d'une matrice, on cherche une matrice diagonale à laquelle elle est semblable, car ces dernières matrices ont des puissances facilement calculables. C'est le problème de la diagonalisation d'une matrice.

Si A et B sont semblables, alors, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables (et ont donc mêmes invariants de similitude). Plus précisément, si $B = P^{-1}AP$, alors

$$Q(B) = P^{-1}Q(A)P.$$

Intuitivement, la classe de similitude d'une matrice carrée (*i.e.* l'ensemble des matrices auxquelles elle est semblable) est d'autant plus « grosse » que son commutant est « petit ». Par exemple, dans le cas d'une matrice scalaire λI_n, qui est dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la classe de similitude est le singleton $\{\lambda I_n\}$.

Proposition (Caractérisation des matrices semblables (interprétation géométrique)) XII.1

Deux matrices carrées A et B de taille n sont semblables si et seulement si il existe un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension n, et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E, telles que

$$A = M_{\mathcal{B}}(u) \text{ et } B = M_{\mathcal{C}}(u)$$

1. Mais cela ne suffit pas en général.

Endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée

L'endomorphisme canoniquemement associé à A est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté par A dans la base canonique. Il arrive fréquemment que l'on identifie A et l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé, et donc que l'on parle de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$ par exemple. Le plus souvent, le contexte permet de comprendre à qui on fait référence (matrice ou endomorphisme) lorsqu'on parle de A.

XII.a

1.2. Notion de sous-espace stable, endomorphisme induit sur un sous-espace stable

Définition (Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit)

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est *stable* par u, ou que u *stabilise* F, si $u(F) \subset F$.
Dans un tel cas, on peut définir l'application

$$u_{|F}^{|F} : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

appelée *endomorphisme de F induit par u.*

XII.ii

Bien sûr, les sous-espaces triviaux $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E, et ne présentent donc que peu d'intérêt pour cette notion.

Si F est stable par u et si v désigne l'endomorphisme de F induit par u, alors :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F est stable par u^n, et l'endomorphisme de F induit par u^n n'est rien d'autre que v^n.
- Plus généralement, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $Q(u)$, et l'endomorphisme de F induit par $Q(u)$ est $Q(v)$.
- $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(u) \cap F$, $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u) \cap F$, mais cette inclusion est stricte en général.

Supposons E de dimension finie n, et soit F un sous-espace vectoriel non trivial de E, de dimension m. Soit M la matrice de u dans une base adaptée à F (*i.e.* obtenue en complétant une base de F en une base de E). Le fait que F soit stable par u se traduit par le fait que M soit triangulaire supérieure par blocs (avec deux blocs diagonaux A' et D' de tailles respectives m et $n-m$) :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline 0 & D' \end{array}\right)$$

De plus, si u est bijectif, alors l'endomorphisme qu'il induit sur F l'est aussi.

2. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Un cas de sous-espace stable à la fois simple et intéressant est celui de la droite. Dire qu'une droite vectorielle $D = \mathbb{K}x$ est stable par un endomorphisme u, c'est dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$, *i.e.* $x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Définition (Valeur propre, sous-espace propre, vecteur propre)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est *valeur propre* de u si l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif, *i.e.* si $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à 0_E.
Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ (qui est aussi $\{x \in E, u(x) = \lambda x\}$) est appelé *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre λ, et noté $E_\lambda(u)$.
Tout vecteur *non nul* de $E_\lambda(u)$ est appelé *vecteur propre* de u associé à la valeur propre λ.

XII.iii

Par définition, un vecteur propre est *non nul*. En ôtant le vecteur nul :

(1) On évite que tout scalaire soit valeur propre.

(2) On s'assure qu'à tout vecteur propre, corresponde une unique valeur propre.

En revanche, à toute valeur propre, on peut associer une infinité de vecteurs propres (si on travaille sur un corps infini).

On peut étendre la notation $E_\lambda(u)$ au cas où λ n'est pas valeur propre de u. On a alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie non nulle, alors λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$.

La notion de valeur propre intervient implicitement en SI, lorsque vous parlez de matrices d'inductance (inductance cyclique et inductance homopolaire).

Définition (Spectre)

On appelle *spectre* de l'endomorphisme u d'un espace de dimension finie non nulle, et on note $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble de ses valeurs propres.

XII.iv

On a donc, dans ce contexte :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0\}$$

En particulier, le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n (l'application $\lambda \mapsto \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est polynomiale de degré n).

De plus :

(1) Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u admet au moins une valeur propre, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

(2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et si n est impair, alors u admet au moins une valeur propre (réelle). C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

Proposition (La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe)

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de u. La somme

$$E_{\lambda_1}(u) + \cdots + E_{\lambda_p}(u)$$

est alors directe.

XII.2

Démonstration

Rappeler (sans détailler) les deux schémas de démonstration proposés précédemment.

□

Nous verrons une autre démonstration fondée sur le lemme des noyaux.

Cette proposition est présentée dans le cas où les λ_i sont supposées être des valeurs propres, mais on peut l'étendre au cas de scalaires λ_i quelconques (distincts).

Corollaire (Vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes)

Toute famille de vecteurs propres pour u associés à des valeurs propres distinctes est libre.

XII.3

Démonstration

□

C'est un argument puissant, à avoir en tête quand on cherche à prouver la liberté d'une famille de vecteurs.

Exemple (Liberté et sous-espaces propres)

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des complexes distincts deux à deux. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on définit

$$f_k \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\lambda_k x} \end{array}.$$

La famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre, car les f_i sont des vecteurs propres de l'endomorphisme de dérivation dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, associés à des valeurs propres distinctes.

i

Exercice d'application : 921

Lemme (Stabilité et commutant)

On suppose que u et v commutent. Les sous-espaces vectoriels $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ de E sont alors stables par v.

XII.4

Démonstration

□

Proposition (Sous-espaces propres et endomorphismes qui commutent)

On suppose que les endomorphismes u et v commutent. Tout sous-espace propre de u est alors stable par v.

XII.5

Démonstration

□

Ce résultat *n'affirme pas* que deux endomorphismes qui commutent stabilisent les mêmes sous-espaces : nous n'avons mentionné que des sous-espaces propres.

En confondant A et l'endomorphisme canoniquement associé, on peut définir les notions de valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.

Le spectre de A est donné par

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \det(A - \lambda I_n) = 0\}.$$

Extension du corps des scalaires

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.
Attention ! Dans le cas d'une extension de corps des scalaires d'une matrice, on perd *a priori* l'interprétation géométrique : dire que $1+2i$ est valeur propre d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel n'a pas de sens, mais dire que $1+2i$ est valeur propre d'une certaine matrice représentant u dans une base en a un.

XII.b

Exemple (Spectre d'une matrice triangulaire)

Le spectre d'une matrice diagonale, et même d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), est l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

ii

L'équation $AX = \lambda X$, d'inconnues $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathbb{K}^n (= \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ est appelée *équation aux éléments propres*, et sa résolution permet de trouver les éléments propres de A. En fait, en pratique, on trouve d'abord les valeurs propres (en résolvant l'équation polynomiale $\det(A - \lambda I_n) = 0$), puis on résout l'équation aux éléments propres pour les valeurs propres trouvées.

Cette relation peut se faire matriciellement : on calcule $A - \lambda I_n$, et on cherche des relations de liaison sur les colonnes de cette matrice, ce qui nous donnera des vecteurs propres pour la valeur propre λ.

Exemple (Recherche d'éléments propres (extrait de banque CCP 2016))

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\det(A - \lambda I_3) = 1 - \lambda^3$. Le spectre de A est donc $\{1, j, j^2\}$.
Valeur propre 1 : $A - I_3$ n'est pas inversible, donc son rang vaut au plus 2. On vérifie qu'il vaut exactement 2, donc que $\dim(E_1(A)) = 1$ (d'après le théorème du rang). On constate que la somme des colonnes de $A - I_3$ est nulle, donc

$$E_1(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Cela aurait pu s'obtenir en résolvant le système $AX = X$).
Valeurs propre j et j^2 : on trouve de même

$$E_j(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{j^2}(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$$

iii

Deux matrices semblables ont même spectre (le spectre est un invariant de similitude). Bien évidemment, la réciproque est fausse :

3. Polynôme caractéristique

On suppose ici E de dimension finie n.

Définition (Polynôme caractéristique (matrice carrée))

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de M et on note χ_M le polynôme

$$\chi_M \overset{def}{=} \det(XI_n - M)$$

XII.v

C'est la définition officielle, vous rencontrerez éventuellement des ouvrages (anciens) où le polynôme caractéristique est défini comme $\det(M - XI_n)(= (-1)^n \det(XI_n - M))$.

Polynôme caractéristique (lecture facultative)

Cette définition fait parler d'une matrice dont les coefficients sont des polynômes. Ce n'est pas un réel problème, on peut construire une théorie des matrices à coefficients dans un anneau commutatif (ici, $\mathbb{K}[X]$), et on peut même dans le cas présent voir ces polynômes comme des fractions rationnelles, et donc travailler dans l'anneau des matrices carrées de taille n à coefficients dans le *corps* des fractions rationnelles.
Une autre façon de pallier ce problème consiste à transiter par la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$, puis à considérer le polynôme associé, mais cette identification entre fonction polynomiale et polynôme ne fonctionne que si le corps des coefficients est infini (ce qui est le plus souvent le cas en pratique, mais on pourrait très bien parler de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ par exemple, où p est un nombre premier : dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, le polynôme $X^p - X$ n'est pas le polynôme nul, mais la fonction polynomiale associée est la fonction nulle).

XII.c

Lemme (Polynôme caractéristique)

Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, *i.e.* deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

XII.6

Démonstration

$\square$

Définition (Polynôme caractéristique (endomorphisme))

On appelle *polynôme caractéristique* d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle et on note χ_u le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice le représentant dans une base.

XII.vi

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres.

Coefficients du polynômes caractéristique

(1) Le polynôme caractéristique χ_u est unitaire de degré n.
(2) Le coefficient de degré 0 de χ_u est $\chi_u(0)$, soit $(-1)^n \det(u)$.
(3) Le coefficient de degré $n-1$ de χ_u est $-\operatorname{tr}(u)$.

XII.d

Définition (Multiplicité d'une valeur propre)

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$. On appelle *multiplicité* de la valeur propre λ de u son ordre de multiplicité comme racine de χ_u.

XII.vii

De même, on définit classiquement les notions de valeur propre multiple, simple, double, triple, etc.

Proposition (Dimension d'un sous-espace propre et multiplicité de la valeur propre associée)

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$. La dimension de $E_\lambda(u)$ est majorée par la multiplicité de la valeur propre λ de u.

XII.7

Démonstration

Faire un raisonnement matriciel en choisissant une base adaptée à $E_\lambda(u)$.

□

Cette inégalité peut être stricte.

Multiplicité

Certains appellent la multiplicité précédemment définie la multiplicité *algébrique* de la valeur propre λ, et appellent *multiplicité géométrique* la dimension de $E_\lambda(u)$. La proposition précédente affirme alors que la multiplicité géométrique est inférieure ou égale à la multiplicité algébrique.

XII.e

Exemple (Polynôme caractéristique, multiplicité d'une valeur propre)

(1) Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est
$$\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k).$$
(2) Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par u divise χ_u.
(3) Plus généralement, si A est triangulaire par blocs, alors χ_A est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux (et ces derniers divisent donc en particulier χ_A).

iv

4. Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

L'application
$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ & P & \mapsto & P(u) \end{array}$$
est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. C'est en particulier un morphisme d'anneaux, donc son noyau est un idéal, appelé *idéal annulateur de u* (et on dit qu'un élément de cet idéal *annule* u). L'image de Δ est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$ des polynômes en u.

Il faut faire attention à la notation $P(u)(x)$, où $P \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Le seul sens raisonnable à donner à cette expression est $(P(u))(x)$, *i.e.* l'évaluation en x de l'endomorphisme $P(u)$ de E. **L'expression $P(u(x))$ n'a *a priori* aucun sens.**

Par exemple, pour tous polynômes P, Q et R tels que $R = PQ$, tout $x \in E$, on a
$$R = PQ, \text{ donc } R(u) = P(u)Q(u) \text{ puis } (R(u))(x) = P(u)(Q(u)(x)),$$
où $P(u)Q(u)$ est en fait $P(u) \circ Q(u)$.

De même, pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application
$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & P & \mapsto & P(M) \end{array}$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. C'est en particulier un morphisme d'anneaux, donc son noyau est un idéal, appelé *idéal annulateur de* M (et on dit qu'un élément de cet idéal *annule* M). Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des polynômes en M.

L'idéal annulateur est un invariant de similitude.

Lemme sur l'idéal annulateur

Si E est de dimension finie, l'idéal annulateur de u n'est pas réduit à zéro.

XII.8

Démonstration

$\square$

En dimension infinie, il se peut que l'idéal annulateur soit réduit à zéro :

Proposition (Les valeurs propres sont des racines de tout polynôme annulateur)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u(x) = \lambda x$. On a alors

$$P(u)(x) = P(\lambda)\, x$$

Par conséquent, si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.

XII.9

Démonstration

$\square$

Théorème (Lemme de décomposition des noyaux)

Si $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)).$$

XII.10

Démonstration

En supposant déjà établi le cas où $r=2$, montrer le résultat général par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$.

□

Traitons maintenant le cas où $r=2$.

Démonstration

Vérifier que $\operatorname{Ker}(P_1(u))$ et $\operatorname{Ker}(P_2(u))$ sont bien des sous-espaces vectoriels de $\ker(P(u))$.

Comme $P_1 \wedge P_2 = 1$, il existe $U_1, U_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1$$

En évaluant cette relation en u (*i.e.* en appliquant Δ), il vient :

$$U_1(u)P_1(u) + U_2(u)P_2(u) = \operatorname{Id}_E$$

En évaluant cette relation en $y \in E$, il vient

$$(\star) \quad U_1(u)(P_1(u)(y)) + U_2(u)(P_2(u)(y)) = y.$$

Analyse : supposons disposer, pour $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$, d'un couple $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker}(P_1(u)) \times \operatorname{Ker}(P_2(u))$ tel que $x = x_1 + x_2$.

En évaluant $\star$ en x_1, puis en x_2, il vient

$$x_1 = U_2(u)(P_2(u)(x_1)) \quad \text{et} \quad x_2 = U_1(u)(P_1(u)(x_2))$$

Or $x = x_1 + x_2$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} P_2(u)$, donc, nécessairement :

$$x_1 = U_2(u)P_2(u)(x) \text{ et de même } x_2 = U_1(u)P_1(u)(x)$$

Ceci donne l'unique couple susceptible de convenir.

Synthèse : pour tout $x \in \ker(P(u))$, ces formules définissent bien des éléments respectifs de $\operatorname{Ker}(P_1(u))$ et $\operatorname{Ker}(P_2(u))$, de somme x (en évaluant $\star$ en x).

□

Lemme de décomposition des noyaux et sous-espaces propres

Grâce au lemme de décomposition des noyaux, on retrouve que les sous-espaces propres sont en somme directe, car si λ et μ sont deux scalaires distincts, $X - \lambda$ et $X - \mu$ sont premiers entre eux.

XII.f

Dans la suite, on suppose E de dimension n.

Définition (Polynôme minimal)

Le *polynôme minimal* d'un endomorphisme u d'un espace de dimension finie (resp. d'une matrice carrée A) est l'unique générateur unitaire de son idéal annulateur. On le note μ_u (resp. μ_A).

XII.viii

Cette notation est assez standard, mais ne figure pas dans le programme officiel (il faudra donc la préciser dans vos copies si besoin est).

Si on note $\mathcal{I}$ l'idéal annulateur de u (ou de A), et μ son polynôme minimal, alors

$$\mathcal{I} = \mu\mathbb{K}[X] = \{\mu P,\ P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Bien sûr, pour tout polynôme annulateur P, toute racine de μ est racine de P, mais la réciproque est fausse. Le polynôme minimal d'une matrice carrée est un invariant de similitude.

Exemple (Polynôme minimal)

(1) Le polynôme minimal de u (resp. de A) est de degré 1 si et seulement si u est une homothétie (resp. une matrice scalaire).

(2) Supposons que u soit un projecteur : $u^2 = u$, donc $X^2 - X$ annule u. Les polynômes minimaux possibles pour u sont X (si $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$), $X - 1$ (si $u = \mathrm{Id}_E$), et $X^2 - X$ (si $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ ne sont pas triviaux).

(3) Le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est $(X-2)(X-3)$, mais celui de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est $(X-2)^2(X-3)$.

v

Proposition (Base de la sous-algèbre engendrée par un endomorphisme)

Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

XII.11

Démonstration

$\square$

Théorème de Cayley-Hamilton

χ_u annule u.

XII.12

Démonstration

Démonstration non exigible admise. □

Autrement dit, μ_u divise χ_u.
On a donc $\deg(\mu_A) \leqslant n$, et l'égalité a lieu si et seulement si $\mu_A = \chi_A$.

Exemple (Théorème de Cayley-Hamilton)

En taille 2, *i.e.* si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$ est un polynôme annulateur de A.
Évidemment, cette formule est fausse si $n \neq 2$, car χ_A est de degré n.

vi

5. Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

On suppose ici E de dimension finie n.

5.1. Premières définitions

Définition (Endomorphisme diagonalisable)

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est dit *diagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres, et appelée *base de diagonalisation*.

XII.ix

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.

Exemple (Diagonalisabilité)

(1) Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.
(2) Tout polynôme en un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.
(3) L'ensemble des endomorphismes diagonalisables de E est stable par multiplication par un scalaire, mais n'est en général stable ni par somme ni par composition.
(4) Le seul endomorphisme de E à la fois diagonalisable et nilpotent est $0_{\mathcal{L}(E)}$.

vii

Définition (Matrice carrée diagonalisable)

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.

XII.x

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.

Cela revient encore à dire que sa classe de similitude possède une matrice diagonale.

Si une matrice carrée est diagonalisable, alors elle est semblable à sa transposée (on remarquera notamment que cette dernière est également diagonalisable). La réciproque est fausse.

5.2. Caractérisation de diagonalisabilité par le polynôme caractéristique

Nous effectuons une première étude générale de diagonalisabilité, fondée sur des arguments dimensionnels. Notons

$$S \overset{def}{=} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

Comme cette somme est directe,

$$\dim(S) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)).$$

Notons m_λ la multiplicité (algébrique) de la valeur propre λ, et posons

$$K \overset{def}{=} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda.$$

Que mesure K ?

K est le nombre de racines de χ_u dans $\mathbb{K}$, comptées avec leur ordre de multiplicité. En quelque sorte, K mesure donc à quel point χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$: dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et si $\chi_u = X^2 + 1$, alors $K = 0$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, K est toujours égal à n.

XII.g

On sait que u est diagonalisable si et seulement si $\dim(S) = n$.

Lemme (Première obstruction de diagonalisabilité)

On a

$$\dim(S) \leqslant K,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, *i.e.*, pour toute valeur propre de u, les multiplicités algébrique et géométrique sont égales.

XII.13

Lemme (Seconde obstruction de diagonalisabilité)

On a

$$K \leqslant n,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si χ_u est scindé (sur $\mathbb{K}$).

XII.14

Ainsi :

Théorème (Caractérisation de diagonalisabilité par le polynôme caractéristique)

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

XII.15

Bien sûr, ceci se traduit matriciellement, par : A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé, et pour toute valeur propre de A, la dimension de l'espace propre associé est égale à sa multiplicité.

Caractérisation de diagonalisabilité par le polynôme caractéristique

Ainsi, u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre de u, les multiplicités géométrique et algébrique sont égales.

XII.h

Exercice d'application : 952

5.3. Caractérisation de diagonalisabilité par un polynôme annulateur

On adopte maintenant un autre point de vue pour étudier la diagonalisabilité, fondée sur le lemme des noyaux et la notion de polynôme annulateur :

Théorème (Caractérisation de diagonalisabilité par un polynôme annulateur)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est diagonalisable.

(2) Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

(3) Il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u.

XII.16

Démonstration

$\square$

Ceci se traduit matriciellement par : A est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples).

Bien sûr, cela dépend du corps dans lequel on travaille.

Ce théorème est très utile et puissant en pratique.

On se sert surtout de l'équivalence entre (1) et (3), le recours au polynôme minimal étant le plus souvent inutile.

Exercice utile conseillé : 959

Exercice illustrant la puissance de ce théorème : 964

Une des conséquences remarquables du théorème ci-dessus est la proposition suivante :

Proposition (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit)

Si F est stable par u, et si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.

XII.17

Démonstration

$\square$

On peut observer, plus finement, que le polynôme minimal d'un endomorphisme v induit par u divise le polynôme minimal de u.

Exemple (Suites récurrentes linéaires d'ordre deux)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, et Ω l'ensemble des suites complexes u telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

On a alors, en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

et donc par une récurrence immédiate

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Or $\chi_A = X^2 - \alpha X - \beta$. On reconnaît le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
Ainsi, si χ_A a deux racines distinctes a et b, alors A est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et on en déduit l'existence de scalaires λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$u_n = \lambda\, a^n + \mu\, b^n$$

On ne sait pas encore résoudre (par cette méthode matricielle) le cas où χ_A admet une unique racine, nous y reviendrons.

viii

6. Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Ici encore, E est de dimension finie n.

Définition (Endomorphisme trigonalisable)

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit *trigonalisable* s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
Une telle base est appelée *base de trigonalisation*.

XII.xi

Interprétation géométrique de la trigonalisabilité

On appelle *drapeau total* de E toute suite $(F_0, \dots, F_n)$ de sous-espaces vectoriels de E telle que $F_k \subset F_{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, et, $\dim(F_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
u est trigonalisable si et seulement si il existe un drapeau total constitué de sous-espaces stables par u.

XII.i

Définition (Matrice carrée trigonalisable)

Une matrice carrée est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

XII.xii

Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.
Évidemment, tout endomorphisme (ou toute matrice) diagonalisable est trigonalisable.
Toute matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

Théorème (Caractérisation de trigonalisabilité) XII.18

Un endomorphisme (ou une matrice carrée) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration

□

Si u est trigonalisable, et si (λ_1, r_1), …, (λ_p, r_p) sont ses différentes valeurs propres données avec leur multiplicité (algébrique), alors son polynôme caractéristique est donné par

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{r_k},$$

et on a

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{k=1}^{p} r_k \lambda_k \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{r_k}.$$

De même bien sûr pour une matrice carrée.

Corollaire (Trigonalisation des matrices complexes) XII.19

Toute matrice carrée complexe est trigonalisable.

Exemple (Matrice non trigonalisable) ix

En revanche, une matrice carrée réelle n'est pas toujours trigonalisable :

Exemple (Suites récurrentes linéaires d'ordre deux, cas non diagonalisable)

On reprend l'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. On suppose que χ_A n'a qu'une racine a. On peut écarter le cas sans intérêt où $a = 0$. On a donc $\chi_A = (X-a)^2$, donc A est semblable à une matrice B de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. La formule du binôme de Newton donne immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

et il existe donc des scalaires λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$u_n = (\lambda + \mu n)a^n$$

La réduction des matrices de taille 2 nous a donc permis de reconstituer naturellement l'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

x

7. Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

On suppose encore E de dimension finie n.

On suppose connues les notions d'endomorphisme nilpotent de l'espace vectoriel E et de matrice nilpotente, ainsi que celle d'indice de nilpotence.

On rappelle que le seul endomorphisme nilpotent et diagonalisable de E est l'endomorphisme nul.

Proposition (Caractérisation de la nilpotence)

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

XII.20

Démonstration

□

Proposition (L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E)

On suppose u nilpotent, d'indice de nilpotence m, et E de dimension n. On a $m \leqslant n$.

XII.21

Démonstration

$\square$

Proposition (Décomposition d'un endomorphisme admettant un polynôme annulateur scindé) XII.22

On suppose qu'il existe un polynôme scindé annulant u. On peut alors décomposer E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Démonstration

$\square$

Traduction matricielle : si la matrice A admet un polynôme annulateur scindé (ce qui sera toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs B, dont chaque bloc diagonal est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux.

$$B = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & \dots & & & & & & & & \\
& \ddots & \vdots & & & & & & & \\
& & \lambda_1 & & & & & & & \\
& & & \lambda_2 & \dots & & & & & \\
& & & & \ddots & \vdots & & & & \\
& & & & & \lambda_2 & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & \lambda_p & \dots & \\
& & & & & & & & \ddots & \vdots \\
& & & & & & & & & \lambda_p
\end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs remarquer que B s'écrit alors comme somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice triangulaire supérieure stricte N (nilpotente), et que D et N commutent. Cette commutation fait que l'on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de B, et donc celles de A.

Il s'agit d'une trigonalisation affinée, qui figure au programme officiel, mais elle n'est à n'employer que si une trigonalisation sommaire ne fonctionne pas.

CHAPITRE XIII

Ensembles finis, ensembles dénombrables. Familles sommables

Sommaire

La notion de famille sommable est introduite en vue de l'étude des probabilités.

Nous avons déjà donné un sens à une somme d'une infinité de nombres réels, et même d'une infinité de vecteurs (séries à valeurs dans un evn de dimension finie) ou de fonctions (séries de fonctions). Cependant, cette somme infinie était assujettie à un ordre imposé des termes dans la sommation : ces sommes étaient indexées par $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$). Nous avons considéré des sommes partielles, et étudié leur éventuelle limite.

Cela peut sembler surprenant, mais cet ordre imposé pour les termes à sommer n'est pas anodin : si on considère une série semi-convergente de nombres réels, *i.e.* une série convergente mais non absolument convergente, comme $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (de somme $\ln(2)$), un réordonnancement des termes à sommer peut changer la somme, et même la nature de la série.

Si on reprend l'exemple de la série harmonique alternée, pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)-1}}{\sigma(n)} = \lambda$$

Illustration

Bien que chaque terme n'apparaisse qu'une et une seule fois dans les sommes partielles à partir d'un certain rang, la limite obtenue est différente. Cela semble contrevenir à l'associativité et la commutativité de l'addition, mais est en fait lié à la notion de limite.

Dans certains cadres, nous souhaiterions que la valeur d'une somme infinie ne dépende pas de la façon dont nous avons numéroté ses termes : en probabilités, l'espérance d'une certaine variable aléatoire ne doit pas dépendre de la numérotation [1] des valeurs qu'elle prend.

1. Nous travaillerons toujours dans un cadre au plus dénombrable, c'est-à-dire intuitivement où nous pourrons numéroter les termes.

Cela nous conduit à la notion centrale de ce chapitre, à savoir celle de famille sommable. Avant cela, nous réviserons la combinatoire (dénombrement, ensembles finis), et nous étudierons la notion de dénombrabilité.

Sauf mention contraire, I désigne un ensemble dénombrable (*i.e.* en bijection avec $\mathbb{N}$).

1. Équipotence d'ensembles, ensembles finis, dénombrabilité

Dans cette section A et B désignent deux ensembles.

Définition (Équipotence) XIII.i

On dit que A est *équipotent à* B, ou que A est *en bijection* avec B, s'il existe une bijection de A sur B.

L'équipotence définit une relation d'équivalence (sur un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles).

On rappelle qu'un ensemble A est dit *fini* s'il est équipotent à $[\![1, n]\!]$ pour un certain entier naturel n. Dans un tel cas, cet entier n est unique et appelé *cardinal* de A. On le note $\mathrm{Card}(A)$ ou $\#A$, et même parfois $|A|$. Une partie non finie est dite *infinie*.

Si A et B sont finis, de cardinaux respectifs p et q, alors

(1) Toute partie C de A est finie, de cardinal compris entre 0 et p, ce cardinal valant p si et seulement si $C = A$.

(2) $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis, et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

En particulier, si A et B sont disjoints, alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

(3) $A \times B$ est fini, de cardinal pq.

(4) B^A est fini, de cardinal q^p.

(5) L'ensemble (noté $\mathcal{P}(A)$) des parties de A est fini, de cardinal 2^p.

(6) Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, l'ensemble des parties de A de cardinal k dans A est fini, de cardinal $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$.

Lorsque $k \notin [\![0, p]\!]$, on peut convenir que $\binom{p}{k} = 0$.

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $k \in [\![0, p]\!]$

$$2^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}, \quad \binom{p}{k} = \binom{p}{p-k} \quad \text{et} \quad \binom{p}{k} + \binom{p}{k+1} = \binom{p+1}{k+1}$$

On rappelle aussi la *formule du pion* (ce n'est pas une dénomination standard) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $p \in [\![1, n]\!]$

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

On rappelle enfin que pour une application f entre deux ensembles de même cardinal fini, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est injective.

(2) f est surjective.

(3) f est bijective.

Définition (Ensemble dénombrable) XIII.ii

Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Un ensemble est dit *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

La dénombrabilité correspond au plus petit cardinal infini, parce que $\mathbb{N}$ s'injecte dans tout ensemble infini :

Lemme (Plus petit cardinal d'un ensemble infini)

Soit X un ensemble infini. Il existe alors une injection de $\mathbb{N}$ dans X.

XIII.1

Démonstration

On construit une telle injection φ en définissant $\varphi(n)$ par récurrence sur n : on choisit x_0 dans X, et on pose $\varphi(0) = x_0$. Supposant $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ construits, on choisit x_{n+1} dans $X \setminus \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$ (cet ensemble n'est pas vide car X est infini), et on pose $\varphi(n+1) \overset{def}{=} x_{n+1}$.
La fonction φ ainsi définie est clairement une injection de $\mathbb{N}$ dans X.

$\square$

Définition (Famille finie, famille dénombrable)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'élements d'un ensemble X (ici, I n'est pas supposé dénombrable). Le *cardinal* de cette famille est le cardinal de son ensemble d'indexation I. On dit que cette famille est *finie* (resp. dénombrable) si I est de cardinal fini (resp. est dénombrable).
Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille finie (resp. dénombrable) d'ensembles, alors la réunion $\bigcup_{i\in I} X_i$ est dite *finie* (resp. dénombrable).
Une union d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est dite *disjointe* si pour tous i et j distincts dans I, X_i et X_j sont disjoints.

XIII.iii

Il y a une ambiguïté dans l'expression « union finie » : on parle d'union finie pour $\bigcup_{i\in I} X_i$ lorsque I est fini, mais l'ensemble $\bigcup_{i\in I} X_i$ n'en est pas nécessairement pour autant fini. Par exemple l'union $\bigcup_{i\in [\![1,2]\!]}(\mathbb{N}\times\{i\})$ est finie, mais l'ensemble résultant est infini. On lèvera l'ambiguïté grâce au contexte.

Lemme (Un ensemble infini d'entiers est dénombrable)

Soit X une partie infinie de $\mathbb{N}$. L'ensemble X est alors dénombrable.

XIII.2

Démonstration

On peut utiliser le lemme de Cantor-Bernstein et le lemme précédent.
Si on veut éviter le recours à Cantor-Bernstein, on pose $\varphi(0) = \min(X)$, puis, supposant $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ construits,

$$\varphi(n+1) \overset{def}{=} \min X \setminus \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$$

et on vérifie que φ est bijective.

$\square$

Proposition (Caractérisation des ensembles au plus dénombrables)

Un ensemble Ω est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, si et seulement si il existe une injection de Ω dans $\mathbb{N}$.

XIII.3

Démonstration

Le sens direct est évident par définition d'un ensemble fini et d'un ensemble dénombrable. Le sens indirect est une conséquence directe du lemme.

□

Plus généralement, un ensemble X est fini ou dénombrable s'il est en bijection avec une partie d'un ensemble dénombrable fixé Ω, *i.e.* il existe une injection de X dans Ω.

Exemple (Ensembles dénombrables)

Les ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais pas $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (qui s'identifie à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

i

Ensembles infinis d'entiers naturels et extractrices

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. Ainsi, se donner une extractrice revient à se donner une partie infinie de $\mathbb{N}$ (correspondant à l'image de l'extractrice).

XIII.a

Proposition (Opérations sur les ensembles dénombrables)

(1) Un produit cartésien fini (indexé par un ensemble non vide) d'ensembles dénombrables est dénombrable.

(2) Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

XIII.4

Démonstration

Non exigibles.

(1) Il suffit de le montrer pour un produit de deux ensembles dénombrables (si φ et ψ sont des bijections de A et B respectivement sur $\mathbb{N}$, alors $\Delta\ : (a,b) \mapsto (\varphi(a), \psi(b))$ est une bijection de $A \times B$ sur $\mathbb{N}^2$, et ce dernier ensemble est dénombrable), puis de procéder par récurrence.

(2) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables, où I est au plus dénombrable. Pour tout $i \in I$, soit φ_i une injection de A_i dans $\mathbb{N}$, et soit ψ une injection de I dans $\mathbb{N}$.

Supposons les A_i disjoints deux à deux ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$).

On vérifie que l'application

$$\Delta\ :\ \begin{array}{ccl} \bigcup_{i\in I} A_i & \to & \mathbb{N}^2 \\ \omega & \mapsto & (\psi(i), \varphi_i(\omega)) \text{ où } i \text{ est l'unique élément de } I \text{ tel que } \omega \in A_i \end{array}$$

est injective, donc $\bigcup_{i\in I} A_i$ est au plus dénombrable.

Pour se ramener au cas d'une union disjointe, on se ramène au cas où $I = \mathbb{N}$, puis on pose $B_0 = A_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1})$.

□

En particulier, si Ω est dénombrable, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω^k est dénombrable.

Proposition (Non dénombrabilité du corps des réels) XIII.5

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Non exigible.
On vérifie que

$$\Delta : \begin{array}{rcl} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \end{array}$$

est injective.

$\square$

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est soit vide, soit un singleton, soit équipotent à $\mathbb{R}$.

2. Familles sommables

2.1. Famille sommable de réels positifs

Définition (Famille sommable de réels positifs) XIII.iv

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est dite *sommable* si l'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{i\in F} u_i$, où F décrit l'ensemble des parties finies de I, est majoré. Dans ce cas, la *somme* de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$. Dans tous les cas, la somme est notée $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$.

Pour harmoniser les notions, on conviendra qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs indexée par un ensemble fini I est sommable, et que sa somme vaut $\sum_{i\in I} u_i$ (nulle dans le cas où I est vide).

Proposition (Famille sommable de réels positifs) XIII.6

Soit $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs

(1) Si $v_i \leqslant u_i$ pour tout $i \in I$, alors $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, et
$$\sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

(2) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $(au_i)_{i\in I}$ est sommable, et
$$\sum_{i\in I} au_i = a\sum_{i\in I} u_i$$

(3) Si $(v_i)_{i\in I}$ est également sommable, alors $(u_i+v_i)_{i\in I}$ est sommable, et
$$\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$$

Démonstration

(1) Supposons $v_i \leqslant u_i$ pour tout $i \in I$. Pour toute partie finie F de I, on a :

$$\sum_{i\in F} v_i \leqslant \sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

donc $\sum_{i\in I} u_i$ est un majorant de $\{\sum_{i\in F} v_i, F \subset I \text{ et F est fini }\}$, d'où la sommabilité de $(v_i)_{i\in I}$, et, par définition de la borne supérieure, le fait que

$$\sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

(2) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour toute partie finie F de I, on a

$$\sum_{i\in F} au_i = a\sum_{i\in F} u_i \leqslant a\sum_{i\in I} u_i$$

d'où la sommabilité de $(au_i)_{i\in I}$, et le fait que

$$\sum_{i\in I} au_i \leqslant a\sum_{i\in I} u_i$$

Pour l'inégalité en sens inverse, on écarte le cas évident où $a = 0$, puis on applique le résultat que l'on vient d'établir à $\frac{1}{a}$ et $(au_i)_{i\in I}$.

(3) On suppose $(v_i)_{i\in I}$ sommable. Pour toute partie finie F de I, on a

$$\sum_{i\in F}(u_i+v_i) = \sum_{i\in F} u_i + \sum_{i\in F} v_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$$

d'où la sommabilité de $(u_i+v_i)_{i\in I}$ et le fait que

$$\sum_{i\in I}(u_i+v_i) \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$$

Montrons l'inégalité en sens inverse. Considérons des parties finies F et G de I. On a

$$\sum_{i\in F} u_i + \sum_{i\in G} v_i \leqslant \sum_{i\in F\cup G} u_i + \sum_{i\in F\cup G} v_i = \sum_{i\in F\cup G}(u_i+v_i) \leqslant \sum_{i\in I}(u_i+v_i)$$

donc, pour G partie finie de I fixée, on a, pour toute partie finie F de I :

$$\sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i+v_i) - \sum_{i\in G} v_i$$

d'où

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i+v_i) - \sum_{i\in G} v_i$$

puis

$$\sum_{i\in G} v_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i+v_i) - \sum_{i\in I} u_i$$

puis, ceci valant pour toute partie finie G de I :

$$\sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i+v_i) - \sum_{i\in I} u_i$$

ce qui prouve l'inégalité voulue.

□

Théorème de sommation par paquets, cas réel positif

Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition [a] de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

(2) La série $\sum\Big(\sum_{i\in I_n} u_i\Big)$ converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} u_i\Big).$$

a. Ce qui signifie ici que I est l'union disjointe des termes de cette famille.

XIII.7

Démonstration

Hors programme (admise)

□

Exercice d'application : 1106.

2.2. Famille sommable de nombres complexes

On rappelle, étant donné un réel α, que sa partie positive α^+ vaut $\max(\alpha, 0)$, et que sa partie négative α^- vaut $\max(-\alpha, 0)$ (et que cette partie négative est donc positive), de sorte que

$$\alpha^- = \max(-\alpha, 0) = -\min(\alpha, 0), \quad \alpha = \alpha^+ - \alpha^- \quad \text{et} \quad |\alpha| = \alpha^+ + \alpha^-$$

Définition (Famille sommable de nombres réels)

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels est dite *sommable* si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.
Dans ce cas, la *somme* de $(u_i)_{i\in I}$ est notée $\sum_{i\in I} u_i$, et vaut

$$\sum_{i\in I} u_i \overset{def}{=} \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$

XIII.v

Démonstration

Justification de sommabilité de $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$:

□

Définition (Famille sommable de nombres complexes)

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est *sommable* si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.
Dans ce cas, la *somme* de $(u_i)_{i\in I}$ est notée $\sum_{i\in I} u_i$, et vaut

$$\sum_{j\in I} u_j \overset{def}{=} \sum_{j\in I} \mathrm{Re}(u_j) + i\sum_{j\in I} \mathrm{Im}(u_j)$$

XIII.vi

Démonstration

Justification de sommabilité de $(\mathrm{Re}(u_j))_{j\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_j))_{j\in I}$:

□

Bien sûr, toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

Proposition (Lien entre la sommabilité et la convergence absolue)

Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est *absolument* convergente. En cas de sommabilité, on a de plus :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$$

XIII.8

Démonstration

□

Proposition (Permutation de l'ensemble des indices dans une famille sommable)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, et $\sigma\ : I \to I$ une permutation de I.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable, et les sommes sont égales le cas échéant.

XIII.9

Démonstration

Non exigible.

□

Proposition (Linéarité de la somme pour les familles sommables) XIII.10

Notons Ω l'ensemble des familles sommables de nombres complexes indexées par I. Ω est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et l'application

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (u_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} u_i \end{array}$$

est une forme linéaire.

Démonstration

De la structure d'espace vectoriel de Ω :
Ω est une partie de $\mathbb{C}^I$, comprenant son vecteur nul. De plus, pour tout $((u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I}) \in \Omega^2$, et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, on a, pour tout $i \in I$:

$$|\lambda u_i + \mu v_i| \leqslant |\lambda||u_i| + |\mu||v_i|$$

D'après la proposition XIII.6, la famille $(|\lambda||u_i| + |\mu||v_i|)_{i\in I}$ est sommable, et donc, d'après la même proposition, $(|\lambda u_i + \mu v_i|)_{i\in I}$ l'est aussi. Ω est stable par combinaisons linéaires, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$.

$\square$

Démonstration

De la linéarité de S, cas des familles sommables réelles. Soit $((u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I}) \in \Omega^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$ revient par définition à montrer que

$$\sum_{i\in I}(u_i + v_i)^+ - \sum_{i\in I}(u_i + v_i)^- = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- + \sum_{i\in I} v_i^+ - \sum_{i\in I} v_i^-$$

Or on observe que, pour tout $i \in I$

$$(u_i + v_i)^+ + u_i^- + v_i^- = u_i^+ + v_i^+ + (u_i + v_i)^-,$$

et donc (d'après le cas déjà traité des familles sommables de réels positifs) que

$$\sum_{i\in I}(u_i + v_i)^+ + \sum_{i\in I} v_i^- + \sum_{i\in I} u_i^- = \sum_{i\in I} u_i^+ + \sum_{i\in I} v_i^+ + \sum_{i\in I}(u_i + v_i)^-$$

soit le résultat voulu.
Le fait que $S(\lambda(u_i)_{i\in I}) = \lambda S((u_i)_{i\in I})$ est évident, en distinguant les cas selon le signe de λ.

$\square$

Démonstration

De la linéarité de S, cas des familles sommables complexes. Soit $((u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I}) \in \Omega^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Grâce à la $\mathbb{R}$-linéarité de S, on montre aisément que $S((u_i)_{i\in I} + (v_i)_{i\in I}) = S((u_i)_{i\in I}) + S((v_i)_{i\in I})$, et que $S(\lambda(u_i)_{i\in I}) = \lambda S((u_i)_{i\in I})$ si λ est réel.
On montre sans problème que $S(i(u_j)_{j\in I}) = iS((u_j)_{j\in I})$, ce qui achève la preuve de linéarité dans le cas complexe.

$\square$

On aurait aussi pu utiliser une extension de la proposition XIII.9 pour nous ramener au cas où $I = \mathbb{N}$, et donc au cas des séries numériques (déjà connu), grâce à XIII.8.

Théorème de sommation par paquets, cas complexe

Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

(2) La série $\sum\Big(\sum_{i\in I_n}|u_i|\Big)$ converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n}u_i\Big).$$

XIII.11

Démonstration

Hors programme (admise). □

Théorème de sommation par paquets, cas complexe

Il faut faire attention à cette caractérisation de sommabilité par paquets. En effet, il se peut que pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ soit sommable, et que la série $\sum\Big(\sum_{i\in I_n}u_i\Big)$ converge absolument, sans que la famille $(u_i)_{i\in I}$ soit sommable.

XIII.b

En pratique, on vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$.

3. Applications des familles sommables

3.1. Séries doubles

Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on peut s'intéresser à la sommabilité d'une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}^2$ (ce que l'on appelle une *série double*).

Proposition (Théorème de Fubini, cas réel positif)

La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum_m a_{m,n}$ converge et la série $\sum\Big(\sum_{m=0}^{+\infty}a_{m,n}\Big)$ converge. Si tel est le cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{+\infty}a_{m,n}\Big)=\sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{m,n}\Big).$$

XIII.12

Démonstration

□

Exercice d'application intéressant : 1107.

Proposition (Théorème de Fubini, cas complexe))

La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum_m a_{m,n}$ converge *absolument* et la série $\sum_n \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right)$ converge. Si tel est le cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$

XIII.13

Démonstration

□

En pratique, on vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Pour chaque théorème de Fubini, on a bien sûr une version où on somme d'abord sur n puis sur m, et les deux sommes doubles sont (en cas de sommabilité) la somme de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Lemme (Produit de termes de familles sommables)

On considère deux familles sommables $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, et on pose, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$:

$$w_{i,j} = u_i v_j$$

La famille $(w_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est alors sommable, et

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} w_{i,j} = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} v_j\right).$$

XIII.14

Démonstration

□

Exercice d'application : 1108.

3.2. Produit de Cauchy

Définition (Produit de Cauchy de deux séries)

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries d'éléments d'une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. On appelle *produit de Cauchy* de ces séries la série $\sum c_n$, dont le terme général est défini par

$$c_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

XIII.vii

On a aussi

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=n} a_i b_j$$

Théorème (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes)

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergent, et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

XIII.15

Démonstration

Cas des séries numériques :

□

En fait, les notions d'absolue convergence et de produit de Cauchy ont un sens dans le cadre général des $\mathbb{K}$-algèbres normées de dimension finie : l'énoncé du théorème ci-dessus a un sens dans ce cadre étendu, et il se trouve qu'il reste vrai.

Démonstration

Considérons deux séries absolument convergentes $\sum a_n$ et $\sum b_n$ d'une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ \alpha_n = \|a_n\|,\ \beta_n = \|b_n\| \quad \text{et} \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \|c_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \|b_{n-k}\| = \gamma_n$$

Or $\sum \gamma_n$ est convergente d'après le cas scalaire déjà établi, donc $\sum c_n$ est absolument convergente.
Posons $C_n = [\![0, n]\!]^2$ et $T_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i + j \leqslant n\}$. On a

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) - \sum_{k=0}^{n} c_k \right\| &= \left\| \sum_{(i,j)\in C_n} a_i b_j - \sum_{(i,j)\in T_n} a_i b_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{(i,j)\in C_n \setminus T_n} a_i b_j \right\| \\
&\leqslant \sum_{(i,j)\in C_n \setminus T_n} \|a_i b_j\| \\
&\leqslant \sum_{(i,j)\in C_n \setminus T_n} \alpha_i \beta_j \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \beta_j\right) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_k
\end{aligned}$$

or cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini d'après le cas scalaire, d'où le résultat.

□

Illustration

Je ne sais pas si cette extension de ce théorème à ce cadre général est au programme de MP. En tout état de cause, c'est un résultat intéressant, dont on pourra *a priori* vous demander la démonstration dans un sujet de concours.

Produit de Cauchy

Le produit de Cauchy de séries convergentes n'est pas toujours convergent : en prenant $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, mais pas leur produit de Cauchy.

XIII.c

Cependant, le produit de Cauchy d'une série convergente et d'une série absolument convergente est convergent (c'est le *théorème de Mertens*).

CHAPITRE XIV

Séries entières

Sommaire

Une série entière est une série de fonctions $\sum u_n$ très particulière : pour chaque n, il existe un nombre complexe a_n tel que u_n soit l'application $z \mapsto a_n z^n$.

Comme on peut s'y attendre, l'étude des propriétés de la somme sera grandement simplifiée dans ce cadre restreint. Le domaine de définition de cette somme [1] retiendra particulièrement notre attention.

On peut se demander si une fonction donnée f, définie au voisinage de 0, coïncide avec la somme d'une série entière au voisinage de 0. Nous verrons qu'il est nécessaire, mais non suffisant, que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. De plus, nous verrons que la série entière ne peut être que $\sum x \mapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, et l'étude de la possibilité d'un tel développement répondra donc à une question que beaucoup d'entre vous se sont sûrement posée : peut-on faire un « développement limité d'ordre infini », et cela nous donne-t-il bien f ?

On rappelle que la série géométrique $\sum q^n$ (où $q \in \mathbb{C}$) converge si et seulement si $|q| < 1$, et qu'alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Pour clarifier les démonstrations du cours, on introduit, étant donnée une suite complexe $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la notation

$$\mathcal{B}_a \stackrel{def}{=} \{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

Cette notation n'a rien de standard, et n'a d'usage qu'au sein du présent cours.

1. Généralités

1.1. Définition, rayon de convergence

Définition (Série entière) XIV.i

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On appelle *série entière* associée à a la série de fonctions $\sum u_n$, où, pour tout n, u_n est la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n$.
Par convention, on écrira abusivement $\sum a_n z^n$ cette série de fonctions.

La somme $S\ : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de cette série est définie sur une partie de $\mathbb{C}$, non vide puisqu'elle comprend 0.

On conserve ces notations dans le reste de ce chapitre (sauf mention contraire).

On observe que si z_0 et z_1 ont même module, alors les séries $\sum a_n z_0^n$ et $\sum a_n z_1^n$ n'ont pas nécessairement même nature, mais qu'en revanche la convergence absolue de l'une équivaut (trivialement) à celle de l'autre.

1. Ou plutôt son intérieur, qui sera un disque ouvert centré en 0 (de rayon éventuellement « infini »).

En fait, on a une propriété plus intéressante, qui permettra de définir la notion de rayon de convergence :

Lemme d'Abel

Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

XIV.1

Démonstration

$\square$

Définition (Rayon de convergence d'une série entière)

On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément R_a de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R_a \overset{def}{=} \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

On appelle *disque ouvert de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$, et on note D_a, le disque ouvert centré en 0 de rayon R_a :

$$D_a \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C}, |z| < R_a\}.$$

L'intervalle $]-R_a, R_a[$ est appelé *intervalle ouvert de convergence*.

XIV.ii

Avec la définition donnée en préambule, $R_a = \sup(\mathcal{B}_a)$.
Nous noterons R le rayon de convergence, et D le disque ouvert de convergence de $\sum a_n z^n$ (si $R = +\infty$, $D = \mathbb{C}$).

Comportement en un point selon son module, notion de cercle d'incertitude

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

(1) si $|z| < R$ (*i.e.* si $z \in D$), alors il y a convergence absolue de $\sum a_n z^n$.

(2) si $|z| > R$, alors il y a divergence grossière de $\sum a_n z^n$.

(3) si $|z| = R$, on ne sait rien *a priori* de l'éventuelle convergence : une étude plus fine est en général nécessaire. Certains appellent le cercle de centre 0 et de rayon R le *cercle d'incertitude* de la série entière $\sum a_n z^n$.

On peut donc caractériser le rayon de convergence ainsi : c'est l'unique élément α de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < \alpha$, alors il y a convergence (absolue) de $\sum a_n z^n$, et, si $|z| > \alpha$, alors il y a divergence (grossière) de $\sum a_n z^n$.

XIV.a

En particulier, le domaine Ω de convergence simple de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie $D \subset \Omega \subset D'$, où $D' = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant R\}$ (c'est l'adhérence de D si et seulement si $R > 0$), chacune des inclusions pouvant être stricte (on retiendra notamment qu'il peut y avoir convergence en un point hors du disque ouvert de convergence).

Illustration

Il faut donc retenir que le rayon de convergence ne nous donne qu'une information *partielle* sur le domaine de convergence.

Diverses expressions du rayon de convergence — XIV.b

$\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$, $\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ tend vers } 0\}$, $\{r \in \mathbb{R}_+, \sum a_n r^n \text{ converge}\}$ et $\{r \in \mathbb{R}_+, \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}$ ont même borne supérieure (qui est donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$).

Exemple (Domaines de convergence simple d'une série entière) — i

(1) Pour $\sum z^n$, $R = 1$ et $\Omega = D$.
(2) Pour $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$ et $\Omega = \overline{D}$.
(3) Pour $\sum \frac{z^n}{n}$, $R = 1$ et $D \subsetneq \Omega \subsetneq \overline{D}$.

Si $R = +\infty$, on a $D = \Omega = \overline{D} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{B}_a = \mathbb{R}_+$.
Si $R = 0$, on a $D = \emptyset$ et $\Omega = D' = \{0\}$ et $\mathcal{B}_a = \{0\}$.
Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathcal{B}_a = [0, R[$ ou $\mathcal{B}_a = [0, R]$ (car si $r \in \mathcal{B}_a$, alors $[0, r] \subset \mathcal{B}_a$), les deux cas pouvant se produire :

1.2. Régularité de la somme d'une série entière

La convergence absolue en tout point du disque ouvert de convergence est une information intéressante, mais ne permet pas à elle seule d'étudier la régularité de la somme.

Proposition (Comportement dans un disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence) — XIV.2

La convergence de $\sum a_n z^n$ est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R.

Démonstration

□

Plus généralement, il y a convergence normale sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence :

Illustration

Convergence normale sur un disque fermé inclus dans le disque ouvert

La proposition précédente *ne prétend nullement qu'il y ait convergence normale sur le disque ouvert de convergence*[a] :

En fait, on montre assez facilement que s'il y a convergence normale sur le disque ouvert de convergence D, alors $\Omega = D'$ (égal à $\overline{D}$ si $R > 0$), et il y a convergence normale sur D'.

a. Un peu comme le fait d'être borné sur tout compact n'implique pas d'être borné. (si c'était le cas, toute fonction continue serait bornée ...)

XIV.c

On obtient notamment, puisque tout point de D admet un voisinage compact inclus dans D :

Corollaire (Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence)

La somme de la série entière $\sum a_n z^n$ est continue sur D.

XIV.3

L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme. On peut toutefois réfléchir à des questions de continuité en un point du cercle d'incertitude où il y a convergence. De fait, il n'y a pas toujours continuité en un tel point.

Bien sûr, dans le cas particulier où $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur D', on a $\Omega = D'$ et S est continue sur Ω.

1.3. Détermination du rayon de convergence d'une série entière

Pour déterminer le rayon de convergence, on tentera d'abord de recourir à la définition. On pourra aussi observer, en reprenant la remarque XIV.a, que si $\sum a_n z_0^n$ converge (resp. diverge), alors $|z_0| \leqslant R$ (resp. $R \leqslant |z_0|$).

Bien sûr, si on change la suite (a_n) en un nombre fini d'indices, cela ne changera rien à son rayon de convergence.

Exercice d'assimilation conseillé : 1202. La dernière question de cette exercice sera utile pour le cours.

Proposition (Séries entières et relation de domination) XIV.4

(1) On suppose que $a_n = O(b_n)$. On a alors $R_a \geqslant R_b$.

(2) On suppose que $a_n \sim b_n$. On a alors $R_a = R_b$.

Démonstration

□

Il est remarquable que, pour une fois, on ne suppose pas les suites de signe constant. C'est bien sûr lié à l'absolue convergence en tout point du disque ouvert.

On dispose aussi d'une règle assez pratique pour déterminer le rayon de convergence, mais qui n'est pas du tout un passage obligé.

Proposition (Règle de d'Alembert pour les séries entières) XIV.5

On suppose que la suite (a_n) est à termes tous non nuls à partir d'un certain rang N, et que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \geqslant N}$ tend vers $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut alors $\frac{1}{l}$ (0 dans le cas où $l = +\infty$, $+\infty$ dans le cas où $l = 0$).

Démonstration

C'est un cas particulier du critère de d'Alembert pour les séries numériques (proposition III.27 page 98). □

Comment retenir cette règle ? La « bonne » règle de d'Alembert est celle donnée dans le chapitre sur les séries numériques : en l'appliquant au cas particulier d'une série entière, on retrouve naturellement la proposition précédente.

Pour ceux qui veulent absolument retenir cette proposition, vérifier qu'elle ne donne pas de résultat aberrant, pour $\sum \frac{z^n}{n!}$ par exemple.

Exemple (Règle de d'Alembert) ii

Grâce à la règle de d'Alembert (mais aussi en revenant à la définition) :

(1) Pour tout réel α, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ admet 1 pour rayon de convergence.

(2) La série entière $\sum n!\, z^n$ est de rayon de convergence nul.

Lemme pour la dérivation d'une série entière

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

XIV.6

Démonstration

Notons $b_n = n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et, pour tout $(n, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\alpha_{\varepsilon,n} \stackrel{def}{=} (1+\varepsilon)^n a_n$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$a_n = \mathrm{O}(b_n) \quad \text{et} \quad b_n = \mathrm{O}((1+\varepsilon)^n a_n)$$

de sorte que

$$R_b \leqslant R_a \quad \text{et} \quad R_{\alpha_\varepsilon} \leqslant R_b$$

soit

$$\frac{R_a}{1+\varepsilon} \leqslant R_b \leqslant R_a$$

puis $R_a = R_b$ en faisant tendre ε vers 0.

□

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

1.4. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières

Définition (Somme et produit de Cauchy de deux séries entières)

La *somme* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière

$$\sum (a_n + b_n) z^n$$

Le *produit (de Cauchy)* de ces séries entières est la série entière $\sum c_n z^n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

XIV.iii

Proposition (Rayon de convergence de la somme et du produit de deux séries entières)

On reprend les notations de la définition ci-dessus.

(1) Le rayon de convergence R_{a+b} de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie

$$R_{a+b} \geqslant \min\{R_a, R_b\}$$

et une condition suffisante d'égalité dans cette inégalité est que $R_a \neq R_b$.

(2) Le rayon de convergence R_c de la série entière $\sum c_n z^n$ vérifie

$$R_c \geqslant \min\{R_a, R_b\}$$

(3) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

XIV.7

Démonstration

$\square$

Illustration

Même si $R_a \neq R_b$, il se peut que $R_c \neq \min\{R_a, R_b\}$:

2. Série entière d'une variable réelle

On s'intéresse ici à la possibilité ou non d'intégrer ou de dériver la somme d'une série entière, et on voit donc cette dernière comme une fonction d'une variable réelle. Pour la distinguer d'une série entière de variable complexe, nous la noterons $\sum a_n x^n$ (avec le même abus de notation que précédemment).

S est définie sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, mais aussi en R ou $-R$ dans certains cas.

Proposition (Primitivation d'une série entière)

La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ converge simplement sur $]-R, R[$, sa somme T est dérivable sur $]-R, R[$, et a pour dérivée S sur cet intervalle.

XIV.8

Démonstration

□

Nous ne disons rien de ce qu'il se passe en R et $-R$. L'étude au bord se fait au cas par cas.

Proposition (Dérivations successives d'une série entière)

La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence, et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme : pour tout $x \in]-R, R[$, tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-(p-1))a_n x^{n-p}$$

XIV.9

Démonstration

□

On a aussi :

$$\begin{aligned} S^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n \end{aligned}$$

Proposition (Retrouver les coefficients d'une série entière en dérivant)

Si $R > 0$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$$

XIV.10

Démonstration

□

Dans le contexte des séries entières (de rayon de convergence strictement positif), on peut retrouver la série entière à partir de la seule connaissance de sa somme ! Cette extraction d'information est exceptionnelle, la connaissance de la somme d'une série ne permet pas, en général, de retrouver la série de départ.

Corollaire (Obtention de la série entière à partir de sa somme lorsque R n'est pas nul)

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n, $a_n = b_n$.

XIV.11

En fait, on a un résultat plus fin et hors-programme, le principe des zéros isolés, voir l'exercice 1268.

3. Fonctions développables en série entière, développements usuels

3.1. Généralités

On peut, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de 0, se demander si elle coïncide avec la somme d'une série entière au voisinage de 0.

Définition (Fonction d'une variable complexe développable en série entière)

On dit qu'une fonction f, définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, est *développable en série entière en* 0 (ou qu'elle admet un *développement en série entière en* 0), s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ tels que

$$\forall z \in \{w \in \mathbb{C}, |w| < r\}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

XIV.iv

Exemple (Développement en série entière, variable complexe)

(1) La fonction exponentielle est développable en série entière en 0. Pour tout nombre complexe z,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(2) La fonction $f \ : z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière en 0. Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Ce dernier exemple montre au passage que le domaine de coïncidence entre la fonction et la somme de la série entière n'est pas nécessairement valable sur le domaine de définition f.

iii

Opérations sur les DSE

Être développable en série entière est une propriété robuste par opérations algébriques : si f et g admettent un DSE (version abrégée de développement en série entière (en 0)), alors $\lambda f + \mu g$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) et fg aussi [a]

a. Si en outre $f(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ admet aussi un DSE en 0, mais ce résultat est hors programme et délicat à démontrer.

XIV.d

Définition (Fonction d'une variable réelle développable en série entière)

On dit qu'une fonction f, à variable réelle, définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}$, est *développable en série entière (en 0) sur* $]-r, r[$, si $]-r, r[\subset \mathcal{V}$ et s'il existe une une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

On dit que f est *développable en série entière (en 0)*, ou que f admet un développement en série entière en 0, s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière en 0 sur $]-r, r[$.

XIV.v

Régularité d'une fonction développable en série entière

Si f admet un DSE en 0, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 [a]. Cependant, f n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition : par définition du fait d'être développable en série entière, nous n'avons de renseignement sur f qu'au voisinage de 0. Par exemple, la fonction f nulle sur $]-1, 1[$, et valant 1 sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ est développable en série entière au voisinage de 0 (et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0), mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'y est même pas continue. Au passage, on remarquera que la [b] série entière $\sum a_n x^n$ dont la somme coïncide avec f au voisinage de 0 a un rayon de convergence infini (c'est la série entière nulle).

a. La réciproque est fausse : une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 n'admet pas toujours un DSE. Voir l'exercice 1238.
b. Pourquoi au plus une série entière est-elle susceptible convenir ?

XIV.e

Exemple (Régularité par existence d'un DSE)

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ se prolonge par continuité en 0, en une fonction φ qui admet un DSE

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Cette fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 (d'ailleurs, le rayon de convergence est infini).
La fonction φ est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet, on peut soit dire qu'elle l'est au voisinage de 0 (puisque développable en série entière), et qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ (par opérations algébriques), soit observer que φ est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$.

iv

Exemple (Développement en série entière, variable réelle)

La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. En effet, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Cet exemple montre qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui admet un DSE n'est pas toujours somme d'une série entière sur $\mathbb{R}$ tout entier.

v

Intégration et primitivation d'un DSE

Si f admet un DSE, alors ses dérivées successives (définies au voisinage de 0) aussi, et leurs DSE s'obtiennent par dérivation terme à terme, et de même pour les primitives de f. Au passage, on prendra garde à la constante d'intégration quand on primitivera un DSE.

XIV.f

Exemple (Développement en série entière par primitivation)

L'exemple précédent montre que la fonction arctan est développable en série entière sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(la constante d'intégration est nulle car $\arctan(0) = 0$).

vi

Définition (Série de Taylor)

On appelle *série de Taylor* d'une fonction f de classe C^∞ sur un intervalle $]-r,r[$ (où $r > 0$), la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

XIV.vi

Proposition (DSE et série de Taylor)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. La fonction f est développable en série entière en 0 si et seulement si elle coïncide avec la somme de sa série de Taylor au voisinage de 0.

XIV.12

Démonstration

$\square$

Comment montrer qu'une fonction (de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0) est développable en série entière ?
- Assez souvent, on peut utiliser la robustesse de cette notion, par opérations algébriques, intégration, dérivation.
- La série de Taylor de f suggère également un lien entre l'existence d'un DSE pour f et les formules de Taylor : de fait, f admet un DSE en 0 si et seulement si son reste intégral R_n converge simplement vers 0 sur un voisinage de 0 :

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]-r,r[, \quad \lim_{n\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = 0$$

  Bien sûr, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet, dans certains cas, de prouver qu'une fonction admet un DSE. En revanche, la formule de Taylor-Young ne peut pas le permettre, car en général, une suite de fonctions de limites nulles en 0 ne converge pas simplement vers une fonction nulle sur un voisinage de 0.

  Cette méthode est assez technique, et à réserver aux cas délicats (sans garantie de succès).
- Nous verrons une autre méthode à garder en mémoire, la méthode de l'équation différentielle.

3.2. Exemples de développements en série entière

Voici des développements en série entière que vous devez connaître :
- La fonction exponentielle

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- Les fonctions hyperboliques

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Les fonctions circulaires

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- La fonction arctangente

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

- La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$

$$\forall x \in]-1,1], \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

- La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

  où on a utilisé la notation (abusive et non connue de tous)

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$$

  qui nous donne une formule généralisant celle du binôme de Newton [2].

  On notera que pour ce DSE, certaines valeurs de α conduisent à un domaine de validité contenant strictement $]-1,1[$.

3.3. La méthode de l'équation différentielle

Il existe une autre méthode, pour établir l'existence d'un DSE pour f, fondée sur l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy :

(1) On trouve un problème de Cauchy dont f est (l'unique) solution sur un voisinage précis de 0, mettons $]-r_0,r_0[$.

(2) On cherche une solution à ce problème de Cauchy sous forme de somme de série entière.

(3) On vérifie que la série entière $\sum a_n z^n$ trouvée a bien un rayon de convergence R strictement positif.

2. C'est d'ailleurs en fait cette généralisation qui est la véritable contribution de Newton.

(4) Par unicité de la solution à ce problème, f et la somme S de $\sum a_n z^n$ coïncident sur $]-r,r[$, où $r=\min\{r_0,R\}$, et f est donc développable en série entière en 0.

Proposition (Formule du binôme généralisée)

XIV.13

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) est développable en série entière sur $]-1,1[$, et :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Démonstration

$\square$

CHAPITRE XV

Variables aléatoires discrètes

Sommaire

Ce chapitre sur les probabilités prolonge celui de MPSI, en passant du cas fini au cas (au plus) dénombrable.

Le formalisme s'appuiera sur le langage ensembliste et les familles sommables, que je vous invite à revoir. Il est aussi conseillé de reprendre le cours sur le dénombrement.

Par variable aléatoire, nous entendrons variable aléatoire discrète.

Dans tout le chapitre, on se fixe un univers probabilisé (Ω, P).

Dans la suite, X, Y, X_1, X_2 etc. désigneront des variables aléatoires sur Ω (définitions à venir).

1. Espaces probabilisés

1.1. Notion de tribu. Probabilité sur un ensemble

Définition (Tribu) XV.i

On appelle *tribu* sur l'ensemble Ω, toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire (dans Ω) : pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(3) $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors l'union $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Un couple $(\Omega, \mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, est appelé *espace probabilisable*.
Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés *événements*.

On dit aussi parfois que les événements sont les parties *mesurables*, ou *observables*, de Ω.

Bien sûr, si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, alors $\emptyset \in \mathcal{A}$, et $\mathcal{A}$ est stable par union finie, par intersection au plus dénombrable et par différence ensembliste.

Exemple (Tribu)

(1) $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω (peu intéressante il est vrai), appelée *tribu grossière*, ou *tribu triviale*.

(2) $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée parfois *tribu discrète*. C'est souvent celle que l'on considère lorsque Ω est au plus dénombrable.

i

Définition (Événement élémentaire)

On appelle *événement élémentaire* tout singleton appartenant à $\mathcal{A}$.

XV.ii

Définition (Événement impossible, événement certain)

$\emptyset$ est appelé *événement impossible*, et Ω est appelé *événement certain*.

XV.iii

Définition (Événement contraire, conjonction et disjonction)

Si A est un événement, son événement *contraire* est son complémentaire (dans Ω). On le notera $\overline{A}$, et on le nommera « non A ».
Si A et B sont deux événements, on définit les événements « A et B » et « A ou B », correspondant respectivement à $A \cap B$ et $A \cup B$.
A et B sont dits *incompatibles* s'ils sont disjoints.

XV.iv

À ce stade, on peut voir le langage probabiliste comme un nouveau vocabulaire pour des opérations ensemblistes, proche du registre logique. D'ailleurs, l'inclusion $A \subset B$ entre deux événements pourra se lire « A implique B » dans le langage probabiliste.

Définition (Probabilité)

Une *probabilité* sur un ensemble probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application P définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que

(1) $P(\Omega) = 1$.

(2) *(σ-additivité)* Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on dit que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un *espace probabilisé*.

XV.v

Il faut bien comprendre que $(\Omega, \mathcal{A})$ admet plusieurs et même une infinité de probabilités, sauf dans le cas sans intérêt probabiliste où $\mathcal{A}$ est la tribu triviale $\{\emptyset, \Omega\}$. Le choix d'une probabilité relève de la personne qui modélise, dans ce registre probabiliste, une situation concrète. Vous n'aurez pas à effectuer cette étape de modélisation dans les épreuves de concours (du moins en maths).

Dorénavant, sauf mention contraire, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Définition (Événements négligeables, événements presque sûrs)

Un événement A est dit *négligeable* (resp. *presque sûr*) si $P(A) = 0$ (resp. $P(A) = 1$).

XV.vi

Bien sûr, $\emptyset$ est négligeable, et Ω est presque sûr, mais ce ne sont pas toujours les seuls événements de ce type.

Des événements ayant même probabilité sont dits *équiprobables*.

En admettant provisoirement certaines propriétés énoncées dans la proposition XV.2 ci-après, on a :

Proposition (Se donner une probabilité) — XV.1

Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ correspond à la donnée, via la formule

$$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$

d'une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.

Démonstration

Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ est clairement une famille sommable de réels positifs, de somme 1 (par σ-addditivité et le fait que $P(\Omega) = 1$).
Réciproquement, soit (p_ω) une famille sommable de réels positifs, de somme 1, et posons, pour tout élément A de $\mathcal{A}$:

$$P(A) \overset{def}{=} \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

On a bien $P(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.
On a aussi $P(\Omega) = 1$, et pour tout $A \subset \Omega$, $P(A) \in [0, 1]$ (car $(p_\omega)_{\omega\in A}$ est une famille de réels positifs, sous-famille de la famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs et de somme 1).
Enfin, la σ-additivité résulte du théorème de sommation par paquets (cas réel positif) : en reprenant les notations de l'énoncé de ce théorème, on prend $I = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = A_n$, et pour tout $i \in I$, $u_i = p_i$.

$\square$

Exemple (Donner une probabilité sur les événements élémentaires) — ii

(1) Soit $p \in]0, 1[$ et $s \in \mathbb{R}$. Pour que la famille $(s(1-p)^{k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ définisse une probabilité sur $\mathbb{N}^*$, il faut et il suffit que $s = p$.

(2) On ne peut pas définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ de sorte que chaque événement élémentaire soit équiprobable.

1.2. Propriétés élémentaires des probabilités

Proposition (Propriétés des probabilités)

(1) $P(\emptyset) = 0$.

(2) *(additivité finie)* Pour tous événements $A_1, \ldots, A_n$ *incompatibles deux à deux,*

$$P(\cup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

(3) Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(4) Pour tous événements A et B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(5) P est une application croissante (pour l'ordre d'inclusion dans $\mathcal{A}$ et l'ordre usuel sur $[0,1]$), *i.e.* pour tous événements A et B :

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B).$$

XV.2

Démonstration

$\square$

Ainsi, A est négligeable si et seulement si $\overline{A}$ est presque sûr.

Proposition (Sous-additivité finie)

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une famille d'événements. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante (*sous-additivité finie*) :

$$P\left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} P(A_k).$$

XV.3

Démonstration

Le point (4) de la proposition précédente permet d'établir le cas où $n = 2$, et ce dernier cas justifie aisément l'hérédité de cette propriété (initialisée sans peine pour $n = 1$).

$\square$

Exemple (Sous-additivité finie)

Grâce à la sous-additivité finie appliquée à $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$, si A, B et C sont trois événements équiprobables vérifiant $P(A \cap B \cap C) = 0$, alors $P(A) \leqslant \frac{2}{3}$.

iii

Proposition (Continuité croissante)

Si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\Big).$$

XV.4

Démonstration

On se place dans une telle situation. Posons $B_0 = A_0$ et, pout tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$$

On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n} B_i$ et que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. De plus, les B_i sont incompatibles deux à deux. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(A_n) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} P(B_i)$$

Donc $(P(A_n))$ tend vers $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(B_i)$.
Or, par σ-additivité,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} P(B_i) = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

d'où le résultat.

□

Cette proposition n'est pas sans rappeler le théorème de convergence dominée [1] (dans le cas d'une suite croissante de fonctions continues par morceaux positives, convergeant simplement vers une fonction intégrable).

En utilisant le passage au complémentaire, on en déduit immédiatement :

Proposition (Continuité décroissante)

Si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\Big).$$

XV.5

1. Ou plus précisément le théorème de convergence monotone.

Proposition (Sous-additivité)

Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

XV.6

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcup_{0\leqslant i\leqslant n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n} P(A_i) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$$

(d'après la proposition XV.3), et on conclut par continuité croissante.

□

Corollaire (Réunion d'événements négligeables)

Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

XV.7

Par passage au complémentaire, une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

Définition (Système complet d'événements)

On appelle *système complet d'événements* toute partition au plus dénombrable de Ω par des événements, c'est-à-dire toute famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, dont la réunion égale Ω.

XV.vii

Exemple (Système complet d'événements)

(1) Si les singletons sont des événements, et si Ω est au plus dénombrable, alors $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ est un système complet d'événements.

(2) (nécessite de connaître la notion de variable aléatoire) Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, alors $((X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

iv

Proposition (Formule des probabilités totales)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i).$$

XV.8

Démonstration

□

2. Probabilités conditionnelles et indépendance

2.1. Probabilités conditionnelles

On cherche souvent à déterminer des probabilités en connaissant des informations supplémentaires, par exemple la probabilité que l'on soit admissible à l'ECP sachant que l'on a eu mention très bien au Bac (et qu'on est en Spé). C'est l'objet des probabilités *conditionnelles*.

Définition (Probabilité conditionnelle)

Soit A et B deux événements. On suppose que $P(B) > 0$ (on dira alors que l'on peut *conditionner par* B). On appelle *probabilité (conditionnelle)* de A sachant B et on note $P_B(A)$ ou $P(A|B)$ le réel

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

XV.viii

Probabilité conditionnelle : approche heuristique fréquentiste

Comme l'indique la terminologie, $P(A|B)$ doit nous donner la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B s'est réalisé. Prenons le cas d'une probabilité uniforme, comme pour deux lancers d'un dé, pour lequel $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et où tous les événements élémentaires sont équiprobables. Supposons que nous cherchions la probabilité que l'on obtienne 8 ou plus en lançant deux fois un dé (événement A) sachant que l'on a obtenu au moins 4 au premier lancer (événement B). On regarde donc, dans le sous-univers $\Omega' = \{(l_1, l_2) \in [\![1, 6]\!]^2, l_1 \geqslant 4\}$ de Ω l'événement $A' =$« on a obtenu 8 ou plus », *i.e.*

$$A' = \{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

La fréquence de l'évenement A' dans l'univers Ω' est $\frac{\text{Card}(A')}{\text{Card}(\Omega')}$, soit ici $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. À y regarder de plus près, on a $A' = A \cap B$ et $\Omega' = B$, d'où la justification heuristique de cette définition dans le cas d'une probabilité uniforme.

XV.a

L'application P_B est une probabilité

On vérifie facilement (en revenant à la définition) que l'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. En revanche, la notation $P(A|B)$ ne signifie nullement que « $A|B$ » soit un événement, *i.e.* un élément de $\mathcal{A}$ (reprendre la remarque précédente pour s'en convaincre). En particulier, on ne confondra pas la probabilité que A se réalise sachant que B l'est et la probabilité que les événements A et B se réalisent.

XV.b

Soit A et B deux événements, où $P(B) > 0$. La formule (évidente)

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

permet tout d'abord d'écrire une version plus éclairante de la formule des probabilités totales, lorsque les événements ne sont pas négligeables :

Proposition (Formule des probabilités totales, version avec conditionnement)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

XV.9

Elle peut également se généraliser en :

Proposition (Formule des probabilités composées)

Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

XV.10

Démonstration

□

Exemple (Formule des probabilités composées)

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. La probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire vaut $\frac{6}{35}$.

v

Voici encore une formule algébriquement évidente, mais dont la signification ne l'est pas :

Proposition (Première formule de Bayes)

Si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

XV.11

Cette formule est intéressante dans la mesure où elle permet de « remonter le temps » : pour reprendre l'exemple du lancer de deux dés, elle nous permet de connaître la probabilité que l'on ait obtenu 4 ou plus au premier lancer sachant que l'on a obtenu 8 ou plus au total, ou, pour reprendre l'exemple de l'étudiant en Spé, la probabilité que l'on ait eu une mention très bien sachant qu'on a été admissible à l'ECP.

Cette « inversion », parfois appelée *formule de probabilité des causes*, peut aussi se généraliser à plusieurs événements :

Proposition (Seconde formule de Bayes)

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors pour tout $j \in I$:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)}$$

XV.12

Exemple (Formule de Bayes)

On compte dans une population 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois porte des lunettes, et une femme sur cinq porte des lunettes.
La probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme est de $\frac{11}{26}$.

vi

2.2. Indépendance d'événements

Définition (Couple d'événements indépendants)

Soit (A, B) un couple d'événements. On dit que (A, B) est un *couple d'événements indépendants* (ou que A et B sont *indépendants*) si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

XV.ix

Indépendance de deux événements

(1) A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et B sont indépendants.

(2) Il n'y a donc pas de lien entre indépendance et incompatibilité (aucune de ces propriétés n'entraîne l'autre). Cependant, deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un (au moins) est de probabilité nulle.

(3) Si par exemple $P(B) \neq 0$, alors l'indépendance de A et B équivaut à ce que $P(A|B) = P(A)$. Intuitivement, cela signifie que la réalisation (ou non) de B n'influe en rien sur celle de A (et réciproquement).

XV.c

On souhaite généraliser la notion d'indépendance à une famille d'événements. On propose

Définition (Indépendance mutuelle d'une famille d'événements)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une *famille d'événements (mutuellement) indépendants* (ou que les événements A_i, où i parcourt I, sont *(mutuellement) indépendants*, ou *indépendants dans leur ensemble*) si, pour toute partie finie F de I,

$$P\left(\bigcap_{i\in F} A_i\right) = \prod_{i\in F} P(A_i).$$

XV.x

Bien sûr, il n'y a rien à vérifier dans le cas où F est vide ou est un singleton.

Exemple (Indépendance (mutuelle) de trois événements) vii

A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants signifie que

(1) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2), P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3), P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, *i.e.* A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants.

(2) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Pour quatre événements A_1, A_2, A_3, A_4, il faut, pour vérifier leur indépendance mutuelle, vérifier entre autres que

$$P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_3)P(A_4)$$

Sous-famille d'une famille d'événements indépendants XV.d

Toute sous-famille d'une famille d'événements mutuellement indépendants est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Indépendance de n événements XV.e

– L'indépendance de $A_1, \dots, A_n$ **ne se caractérise pas par**

$$P\left(\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} A_i\right) = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} P(A_i).$$

En effet, cette dernière relation serait toujours vérifiée si par exemple A_n était l'événement impossible, et elle ne dirait alors rien du lien entre les autres événements. Cette dernière condition est seulement nécessaire, pas suffisante (si $n \geqslant 3$).

– L'indépendance de $A_1, \dots, A_n$ **ne se caractérise pas par** l'indépendance deux à deux des événements $A_1, \dots, A_n$. En effet, en supposant seulement cette dernière propriété, rien ne permettrait de déduire la relation pourtant légitime en cas d'indépendance

$$P\left(\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} A_i\right) = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} P(A_i).$$

L'indépendance deux à deux est une condition nécessaire non suffisante de l'indépendance (mutuelle) de $A_1, \dots, A_n$.

Dans le cas où les A_i ont des probabilités toutes non nulles, on peut réexprimer l'indépendance en termes de probabilités conditionnelles, se traduisant informellement par : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la réalisation de tout ou partie des autres événements A_j ($j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$) n'influe en rien sur celle de A_i.

Exemple (Indépendance et boule tricolore)

On considère une urne contenant quatre boules : une rouge, une verte, une bleue et une tricolore (bleue, verte, rouge). On tire une boule, on note Ω l'univers $\{bleue, verte, rouge, tricolore\}$, et on considère les événements « la boule tirée contient du rouge », « la boule tirée contient du vert », et « la boule tirée contient du bleu » notés respectivement R, V et B. On peut vérifier que ces événements sont indépendants deux à deux mais pas dans leur ensemble.

viii

3. Variables aléatoires discrètes

3.1. Variables aléatoires

Définition (Variable aléatoire discrète)

Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une *variable aléatoire discrète* (en abrégé une v.a. ou une v.a.d.) définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que

(1) L'image $X(\Omega)$ de X soit finie ou dénombrable.
(2) Pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$. L'événement $X^{-1}(\{x\})$ sera noté $(X = x)$.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite *réelle*.

XV.xi

Exemple (Variable aléatoire discrète)

(1) Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors $X : \Omega \to E$ est une v.a.d. si et seulement si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
(2) Si $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, alors $X : \Omega \to E$ est une v.a.d. si et seulement si X est constante.

ix

On a

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$$

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. X confère naturellement à E une structure d'espace probabilisé :

Définition (Loi d'une variable aléatoire)

Pour tout $x \in X(\Omega)$, notons
$$p_x = P(X^{-1}(\{x\})) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}).$$
La famille $(p_x)_{x\in X(\Omega)}$ définit une probabilité P_X sur $X(\Omega)$, appelée *loi de la variable aléatoire* X. On dit alors que X *suit* la loi P_X.
En fait, on étend sans difficulté cette probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$, en posant, pour toute partie A de E
$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\} = P_X(A \cap X(\Omega))$$
On notera $X \sim Y$ lorsque les v.a. X et Y suivent la même loi, et $X \sim \mathcal{L}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{L}$ lorsque X suit la loi $\mathcal{L}$.

XV.xii

Si $X\ : \Omega \to E$ est une v.a., et si A est une partie de E, alors on vérifie que $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, *i.e.* que $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$ est un événement, et on le note $(X \in A)$:

Dans le cas particulier où X est une v.a. réelle, pour tout réel x, nous noterons respectivement $(X \geqslant x)$, $(X \leqslant x)$, $(X > x)$ et $(X < x)$ les événements
$$X^{-1}([x, +\infty[),\ X^{-1}(]-\infty, x]),\ X^{-1}(]x, +\infty[),\ X^{-1}(]-\infty, x[)$$
c'est-à-dire
$$\{\omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant x\},\ \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\},\ \{\omega \in \Omega, X(\omega) > x\},\ \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\}.$$

Deux v.a. de même loi ne sont pas toujours égales

Si on modélise le lancer de deux dés équilibrés en travaillant sur $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, par des variables aléatoires $X\ : \Omega \to [\![1, 6]\!]$ et $Y\ : \Omega \to [\![1, 6]\!]$, alors ces deux v.a. suivent la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, mais ne sont pas égales pour autant.

XV.f

En fait, la loi d'une v.a. X est une information intermédiaire entre la donnée de la v.a. (*i.e.* de l'application $X\ : \Omega \to E$), et l'image de la v.a., qui ne nous donne que les valeurs prises par X.
D'un point de vue probabiliste, ces deux informations sont peu pertinentes : la première donne une importance trop grande à Ω, que l'on n'explicite en pratique jamais, la seconde ne nous permet pas de savoir la probabilité avec laquelle on atteint telle ou telle valeur, et est donc trop imprécise.
La donnée pertinente consiste en la donnée conjointe :

(1) de l'ensemble des valeurs prises par X.
(2) pour chacune de ces valeurs x, de la *mesure* de l'ensemble de ses antécédents, autrement dit de $P(X = x)$.

Deux v.a. de même loi n'ont pas toujours même image

Deux v.a. de même loi n'ont pas toujours même image, puisque l'une, mettons X, peut prendre une valeur x que l'autre ne prend pas, et telle que $X^{-1}(\{x\})$ soit négligeable.

XV.g

On utilisera sans trop de considérations théoriques les notations $X + Y$ (si une addition est définie dans E), XY (si une multiplication est définie dans E), $f(X)$ (où f est une fonction de source E), et même $X = Y$ (qui est l'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = Y(\omega)\}$).

3.2. Variables aléatoires indépendantes

On se fixe ici deux variables aléatoires X et Y, sur E et F respectivement.

Définition (Loi conjointe, lois marginales de (X,Y))

On appelle *loi conjointe* de (X,Y) et on note $P_{(X,Y)}$ l'application donnée par :

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad P_{(X,Y)}(x,y) = P(X = x \text{ et } Y = y).$$

P_X et P_Y sont appelées *lois marginales* de (X,Y).

XV.xiii

Supposons E et F de cardinaux respectifs m et n. $P_{(X,Y)}$ est alors donné par les nm scalaires

$$p_{i,j} \overset{def}{=} P((X,Y) = (x_i, y_j)),$$

que l'on peut fournir dans un tableau

$X\backslash Y$	y_1	$\dots$	y_n
x_1	$p_{1,1}$	$\dots$	$p_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	$p_{m,1}$	$\dots$	$p_{m,n}$

Tous les coefficients sont positifs ou nuls, et leur somme vaut 1.

La loi marginale de X (resp. Y) est ici obtenue en sommant les colonnes (resp. les lignes) de ce tableau.

Il faut noter qu'*a priori*, les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe (elles nous donnent $m+n$ équations pour ces mn inconnues).

Bien entendu, la donnée de ce tableau permet de trouver la valeur de $P(X \in A \text{ et } Y \in B)$, pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$.

Définition (Loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$.)

Soit $x \in X(\Omega)$. On suppose $P(X=x) > 0$. On appelle *loi conditionnelle de Y sachant* $X = x$ l'application donnée par :

$$P(Y = y | X = x) = \frac{P(X = x \text{ et } Y = y)}{P(X = x)} = \frac{P_{(X,Y)}(x,y)}{P_X(x)}.$$

XV.xiv

Encore une fois, le tableau précédent fournit facilement ces lois conditionnelles.

On étend aisément cette définition de loi conditionnelle au conditionnement par $X > x$ ou autres inégalités.

Exemple (Loi conjointe)

On tire avec remise deux fois un jeton, dans une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. On note X et Y les résultats des premier et second tirages respectivement, et $Z = \max(X,Y)$.

La loi conjointe de (X,Y) est donnée par :

La loi conjointe de (X,Z) est donnée par :

x

On étend sans difficulté ces notions au cas d'un n-uplet de variables aléatoires.

Définition (Couple de variables aléatoires indépendantes)

On dit que les variables X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$P((X,Y) = (x,y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

XV.xv

X et Y sont indépendants si et seulement si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$,

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Lorsque X et Y sont indépendantes, les lois marginales permettent de retrouver la loi conjointe.

Définition (Variables aléatoires mutuellement indépendantes)

On dit que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont *mutuellement indépendantes*, ou que la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est une *famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes*, si pour tout $(x_i) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

XV.xvi

Proposition (Variables mutuellement indépendantes)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Pour tout $(A_1, \ldots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

XV.13

Démonstration

Soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, F une partie finie de $[\![1, n]\!]$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $B_i = A_i$ si $i \in F$ et $B_i = X_i(\Omega)$ si $i \notin F$.
On vérifie alors (grâce au théorème de sommation par paquets) que la famille $(P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n))_{(x_1,\ldots,x_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n}$ est sommable, de somme $P(\bigcap_{i \in F} X_i \in A_i)$.
On vérifie de même que $(P(X_1 = x_1)\, P(X_2 = x_2)\, \ldots\, P(X_n = x_n))_{(x_1,\ldots,x_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n}$ est sommable, de somme $\prod_{i \in F} P(X_i \in A_i)$.
L'indépendance mutuelle des v.a. $X_1, \ldots, x_n$ donne ensuite le résultat voulu. $\square$

La réciproque est évidemment vraie.

Corollaire (Sous-famille d'une famille finie de v.a. indépendantes)

Toute sous-famille d'une famille finie $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes est une famille de variables aléatoires indépendantes.

XV.14

Démonstration

$\square$

Définition (Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes) XV.xvii

On dit que les variables aléatoires X_i, où $i \in I$, sont *mutuellement indépendantes*, ou que la famille $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, si pour toute partie finie F de I, les variables aléatoires X_i, $i \in F$ le sont.
Dans le cas où toutes ces variables aléatoires sont en outre de même loi, on dira que ce sont des *variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées* (abréviation v.a.i.i.d.).

Cette définition est compatible avec la précédente grâce au corollaire.

Définitions de l'indépendance mutuelle, cas des événements et des v.a. (facultative) XV.h

La définition de l'indépendance mutuelle de $X_1, \dots, X_n$ semblait différer de celle de n événements $A_1, \dots, A_n$, en ce que l'une mentionnait chaque X_i, $i \in [\![1, n]\!]$, tandis que l'autre exigeait une propriété *pour toute partie finie F de* $[\![1, n]\!]$. Ce qui précède montre qu'en fait les deux points de vue dans ces définitions sont cohérents.
En fait, si on voulait calquer l'indépendance mutuelle des événements $A_1, \dots A_n$ sur la définition de l'indépendance mutuelle de $X_1, \dots, X_n$, il suffirait d'observer que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants si et seulement si, pour toute famille $(B_1, \dots, B_n)$ d'événements, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} B_i\right) = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} P(B_i).$$

Cela revient d'ailleurs à l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}$.

Proposition (Fonctions de variables indépendantes) XV.15

Si X et Y sont indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Démonstration

□

Ce résultat s'applique notamment au cas classique où $X = (X_1, \dots, X_p)$ et $Y = (X_{p+1}, \dots, X_n)$, et lorsque X_1, …, X_n sont mutuellement indépendantes.

Comme pour les événements, on ne confondra pas l'indépendance mutuelle et l'indépendance deux à deux.

On modélise souvent une succession d'expériences aléatoires indépendantes par une suite (finie ou non) (X_i) de variables aléatoires indépendantes. De plus, ces variables aléatoires sont souvent *identiquement distribuées*, *i.e.* de même loi : c'est le cas par exemple lorsqu'on réitère plusieurs fois la même expérience, comme lancer un dé ou tirer une boule rouge dans une urne (avec remise).

Intuitivement, l'existence d'une telle suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois fixées est claire. Le théorème suivant, admis, assure la possibilité de mathématiser une telle suite d'expériences :

Théorème d'existence d'espaces probabilisés

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une probabilité $\mathcal{L}_n$ sur un ensemble $\mathcal{E}_n$. Il existe alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n aille de Ω dans $\mathcal{E}_n$, et suive la loi $\mathcal{L}_n$.

XV.16

Démonstration

Hors programme (admise). □

3.3. Lois usuelles

On présente ici des lois usuelles.

Définition (Loi uniforme)

On dit que X suit la *loi uniforme* sur un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de cardinal n si

$$P_X(x_k) = \frac{1}{n}$$

pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

XV.xviii

Le lancer d'un dé équilibré suit une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que X suit la *loi de Bernoulli* de paramètre $p \in [0, 1]$ si elle est à valeurs dans $\{0, 1\}$, et si $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. Cette loi est notée $\mathcal{B}(p)$.

XV.xix

On note parfois q le réel $1 - p$.

La loi de Bernoulli peut être vue comme évaluant la probabilité de succès d'une expérience : il y a succès avec probabilité p (et échec avec probabilité $1 - p$).

On peut modéliser le jeu de pile ou face infini comme une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.

Exemple (Loi de Bernoulli)

Pour tout événement A inclus dans Ω, l'indicatrice de A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$ (égal à $\frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$ dans le cas particulier où Ω est fini et la probabilité sur Ω uniforme).

xi

Définition (Loi binomiale)

On dit que X suit la *loi binomiale* de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si son support est $[\![0,n]\!]$, et si, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $\mathcal{B}(n,p)$ cette loi.

XV.xx

On note parfois q le réel $1-p$.

Proposition (Somme de v.a.i.i.d. de Bernoulli)

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. La variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ suit alors la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

XV.17

Démonstration

$\square$

Le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit donc la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple (Loi binomiale)

Cette loi est aussi celle du nombre de succès lors de n tirages avec remise dans un modèle d'urnes. Plus précisément, considérons par exemple une urne dans laquelle se trouvent des boules rouges et bleues, et que l'on tire une boule rouge avec une probabilité p. Si on effectue n tirages avec remise, la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées suit la loi binomiale de paramètres n et p.

xii

Définition (Loi géométrique)

Soit p dans $]0,1[$. On dit que $X\ : \Omega \to \mathbb{N}^*$ suit la *loi géométrique* de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$, si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1} p.$$

XV.xxi

C'est la loi de la variable aléatoire donnant le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.

Proposition (Caractérisation des lois géométriques comme lois sans mémoire)

Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est *sans mémoire*, *i.e.* vérifie

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P(X > n+k | X > n) = P(X > k),$$

si et seulement si elle suit une loi géométrique.

XV.18

Démonstration

$\square$

Vous avez vu en TS une loi sans mémoire (mais elle était continue) : la loi exponentielle.

Définition (Loi de Poisson)

Soit λ dans $\mathbb{R}_+^*$. On dit que $X : \Omega \to \mathbb{N}$ suit la *loi de Poisson* de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

XV.xxii

La proposition suivante montre comment, en un certain sens, la loi binomiale « converge » vers la loi de Poisson :

Proposition (Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson)

Si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers $\lambda > 0$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P\left(X_n = k\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

XV.19

Démonstration

□

I : simulation de cette approximation.

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares

En fait, la loi de Poisson fournit une bonne modélisation du nombre d'événements rares : nombre d'accidents sur une portion de route, nombre d'erreurs typographiques dans une page, etc.
En effet, supposons que l'on étudie un phénomène vérifiant :

(1) Les observations dans des intervalles disjoints sont indépendants.

(2) La loi du nombre d'observations dans un intervalle de temps donné ne dépend que de la durée de cet intervalle.

(3) Lorsque la durée de l'intervalle d'observation tend vers 0, la probabilité d'observer deux fois au moins le phénomène est négligeable devant celle d'en observer une exactement.

On peut alors montrer que le nombre d'observations dans un intervalle de temps donné suit une loi de Poisson.

XV.i

4. Moments d'une variable aléatoire

4.1. Espérance

Définition (Espérance d'une v.a. réelle positive)

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'*espérance* de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(x\,P\,(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. On la note $\mathrm{E}(X)$, de sorte que

$$\mathrm{E}(X) \overset{def}{=} \sum_{x\in X(\Omega)} x\,P\,(X=x)$$

On dira que X *admet une espérance (finie)* si $\mathrm{E}(X) < +\infty$.

XV.xxiii

PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.

Définition (Variable aléatoire d'espérance finie)

Si X est une variable aléatoire réelle, on dira que X est d'*espérance finie*, ou que X *admet une espérance (finie)* si la famille $(x\,P\,(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'*espérance* de X, et est notée $\mathrm{E}(X)$:

$$\mathrm{E}(X) \overset{def}{=} \sum_{x\in X(\Omega)} x\,P\,(X=x)$$

La variable aléatoire X est dite *centrée* si son espérance est nulle.

XV.xxiv

Espérance et indexation

Soit $X\ :\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire prenant un nombre dénombrable de valeurs. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $X(\Omega)=\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$, et pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, si $i\neq j$, alors $u_i\neq u_j$.
La v.a. X admet une espérance finie si et seulement si la famille $(u_n\,P(X=u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, si et seulement si la série $\sum u_n\,P(X=u_n)$ est *absolument convergente*.
Si $\sum u_n\,P(X=u_n)$ est semi-convergente (*i.e.* convergente mais non absolument convergente), alors X *n'admet pas* d'espérance finie.
Du point de vue de la modélisation, c'est rassurant : l'espérance d'une variable aléatoire ne devrait pas dépendre de la manière dont on a indexé son image. Dans le cas d'une série semi-convergente, une réindexation de $X(\Omega)$ par une autre suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ peut conduire à une série divergente, ou à une série convergente mais telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\,P(X=u_n)\neq\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}\,P(X=u_{\sigma(n)})$$

XV.j

En fait, l'espérance de X ne dépend que de la loi que X suit : on aurait pu parler d'espérance d'une loi, mais ce n'est pas ce qu'a retenu l'usage.

Exemple (Espérances simples)

(1) Bien sûr, toute variable constante est d'espérance finie, égale à la valeur qu'elle prend.
(2) Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors X est d'espérance finie.
(3) Si $A\in\mathcal{A}$, alors χ_A est d'espérance finie, d'espérance $P(A)$.

xiii

Espérance, moyenne

$E(X)$ s'interprète comme la moyenne des valeurs prises par X, *pondérées* par leurs probabilités d'apparition. Dans le cas d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{x_1,\dots,x_n\}$, son espérance est donc la moyenne usuelle

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}.$$

On parle d'espérance en référence aux jeux d'argent : si X représente le gain du joueur, $E(X)$ est le gain moyen auquel il peut s'attendre, ou encore le gain que le joueur peut espérer.

XV.k

Exemple (Espérances classiques)

(1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$.
(2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.
(3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$.
(4) Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

xiv

4.2. Le théorème de transfert et autres propriétés de l'espérance

Proposition (Linéarité de l'espérance)

L'espérance est une forme linéaire, *i.e.* l'ensemble $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ des variables aléatoires admettant une espérance est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et, pour tous réels λ et μ, tout $(X, Y) \in (L^1(\Omega, \mathbb{R}))^2$:

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\, \mathrm{E}(X) + \mu\, \mathrm{E}(Y).$$

XV.20

Démonstration

Bien sûr, $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ est une partie non vide $\mathbb{R}^\Omega$.
Si $\lambda = 0$, il est clair que λX admet une espérance finie, et que $\mathrm{E}(\lambda X) = \lambda\ \mathrm{E}(X)$.
Supposons $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'application $x \in X(\Omega) \mapsto \lambda x$ est une bijection de $X(\Omega)$ sur $(\lambda X)(\Omega)$, et, pour tout $x \in X(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(\lambda X = \lambda x)$ sont égaux. La famille $(yP(\lambda X = y))_{y \in (\lambda X)(\Omega)}$ est donc sommable, et sa somme vaut donc :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \lambda\, x P(X = x) = \lambda\, \mathrm{E}(X)$$

Considérons maintenant la famille $\mathcal{F} = ((x + y)P((X = x), (Y = y)))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$.
Cette famille est la somme des familles $(x\, P((X = x), (Y = y)))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ et $(y\, P((X = x), (Y = y)))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$. Or une application du théorème de sommation par paquets permet d'établir le fait que ces deux familles soient sommables, et que leurs sommes respectives soient $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(Y)$.
La famille $\mathcal{F}$ est donc sommable, de somme $\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.
En sommant par paquets de la forme $I_z = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), x + y = z\}$, on constate que la somme de $\mathcal{F}$ est aussi $\mathrm{E}(X + Y)$, d'où le résultat souhaité.

□

Proposition (Positivité et croissance de l'espérance)

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y admettant des espérances, et une troisième variable aléatoire Z.

(1) (positivité) si $X \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.
(2) (croissance) l'espérance est une fonction croissante, *i.e.* si $X \leqslant Y$, alors $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.
(3) $|\,\mathrm{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(|X|)$.
(4) Si $|Z| \leqslant X$, alors Z est d'espérance finie.

XV.21

Démonstration

□

Exemple (V.a. bornée)

Toute variable aléatoire bornée admet une espérance finie.

xv

Vous avez bien sûr vu des formules analogues dans le cours d'intégration : en fait, il existe une théorie unifiant ces domaines, appelée *théorie de la mesure*.

Théorème (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(P(X=x)\ f(x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas :

$$\mathrm{E}\,(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\ P(X=x).$$

XV.22

Démonstration

Non exigible.
Considérons la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. Notons, pour tout y dans l'image $f(X)(\Omega)$ de $f(X)$:

$$I_y = \{x \in X(\Omega), f(x) = y\}$$

Il est clair que $(I_y)_{y\in f(X)(\Omega)}$ forme une partition au plus dénombrable de $X(\Omega)$.
De plus, pour tout $y \in f(X)(\Omega)$, la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in I_y}$ est sommable (c'est la multiplication par le scalaire y de la famille sommable $(P(X=x))_{x\in I_y}$), de somme

$$\sum_{x\in I_y} f(x)P(X=x) = y\sum_{x\in I_y} P(X=x) = yP(X\in I_y) = yP(f(X)=y)$$

D'après le théorème de sommation par paquets, la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable si et seulement si la famille $(|y|P(f(X)=y))_{y\in f(X)(\Omega)}$ est sommable, *i.e.* $f(X)$ admet une espérance finie, et, le cas échéant, sa somme est aussi celle de $(yP(f(X)=y))_{y\in f(X)(\Omega)}$, c'est-à-dire l'espérance de $f(X)$.

□

On observe que l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.

Exemple (Formule de transfert) xvi

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On a alors $E\left(\frac{1}{X(1+X)}\right) = \frac{1}{n+1}$.

Proposition (Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes) XV.23

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\ \mathrm{E}(Y).$$

Démonstration

Cela se déduit facilement de la formule de transfert en prenant la variable aléatoire (X, Y) et la fonction $f\ : (x, y) \mapsto xy$.

□

Si on ne veut pas utiliser la formule de transfert, on peut considérer la famille $(xP(X = x)yP(Y = y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$: si X et Y sont d'espérances finies, alors cette famille est sommable de somme $E(X)E(Y)$. En sommant par paquets à xy constant, on constate que cette famille a aussi pour somme $E(XY)$.

La réciproque de la proposition XV.23 est fausse :

Proposition (Inégalité de Markov) XV.24

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|X|)}{\varepsilon}.$$

Démonstration

□

Illustration

4.3. Variance, écart type et covariance

On rappelle que pour tous réels a et b, on a :

$$|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$$

Définition (Moments d'une v.a. réelle)

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si X^k admet une espérance finie, alors on appelle *moment d'ordre k de X* le réel $\mathrm{E}(X^k)$.

XV.xxv

Proposition (V.a. admettant un moment d'ordre 2)

L'ensemble $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

XV.25

Démonstration

$\square$

Proposition (Moment d'ordre 2 et espérance)

Si une variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.

XV.26

Démonstration

$\square$

Plus généralement, si X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors X admet un moment d'ordre j, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$.

Définition (Variance, écart type) XV.xxvi

Lorsque X admet un moment d'ordre 2, on appelle *variance* de X et on note $\mathrm{V}(X)$ le réel positif

$$\mathrm{V}(X) \overset{def}{=} \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2)$$

On appelle *écart type* de X et on note $\sigma(X)$ (ou σ_X) le réel positif

$$\sigma(X) \overset{def}{=} \sqrt{\mathrm{V}(X)}.$$

On dit que X est *réduite* si elle est de variance 1 (*i.e.* d'écart type 1).

Bien sûr, la variable aléatoire $X - \mathrm{E}(X)$ est centrée. Pour donner un indicateur numérique de l'écart entre X et son espérance, c'est-à-dire de la dispersion de X, on pourrait proposer $E(|X - E(X)|)$. Toutefois, cet indicateur est assez peu commode, et on lui préfère la variance, qui est également un indicateur de dispersion.

Cependant, espérance et variance ne sont pas homogènes : si X correspond à des longueurs, l'espérance est une longueur mais la variance une surface. L'écart type est quant à lui bien homogène à une longueur.

PC : écart quadratique énergétique.

Notes aux concours XV.1

À un concours, on cherche à faire en sorte que les épreuves aient un poids conforme à leurs coefficients : contrairement à ce qu'on pourrait croire, ce n'est pas la moyenne mais l'écart type que le jury doit harmoniser : si l'écart type est nul, ou presque, cela signifie que tous les candidats ont eu la même note, proche de la moyenne. Cette épreuve n'est donc pas discriminante, elle n'a aucune influence sur le classement (quelle que soit la moyenne).
Par exemple, si en maths la moyenne est de 6, avec un écart type de 5, et si elle est de 18 en physique, avec un écart type de 1, ce sont les mathématiques qui permettront de faire la différence aux concours.
Cela dit, pour des raisons de lisibilité, les moyennes sont souvent proches de 10.

Proposition (Formules pour la variance) XV.27

On suppose que X admet un moment d'ordre 2. On a alors :

(1) (formule de Koenig) $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.

(2) pour tous réels a et b : $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.

Démonstration

$\square$

La formule de Koenig donne une méthode pratique de calcul de la variance.
Il est normal que l'ajout de la *constante* b soit sans influence sur la dispersion, et donc sur la variance.

Définition (v.a. centrée réduite associée à une v.a.) — XV.xxvii

On suppose que $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, et que $\sigma(X) > 0$. La variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est alors appelée *variable aléatoire centrée réduite associée à* X.

Exemple (Variances classiques) — xvii

(1) Si X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), alors $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
(2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $V(X) = p(1-p)$.
(3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1-p)$.
(4) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
(5) Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $V(X) = \lambda$.

Indication : on pourra utiliser la relation $X^2 = X(X-1) + X$.

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz probabiliste) — XV.28

Si X et Y admettent chacun un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\ \mathrm{E}(Y^2)$.

Démonstration

$\square$

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

XV.29

Démonstration

$\square$

Cette inégalité permet donc de quantifier le fait qu'une v.a. prenne des valeurs proches de son espérance.
Exercice d'application conseillé : énoncé 99 de la banque CCP (exercice 1197 de TD).

Définition (Covariance de deux v.a.)

Si $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, on appelle *covariance* de X et Y et on note $\mathrm{Cov}(X, Y)$ le scalaire

$$E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

XV.xxviii

Bien sûr, $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$.

Proposition (Formule pour la covariance)

On a, lorsque $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$: $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

XV.30

Démonstration

$\square$

Covariance de v.a. indépendantes

Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
Attention cependant : la réciproque est fausse.

XV.m

Proposition (Variance d'une somme)

Soit $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$.

(1) On a : $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y)$.

(2) En particulier, si X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

(3) Plus généralement, si $X_1, \dots, X_q$ sont des variables *deux à deux* indépendantes admettant un moment d'ordre 2, alors

$$V(X_1 + \cdots + X_q) = V(X_1) + \cdots + V(X_q).$$

XV.31

Démonstration

□

On observe que la dernière formule est vraie dès que les X_i sont indépendantes deux à deux : il n'est pas nécessaire de les supposer *mutuellement* indépendantes.

Exemple (Variance d'une variable aléatoire binomiale)

En appliquant cette formule à la somme de n v.a.i.i.d. de Bernoulli de paramètre p, on retrouve la variance d'une v.a. de loi $\mathcal{B}(n, p)$.

xviii

Coefficient de corrélation

On appelle *coefficient de corrélation* de X et Y (admettant des moments d'ordre 2, et de variances non nulles) et on note $\rho(X, Y)$ le réel

$$\rho(X, Y) \stackrel{def}{=} \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

On a $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\rho(X, Y) = 0$, mais La réciproque est fausse.
On peut montrer que $\rho(X, Y) \in \{-1, +1\}$ si et seulement si X et Y sont presque sûrement des fonctions affines l'une de l'autre, *i.e.* il existe des réels non nuls a et b, et un réel c tq : $aX + bY + c = 0$ presque sûrement.

XV.n

4.4. Loi faible des grands nombres

Théorème (Loi faible des grands nombres)

Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, on a,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

XV.32

Démonstration

$\square$

Vous devez savoir retrouver, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

où σ est l'écart type commune des X_k.

I : simulation d'une suite de tirages.

5. Fonctions génératrices

Ici, X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition (Fonction génératrice)

On appelle *fonction génératrice* de X et on note G_X la fonction donnée par :

$$G_X(t) \overset{def}{=} \mathrm{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n.$$

XV.xxix

On observe que G_X est définie en 1, et que $G_X(1) = 1$.

La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque unité fermé (*i.e.* le disque fermé de centre 0 et de rayon 1). En particulier, G_X est continue sur ce disque, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque unité ouvert.

On peut déterminer les coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul grâce à la série de Taylor : appliqué au contexte des fonctions génératrices, cela nous indique que G_X détermine la loi de X, par la formule :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Proposition (Fonction génératrice d'une somme finie de v.a.i. à valeurs naturelles)

XV.33

Si $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille de v.a.i. à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = G_{X_1}\dots G_{X_n}$$

Démonstration

□

Proposition (Utilisation de la fonction génératrice dans le cas d'un RCV plus grand que 1)

XV.34

On suppose que le rayon de convergence de $\sum P(X=n)t^n$ est strictement plus grand que 1.
La variable aléatoire X admet alors un moment à tout ordre, et, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$E(X(X-1)\dots(X-(k-1))) = G_X^{(k)}(1)$$

Démonstration

□

En fait, on peut donner un résultat plus fin, que l'on présente pour les moments d'ordre 1 et 2 (qui nous permettront de calculer espérance et variance) :

Proposition (Moments d'ordre 1 et 2 et fonction génératrice)

XV.35

(1) La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1. On a alors dans ce cas :

$$\mathrm{E}(X) = G_X'(1)$$

(2) La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. On a alors dans ce cas :

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$$

Démonstration

Nous ne montrons que le premier point, le second étant similaire (en plus technique).
Supposons que X admette une espérance. La série $\sum nP(X=n)$ est alors convergente à termes positifs, donc absolument convergente.
La série entière dérivée $\sum nP(X=n)t^{n-1}$ (commençant à l'indice 1) est donc normalement convergente sur $[-1,1]$: ainsi, d'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, G_X est dérivable en 1, et

$$G'_X(1) = E(X)$$

Réciproquement, supposons que G_X soit dérivable en 1. On sait que pour tout $t \in [0,1[$:

$$G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$$

donc G'_X est croissante sur $[0,1[$.
En utilisant par exemple l'égalité des accroissements finis, on montre que G'_X est continue en 1. En particulier, $G'_X(1)$ majore G'_X sur $[0,1]$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, tout $t \in [0,1[$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} nP(X=n)t^{n-1} \leqslant G'_X(t),$$

puis, en faisant tendre t vers 1 :

$$\sum_{n=1}^{N} nP(X=n) \leqslant G'_X(1)$$

Ainsi, la série $\sum nP(X=n)$ est à termes positifs, et la suite de ses sommes partielles est majorée par $G'_X(1)$: cette série converge, et sa somme $\mathrm{E}(X)$ vérifie

$$\mathrm{E}(X) \leqslant G'_X(1)$$

$\square$

Si G_X est deux fois dérivable en 1, alors X admet une variance, et

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2,$$

Vous devez officiellement savoir *retrouver* cette expression de la variance, mais il serait nuisible de l'apprendre par cœur : elle se retrouve immédiatement à partir de la proposition précédente.

Exemple (Fonctions génératrices)

(1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $G_X(t) = (pt+q)$.
(2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $G_X(t) = (pt+q)^n$.
(3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$.
(4) Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

xix

On peut observer que dans tous ces cas classiques, le rayon de convergence est strictement plus grand que 1, et donc que la proposition XV.34 suffit pour faire le lien entre les moments de X et sa fonction génératrice.

Exemple (Espérance, variance, et fonction génératrice)

On peut retrouver les valeurs de l'espérance et de la variance dans ces cas classiques à partir de leurs fonctions génératrices.

xx

Exemple (Somme de deux v.a.i. suivant des lois de Poisson)

On considère deux v.a.i. X et Y suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Grâce aux fonctions génératrices, on montre que $X+Y$ suit une loi de Poisson, de paramètre $\lambda+\mu$ (on peut aussi trouver ce résultat par un calcul élémentaire).
De même, lorsque X et Y sont des v.a.i. suivant des lois binomiales $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$, leur somme $X+Y$ suit $\mathcal{B}(m+n,p)$.

xxi

CHAPITRE XVI

Espaces préhilbertiens réels

Sommaire

Dans ce chapitre, le corps des scalaires des espaces vectoriels considérés est $\mathbb{R}$. Notre objectif est de donner un cadre formel à la géométrie euclidienne. Cette axiomatisation de la notion d'orthogonalité sera aussi de grande utilité en analyse, notamment dans le cadre des approximations de fonctions.

E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et n un entier naturel non nul.

Selon le contexte, I désignera un intervalle d'intérieur non vide ou un ensemble d'indexation d'une certaine famille.

1. Produit scalaire

1.1. Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition (Application (définie) positive)

Une application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ est dite *positive* si
$$\forall x \in E, \quad f(x,x) \geqslant 0$$
Dans ce cas, f est dite *définie positive* si en outre
$$\forall x \in E, \quad f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

XVI.i

Définition (Produit scalaire)

On dit qu'une application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ est un *produit scalaire* (sur E) si f est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.
On appelle *espace préhilbertien (réel)* un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

XVI.ii

On note souvent $< x, y >$ ou $(x|y)$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y.

Exemple (Produits scalaires)

(1) Soit $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$. L'application
$$(u, v) \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$
est un produit scalaire, appelé *produit scalaire canonique (ou usuel)* de/sur $\mathbb{R}^n$.

(2) Soit $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k$ des polynômes réels. On pose
$$(P|Q) = \sum_{k\geqslant 0} a_k b_k,$$
somme bien définie puisque $(a_n b_n)$ est presque nulle. On définit ainsi un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbb{R}[X]$, dit *canonique*.

(3) Produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b])$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$: $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$.

(4) Plus généralement, si $L_c^2(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable sur I, alors
$$(f, g) \in (L_c^2(I, \mathbb{R}))^2 \mapsto \int_I fg$$
est un produit scalaire.

(5) Si $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites réelles telles que $\sum u_n^2$ converge, alors
$$(u, v) \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$
est un produit scalaire.

(6) Si $w \ : I \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n w(t)$ soit intégrable, alors
$$(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \mapsto \int_I P(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(7) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues et 2π-périodiques. L'application :
$$(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur E.

(8) Si F est un sous-espace vectoriel de E préhilbertien, alors le produit scalaire sur E induit une structure préhilbertienne sur F.

i

Définition (Espace euclidien)

Un *espace euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

XVI.iii

Exemple (Espaces euclidiens)

(1) Les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, munis de leurs produits scalaires usuels (c'est-à-dire canoniques) sont des espaces euclidiens.

(2) L'espace $\mathcal{C}^0([0,1])$, muni du produit scalaire ci-dessus, n'est pas euclidien, car il n'est pas de dimension finie. Cependant, ses sous-espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces euclidiens pour la structure induite.

ii

Exemple (Produit scalaire canonique matriciel)

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}\left({}^t A\, B\right)$$

est un produit scalaire, qui confère à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une structure d'espace euclidien.

iii

Un même espace peut en général être muni de plusieurs produits scalaires.
Dans la suite, sauf contexte particulier, E désigne un espace préhilbertien (réel) de produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

1.2. Norme et distance associées à un produit scalaire

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad (u|v)^2 \leqslant (u|u)(v|v).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si (u, v) est liée.

XVI.1

Démonstration

$\square$

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right).$$

Dans le cas intégral, on reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz déjà vue :

$$\left(\int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t) \mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g^2(t) \mathrm{d}t\right).$$

Définition (Norme associée à un produit scalaire)

On définit une norme sur E (dite *associée au produit scalaire* $(\cdot|\cdot)$) en posant, pour tout vecteur u de E :

$$\|u\| \stackrel{def}{=} \sqrt{(u|u)}$$

XVI.iv

Démonstration

Justification du fait que l'on obtienne bien une norme :

$\square$

Une telle norme est dite *préhilbertienne*, ou *euclidienne* (on emploie parfois ce dernier terme même lorsque E n'est pas de dimension finie). On dit aussi qu'elle *dérive* d'un produit scalaire.

On peut dès lors reformuler l'inégalité de Cauchy-Schwarz de façon géométrique, facile à retenir :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad |(u|v)| \leqslant \|u\| \, \|v\| \, .$$

Comme pour toute norme, on a la *seconde inégalité triangulaire* : $\forall (u,v) \in E^2, |\, \|u\| - \|v\| \,| \leqslant \|u+v\|$ (ou encore $|\, \|u\| - \|v\| \,| \leqslant \|u-v\|$, ce qui rappelle que la norme est une fonction 1-lipschitzienne).

Exemple (Norme euclidienne)

Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, la norme euclidienne est donc donnée par

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

On reconnaît en particulier la norme usuelle dans le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$.

iv

Pour tous réels α et β, tous vecteurs u et v de E, on a :

$$\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta (u|v) + \beta^2 \|v\|^2$$

Proposition (Identité du parallélogramme)

On a, pour tout $(u,v) \in E^2$:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

XVI.2

Illustration

Proposition (Identités de polarisation)

Pour tout $(u, v) \in E^2$:

$$\begin{aligned}(u|v) &= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right).\end{aligned}$$

XVI.3

Ainsi, grâce à ces identités de polarisation, il y a autant d'information dans la norme euclidienne que dans le produit scalaire : la connaissance de la norme nous permet de retrouver le produit scalaire dont elle est issue.

Cependant, toutes les normes ne sont pas issues d'un produit scalaire (une condition nécessaire étant qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme) :

À un produit scalaire, on peut associer une norme, et donc une distance, donnée par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) \stackrel{def}{=} \|y - x\|$$

2. Orthogonalité

2.1. Familles orthonormales et orthogonales

Comme dans tout evn, un vecteur u de E est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si $\|u\| = 1$.
Si u est un vecteur non nul de E, on appelle *normalisé* de u le vecteur $\frac{u}{\|u\|}$.

Définition (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs u et v de E sont dits *orthogonaux* si $(u|v) = 0$. On note alors parfois $u \perp v$.

XVI.v

Exemple (Vecteurs orthogonaux)

(1) Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

(2) Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul.

(3) Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$, des polynômes respectivement pair et impair sont orthogonaux.

(4) Pour le produit $(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, des fonctions respectivement paire et impaire sont orthogonales.

(5) Si on munit E de deux produits scalaires, deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour l'un mais pas pour l'autre.

v

Définition (Famille orthogonale, orthonormée)

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est *orthogonale* si les u_i sont orthogonaux deux à deux. Si de plus ils sont unitaires, la famille est alors dite *orthonormale* (ou *orthonormée*).

XVI.vi

Exemple (Suite orthogonale)

On munit l'espace E des fonctions continues 2π-périodiques du produit scalaire $(f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} fg$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $e_{2n} \; : t \mapsto \cos(nt)$ et $e_{2n+1} \; : t \mapsto \sin(nt)$.
$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une famille orthogonale de E.

vi

Proposition (Expression d'un produit scalaire en base orthonormée)

On suppose que E est un espace euclidien de dimension n, et que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ des vecteurs de E donnés avec leurs décompositions respectives dans $\mathcal{B}$. On a :

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

En particulier,

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

XVI.4

Démonstration

□

Attention ! Cette expression du produit scalaire *dans une base orthonormée* est très agréable, mais cette formule n'est *pas valable* pour une base quelconque.

Expression matricielle d'un produit scalaire en base orthonormée

Si on note, dans le contexte de la proposition précédente, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, on a

$$(u|v) = \operatorname{tr}((^tU)V)$$

et même, si on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$ (ce que l'on fera souvent en pratique) :

$$(u|v) = (^tU)V$$

XVI.a

Exemple (Familles orthonormées)

Dans tous les exemples de produits scalaires canoniques (*i.e.* dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}[X]$), la base canonique de l'espace sous-jacent est une base orthonormée, d'où leur nom.

vii

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est orthonormale si et seulement si pour tout $(i,j) \in I^2$, on a $(u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

Proposition (Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls)

Une famille orthogonale constituée de vecteurs tous non nuls est libre. En particulier, toute famille orthonormée de vecteurs de E est libre.

XVI.5

Démonstration

□

Ainsi, une base orthonormée de E euclidien de dimension n n'est rien d'autre qu'une famille orthonormée, de cardinal n.

Autrement dit, $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E (de dimension n) si et seulement si $n = p$ et

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$$

Proposition (Relation de Pythagore)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale. On a, pour toute sous-famille finie J de I :

$$\left\| \sum_{i \in J} u_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} \|u_i\|^2$$

XVI.6

Démonstration

$\square$

Réciproquement, si $\|u_1+u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$, alors (u_1, u_2) est orthogonale. Cependant, on peut trouver trois vecteurs u_1, u_2, u_3 tels que

$$\|u_1+u_2+u_3\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2$$

sans que ces vecteurs soient orthogonaux.

La relation de Pythagore permet de retrouver la proposition XVI.5.

La question de l'existence d'une base orthonormale se pose naturellement, ainsi que celle de l'obtention d'une telle base.

2.2. Bases orthonormées d'un espace euclidien

Soit $a \in E$. L'application $\varphi_a \ : x \mapsto (a|x)$ est une forme linéaire sur E. Son noyau est E si $a = 0_E$, et l'hyperplan constitué des vecteurs orthogonaux à a sinon.

De plus, l'application

$$\Phi \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ a & \mapsto & \varphi_a \end{array}$$

est linéaire injective de E sur son dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Proposition (Isomorphisme explicite entre un espace euclidien et son dual) — XVI.7

On suppose E euclidien. L'application Φ est alors un isomorphisme de E sur E^*.
En particulier, pour toute forme linéaire f sur E, il existe un unique vecteur a de E tel que $f = \varphi_a$, *i.e.*

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = (a|x).$$

Démonstration

$\square$

Exemple (Produit vectoriel)

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, fixons deux vecteurs u et v. L'application $x \mapsto \det(u, v, x)$ (det désigne le déterminant dans la base canonique) est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, ce qui conduit à la définition du *produit vectoriel* $u \wedge v$.
On a en particulier $\det(u, v, u \wedge v) = (u \wedge v | u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 \geqslant 0$.

viii

Ainsi, dans un espace euclidien, toute forme linéaire est le produit scalaire par un vecteur donné, et ce vecteur est unique. En dimension infinie, une forme linéaire n'est pas nécessairement le produit scalaire par un vecteur donné :

Proposition (Existence d'une base orthonormale dans un espace euclidien)

Tout espace euclidien de dimension non nulle admet une base orthonormée.

XVI.8

Démonstration

Par récurrence (pour l'hérédité, considérer un vecteur unitaire et l'hyperplan des vecteurs qui lui sont orthogonaux).

□

Proposition (Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée)

Soit E un espace euclidien, de base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout vecteur u de E, on a :

$$u = \sum_{i=1}^{n} (u|e_i)e_i.$$

XVI.9

Démonstration

$\square$

Attention ! Cette formule n'est *a priori* valable que si la base est *orthonormée*.
Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est égale à

$$((f(e_j)|e_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

2.3. Orthogonal d'une partie de E

F désigne ici un sous-espace vectoriel de E.

Définition (Orthogonal d'une partie) XVI.vii

Soit A une partie de E. On appelle *orthogonal* de A (dans E), et on note $A^\perp$ ou A°, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp \stackrel{def}{=} \{x \in E,\ \forall a \in A, (a|x) = 0\}$$

Deux parties non vides A et B de E sont dites *orthogonales* si

$$\forall (a,b) \in A \times B, \quad (a|b) = 0$$

Illustration

Exemple (Orthogonal d'une partie) ix

(1) $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.
(2) Les sous-espaces de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ constitués respectivement des fonctions paires et impaires sont orthogonaux pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_{[-1,1]} fg$.
(3) Si deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires et orthogonaux, alors on obtient une base orthonormée de E en concaténant des base orthonormées de F et de G.

Proposition (Propriétés de l'orthogonal)

Soit A et B deux parties de E.

(1) A et B sont orthogonales si et seulement si $A \subset B^{\perp}$ (si et seulement si $B \subset A^{\perp}$).

(2) Si $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

(3) $A \subset A^{\perp\perp}$.

(4) $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E (même si A n'en est pas un).

(5) $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$. En particulier, si F est engendré par $(f_i)_{i\in I}$, alors $u \in F^{\perp}$ si et seulement si u est orthogonal à tous les vecteurs f_i, $i \in I$.

(6) F et $F^{\perp}$ sont en somme directe.

XVI.10

Démonstration

$\square$

3. Projecteurs orthogonaux

3.1. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On sait que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, en somme directe avec F. Cependant, F et $F^{\perp}$ ne sont pas toujours supplémentaires :

Définition (Supplémentaire orthogonal)

Lorsque $F \oplus F^{\perp} = E$, on appelle $F^{\perp}$ le *supplémentaire orthogonal* de F (dans E).

XVI.viii

Proposition (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie)

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Les sous-espaces F et $F^{\perp}$ sont alors bien supplémentaires.

XVI.11

Démonstration

Raisonner par conditions nécessaires, en utilisant une base orthonormée de F (puis faire la synthèse).

$\square$

Définition (Projecteur orthogonal, projection orthogonale)

Lorsque F et $F^\perp$ sont supplémentaires, on définit le *projecteur orthogonal* sur F comme le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$: c'est un endomorphisme de E. On le note p_F.
p_F induit un morphisme de E sur F, appelé *projection orthogonale* de E sur F.

XVI.ix

Asymétrie des rôles entre F et son orthogonal

On présume que si F et $F^\perp$ sont supplémentaires, alors on peut définir le projecteur orthogonal $p_{F^\perp}$ sur $F^\perp$, et que de plus

$$p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$$

Cela est tout à fait correct, et on peut d'ailleurs aussi observer que dans ce cas, $F^{\perp\perp} = F$.
Cependant, il est aussi possible que $F^\perp$ et $F^{\perp\perp}$ soient supplémentaires, sans que F et $F^\perp$ le soient (ce qui revient à dire que l'inclusion de F dans $F^{\perp\perp}$ est stricte).
Dans ce cas, on peut parler de $p_{F^\perp}$ mais pas de p_F.
Le travail précédent montre toutefois que si F est de dimension finie, ce problème ne se pose pas.

XVI.b

On suppose désormais F de dimension finie, et on considère une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de F

Proposition (Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale)

Le projecteur orthogonal p_F sur F est donné, pour tout $x \in E$, par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$$

XVI.12

Démonstration

□

PC : polariseur, loi de Malus.
Soit $u \in E$. On rappelle que la distance de u à F est notée $d(u, F)$, et définie par

$$d(u, F) = \inf\{\|u - x\|, x \in F\}$$

Proposition (Interprétation de la distance d'un vecteur à un sous-espace)

Le projeté orthogonal de u sur F est l'unique élément v de F qui minimise la distance de u à F, *i.e.* tel que

$$\forall x \in F, \quad d(u, v) \leqslant d(u, x)$$

En particulier :

$$d(u, F) = \|u - p_F(u)\| = \|p_{F^\perp}(u)\|.$$

XVI.13

Illustration

Démonstration

□

Proposition (Inégalité de Bessel)

Pour tout $x \in E$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$$

XVI.14

Démonstration

□

Par conséquent, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée, la série $\sum (x|e_n)^2$ est toujours convergente, et sa somme est inférieure ou égale à $\|x\|^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)^2 \leqslant \|x\|^2$$

3.2. Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel

Dans cette sous-section, E est un espace préhilbertien de dimension infinie.

Définition (Suite totale)

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit que cette suite est *totale* si $\mathrm{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans E :

$$\overline{\mathrm{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})} = E$$

XVI.x

Proposition (Approximation par des projetés orthogonaux)

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit p_n le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$.
Pour tout x de E, $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers x, et

$$\textit{(Égalité de Parseval)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (e_n|x)^2 = \|x\|^2$$

XVI.15

Démonstration

Raisonnons par l'absurde, en supposant l'existence de x dans E tel que $(p_n(x))$ ne converge pas vers x. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \overset{def}{=} \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d(x, F_n) = \|x - p_n(x)\|$$

et, comme $F_n \subset F_{n+1}$,

$$d(x, F_{n+1}) \leqslant d(x, F_n)$$

Par conséquent, la suite réelle positive $(d(x, F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et ne tend pas vers 0 (car $(p_n(x))_n$ ne tend pas vers x) : $(d(x, F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $y \in F_n$, on a

$$0 < \alpha \leqslant d(x, y)$$

donc pour tout $y \in \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$:

$$0 < \alpha \leqslant d(x, y)$$

or $\cup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \mathrm{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc

$$0 < \alpha \leqslant d(x, \mathrm{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

puis

$$0 < \alpha \leqslant d(x, \overline{\mathrm{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}})$$

d'où une contradiction avec le fait que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit totale.
Pour tout $x \in E$, on a bien convergence de $(p_n(x))_n$ vers x. En particulier, l'application $x \in E \mapsto \|x\|^2$ étant continue, on a convergence de $(\|p_n(x)\|^2)_n$ vers $\|x\|^2$, ce qui donne l'égalité de Parseval (grâce au caractère orthonormé de $(e_n)_n$).

□

Il faut bien noter que la formule de Parseval n'est valable que sous la double hypothèse que la suite (e_n) soit *totale* et *orthonormale*.

Exemple (Suite totale)

Soit $w : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On munit $E \overset{def}{=} \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ du produit scalaire donné, par

$$(f|g) \overset{def}{=} \int_{[a,b]} fgw$$

pour tout $(f, g) \in E^2$.
La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (où l'on a identifié un polynôme avec la fonction qu'il induit sur $[a,b]$) est totale.
En effet, pour tout $f \in E$, on a $\|f\| \leqslant \sqrt{(b-a)\, \|w\|_{\infty,[a,b]}}\, \|f\|_{\infty,[a,b]}$, et le théorème de Weierstrass permet de conclure : pour $f \in E$, il existe une suite (P_n) de polynômes telle que $(\|f - P_n\|_{\infty,[a,b]})$ tende vers 0, et donc telle que $(\|f - P_n\|)$ tende également vers 0.

x

Exemple (Suites de polynômes orthogonaux)

On reprend les notations de l'exemple (6) p. 376.
Les familles suivantes sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}[X]$ pour la structure préhilbertienne indiquée.

(1) Pour $I = [-1,1]$ et $w = 1$, $L_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$ (ce sont les *polynômes de Legendre*).

(2) Pour $I =]-1,1[$ et $w : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, T_n défini par $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$ pour tout $t \in [-1,1]$ (ce sont les *polynômes de Tchebychev*).

(3) Pour $I = \mathbb{R}$ et $w : t \mapsto e^{-t^2}$, H_n défini par $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(e^{-t^2})$ pour tout réel t (ce sont les *polynômes de Hermite*).

xi

3.3. Projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien

E désigne un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E.

Proposition (Supplémentaire orthogonal)

On a $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F^{\perp\perp} = F$.

XVI.16

Démonstration

□

Lorsqu'une structure euclidienne intervient, le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace est souvent à privilégier par rapport aux autres supplémentaires.

Proposition (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit E euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille orthonormée de E se complète en une base orthonormée de E.

XVI.17

Démonstration

□

La symétrie s_F par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée *symétrie orthogonale* par rapport à F.

Définition (réflexion)

On appelle *réflexion* de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

XVI.xi

Illustration

On a $F = \operatorname{Ker}(s_F - \operatorname{Id}_E)$ et $F^\perp = \operatorname{Ker}(s_F + \operatorname{Id}_E)$. En particulier, si r est la réflexion par rapport à H, alors H est l'orthogonal de la droite $\operatorname{Ker}(r + \operatorname{Id}_E)$.

On a $p_{F^\perp} = \operatorname{Id}_E - p_F$, $s_F = 2p_F - \operatorname{Id}_E$, et $s_{F^\perp} = -s_F$. Cela permet par exemple d'exprimer simplement une réflexion :

3.4. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

On a vu que tout espace euclidien admettait une base orthonormée. On s'intéresse maintenant à un procédé constructif d'une telle base. Plus généralement, étant donné une famille libre $(e_i)_{i\in I}$ indexée par $\mathbb{N}^*$ ou un ensemble de la forme $[\![1, n]\!]$, on se demande comment *rectifier* cette famille afin d'obtenir une famille orthonormée.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt part de l'observation élémentaire suivante :

Lemme (Ajout orthonormé à un hyperplan)

Soit E euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose disposer d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ d'un hyperplan $\mathcal{H}$ de E. Il existe alors exactement deux vecteurs permettant de compléter $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de E, et ces deux vecteurs sont opposés.

XVI.18

Illustration

Proposition (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une famille libre de E, où I est égal à $[\![1,n]\!]$ ou $\mathbb{N}^*$. Il existe alors une unique famille orthonormale $\mathcal{C} = (g_i)_{i\in I}$ de E vérifiant :

(1) $\forall\, k \in I, \quad \mathrm{Vect}(g_1,\dots,g_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$.

(2) $\forall\, k \in I, \quad (g_k|e_k) > 0$.

XVI.19

Définition (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Dans ce contexte, on dit que $\mathcal{C}$ est l'*orthonormalisée de (Gram-)Schmidt* de $\mathcal{B}$.

XVI.xii

Illustration

Nous poserons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $F_k = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$, et p_{F_k} désignera le projecteur orthogonal sur F_k.

Démonstration

Unicité : en procédant par récurrence (finie ou non) sur k, on voit que nécessairement g_1 est le normalisé de e_1, et que si on suppose $g_1,\dots,g_{k-1}$ construits, un vecteur au plus est susceptible de convenir pour g_k, car g_k doit compléter $(g_1,\dots,g_{k-1})$ en une base orthonormée de F_k : deux choix sont possibles, au plus un d'entre eux respecte la condition $(g_k|e_k) > 0$.

□

Montrons maintenant l'existence, en posant $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, et, pour tout $k \in I \setminus \{1\}$:

$$f_k = \frac{e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)}{\left\|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\right\|}$$

(f_k est bien défini car $e_k \notin F_{k-1}$, donc $\left\|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\right\| \neq 0$).

Démonstration

Existence : vérifions que la famille $(f_k)_{k\in I}$ convient.
Tout d'abord, pour tout $k \in I\setminus\{1\}$, on a $f_k \in F_k$ et $e_k \in F_{k-1}+\mathbb{R}f_k$, donc une récurrence immédiate donne $\text{Vect}(f_1,\dots,f_k) = \text{Vect}(e_1,\dots,e_k) = F_k$ pour tout $k \in I$.
Ensuite, chaque f_k est unitaire par construction, et, si $k,l \in I$ où $k > l$, alors $f_k \in F_{k-1}^{\perp}$ et $f_l \in F_{k-1}$, donc f_k et f_l sont orthogonaux.
Il reste à établir la propriété (2). Soit $k \in I$. On a bien $(f_k|e_k) > 0$ si $k = 1$, et, si $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}(f_k|e_k) &= \big(f_k|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k) + p_{F_{k-1}}(e_k)\big)\\ &= \big(f_k|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\big) \text{ car } f_k \in F_{k-1}^{\perp}\\ &= \left(\frac{e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)}{\big\|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\big\|}\,\Big|\, e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\right)\\ &= \big\|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\big\| > 0\end{aligned}$$

□

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

XVI.c

On peut donc interpréter ce procédé de manière géométrique : f_1 est le normalisé de e_1, et pour tout $k \in I \setminus \{1\}$, f_k est le normalisé de $e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)$ (on n'a conservé que la partie orthogonale à F_{k-1} de e_k, puis on a normalisé).
Par ailleurs, puisque $(f_1,\dots,f_{k-1})$ est une base orthonormée de F_{k-1}, on a

$$p_{F_{k-1}}(e_k) = \sum_{i=1}^{k-1}(e_k|f_i)f_i,$$

de sorte que

$$f_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1}(e_k|f_i)f_i}{\left\|e_k - \sum_{i=1}^{k-1}(e_k|f_i)f_i\right\|}.$$

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est coûteux, c'est pourquoi il constitue un dernier recours : il vaut mieux trouver des informations pertinentes sur la structure euclidienne avant d'y faire appel. Si par exemple on trouve deux supplémentaires orthogonaux (non triviaux) de E, on obtiendra une base orthonormée de E en concaténant des bases respectives de ces sous-espaces.

Si on enlève la condition (2) et si $I = [\![1,n]\!]$, il y a 2^n bases possibles.

En pratique, ce procédé est utilisé dans le cas où $\mathcal{B}$ est une base de E, ou dans le cas où c'est une famille totale de E.

Exemple (Gram-Schmidt et polynômes orthogonaux)

xii

Si (P_n) désigne la famille des polynômes de Legendre (resp. Tchebychev et Hermite), alors la famille de leurs normalisés $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique.

4. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien non nul.

4.1. Groupe orthogonal

Définition (Endomorphisme orthogonal ou isométrie)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que l'endomorphisme f de E est *orthogonal*, ou que c'est une *isométrie vectorielle* (ou une *isométrie linéaire*) s'il conserve le produit scalaire, *i.e.* :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad (f(u)|f(v)) = (u|v)$$

XVI.xiii

Endomorphisme orthogonal

Les endomorphismes orthogonaux de E sont les endomorphismes de E qui « respectent » la structure euclidienne de E, *i.e.* qui respectent le produit scalaire, il est donc naturel de les étudier.

XVI.d

Proposition (Conservation du produit scalaire, conservation de la norme)

Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si il conserve la norme, *i.e.*

$$\forall u \in E, \quad \|f(u)\| = \|u\|$$

XVI.20

Démonstration

$\square$

Cela justifie *a posteriori* la désignation des endomorphismes orthogonaux comme les isométries de E. Tout endomorphisme orthogonal est en fait un automorphisme :

Exemple (Endomorphismes orthogonaux)

(1) Les applications Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ sont des automorphismes orthogonaux de E.

(2) Plus généralement, toute symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal.

(3) Le seul projecteur orthogonal qui soit un endomorphisme orthogonal de E est Id_E.

(4) Si $f \in O(E)$ laisse stable un sous-espace vectoriel F de E, alors f induit un automorphisme orthogonal de F.

xiii

Proposition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien) — XVI.21

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

Démonstration

□

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien) — XVI.xiv

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est appelé *groupe orthogonal* de E et noté $O(E)$.

Proposition (Caractérisation des automorphismes orthogonaux) — XVI.22

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est une isométrie.

(2) $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est orthonormée.

Démonstration

□

On pouvait s'attendre à ce que les endomorphismes orthogonaux (c'est-à-dire les endomorphismes respectant le produit scalaire) soient les endomorphismes « respectant » les « bonnes » bases de E, *i.e.* les bases orthonormées de E.

Corollaire (Caractérisation des automorphismes orthogonaux) XVI.23

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est orthogonal.

(2) f transforme chaque base orthonormale de E en une base orthonormale.

(3) f transforme une base orthonormale de E fixée en une base orthonormale.

Démonstration

□

Définition (Automorphismes orthogonaux positifs ou négatifs) XVI.xv

Soit E un espace euclidien, $f \in O(E)$. On dit que f est un *automorphisme orthogonal positif* ou *automorphisme orthogonal direct*, ou une *rotation (vectorielle)*, ou une *isométrie vectorielle directe* (resp. un *automorphisme orthogonal négatif* ou *automorphisme orthogonal indirect*), si $\det(f) > 0$ (resp. $\det(f) < 0$).

On note $SO(E)$ ou $O^+(E)$, et appelle *groupe spécial orthogonal de E*, l'ensemble des automorphismes orthogonaux positfs de E, $O^-(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux *négatifs* de E.

Démonstration

Justification du fait que $SO(E)$ soit bien un groupe (pour la composition) :

□

Nous verrons plus tard que les seuls déterminants possibles pour un automorphisme orthogonal sont 1 et -1.

Évidemment, $O^-(E)$ n'est pas un groupe pour la composition :

4.2. Matrices orthogonales

n désigne un entier naturel non nul.

Étant donné un endomorphisme f de E euclidien de dimension n, il est intéressant de pouvoir tester matriciellement son orthogonalité. Cela se fait bien si la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle on exprime f est orthonormée. On suppose donc $\mathcal{B}$ orthonormée.

Grâce à l'interprétation matricielle du produit scalaire, on a, en notant $M = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$(f(e_i)|f(e_j)) = ({}^tC_i)C_j$$

Définition (Matrice orthogonale) XVI.xvi

On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si $({}^tM)M = I_n$.

Proposition (Lien entre automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales) XVI.24

Soit f un endomorphisme de E, et M la matrice de f dans la base *orthonormale* $\mathcal{B}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est un automorphisme orthogonal de E.

(2) M est une matrice orthogonale.

Démonstration

□

Attention ! Le lien entre automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales s'effectue en *base orthonormée*.

On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. On a alors,

$$(f(e_i)|f(e_j)) = ({}^tC_i)C_j = (C_i|C_j)$$

Proposition (Caractérisation de l'orthogonalité d'une matrice) XVI.25

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) M est orthogonale (*i.e.* $({}^tM)M = I_n$.)

(2) $M^tM = I_n$.

(3) M est inversible, et $M^{-1} = ({}^tM)$.

(4) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

(5) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (euclidien canonique).

Démonstration

□

Chacune de ces propriétés aurait donc permis de définir l'orthogonalité d'une matrice.

Proposition (Matrice de changement de base entre bases orthonormées) XVI.26

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et soit $\mathcal{B}'$ une base de E. La base $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

Démonstration

□

Proposition (Groupe orthogonal d'indice n) XVI.27

L'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales de taille n est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Définition (Groupe orthogonal d'indice n) XVI.xvii

Le groupe $O(n)$ est appelé *groupe orthogonal* d'indice n.

Démonstration

□

Une matrice de $O(n)$ est nécessairement de déterminant 1 ou -1, mais la réciproque est fausse (si $n \geqslant 2$) :

Définition (Groupe spécial orthogonal)

Le *groupe spécial orthogonal d'indice* n, noté $SO(n)$ ou $O^+(n)$, est l'ensemble des matrices orthogonales de taille n de déterminant 1.
On pose également $O^-(n) = \{M \in O(n), \det M = -1\}$.
Les matrices de $SO(n)$ sont dites orthogonales *positives*, Les matrices de $O^-(n)$ sont dites orthogonales *négatives*

XVI.xviii

Démonstration

Justification du fait que $SO(n)$ soit un groupe multiplicatif :

□

Bien sûr, $O^-(n)$ n'est pas un groupe multiplicatif :

Échanger deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice orthogonale positive (resp. négative) la change en une matrice orthogonale négative (resp. positive). De même si on change une colonne (ou une ligne) en son opposée.

Exemple (Matrices orthogonales)

(1) La matrice
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
est orthogonale.

(2) Les matrices
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix},$$
où α décrit $\mathbb{R}$, sont orthogonales. Nous verrons plus tard qu'il s'agit des seules de taille 2.

xiv

Exemple (Matrice orthogonale positive)

Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive. On pourra utiliser la notion de produit vectoriel.

xv

Les groupes $O(E)$ et $O(n)$ sont isomorphes par choix d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E via $f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$. De même pour $SO(E)$ et $SO(n)$.

Si $f \in O(E)$, alors $\det f = \pm 1$ (la réciproque est fausse), de sorte que $SO(E) = \{f \in O(E), \det(f) = 1\}$ et $O^-(E) = \{f \in O(E), \det(f) = -1\}$.

$\mathrm{Id}_E \in SO(E)$, mais $-\mathrm{Id}_E$ appartient à $SO(E)$ ou $O^-(E)$ selon la parité de $\dim E$

Exemple (Négativité des réflexions)

Une réflexion est toujours un automorphisme orthogonal négatif.

xvi

4.3. Le groupe orthogonal d'indice 2

Ici E est un plan euclidien (*i.e.* un espace euclidien E de dimension 2). On suppose notre espace orienté, *i.e.* muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ que l'on qualifie de directe : une autre base $\mathcal{B}'$ de E sera dite directe si $\det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) > 0$ et indirecte si $\det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) < 0$

La matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est donc orthogonale positive si l'orientation est inchangée, orthogonale négative sinon.

Nous choisissons pour $\mathcal{B}$ une base orthonormée.

L'application det désignera le déterminant dans la base $\mathcal{B}$, mais aussi dans n'importe quelle base orthonormée directe (si $\mathcal{B}'$ est également orthonormée directe, alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$).

Pour tout réel α, on note

$$R(\alpha) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\alpha) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Proposition (Description des éléments du groupe orthogonal d'indice 2)

On a

$$O(2) = \{R(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{S(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

et

$$SO(2) = \{R(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

XVI.28

Démonstration

□

Réduction des rotations vectorielles planes

Le spectre d'une rotation r de E est $\{1\}$ si $r = \mathrm{Id}_E$, $\{-1\}$ si $r = -\mathrm{Id}_E$, et est vide sinon. Ainsi, $R(\alpha)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, mais dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $R(\alpha)$ est diagonalisable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

XVI.e

Proposition (Paramétrage du groupe spécial orthogonal d'indice 2)

L'application $R : \alpha \mapsto R(\alpha)$ est un morphisme surjectif du groupe commutatif $(\mathbb{R}, +)$ sur $SO(2)$, donc $SO(2)$ est commutatif. Le noyau de R est $2\pi\mathbb{Z}$.

XVI.29

Démonstration

$\square$

Corollaire (Représentation matricielle d'une rotation vectorielle dans une base orthonormée directe)

Soit $r \in SO(E)$. Il existe un réel α, uniquement défini modulo 2π, tel que, pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}'$ de E :

$$M_{\mathcal{B}'}(r) = R(\alpha)$$

XVI.30

Définition (Mesure d'angle d'une rotation plane)

Dans ce contexte, α est appelé *mesure d'angle de la rotation* r du plan euclidien orienté E.

XVI.xix

Démonstration

$\square$

Toujours dans ce contexte, l'angle de r est la classe d'équivalence de α modulo 2π.
Si on change l'orientation de E, l'angle de r est la classe d'équivalence de $-\alpha$ modulo 2π.

Interprétation des matrices orthogonales négatives d'indice 2

Les automorphismes orthogonaux négatifs du plan euclidien sont donc les réflexions (ici, les hyperplans sont des droites). Plus précisément, si $S(\alpha)$ est la matrice dans (e_1, e_2) de $s \in O(E)$, alors s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}(\cos\frac{\alpha}{2} e_1 + \sin\frac{\alpha}{2} e_2)$. En particulier pour tout $s \in O^-(E)$, $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$.

XVI.f

Illustration

4.4. Réduction des isométries vectorielles

On revient maintenant au cas général : E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Il est clair que le spectre (réel) d'une isométrie est inclus dans $\{-1, 1\}$. On en déduit facilement qu'une isométrie est diagonalisable si et seulement si c'est une symétrie vectorielle (*i.e.* une involution).

On ne peut donc pas espérer pouvoir diagonaliser tous les endomorphismes orthogonaux (le cas de la dimension 2 permettait déjà de le voir).

Proposition (Orthogonal d'un sous-espace invariant par un automorphisme orthogonal)

Soit $\varphi \in O(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par φ. Le sous-espace F est alors globalement invariant par φ, *i.e.* $\varphi(F) = F$, et $F^\perp$ est également globalement invariant par φ, donc stable.

XVI.31

Démonstration

$\square$

Lemme de stabilité d'un plan ou d'une droite par un endomorphisme réel XVI.32

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe alors une droite ou un plan (vectoriels) de E, stable par f.

Démonstration

Utiliser un facteur irréductible du polynôme minimal de f.

$\square$

Ce lemme est valable pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, la structure euclidienne n'intervient pas.

Théorème (Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale) XVI.33

Soit f une isométrie sur E. Il existe alors une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

pour certains entiers naturels p, q, s, et où $\theta_1, \ldots, \theta_s$ sont des éléments de $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Démonstration

□

4.5. Réduction des isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3

On s'intéresse maintenant au cas particulier où E est euclidien orienté de dimension 3.

Corollaire (Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3)

On suppose que E est un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit $r \in SO(E)$. Il existe un réel θ et une base orthonormée directe de E dans laquelle la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

XVI.34

Démonstration

□

Définition (Éléments caractéristiques d'une rotation vectorielle de l'espace)

Dans le contexte du corollaire précédent, si $E_1(r)$ est une droite vectorielle Δ orientée par un vecteur unitaire u, alors la droite $E_1(r)$ est appelée *axe* de la rotation r (orienté par u).
De plus, θ est uniquement défini modulo 2π, et indépendant de la base orthonormée directe de la forme (e_1, e_2, u) dans laquelle la matrice de r est réduite. Le réel θ est appelé *mesure d'angle* de la rotation r d'axe Δ orienté par u.

XVI.xx

Bien sûr, orienter Δ par $-u$ conduit à changer θ en $-\theta$.
La forme réduite justifie donc *a posteriori* la terminologie « rotation ».

Illustration

Toujours dans le contexte du corollaire précédent, si $E_1(r)$ n'est pas une droite, alors $r = \mathrm{Id}_E$. Si $r \neq \mathrm{Id}_E$, on peut trouver θ (modulo 2π) en considérant la trace de r (qui donnera $\cos(\theta)$, et en regardant l'effet de r sur un vecteur non situé sur l'axe de r (ce qui donnera le signe de $\sin(\theta)$).

SI : liaisons entre solides.

Étude des isométries vectorielle dans un espace euclidien orienté de dimension 3 (culturel)

Si f est une isométrie (vectorielle) d'un espace euclidien orienté de dimension 3, la détermination de $m \overset{def}{=} \dim(E_1(f))$ donne des informations intéressantes sur f :

(1) si $m = 3$, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

(2) si $m = 2$, alors f est une réflexion (et donc un automorphisme orthogonal négatif).

(3) si $m = 1$, alors f est une rotation.

(4) si $m = 0$, alors f est la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation, donc un automorphisme orthogonal négatif.

XVI.g

5. Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

5.1. Définition, caractérisation

Ici, E est un espace euclidien.

Définition (Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien)

Un endomorphisme u de E est dit *symétrique* si, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$(u(x)|y) = (x|u(y))$$

XVI.xxi

Nous noterons $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Endomorphismes symétriques

$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

XVI.h

Exemple (Endomorphismes symétriques)

(1) Les symétries orthogonales et les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques. Attention cependant, *un projecteur orthogonal n'est pas une symétrie vectorielle* (*i.e.* un endomorphisme involutif), sauf dans le cas exceptionnel où il est égal à Id_E.

(2) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par un endomorphisme symétrique u, alors u induit un endomorphisme symétrique sur F.

xvii

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'endomorphisme u de E est symétrique si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (u(e_i)|e_j) = (e_i|u(e_j))$$

Proposition (Lien avec les matrices symétriques réelles)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est symétrique.

(2) La matrice M de u dans $\mathcal{B}$ est symétrique.

XVI.35

Démonstration

□

Attention, le lien entre endomorphisme symétrique et matrice symétrique se fait en *base orthonormée*.

Corollaire (Lien avec les matrices symétriques réelles)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est symétrique.

(2) Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

(3) Dans toute base orthonormée de E, la matrice de u est symétrique.

XVI.36

Démonstration

□

Non stabilité de la symétrie d'un endomorphisme par composition

L'ensemble des endomorphismes symétriques de E (supposé de dimension supérieure ou égale à 2) n'est pas stable par composition. D'ailleurs, si $u, v \in \mathcal{S}(E)$, on peut vérifier que $u \circ v \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

XVI.i

Proposition (Caractérisation des projecteurs orthogonaux)

Soit p un projecteur de E. Ce projecteur est orthogonal si et seulement si p est symétrique.

XVI.37

Démonstration

$\square$

Illustration

5.2. Réduction des endomorphismes symétriques (théorème spectral)

Proposition (Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable)

Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par un endomorphisme symétrique u. Le sous-espace $F^{\perp}$ est alors également stable par u.

XVI.38

Démonstration

□

Lemme d'orthogonalité de sous-espaces propres pour un endomorphisme symétrique

Deux sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

XVI.39

Démonstration

□

Lemme d'existence d'une valeur propre pour un endomorphisme symétrique

Soit u un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$. Le spectre (réel) de u est alors non vide.

XVI.40

Démonstration

Utiliser le lemme XVI.32, traiter le cas $n = 2$ à la main.

□

Théorème spectral

Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.

XVI.41

Démonstration

□

Interprétation matricielle du théorème spectral

Matriciellement, le théorème spectral peut s'exprimer ainsi : pour toute matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale *réelle* D et une matrice orthogonale P telles que

$$M = P^{-1}DP =^t PDP$$

XVI.j

SI : matrice d'inductance, matrice d'inertie.
Attention ! Une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable.

6. Retour sur l'interprétation matricielle du produit scalaire

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Étant donné des vecteurs x et y de E, nous noterons X et Y les colonnes de leurs composantes dans $\mathcal{B}$. Nous savons qu'alors

$$(x|y) = ({}^tX)Y$$

Soit f un endomorphisme de E, et soit M sa matrice dans $\mathcal{B}$.

Le fait que f soit orthogonal s'exprime par le fait que, pour tous vecteurs x et y, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$, soit, matriciellement, par

$$({}^t(MX)MY = ({}^tX)Y$$

soit encore

$$({}^tX)({}^tM)MY = ({}^tX)Y$$

Le fait que f soit symétrique s'exprime par le fait que, pour tous vecteurs x et y, $(f(x)|y) = (x|f(y))$, soit, matriciellement, par

$${}^t(MX)Y = ({}^tX)MY$$

soit encore

$$({}^tX)({}^tM)Y = ({}^tX)MY$$

Or on peut montrer que deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ({}^tX)AY = ({}^tX)BY$$

si et seulement si $A = B$.

On retrouve ainsi matriciellement que $f \in O(E)$ si et seulement si ${}^tMM = I_n$ et que $f \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si ${}^tM = M$.

CHAPITRE XVII

Équations différentielles linéaires

Sommaire

Dans ce chapitre, on reprend, en l'élargissant considérablement, l'étude des équations différentielles faite en début de MPSI. Il offre l'occasion de mesurer le chemin parcouru, puisqu'il permettra de voir comment les techniques d'algèbre linéaire (y compris la réduction des endomorphismes) contribuent à des questions qui semblaient purement analytiques.

On fixe un evn E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{B}$ une base de E, et un intervalle I d'intérieur non vide. En pratique, $E = \mathbb{K}^p$, et $\mathcal{B}$ est la base canonique. On peut même ajouter que le plus souvent, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et p vaut 1 ou 2.

$\mathcal{F}(A, B)$ désigne l'ensemble des fonctions de A dans B, $D^n(I, E)$ désigne l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans E.

On utilisera l'abréviation EDL pour « équation différentielle linéaire ».

L'exposé se scinde naturellement en deux parties principales :

(1) Une partie de résultats très puissants mais théoriques sur la résolution des EDL, centré autour du *théorème de Cauchy linéaire.*

(2) Une partie sur la résolution concrète des EDL, qui regroupe des méthodes variées, pour résoudre des équations différentielles diverses (vectorielles ou scalaires, homogènes ou pas, etc.).

La dichotomie pertinente n'est donc pas tant celle portant sur l'aspect vectoriel ou scalaire des équations, ni sur l'ordre de ces équations, que celle sur la *nature* des informations que fournissent les divers résultats.

Nous n'apporterons pas une réponse exhaustive au problème de la résolution des équations différentielles linéaires : pour certaines d'entre elles, nous ne pourrons exploiter que le théorème de Cauchy linéaire.

1. Généralités et premières conséquences de la linéarité

1.1. Équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 1

Définition (Équation différentielle linéaire vectorielle)

On appelle *équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre* 1 toute équation de la forme

$$\mathcal{E} \quad : \quad x' = a(t)(x) + b(t),$$

d'inconnue $x \ : I \to E$, où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.
Une fonction $f \ : I \to E$ est dite *solution* de $\mathcal{E}$ si elle est dérivable sur I, et si, pour tout $t \in I$:

$$f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t)$$

La fonction b est appelée *second membre* de $\mathcal{E}$, et $\mathcal{E}$ est dite *homogène* (ou *sans second membre*) si b est la fonction nulle.
L'*équation homogène associée* à $\mathcal{E}$ est l'équation

$$\mathcal{H} \quad : \quad x' = a(t)(x)$$

XVII.i

Ne pas oublier que par définition, une solution doit être dérivable. On peut d'ailleurs remarquer qu'une solution de $\mathcal{E}$ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$.

L'équation $\mathcal{E}$ admet une forme matricielle : pour tout $t \in I$, on note $B(t)$ et $A(t)$ les matrices respectives dans $\mathcal{B}$ de $b(t)$ et de $a(t)$ ($A(t)$ est une matrice carrée de taille p, $B(t)$ une matrice colonne). En notant X la colonne des fonctions composantes de x dans $\mathcal{B}$, l'équation $\mathcal{E}$ équivaut à l'équation matricielle

$$X' = A(t)X + B(t),$$

dinconnue $X \ : I \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, que l'on appelle *système différentiel linéaire* (d'ordre 1).

Exemple (Système différentiel)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & tx + y + t^2 z - 3t^2 \\ y' & = & x - 2ty + 3(1+t^3)z + t \\ z' & = & x + 4ty + 9\sin(t)z - \cos(t^2) \end{array} \right.$$

est un système différentiel linéaire d'ordre 1 à trois équations et trois inconnues x, y, z (fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a, avec les notations ci-dessus :

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & t^2 \\ 1 & -2t & 3(1+t^3) \\ 1 & 4t & 9\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 \\ t \\ -\cos(t^2) \end{pmatrix}$$

Pour $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, l'application $t \mapsto [A(t)]_{i,j}$ n'est pas, en général, linéaire (sauf si $(i,j) \in \{(1,1),(2,2),(3,2)\}$ sur cet exemple).
En revenant à $\mathcal{E}$, l'application $t \mapsto a(t)$ n'est pas, en général, linéaire : en revanche, pour tout $t \in I$ fixé, l'application $a(t)$ est linéaire.

i

Définition (Problème de Cauchy pour une EDL vectorielle d'ordre 1)

Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Le système

$$\mathcal{C} \ : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

est appelé *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle $\mathcal{E}$ d'ordre 1 et à la condition initiale

$$x(t_0) = x_0$$

XVII.ii

On fixe désormais un tel problème de Cauchy.

Exemple (Problème de Cauchy)

Les problèmes de Cauchy pour les EDL scalaires d'ordre 1 vus en première année rentrent dans ce cadre. Par exemple, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= ty+t \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

admet pour unique solution la fonction $t \mapsto -1 + e^{t^2/2}$.

ii

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

La fonction x est solution du problème de Cauchy $\mathcal{C}$ si et seulement si x est de classe $\mathcal{C}^1$, et, pour tout $t \in I$:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(u)(x(u)) + b(u))\mathrm{d}u$$

Cela revient à dire que x est un point fixe de l'application

$$\psi \ : x \mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(x(s)) + b(s))\mathrm{d}s \right)$$

de $\mathcal{C}^1(I,E)$ dans lui-même.

XVII.a

1.2. Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

Définition (Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n)

On appelle *équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n* toute équation de la forme

$$\mathcal{E}_n \ : \quad a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t),$$

où $a_0, \ldots, a_n, b$ sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, et où a_n n'est pas identiquement nulle.

On dit que cette équation est *résolue* si a_n est constante de valeur 1.

Une fonction $f \ : I \to \mathbb{K}$ est dite *solution* de $\mathcal{E}_n$ si elle est n fois dérivable sur I, et si, pour tout $t \in I$:

$$a_n(t)f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)f(t) = b(t)$$

La fonction b est appelée *second membre* de $\mathcal{E}_n$, et $\mathcal{E}_n$ est dite *homogène* (ou *sans second membre*) si b est la fonction nulle.

L'*équation homogène associée* à $\mathcal{E}_n$ est l'équation

$$\mathcal{H}_n \ : \quad a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$$

XVII.iii

Ne pas oublier que par définition, une solution de $\mathcal{E}_n$ doit être n fois dérivable. Si a_n ne s'annule pas, une solution de $\mathcal{E}_n$ est même de classe $\mathcal{C}^n$, et l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$ a les mêmes solutions que l'équation résolue

$$\mathcal{E}'_n \ : \quad y^{(n)} + \alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0(t)y = \beta(t),$$

où $\alpha_k = \frac{a_k}{a_n}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\beta = \frac{b}{a_n}$.

Hypothèse simplificatrice : sauf mention contraire (pour la définition d'un problème de Cauchy, et en fin de chapitre), on se place dans le cas où $\mathcal{E}_n$ est une équation différentielle résolue.

Soit $y\ : I \to \mathbb{K}$ une fonction n fois dérivable. En posant $Y \overset{def}{=} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$,

$$A \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix},$$

la résolution de $\mathcal{E}_n$ revient à celle du système différentiel linéaire d'ordre 1

$$Y' = A(t)Y + B(t)$$

Ainsi, nous pourrons appliquer les résultats relatifs aux EDL vectorielles d'ordre 1 au cas des EDL scalaires résolues d'ordre n.

Définition (Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n)

Le système

$$\mathcal{C}_n \ : \quad \begin{cases} a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ y^{(k)}(t_0) = y_k \end{cases}$$

est appelé *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$ d'ordre n et aux conditions initiales

$$y^{(k)}(t_0) = y_k,$$

$k \in [\![0, n-1]\!]$.

XVII.iv

On fixe dans la suite un tel problème de Cauchy $\mathcal{C}_n$.

Exemple (Problème de Cauchy pour une EDL scalaire d'ordre n)

Vous avez vu, en MPSI, de tels exemples de problèmes de Cauchy, à l'ordre 2, comme :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-t} + e^{2t} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

Outre le passage de l'ordre 2 à l'ordre n, il faut noter que désormais, les coefficients $a_0, \dots, a_n$ ne sont plus nécessairement constants, mais des fonctions.

iii

Le fait de définir ainsi un problème de Cauchy pour l'ordre n s'explique bien par le lien que l'on a établi entre les EDL scalaires résolues d'ordre n et les EDL vectorielles d'ordre 1 (les conditions initiales pour y correspondent à la donnée d'une condition initiale pour la colonne Y).

1.3. Premières conséquences de la linéarité

Pour toute EDL $\mathcal{G}$, nous noterons $\mathcal{S}_\mathcal{G}$ l'ensemble de ses solutions.

Les applications

$$x \mapsto (t \mapsto x'(t) - a(t)(x(t)))$$

et

$$y \mapsto a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y$$

sont linéaires (de $D^1(I, E)$ vers $\mathcal{F}(I, E)$ pour la première, de $D^n(I, \mathbb{K})$ vers $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ pour la seconde), car la dérivation et la multiplication par une fonction donnée le sont, et car pour tout $t \in I$, $a(t)$ est linéaire.

C'est la raison pour laquelle on parle d'équation différentielle *linéaire*.

Notons ∇ l'une quelconque de ces deux applications. Résoudre $\mathcal{E}$ comme $\mathcal{E}_n$ revient à déterminer $\nabla^{-1}(\{b\})$, c'est-à-dire les fonctions f telles que $\nabla(f) = b$.

Résoudre $\mathcal{H}$ comme $\mathcal{H}_n$ revient à déterminer le noyau de ∇.

En particulier, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et celui de $\mathcal{E}$, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, E)$, de direction $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

Autrement dit, si on dispose d'une *solution particulière* f_0 de $\mathcal{E}$, alors

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = f_0 + \ker(\nabla) = \{f_0 + h, h \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

La linéarité des équations différentielles étudiées justifie donc l'approche suivante pour la résolution de $\mathcal{E}$:

(1) Résoudre d'abord $\mathcal{H}$.

(2) Trouver une solution particulière de $\mathcal{E}$.

(3) Conclure, en exprimant la solution générale[1] de $\mathcal{E}$ comme somme de la solution particulière trouvée, et de la solution générale de $\mathcal{H}$.

Cette linéarité justifie également la proposition suivante :

Proposition (Principe de superposition)

Soit b_1 et b_2 des fonctions continues de I dans E. On suppose que f_1 et f_2 sont des solutions respectives de

$$x' = a(t)(x) + b_1(t) \quad \text{et} \quad x' = a(t)(x) + b_2(t)$$

Pour tous scalaires λ_1 et λ_2, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est alors solution de

$$x' = a(t)(x) + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

XVII.1

Démonstration

□

Le lecteur adaptera sans problème ce principe de superposition au cas des EDL scalaires d'ordre n.

Exemple (Résolution d'une EDL)

En première année, vous avez résolu une équation telle que

$$\mathcal{E} \ : \quad y'' + y = \cos(2t)$$

en résolvant d'abord son équation homogène associée $\mathcal{H}$. La solution générale de $\mathcal{H}$ est

$$t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On peut trouver une solution particulière, telle que $t \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2t)$, ce qui permet de conclure : la solution générale de $\mathcal{E}$ est

$$t \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2t) + \lambda \cos(t) + \mu \sin(t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

iv

1. La *solution générale* d'une équation consiste en l'écriture paramétrée de *toutes* ses solutions.

2. Résolution théorique : le théorème de Cauchy linéaire

Théorème de Cauchy linéaire, cas vectoriel XVII.2

Le problème de Cauchy

$$\mathcal{C} \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution sur I.

Démonstration

Non exigible. Je ne donne que les grandes lignes. L'idée consiste à montrer que la fonction ψ définie dans la remarque XVII.a page 413 admet un unique point fixe.
Pour l'existence, on définit une suite récurrente (f_n) d'applications de I dans E par récurrence, de terme initial f_0 constante de valeur x_0, et d'itératrice ψ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad f_{n+1}(t) \stackrel{def}{=} x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(u)(f_n(u)) + b(u)) \, \mathrm{d}u$$

On montre alors que cette suite de fonctions converge uniformément sur tout segment $|t_0, t|$ vers une fonction f, qui s'avère être un point fixe de ψ, et donc une solution de $\mathcal{C}$.
Pour l'unicité, on considère deux solutions f et g, et on utilise à nouveau ψ pour montrer que $f = g$ sur tout segment $|t_0, t|$.

□

Ce résultat est très important pour comprendre la structure de l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$.

Il permet par exemple de montrer qu'une solution non identiquement nulle d'une EDL vectorielle homogène d'ordre 1 ne s'annule jamais. Les résultats de ce genre, donnant des renseignements sur le comportement [2] des solutions d'une équation différentielle, sans pour autant expliciter lesdites solutions, sont dits *qualitatifs*.

Cependant, bien que la démonstration soit en partie effective (on construit une solution pour l'existence), il est rare qu'elle permette d'expliciter une solution. Il existe des cas particuliers où on peut calculer la suite de fonctions (f_n) puis sa limite simple f, unique solution de $\mathcal{C}$, mais cela reste marginal.

Corollaire (Cas des EDL scalaires résolues d'ordre n) XVII.3

Le problème de Cauchy

$$\mathcal{C}_n \ : \ \left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t) y = b(t) \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ y^{(k)}(t_0) = y_k \end{array} \right.$$

admet une unique solution sur I.

Nous verrons que ce résultat peut tomber en défaut si l'EDL scalaire d'ordre n n'est pas résolue.

Corollaire (Cas des équations homogènes vectorielles d'ordre 1) XVII.4

Pour t_0 dans I, l'application

$$\Phi_{t_0} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{\mathcal{H}} & \to & E \\ x & \mapsto & x(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces-vectoriels.
En particulier, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$ de dimension p.

2. Comme l'étude des points d'annulation, de la monotonie, de la convexité, de la périodicité, de la limite en $+\infty$, etc.

Démonstration

$\square$

Corollaire (Cas des équations scalaires résolues homogènes d'ordre n)

$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_n}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ de dimension n. Pour t_0 dans I, l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{t_0} : & \mathcal{S}_{\mathcal{H}_n} & \to & \mathbb{K}^n \\ & y & \mapsto & (y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)) \end{array}$$

est un isomorphisme de cet espace sur $\mathbb{K}^n$.

XVII.5

Définition (Système fondamental de solutions,)

On appelle *système fondamental de solutions* de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{H}_n$) toute base $(f_1, \ldots, f_p)$ (resp. $(f_1, \ldots, f_n)$) de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ (resp. de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_n}$).

XVII.v

Définition (Wronskien pour une EDL vectorielle homogène d'ordre 1)

Étant donné une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de solutions de $\mathcal{H}$, on appelle *wronskien* de $(f_1, \ldots, f_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ l'application

$$W : t \in I \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \ldots, f_p(t))$$

XVII.vi

Définition (Wronskien pour une EDL scalaire homogène d'ordre n)

Étant donné une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ de solutions de $\mathcal{H}_n$, on appelle *wronskien* de $(f_1, \ldots, f_n)$ l'application

$$W : t \in I \mapsto \det(f_j^{(i)}(t))_{(i,j) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![1, n]\!]}$$

XVII.vii

Exemple (Wronskien pour une EDL scalaire d'ordre 2)

On utilisera surtout le wronskien dans le cas d'une EDL homogène scalaire d'ordre 2 (c'est le seul wronskien qui figure explicitement au programme), qui vaut dans ce cas

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$$

Par exemple, pour l'équation différentielle $y''+y=0$, un système fondamental de solution est (f_1, f_2), où $f_1 \overset{def}{=} \cos$ et $f_2 \overset{def}{=} \sin$. Le wronskien à l'instant $t \in \mathbb{R}$ est le déterminant de la matrice

$$Wm(t) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire 1. D'ailleurs, on peut remarquer plus précisément que $Wm(t)$ est une matrice orthogonale positive. On a donc notamment : $Wm(t)^{-1} = Wm(t)^T$.

v

Exemple (Cas d'une équation $y'' + q(t)y = 0$)

Dans le cas d'une équation de la forme

$$y'' + q(t)y = 0,$$

on vérifie que le wronskien est constant.

vi

Proposition (Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions)

Soit $f_1, \dots, f_p$ des solutions de $\mathcal{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $(f_1, \dots, f_p)$ est un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$.

(2) Il existe $t \in I$ tel que $W(t) \neq 0$.

(3) Pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$.

XVII.6

Démonstration

□

On a bien sûr une proposition analogue pour $\mathcal{H}_n$.

3. Résolution pratique

Le théorème de Cauchy linéaire nous a permis de comprendre la structure des ensembles de solutions de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_n$, et même $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_n$. Cependant, il ne nous a fourni aucune expression exploitable pour résoudre ces diverses équations. La présente section a pour but de donner des techniques de résolution de certaines des équations différentielles considérées.

3.1. Rappels sur l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

On rappelle que l'on a défini l'exponentielle d'un élément u d'une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie, comme la somme de la série exponentielle (absolument convergente)

$$\sum \frac{u^n}{n!}$$

On la note $\exp(u)$ ou e^u.

En particulier, cela définit l'exponentielle d'un endomorphisme a de E, ou d'une matrice carrée A de taille p.

Tous les résultats de cette sous-section ont été établis. Vous pouvez donner un résumé de démonstration dans les cadres adéquats.

Proposition (Continuité de l'exponentielle) XVII.7

La fonction exponentielle, de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même, est continue.

Démonstration

$\square$

De même bien sûr pour la fonction exponentielle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans lui-même.

Proposition (Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent) XVII.8

Si a et b sont deux endomorphismes de E tels que $ab = ba$, alors

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

Démonstration

Non exigible.
On peut utiliser la notion de produit de Cauchy de séries absolument convergentes. $\square$

On peut en particulier observer que $\exp(a)$ est un automorphisme de E, d'inverse $\exp(-a)$.

Plus précisément,

$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \mathbb{K} & \to & \mathrm{GL}(E) \\ & t & \mapsto & \exp(ta) \end{array}$$

est un morphisme du groupe $(\mathbb{K},+)$ vers $(\mathrm{GL}(E),\circ)$.

Proposition (Dérivation d'un paramétrage exponentiel) XVII.9

L'application $\varphi_a \ : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(ta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel t :

$$\varphi_a'(t) = a\varphi_a(t) = \varphi_a(t)a = a\exp(ta) = \exp(ta)a$$

Démonstration

□

Le lecteur adaptera sans problème ces résultats au cadre matriciel.

3.2. EDL scalaire d'ordre 1 résolue (rappels de MPSI)

Soit a et b des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.
Pour résoudre l'équation différentielle

$$\mathcal{E} \ : \quad y' - a(t)y = b(t),$$

on résout d'abord l'équation homogène associée

$$\mathcal{H} \ : \quad y' - a(t)y = 0$$

L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de $\mathcal{H}$ est une droite vectorielle dirigée par $f_0 \ : t \mapsto e^{A(t)}$, où A est une primitive de a sur I.

Pour trouver une solution particulière de $\mathcal{E}$ (si on n'en trouve pas d'évidente), on utilise la méthode de variation de la constante : on cherche (sans perte de généralité) une solution particulière sous la forme

$$f \ : t \mapsto C(t)f_0(t),$$

où C est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$. On trouve que f est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout $t \in I$:

$$C'(t)f_0(t) = b(t)$$

ce qui ramène à calculer une primitive. Si on fixe a dans I, on peut par exemple prendre :

$$f \ : t \mapsto \left(\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\mathrm{d}s\right) e^{A(t)} = \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)}b(s)\mathrm{d}s$$

Cette formule (à ne pas retenir) donne l'unique solution de $\mathcal{E}$ sur I nulle en t_0.

L'unique solution de $\mathcal{E}$ valant y_0 en t_0 est :

Exercice de révision de techniques de MPSI : 1418 (sauf la dernière question).

3.3. EDL vectorielle d'ordre 1 homogène à coefficients constants

On se place dans le cas particulier, fréquemment étudié en pratique, où a est une fonction constante, que l'on confondra avec son unique valeur, qui est ici un endomorphisme de E : $a \in \mathcal{L}(E)$. On cherche à résoudre l'EDL vectorielle d'ordre 1 homogène à coefficients constants

$$\mathcal{H} \ : \quad x' = a(x)$$

d'inconnue $x \ : I \to E$ dérivable.

Théorème (Résolution d'un problème de Cauchy vectoriel homogène à coefficients constants) XVII.10

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$, et $x_0 \in E$. L'unique solution du problème de Cauchy homogène

$$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$

est la fonction

$$f_0 \ : t \mapsto \exp((t-t_0)a)(x_0)$$

Démonstration

□

La solution générale de $\mathcal{H}$ est donc $t \mapsto e^{ta}(v)$, où v décrit E.

3.4. Systèmes différentiels homogènes à coefficients constants

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On cherche à résoudre l'équation :

$$\mathcal{H} \;:\quad X' = AX$$

d'inconnue $X\ : I \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dérivable.

Théorème (Résolution d'un problème de Cauchy matriciel homogène à coefficients constants) XVII.11

Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. L'unique solution du problème de Cauchy homogène

$$X' = A\,X, \quad X(t_0) = X_0$$

est la fonction

$$f\ : t \mapsto \exp((t-t_0)A)\,X_0$$

La solution générale de $\mathcal{H}$ est donc $t \mapsto e^{tA}V$, où V décrit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Sur le calcul de l'exponentielle d'une matrice XVII.b

Comment, en pratique, calculer l'exponentielle d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$? Si A est nilpotente, c'est très facile :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}$$

Si A est diagonalisable, ce n'est pas difficile, car si $A = P^{-1}DP$, alors

$$\exp(A) = P^{-1}\exp(D)P$$

Dans le cas général, on pourra utiliser la réduction la plus fine vue en cours, à savoir celle consistant à écrire A comme la somme d'une matrice nilpotente et d'une matrice diagonalisable qui commutent (pour la multiplication).
Pour les calculs explicites, le programme se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.
On peut observer que le comportement asymptotique des solutions est essentiellement régi par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice A.

La réduction de A donne donc des renseignements sur les solutions de l'équation $X' = AX$. On pourra utiliser l'observation suivante :

Proposition (Solutions d'une EDL homogène à coefficients constants et vecteurs propres)

XVII.12

Soit V un vecteur non nulde $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction

$$t \mapsto e^{\lambda t} V$$

est solution de

$$X' = AX$$

si et seulement si V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Démonstration

□

Bien sûr, pour savoir si λ est valeur propre de A, on pourra tester si $\chi_A(\lambda) = 0$.

Si A est diagonalisable, une diagonalisation effective de A donne, grâce à la proposition précédente, un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$.

Exercice d'application directe conseillé : 1396.

3.5. EDL scalaire homogène à coefficients constants

On cherche à résoudre l'équation différentielle scalaire homogène d'ordre n

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont des scalaires, d'inconnue $y\ : I \to \mathbb{K}$, n fois dérivable.

Vous avez traité ces équations en MPSI, dans le cas où $n = 2$.

En « vectorialisant » cette équation différentielle, on a

$$A \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et on peut vérifier qu'alors

$$\chi_A = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

donc λ est valeur propre si et seulement si λ est solution de l'*équation caractéristique*

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

c'est-à-dire racine du *polynôme caractéristique*

$$P \stackrel{def}{=} X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

En pratique, si on note $((\lambda_i, r_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la famille des racines de P (supposé scindé sur $\mathbb{K}$), données avec leurs multiplicités, on peut vérifier qu'un système fondamental de solution de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

est constitué des $t \mapsto t^k e^{\lambda_i t}$, où i décrit $[\![1, p]\!]$, et, pour i fixé, k décrit $[\![0, r_i - 1]\!]$.

3.6. EDL vectorielle d'ordre 1 à coefficients constants

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\mathcal{E} \ : \quad x' = a(x) + b(t),$$

où $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$, d'inconnue $x \ : I \to E$ dérivable.

On a déjà résolu l'équation homogène associée en 3.3.

Théorème (Résolution d'une EDL vectorielle d'ordre 1 à coefficients constants) XVII.13

Si $a \in \mathcal{L}(E)$, l'unique solution de

$$\mathcal{C} \ : \ \begin{cases} x' &= a(x) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

est la fonction

$$t \mapsto e^{(t-t_0)a}(x_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a}(b(s))\mathrm{d}s$$

Démonstration

□

Ainsi, nous avons résolu les EDL vectorielles d'ordre 1 dans le cas où a est constant.

3.7. Méthode de variation des constantes

On revient au cas général d'une EDL vectorielle d'ordre 1 à coefficients non nécessairement constants.

$$\mathcal{E} \ : \quad x' = a(t)(x) + b(t),$$

d'inconnue $x \ : I \to E$, où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.

Nous ne donnons pas de méthode générale pour résoudre $\mathcal{H}$, mais nous expliquons ici comment passer de la résolution de $\mathcal{H}$ à celle de $\mathcal{E}$, en s'inspirant de la méthode de variation de la constante rappelée en 3.2.

Supposons disposer d'un système fondamental de solutions $(f_1, \dots, f_p)$ de $\mathcal{H}$ (et donc que nous ayons résolu $\mathcal{H}$), et soit W le wronskien associé (dans une base fixée $\mathcal{B}$ de E). Il nous reste à trouver une solution particulière de $\mathcal{E}$ pour trouver $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.

Les fonctions f_i sont de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$. Les formules de Cramer montrent alors que toute fonction $g \ : I \to E$, dérivable, peut s'écrire (de manière unique d'ailleurs) sous la forme

$$g = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$$

où les λ_i sont des *fonctions* dérivables de I dans $\mathbb{K}$: nous pouvons donc sans perte de généralité chercher une solution particulière de $\mathcal{E}$ sous cette forme.

Bien sûr,

$$g' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' f_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i',$$

Comme les f_i sont des solutions de $\mathcal{H}$, il y a donc équivalence entre le fait que g soit solution de $\mathcal{E}$ et le fait que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i' f_i = b$$

En inversant, pour chaque t, le système

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i'(t) f_i(t) = b(t)$$

dont les inconnues sont les $\lambda_i'(t)$, puis en intégrant, on obtient une solution particulière de $\mathcal{E}$ (et même toutes ses solutions si on laisse les constantes d'intégration varier librement).

Cette méthode de résolution de $\mathcal{E}$, étant donné un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$, est appelée *méthode de variation des constantes*. En effet, elle revient à remplacer des *constantes scalaires* λ_i, dans l'expression $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$ (donnant une solution de $\mathcal{H}$), par des *fonctions*, afin de déterminer une solution particulière de $\mathcal{E}$.

Dans les exercices, on se limite en pratique au cas où $n = 2$.

Dans le cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants, on connaît un système fondamental de solutions (sous réserve de pouvoir calculer explicitement l'exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice).

3.8. EDL scalaires résolues du second ordre

On s'intéresse ici au cas particulier des EDL scalaires du second ordre résolues

$$\mathcal{E} \quad : \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = \delta(t)$$

où a, b et δ sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

En MPSI, vous avez résolu ces équations lorsque $n = 2$, que a et b sont en fait des constantes, et que δ est de la forme $x \mapsto A\, e^{\lambda x}$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$ ou $x \mapsto B \sin(\omega x)$, où $A, \lambda \in \mathbb{C}$, $B, \omega \in \mathbb{R}$.

Première étape : vectorialisation de $\mathcal{E}$

En posant $Y \overset{def}{=} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, ainsi que, pour tout $t \in I$:

$$A(t) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D(t) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(t) \end{pmatrix}$$

résoudre $\mathcal{E}$ revient à résoudre le système différentiel linéaire suivant

$$\mathcal{E}' \quad : \quad Y' = A(t)Y + D(t)$$

Deuxième étape : résoudre $\mathcal{H}$.

Pour résoudre l'équation homogène associée

$$\mathcal{H} \quad : \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = 0,$$

on connaît depuis la MPSI une méthode explicite dans le cas où l'équation est à coefficients constants, c'est-à--dire lorsque a et b sont en fait constantes. La méthode détaillée en première année n'est qu'un cas particulier de l'étude effectuée en 3.3.

J'invite d'ailleurs le lecteur à confronter les deux points de vue de MPSI et de MP, et à vérifier qu'ils concordent bien.

Résoudre l'équation homogène associée dans le cas général (lorsque a ou b n'est pas constante), est bien plus difficile. On se gardera en particulier de parler d'équation caractéristique dans ce cas.

On sait que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un plan vectoriel (par le théorème de Cauchy linéaire), mais il est délicat en général d'en trouver une base : le plus souvent, l'énoncé vous guidera face à une telle équation, en vous proposant par exemple un changement de variable pour vous ramener à un cas déjà connu, ou en vous faisant trouver les solutions développables en série entière.

Méthode de Lagrange, ou d'abaissement de l'ordre

On peut toutefois retenir une méthode intéressante, qui est encore une forme de variation de la constante (même si on ne l'appelle pas ainsi) : une fois une solution non nulle (idéalement qui ne s'annule pas) f_0 de $\mathcal{H}$ trouvée, on peut chercher d'autres solutions sous la forme

$$f\ : t \mapsto C(t) f_0(t)$$

Cela conduit à résoudre une équation différentielle satisfaite par C', et d'ordre 1. C'est pourquoi cette méthode est parfois appelée méthode de l'*abaissement de l'ordre*. On l'appelle également méthode de Lagrange.

XVII.c

Lien entre la méthode de Lagrange et le cours de MPSI

En fait, c'est probablement ce que vous avez fait en MPSI pour déterminer l'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants : vous avez d'abord cherché *une* solution de la forme $t \mapsto e^{rt}$ (c'est le cas si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique), puis vous avez trouvé *toutes* les solutions, en les cherchant sous la forme $t \mapsto C(t)e^{rt}$.

XVII.d

Troisième étape : recherche d'une solution particulière de $\mathcal{E}$.

Une fois un système fondamental (f_1, f_2) de solutions de $\mathcal{H}$ trouvé, reste à déterminer une solution particulière de $\mathcal{E}$.

La méthode de variation des constantes, vue pour les EDL vectorielles d'ordre 1, s'adapte sans difficulté aux EDL scalaires d'ordre n. Explicitons-la dans le cas particulier où $n = 2$ (il faut savoir la mettre en œuvre rapidement).

On pose $F_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}$. On cherche des fonctions dérivables λ_1 et λ_2, de I dans $\mathbb{K}$, telles que $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ soit solution de $\mathcal{E}'$, ce qui revient à

$$\lambda_1' F_1 + \lambda_2' F_2 = D$$

ou encore, en posant $Wm \overset{def}{=} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix}$, à

$$Wm \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

soit enfin à

$$\mathcal{S}\ :\quad \left\{ \begin{array}{rcl} f_1(t)\lambda_1'(t) + f_2(t)\lambda_2'(t) & = & 0 \\ f_1'(t)\lambda_1'(t) + f_2'(t)\lambda_2'(t) & = & \delta(t) \end{array} \right.$$

pour tout $t \in I$.

Ainsi :

Proposition (Variation des constantes pour les EDL scalaires résolues d'ordre 2)

Soit (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$, λ_1 et λ_2 des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$.
Pour que la fonction

$$g\ : t \mapsto \lambda_1(t) f_1(t) + \lambda_2(t) f_2(t)$$

soit solution de $\mathcal{E}$, il suffit que, pour tout $t \in I$, le système de relations

$$\mathcal{S}\ :\quad \left\{ \begin{array}{rcl} f_1(t)\lambda_1'(t) + f_2(t)\lambda_2'(t) & = & 0 \\ f_1'(t)\lambda_1'(t) + f_2'(t)\lambda_2'(t) & = & \delta(t) \end{array} \right.$$

(qui est de Cramer en les inconnues $\lambda_1'(t)$ et $\lambda_2'(t)$), soit vérifié.

XVII.14

Wm est un wronskien « matriciel », que l'on pourrait appeler *matrice de Wronski*, le wronskien désignant le déterminant d'une telle matrice.

Exemple (Variation des constantes)

Cherchons les solutions de
$$\mathcal{E} \; : \quad y'' + y = g(t)$$
où g est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.
Un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$ est $(f_1, f_2) \overset{def}{=} (\cos, \sin)$.
Le système
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1(t)\lambda_1'(t) + f_2(t)\lambda_2'(t) & = & 0 \\ f_1'(t)\lambda_1'(t) + f_2'(t)\lambda_2'(t) & = & g(t) \end{array} \right.$$
s'inverse en
$$\lambda_1'(t) = -\sin(t)g(t) \quad \text{ et } \quad \lambda_2'(t) = \cos(t)g(t)$$
Ainsi, une solution particulière de $\mathcal{E}$ est
$$t \mapsto \left(-\int_a^t \sin(s)g(s)\mathrm{d}s \right) \cos(t) + \left(\int_a^t \cos(s)g(s)\mathrm{d}s \right) \sin(t) = \int_a^t \sin(t-s)g(s)\mathrm{d}s$$
(où on s'est donné un point a de I), et la solution générale de $\mathcal{E}$ est
$$t \mapsto \int_a^t \sin(t-s)g(s)\mathrm{d}s + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t),$$
où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

vii

3.9. Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues

Que se passe-t-il si on travaille avec une équation non résolue (on dit aussi *avec problème de raccord*), comme
$$\mathcal{E}_1 \; : \quad a(x)y' + b(x)y = c(x)$$
ou
$$\mathcal{E}_2 \; : \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$
Bien sûr, sur un intervalle J où a ne s'annule pas, nous sommes ramenés à une étude connue. Reste à savoir comment raccorder les solutions obtenues sur ces intervalles.

Il faut bien comprendre la nouveauté de cette situation. En particulier, le théorème de Cauchy linéaire ne s'applique pas : on n'est sûr ni de l'existence, ni de l'unicité d'une solution.

L'étude se fait au cas par cas, en n'oubliant pas que les solutions sont par définition dérivables, et même deux fois dérivables dans le cas de $\mathcal{E}_2$.

On peut par ailleurs exploiter la recherche de solutions développables en série entière.

Exercice de mise en œuvre conseillé : 1417

Exercice d'approfondissement conseillé : 1385

CHAPITRE XVIII

Calcul différentiel

Sommaire

On peut tenter d'étendre l'étude de régularité des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles $f : I \to \mathbb{R}$, essentiellement menée en première année, en passant à une fonction $f : U \to F$ où U est une partie d'un EVN E de dimension finie, et où F est aussi un EVN de dimension finie.

Jusqu'à présent, nous avons :

– étendu la notion de continuité, dans le chapitre sur les EVN. Pour la seule continuité, il n'est pas problématique « d'agrandir » la source et le but de f.

– étendu la notion de dérivabilité, dans le chapitre sur les fonctions vectorielles. Pour la dérivabilité, agrandir le but de f ne change pas fondamentalement les résultats. On pouvait d'ailleurs se ramener au cas de fonctions à valeurs réelles en considérant les fonctions coordonnées.

Ces chapitres étaient certes plus abstraits qu'en première année, mais les études de continuité et de dérivabilité qui y étaient menées n'étaient pas si différentes de celles effectuées en MPSI.

Il faut bien avoir conscience qu'agrandir la source de f est bien plus problématique. Il n'y a notamment pas d'équivalent des fonctions coordonnées.

Si l'on s'intéresse à une extension de la dérivabilité, qui s'appliquerait à une fonction $f : U \subset E \to \mathbb{R}$, où $E \neq \mathbb{R}$, on est limité par l'absence de notion de taux d'accroissement entre deux vecteurs de E.

Dans une première partie, nous allons pallier cette difficulté, en nous intéressant à des fonctions d'une variable réelle, liées à f, de la forme $t \mapsto f(a + th)$ (où h est un vecteur de E) : on peut alors se rattacher à la dérivation usuelle. Cela nous conduira à définir la dérivée d'une fonction en un point selon un vecteur, puis les dérivées partielles premières d'une fonction en un point, qui en sont des cas particuliers.

Nous verrons cependant que ces notions ne seront pas de bonnes généralisations de la dérivabilité, notamment car l'existence de ces dérivées en un point n'entraîne pas la continuité en ce même point.

Dans une deuxième partie, nous étendrons, avec succès cette fois-ci, la notion de dérivabilité en partant de l'équivalence entre dérivabilité et existence d'un développement limité à l'ordre 1 : cela conduira à la notion de différentielle.

On continue l'étude en définissant les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, et en étudiant la stabilité de cette propriété.

Dans la suite, tous les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{R}$ pour corps des scalaires. On fixe des espaces vectoriels normés de dimension finie E, F et G, et des bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de ces espaces. U désigne un ouvert (non vide) de E.

$\mathcal{C}_n$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Quand on travaillera dans $\mathbb{R}^n$, on travaillera implicitement dans la base $\mathcal{C}_n$, et on le munira de sa structure euclidienne canonique.

Comme on travaille en dimension finie, les normes sont équivalentes, et les notions abordées dans ce chapitre ne dépendront pas de la norme choisie.

Dans la suite, f désigne une application de U dans F.

1. Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Définition (Dérivée selon un vecteur)

Soit a un point de U, et h un vecteur de E. On dit que f admet une *dérivée en a selon le vecteur h* si la fonction vectorielle

$$\varphi_{a,h} \ : t \mapsto f(a+th)$$

définie au voisinage de 0, est dérivable en 0. Dans ce cas, $\varphi'_{a,h}(0)$ est appelée *dérivée de f en a selon le vecteur h*, et noté $\mathrm{D}_h f(a)$.
On définit ainsi une application $\mathrm{D}_h f$ (sur une partie de U), appelée *fonction dérivée de f selon le vecteur h.*

XVIII.i

Démonstration

Justification du fait que la fonction ci-dessus $\varphi_{a,h}$ soit bien définie au voisinage de 0 :

□

f admet une dérivée en a selon h si et seulement si $\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ admet une limite l (dans F) lorsque t tend vers 0, et on a alors $\mathrm{D}_h f(a) = l$.

f admet toujours en a une dérivée selon le vecteur nul, qui est nulle : dériver selon ce vecteur présentant peu d'intérêt, on ne traitera parfois que le cas d'un vecteur non nul.

Définition (Dérivées partielles premières en un point)

Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E étant fixée, on dit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $a \in U$, que f admet une *dérivée partielle (première) selon la i-ème variable en a* si f admet une dérivée en a selon le vecteur e_i.
Si elle existe, cette dérivée partielle est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$.
Cela définit une application dérivée partielle (première) de f selon la i-ème variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_i f$.

XVIII.ii

f admet une dérivée partielle première selon la i-ème variable si et seulement si

$$\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$$

admet une limite dans F lorsque t tend vers 0.

Lorsqu'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$ est autorisée. f admet alors une dérivée partielle première en $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ selon la première variable[1] si et seulement si $t \mapsto f(\alpha_1 + t, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est dérivable en 0, *i.e.*

$$t \mapsto \frac{f(\alpha_1 + t, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}{t}$$

admet une limite finie en 0.

De même bien sûr, pour la dérivée partielle première selon une autre variable.

En dimension 2, on écrit plutôt x et y que x_1 et x_2 respectivement, donc on écrira $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles premières respectives selon la première et la seconde variable. De même en dimension 3 avec x, y, z.

En pratique, la fonction $f \ : (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y)$ admet une dérivée partielle première selon sa première variable en $(x_0, y_0) \in U$ si et seulement si $\alpha \ : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, et on a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha'(x_0)$$

1. On dit aussi, abusivement : selon x_1

et elle admet une dérivée partielle première selon la seconde variable en ce point si et seulement si $\beta\ : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 et on a alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \beta'(y_0)$$

Exemple (Dérivées partielles première et seconde en l'origine)

(1) La fonction

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ et } f(0, 0) = 0$$

est continue à l'origine, et elle y admet des dérivées selon tout vecteur.

(2) La fonction $g\ : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x+y|$ est continue à l'origine, mais elle n'y admet pas de dérivées partielles premières en ce point.

(3) La fonction

$$h : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ et } h(0, 0) = 0$$

admet des dérivées partielles premières en l'origine, mais elle n'y est pas continue. h n'admet pas des dérivées selon tout vecteur.

(4) La fonction

$$k : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \text{ et } k(0, 0) = 0$$

admet des dérivées selon tout vecteur en l'origine, mais qu'elle n'y est pas continue.

i

Quelle morale tirer de ces exemples ?

– Le deuxième exemple montre que la continuité n'entraîne pas l'existence de dérivées partielles premières. Ce n'est pas surprenant, la continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles en un point n'entraînait déjà pas sa dérivabilité en ce point.
– Le troisième exemple montre que l'existence de dérivées partielles premières en un point n'entraîne pas la continuité en ce point. Cela montre que remplacer la dérivabilité par l'existence de dérivées partielles premières n'est pas très pertinent.
– Le dernier exemple va un cran plus loin : il montre que l'existence de dérivées selon *tout* vecteur en un point n'entraîne pas la continuité en ce point. Remplacer la dérivabilité par l'existence de dérivées selon tout vecteur n'est pas non plus très pertinent : nous allons plutôt utiliser la caractérisation de la dérivabilité d'une fonction vectorielle f en un point a par l'existence pour f d'un développement limité à l'ordre 1 en a.

Il faut bien comprendre le rôle purement formel du x et du y dans les expressions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemple (Calculs simples de dérivées partielles premières)

Soit $f\ : (x, y) \mapsto x^2 y^3$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^3 - x, y) = \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) =$$

ii

2. Différentielle

2.1. Généralités

Définition (Développement limité à l'ordre 1 en un point d'une fonction entre EVN)

On dit que f admet un *développement limité* à l'ordre 1 en a s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \mathrm{o}(h)$$

i.e. telle que

$$\frac{f(a+h) - f(a) - \varphi(h)}{\|h\|} \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0_F$$

XVIII.iii

f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si ses fonctions coordonnées (dans une base donnée de F) en admettent un également. Cela nous permet de nous restreindre, si besoin est, au cas d'une fonction à valeurs réelles.

Lemme (Développement limité à l'ordre 1 et dérivée selon un vecteur)

Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \mathrm{o}(h),$$

alors f est dérivable selon tout vecteur h en a, et

$$D_h f(a) = \varphi(h)$$

XVIII.1

Démonstration

□

Ainsi, une fonction $f : E \to F$ admet au plus un développement limité en un point a donné : dans la définition ci-dessus, au plus une application linéaire φ est susceptible de convenir.

Définition (Différentiabilité d'une application en un point)

On dit que f est *différentiable* en a si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a :

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \mathrm{o}(h)$$

L'application linéaire φ est appelée *différentielle* de f en a, ou encore *application linéaire tangente* à f en a, et notée $\mathrm{d}f(a)$.
Pour tout $h \in E$, on notera $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ le vecteur $(\mathrm{d}f(a))(h)$ de F, de sorte que

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(h)$$

XVIII.iv

En quelque sorte, la différentielle de f en a est la partie linéaire de f localement en a.
D'après le lemme précédent :

Corollaire (Lien entre différentielle et dérivée selon un vecteur)

XVIII.2

Si f est différentiable en a, alors, pour tout vecteur h de E, f admet une dérivée selon h en a, et :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \mathrm{D}_h f(a)$$

En particulier, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f admet une i-ème dérivée partielle en a, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_i$$

Exemple (Différentiabilité d'une application en un point)

iii

Admettre un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est pouvoir être approché, à un négligeable d'ordre 1 près, par une fonction affine (c'est-à-dire la somme d'une fonction constante et d'une application linéaire), ce qui rejoint la définition de la dérivabilité en un point d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.
Dans ce dernier cas, si U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a, et on a alors $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$, ou encore

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = f'(a)h$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$.
La différentiabilité est donc bien une généralisation de la dérivabilité.

Illustration

Proposition (Différentiabilité et continuité)

XVIII.3

Si f est différentiable en a, alors elle est continue en a, mais la réciproque est fausse.

Démonstration

□

Définition (Différentielle d'une application)

On dit que l'application f est *différentiable* sur U si elle est différentiable en tout point de U.
Cela définit alors l'application *différentielle* de f, notée $\mathrm{d}f$:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f : & U & \to & \mathcal{L}(E, F) \\ & a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

XVIII.v

Même si $U = E$, il n'y a aucune raison à ce que $\mathrm{d}f$ (de E dans $\mathcal{L}(E, F)$) soit linéaire.

Exemple (Différentielle d'une application)

(1) Si $f : U \to F$ est constante, alors elle différentiable en tout point a de U, et $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

(2) Si $f : E \to F$ est linéaire, alors elle différentiable en tout $a \in E$, et

$$\mathrm{d}f(a) = f$$

(faites attention au typage).

(3) Si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, alors B est différentiable en $a = (a_E, a_F) \in E \times F$, et, pour tout $h = (h_E, h_F) \in E \times F$:

$$\mathrm{d}B(a) \cdot h = B(a_E, h_F) + B(h_E, a_F)$$

(4) Si $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ est m-linéaire, alors φ est différentiable en $a = (a_1, \ldots, a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, et, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$:

$$\mathrm{d}\varphi(a) \cdot h = \varphi(h_1, a_2, \ldots, a_m) + \varphi(a_1, h_2, a_3, \ldots, a_m) + \cdots + \varphi(a_1, \ldots, a_{m-1}, h_m)$$

(5) Si $f : U \to F$ est différentiable en a, et si V est un ouvert de U comprenant a, alors la restriction g de f à V est différentiable en a et $\mathrm{d}g(a) = \mathrm{d}f(a)$.

iv

Plus généralement, la différentiabilité en un point est une notion locale : si f et g sont deux fonctions définies sur des ouverts contenant a, et si elles coïncident au voisinage de a, alors f est différentiable en a si et seulement si g l'est, avec égalité des différentielles en ce point le cas échéant.

Proposition (Lien entre différentielle et dérivées partielles)

On suppose f différentiable en a. La fonction f admet alors des dérivées partielles premières en a selon les variables $x_1, \ldots, x_n$. De plus, on a, pour tout $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in E$:

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

XVIII.4

Démonstration

□

Exemple (Étude de différentiabilité)

(1) La fonction $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^3$ est différentiable en tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$, et sa dérivée en (x_0, y_0) est

(2) Aucune des fonctions f, g, h et k du premier exemple n'est différentiable en $(0, 0)$.

v

Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si on note $\mathrm{d}x_i$ la i-ème forme linéaire coordonnée dans $\mathcal{B}$ (*i.e.* l'application $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto x_i$), et si f est différentiable en a, alors

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i$$

En dimension 2 :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\mathrm{d}y$$

En dimension 3 :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\mathrm{d}z$$

Si f est différentiable sur U, on écrira même directement (et respectivement) :

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i, \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

N'employez ces notations que si vous savez à quoi font référence $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$.

L'existence de dérivées partielles premières [2] au point a n'implique pas la différentiabilité en ce point (la fonction peut même ne pas y être continue).

Exemple (Calcul de la différentielle)

On reprend les fonctions du premier exemple. Nous admettons [a] provisoirement la différentiabilité de f, h et k en tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La différentielle de f par exemple en un tel point (x_0, y_0) est

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f(x_0, y_0) : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \mapsto & \frac{2x_0y_0(x_0^2+y_0^2)-2x_0(x_0^2y_0)}{(x_0^2+y_0^2)^2}\,u + \frac{y_0(x_0^2+y_0^2)-2y_0(x_0^2y_0)}{(x_0^2+y_0^2)^2}\,v \end{array}$$

a. Nous la justifierons aisément grâce au théorème XVIII.19 page 443.

vi

Corollaire (Matrice de la différentielle en un point dans un couple de bases)

On suppose f différentiable en a, et on note $(f_1, \ldots, f_p)$ le p-uplet de ses fonctions composantes dans la base $\mathcal{C}$. La matrice M de $\mathrm{d}f(a)$ dans $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

XVIII.5

2. et même de dérivée selon tout vecteur

Définition (Matrice jacobienne)

Dans le cas où $f = (f_1, \dots, f_p)$ est une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et si f admet des dérivées partielles premières en a, on appelle *matrice jacobienne* de f en a et on note $J_a(f)$ la matrice

$$J_a(f) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

XVIII.vi

C'est donc la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans le couple de bases $(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_p)$. D'ailleurs, pour des raisons pratiques, nous généralisons la notion de jacobienne, en définissant la jacobienne d'une application $f\ : U \to F$ différentiable en a relativement au couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ comme la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ (c'est-à-dire la matrice M du corollaire ci-dessus). Nous la noterons $J_{a,\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, voire $J_a(f)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exemple (Calcul de jacobienne)

La matrice jacobienne

$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

en (r, θ) est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

vii

2.2. Opérations sur les applications différentiables

Proposition (Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables)

Soit $f, g\ : U \to F$ des applications différentiables en $a \in U$. Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a, et :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$$

XVIII.6

Démonstration

□

Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{D}_a(U, F)$ des fonctions de U dans F, différentiables en a, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et l'application

$$\psi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_a(U, F) & \to & \mathcal{L}(E, F) \\ f & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

est linéaire.

Théorème (Différentielle d'une composée d'applications différentiables) XVIII.7

Soit $f : U \to F$, V un ouvert de F contenant $f(U)$, et $g : V \to G$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a, et g différentiable en $b \overset{def}{=} f(a)$. La composée $g \circ f$ est alors différentiable en a, et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a)$$

Démonstration

□

Corollaire (Différentielle de la composée d'une application différentiable par une application linéaire) XVIII.8

Soit $f : U \to F$, différentiable en a, et $L \in \mathcal{L}(F, G)$. La fonction $L \circ f$ est alors différentiable en a, et

$$\mathrm{d}(L \circ f)(a) = L \circ (\mathrm{d}f(a))$$

Démonstration

□

Corollaire (Différentielle d'une composée d'applications différentiables par une application bilinéaire) XVIII.9

Soit $f : U \to F$, $g : U \to G$ des applications différentiables en a, et $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. La fonction $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$ de E dans H est alors différentiable en a, et, pour tout $h \in E$:

$$\mathrm{d}(B(f, g))(a) \cdot h = B(f(a), \mathrm{d}g(a) \cdot h) + B(\mathrm{d}f(a) \cdot h, g(a))$$

Démonstration

□

Exemple (Différentielle d'un produit)

(1) Si $\lambda : U \to \mathbb{R}$ et $f : U \to E$ sont différentiables en a, alors λf est différentiable en a, et, pour tout $h \in E$:
$$\mathrm{d}(\lambda f)(a) \cdot h = (\mathrm{d}\lambda(a) \cdot h) f(a) + \lambda(a)(\mathrm{d}f(a) \cdot h)$$

(2) Si F est une $\mathbb{R}$-algèbre (et donc si $B : (x, y) \in F^2 \mapsto xy$ est bilinéaire), et si $f, g : U \to F$ sont différentiables en a, alors fg est différentiable en a, et pour tout $h \in E$:
$$\mathrm{d}(fg)(a) \cdot h = (\mathrm{d}f(a) \cdot h)\, g(a) + f(a)\, (\mathrm{d}g(a) \cdot h)$$

(3) Si E est euclidien, la fonction $f : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable en tout $x \in E$, et, pour tout $h \in E$:
$$\mathrm{d}f(x) \cdot h = 2 < x, h >$$

(4) La fonction $C : M \mapsto M^2$ est différentiable en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\mathrm{d}\, C(M) \cdot H = MH + HM$$

viii

Corollaire (Différentielle d'une fonction à valeurs réelles)

Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables en a.

(1) fg est différentiable en a, et, pour tout $h \in E$:
$$\mathrm{d}(fg)(a) = (\mathrm{d}f(a) \cdot h) g(a) + f(a)(\mathrm{d}g(a) \cdot h)$$

(2) Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, et si $f(a) \neq 0$, alors $g = \frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a, différentiable en a, et :
$$\mathrm{d}g(a) = -\frac{\mathrm{d}f(a)}{f(a)^2}$$

XVIII.10

Démonstration

□

Proposition (Dérivée le long d'un arc)

Si $\gamma : I \to U$ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t, et
$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

XVIII.11

Démonstration

□

Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Illustration

Dérivation de $g : t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ (lorsque c'est possible) :

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Proposition (Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables)

XVIII.12

Soit $f : U \to F$, de composantes $f_1, \dots, f_p$, V un ouvert de F contenant $f(U)$, et $g : V \to G$ de composantes $g_1, \dots, g_q$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a, et g différentiable en $f(a)$. On a alors

$$J_{a,\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = J_{f(a),\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\, J_{a,\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Démonstration

□

On a donc dans ce contexte, pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, n]\!]$:

$$\partial_j(g_i \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_k g_i(f(a)) \partial_j f_k(a)$$

et donc

$$\partial_j(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_j f_k(a) \partial_k g(f(a))$$

Autrement dit :

Proposition (Règle de la chaîne)

On suppose que

$$f = (f_1, \dots, f_p) \ : (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^p$$

est différentiable en a.
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que $f(U) \subset V$, et

$$g = (g_1, \dots, g_q) \ : (y_1, \dots, y_p) \in V \mapsto g(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^q$$

une application différentiable en $f(a)$.
La fonction

$$h \overset{def}{=} g \circ f = (h_1, \dots, h_q) = (g_1 \circ f, \dots, g_q \circ f) \ : (x_1, \dots, x_n) \mapsto h(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^q$$

admet alors des dérivées partielles premières selon la j-ème variable en a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

XVIII.13

Exercice d'assimilation conseillé : 1470.

3. Cas des applications numériques

On s'intéresse ici au cas des applications numériques (c'est-à-dire à valeurs réelles) $f \ : E \to \mathbb{R}$, et particulièrement à leurs extrema. On observe qu'alors la différentielle de f en a (si elle existe) est une forme linéaire sur E.

Définition (Ligne de niveau)

On appelle *ligne de niveau* (ou *équipotentielle*) de f toute partie non vide de E de la forme $f^{-1}(\{\lambda\})$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit alors que cette ligne de niveau est d'équation

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda$$

XVIII.vii

Définition (Gradient)

On suppose ici que E est euclidien. On suppose f différentiable en a. On appelle *gradient* de f en a l'unique vecteur, noté $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{grad}\, f(a)$, tel que

$$\forall\, h \in E, \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = (\nabla f(a) | h)$$

XVIII.viii

Proposition (Expression du gradient en base orthonormée)

On suppose que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, et que f est différentiable en a. On a alors :

$$\overrightarrow{grad}\, f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

XVIII.14

Démonstration

$\square$

Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Illustration

Exemple (Gradient de la norme)

Le gradient de la fonction norme $N : x \mapsto \|x\|$ d'un espace euclidien E est, en tout $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$:

$$\overrightarrow{grad}\, N(x_0) = \frac{x_0}{N(x_0)}$$

ix

La proposition XVIII.11 conduit à la formule

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\overrightarrow{grad}\, f(\gamma(t))|\gamma'(t)) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

Définition (Point critique d'une application différentiable)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Un point a de U est dit *critique* si la différentielle de f en a est nulle.

XVIII.ix

Dans le cadre euclidien, a est critique pour f (supposée différentiable) si et seulement si le gradient de f en a est nul.

Proposition (Condition nécessaire d'existence d'un extremum local)

Si f est différentiable, et si elle présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

XVIII.15

Démonstration

□

La réciproque est fausse, et elle l'était déjà pour les fonctions d'une variable réelle :

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, il est important de se placer sur un ouvert :

Quand on travaille avec une fonction différentiable sur un ouvert, la recherche d'extrema se fait souvent en déterminant d'abord les points critiques, puis en étudiant localement la fonction en ces différents points, en formant $f(a+h)-f(a)$ par exemple (où a est critique). Puisque le point a est critique, un développement limité à l'ordre 1 ne suffit pas : on fait une étude en incluant des termes quadratiques (de type h_ih_j). L'étude se fait au cas par cas.

La notion de compacité peut aussi permettre de montrer l'existence d'un extremum, sans toutefois expliciter cet extremum (et encore moins dire où il est atteint).

Exercice d'assimilation conseillé : faire les deux premières questions de l'exercice 1452.

4. Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Définition (Vecteur tangent à une partie de E en un point)

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est *tangent* à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, dérivable en 0 à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.

XVIII.x

Illustration

L'ensemble des vecteurs tangents à X en x est stable par multiplication par un scalaire. On dit que c'est un *cône vectoriel*. En revanche, cet ensemble n'est pas toujours un espace vectoriel.

Illustration

Proposition (Plan vectoriel tangent à un graphe de fonction différentiable)

XVIII.16

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique et où X est le graphe d'une fonction différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Pour tout $w = (x_0, y_0, z_0) \in X$ (où $z_0 = f(x_0, y_0)$), l'ensemble des vecteurs tangents à X en w est le plan vectoriel admettant $\vec{n} \overset{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y_0}(x_0, y_0), -1\right)$ pour vecteur normal.

Démonstration

Si $v = (v_x, v_y, v_z)$ est un vecteur tangent à X en w, alors il existe

$$\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) \; :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$$

dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = w$ et $\gamma'(0) = v$.
Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a

$$\gamma_z(t) = f(\gamma_x(t), \gamma_y(t)),$$

d'où, en dérivant en 0 :

$$\gamma_z'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\gamma_x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\gamma_y'(0),$$

soit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y - v_z = 0$$

et donc v est orthogonal à $\vec{n}$.
Réciproquement, soit v un vecteur orthogonal à $\vec{n}$. L'application

$$\varphi \; : t \mapsto (x_0 + tv_x, y_0 + tv_y, f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y))$$

est définie sur un voisinage de 0 (dans $\mathbb{R}$), à valeurs dans X et dérivable en 0. De plus,

$$\varphi'(0) = \left(v_x, v_y, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y\right) = v$$

donc v est bien tangent à X en w.

□

Définition (Plan affine tangent)

XVIII.xi

Dans ce contexte, on appelle *plan affine tangent* à la surface X d'équation cartésienne $z = f(x, y)$ au point de paramètres x_0 et y_0 le plan affine passant par $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ et de direction l'ensemble des vecteurs tangents à X en ce point.

Corollaire (Équation cartésienne du plan affine tangent)

XVIII.17

Une équation cartésienne du plan affine tangent à X d'équation $z = f(x,y)$ au point(x_0, y_0, z_0) (où $z_0 = f(x_0, y_0)$) est :

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Démonstration

$\square$

Exemple (Plan tangent à la sphère unité)

x

On considère $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$, et

$$f \ : (x,y) \in U \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Soit X le graphe de f, et $M = (x_0, y_0, z_0) \in X$. Une équation (simplifiée) du plan tangent à X en M est

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1$$

Illustration

Proposition (Lignes de niveau et gradient)

XVIII.18

On suppose E euclidien. Soit $f \ : U \subset E \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
Si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.

Démonstration

$\square$

Illustration

Exemple (Plan tangent à la sphère unité par les équipotentielles)

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, et soit $M = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Une équation du plan tangent à S en M est :

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1$$

xi

PC : électrostatique.
Exercice classique conseillé : 1472.

5. Applications continûment différentiables

Définition (Application continûment différentiable)

Une application f est dite de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U si elle est différentiable sur U et si $\mathrm{d}f$ est continue sur U.

XVIII.xii

Cette définition est bien compatible avec celle déjà définie dans le cadre des fonctions vectorielles.
Bien sûr, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors elle est continue sur U.

Théorème (Caractérisation des applications continûment différentiables)

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de U et sont continues sur U.

XVIII.19

Démonstration

Non exigible admise. $\square$

Ce théorème permet par exemple de justifier que les fonctions f, h, k du premier exemple de cours sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Théorème (Intégration sur un chemin) XVIII.20

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans F, si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans U, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration

$\square$

PC : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.

Proposition (Caractérisation des fonctions constantes sur un connexe par arcs) XVIII.21

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, où U est connexe par arcs. L'application f est constante si et seulement si sa différentielle en tout point est nulle.

Démonstration

On ne la fait que dans le cas où U est convexe. $\square$

Bien sûr, le résultat tombe en défaut si on enlève l'hypothèse de connexité par arcs [3] :

3. Tout comme l'hypothèse de travailler sur un intervalle est essentielle pour la plupart des théorèmes portant sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

6. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Supposons que f admette une i-ème dérivée partielle première $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Il se peut que cette fonction dérivée partielle première admette elle-même une j-ième dérivée partielle première en $a \in U$, c'est-à-dire que le vecteur

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a)$$

existe. Si tel est le cas, ce vecteur est appelé *dérivée partielle seconde de f en a selon la i-ème puis la j-ième variable*, et est noté $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ et même $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ lorsque $i = j$.

Si un tel vecteur existe pour tout $a \in U$, on définit l'application dérivée partielle seconde (ou d'ordre 2) de f selon la i-ème puis la j-ième variable, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, qui est dite *croisée* si $i \neq j$.

Par exemple, pour une fonction de deux variables f, on peut définir au plus quatre applications dérivées partielles secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (ces deux dernières étant croisées).

Plus généralement, on peut définir la notion de dérivée partielle d'ordre k. On emploiera librement les $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$ et $\partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f$ pour les désigner.

Définition (Application k fois continûment différentiables) — XVIII.xiii

Une application est dite de *classe* $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U. On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ leur ensemble.
Une application est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle admet des dérivées partielles à tout ordre.

Nous avons étendu la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en fonction de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geqslant 1$ en nous référant aux dérivées partielles, faute de disposer de la notion de différentielle de f en a à l'ordre k.

Applications k fois continûment différentiables — XVIII.a

On a bien sûr, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{C}^\infty(U, F) \subset \mathcal{C}^{k+1}(U, F) \subset \mathcal{C}^k(U, F)$$

PC : laplacien.

Théorème de Schwarz — XVIII.22

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to F$ et $a \in U$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$$

Démonstration

Non exigible admise. □

Ce théorème est présenté pour une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais on peut bien sûr l'étendre à une fonction de plus de deux variables.

Exercice classique conseillé : 1441.

Proposition (Opérations algébriques sur les applications k fois continûment différentiables) XVIII.23

(1) L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(2) Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, c'est même une $\mathbb{R}$-algèbre, et si $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$.
(3) Si B est bilinéaire, et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration

Non exigible. $\square$

Proposition (Composition d'applications k fois continûment différentiables) XVIII.24

La composée licite d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration

Non exigible. $\square$

Exemple (Fonctions indéfiniment différentiables) xii

Tout fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine, toute fonction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

7. Exemples d'équations aux dérivées partielles

Une *équation aux dérivées partielles* (en bref : EDP) pour une fonction de plusieurs variables est l'analogue d'une équation différentielle pour une fonction d'une seule variable : elle relie une fonction à ses différentes dérivées partielles.

Par exemple, l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ est l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ pour laquelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi(x).$$

Si on cherche les solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 1 comme $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$ sur $\mathbb{R}^2$, on peut d'abord trouver une solution particulière, et résoudre l'équation homogène associée par changement de variables affine :

Si on cherche les solutions de l'*équation des ondes* (également appelée *équation des cordes vibrantes*) en dimension 1 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

(pour $v \in \mathbb{R}_+^*$) d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on peut effectuer le changement de variables $r = x - vt, y = x + vt$. On montre alors que la solution générale à cette EDP est

$$f(x, t) = \psi(x - vt) + \varphi(x + vt),$$

où ψ et φ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Vous devez savoir aussi passer par les coordonnées polaires.

Tout autre changement de variable doit vous être indiqué.

Partie 2

Étude dirigée

CHAPITRE XIX

Début d'année (TD)

Sommaire

1. Logique

1.1. Valeur de vérité, tables de vérité

Exercice 1 – *Valeur de vérité* 0

Donner, lorsque cela est possible, la valeur de vérité des assertions suivantes :

(1) $(4=2+2) \wedge (4=2+1)$;
(2) $(4=2+2) \vee (4=2+1)$;
(3) $(4=2+2) \vee (4=3+1)$;
(4) $(4=2+2) \Rightarrow (4=2+1)$;
(5) $(4=2+1) \Rightarrow (4=3+1)$;
(6) $(4=2+1) \Rightarrow (4=1+1)$;
(7) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0$;
(8) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists z \in \mathbb{R},\ ((x<z<y) \vee (y<z<x))$;
(9) $\forall\, x \in \mathbb{R}, ((x^2 \geqslant 1) \Rightarrow (x \geqslant 1))$;

(10) La fonction inverse de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ est décroissante.

Exercice 2 – *Quelques tautologies célèbres (et utiles)* 0

Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies (*i.e.* elles sont vraies, pour toute valeur de vérité des variables propositionnelles associées) :

(1) $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ (*principe du tiers-exclu*)
(2) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ (*idempotence de la conjonction*)
(3) $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ (*idempotence de la disjonction*)
(4) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (*commutativité de la conjonction*)
(5) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ (*commutativité de la disjonction*)
(6) $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (*associativité de la conjonction*)
(7) $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ (*associativité de la disjonction*)
(8) $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (*lois de Morgan*)
(9) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (règle du *modus ponens*)
(10) $((A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$ (*distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction)*
(11) $((A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$ (*distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction*)
(12) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (*syllogisme*)
(13) $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$ (*disjonction des cas*)
(14) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow ((A \vee B) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge (\neg B)))$
(15) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (((\neg A) \vee B) \wedge ((\neg B) \vee A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))$

1.2. Utilisation du registre formel

Quand utiliser le registre formel ?

Le registre formel est bien sûr beaucoup utilisé en mathématiques, mais il est vite indigeste et pénible à lire. Il faut avant tout faire un effort de communication dans votre rédaction, et, pour cela, une alternance pertinente entre le langage courant et le registre formel est préférable.
On se rappellera cependant que le registre formel est commode pour écrire la négation d'une assertion. 1

Exercice 3 – *Valeur de vérité et négation* 0

Donner la valeur de vérité et la négation formelle des assertions suivantes :

$$(a) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0\,;$$
$$(c) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x.$$

Exercice 4 – *Reformulations formelles et négations* 2

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire dans le langage formel (le cas échéant), puis donner la négation (améliorée) de chacune des assertions suivantes

(1) f est croissante ;
(2) f est strictement monotone ;
(3) f s'annule au moins une fois ;
(4) f s'annule au moins deux fois ;
(5) f est constante ;
(6) f est injective ;
(7) f est minorée ;
(8) f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 5 – *Tous non nuls et non tous nuls* 2

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels, où $n \geqslant 2$.

1

i Traduire en langage formel les deux assertions suivantes : « Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont non tous nuls », « Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont tous non nuls ».

ii Dans le cas où $n = 2$, trouver des formules mathématiques (sans connecteurs) équivalentes à ces assertions.

2 Trouver de telles formules si x_1 et x_2 sont supposés complexes.

Mauvaise utilisation du symbole d'implication

Le symbole d'implication est souvent employé à tort comme abréviation de « donc ». Si A et B sont deux assertions, la phrase « A, donc B » signifie que A *est vraie* (ou supposée telle), et qu'*on en a déduit* que B l'est également, tandis que $A \Rightarrow B$ signifie que dans le cas où A est vraie, l'assertion B est également vraie. 2

Pour montrer de manière directe l'implication $A \Rightarrow B$, on commence par supposer A, puis on explique comment on aboutit à B, sans utiliser de symbole d'implication *a priori*.

Exemple

Par exemple, les assertions « $(2+2=5) \Rightarrow (2+2=4)$ », « $(2+2=5) \Rightarrow (2+2=6)$ » et « $(2+2=4) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, y = x^3)$ » sont vraies (et irréprochables bien qu'incongrues), mais les phrases « $2+2=5$, donc $2+2=4$ », « $2+2=5$, donc $2+2=6$ » et « $2+2=4$, donc la fonction cube de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective » sont toutes les trois inadmissibles.

◇◇◇

1.3. Principes de démonstration

Pourquoi reformuler permet-il souvent de débloquer une situation ?

J'appelle (informellement) reformulation d'une assertion A une assertion logiquement équivalente à A.

Reformuler, ce n'est pas faire du surplace, car notre cerveau ne gère pas du tout de la même façon différentes reformulations d'une même assertion. Reformuler permet d'adopter un nouvel angle sous lequel considérer la situation. 3

Exemple

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E.

Le théorème du rang permet de montrer que f est injective si et seulement si f est surjective, car l'injectivité de f se reformule en $\dim(\ker(f)) = 0$, et la surjectivité en $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

Plus généralement, chacune des assertions suivantes est (dans le contexte ci-dessus) une reformulation de l'injectivité de f :

$$(1)\ \ker(f) = \{0\}; \quad (2)\ \dim(\ker(f)) = 0; \quad (3)\ f \text{ est surjective};$$

$$(4)\ \mathrm{Im}(f) = E; \quad (5)\ \mathrm{rg}(f) = \dim(E); \quad (6)\ \det(f) \neq 0;$$

et, pour les 5/2

$$(7)\ 0 \text{ n'est pas valeur propre de} f; \quad (8)\ \chi_f(0) \neq 0.$$

Parmi ces reformulations, on peut par exemple mettre en valeur la surjectivité de f (pour montrer un résultat d'existence), ou la notion de valeur propre (si par exemple on dispose d'un polynôme annulateur de f).

Si on ne suppose plus E de dimension finie, les assertions (5) et (6) n'ont plus de sens, et les assertions (3) et (4) ne sont plus équivalentes à l'injectivité de f.

◇◇◇

Comment montrer une implication ?

Pour montrer l'implication $A \Rightarrow B$, on peut bien sûr raisonner par l'absurde, ou encore par contraposition.
Pour montrer directement $A \Rightarrow B$, on peut supposer A, puis, à force de déductions, aboutir à B. On peut cependant aussi partir de B, chercher des *conditions suffisantes* pour que B soit satisfaite, puis remonter jusqu'à A (méthode que l'on peut qualifier d'*inductive*).
Face à une implication que l'on ne sait pas établir, la bonne stratégie consiste souvent à mélanger ces deux aspects (inductif et déductif), auxquels on ajoute les reformulations mentionnées ci-dessus.
Pour forcer le trait, le raisonnement déductif part de la question « Que sait-on ? » tandis que le raisonnement inductif part de la question « Que souhaite-t-on montrer ? », et c'est plutôt cette seconde question que l'on a tendance à perdre de vue. 4
On retiendra notamment qu'il ne faut pas négliger le raisonnement inductif (au sens indiqué ci-dessus), qui aide souvent à maintenir un cap.
D'ailleurs, la préférence pour le raisonnement par l'absurde, pour montrer une implication $A \Rightarrow B$, tient sans doute au fait qu'il permet de supposer A et $\neg B$, pour obtenir une absurdité. Cela privilégie l'aspect déductif.

Comment montrer une équivalence ?

Pour montrer l'équivalence $A \Leftrightarrow B$, on peut raisonner par équivalences (en reformulant), ou encore prouver les deux implications séparément.
Pour montrer l'équivalence entre plusieurs assertions $A_1, \dots, A_n$, on peut se contenter de prouver des implications cycliques.
Cependant, cette méthode des implications cycliques, séduisante par son aspect minimal (pour montrer l'équivalence entre n assertions, il suffit de montrer n implications), ne rend pas compte de la réflexion véritablement à l'œuvre quand on cherche à montrer l'équivalence entre plusieurs assertions. 5
Pour montrer l'équivalence entre plusieurs assertions, on cherche bien souvent à les reformuler selon un même angle de lecture (cf. l'exemple ci-dessus, pour lequel on a reformulé en termes de dimensions).

Importance de la synthèse

Attention ! Dans un raisonnement par analyse-synthèse, la phase de synthèse, bien que souvent facile, est essentielle . En effet, un résultat d'unicité n'impose aucunement l'existence. Même quand la synthèse est évidente, on prendra garde à bien la faire figurer dans sa rédaction. 6

Exemple

Cherchons les couples de réels (x, y) tels que $(x^2 + y = 3) \wedge (x^2 + 2y = 5) \wedge (x + y^2 = 5))$. Dans une première phase d'analyse, on suppose disposer d'un couple (x, y) convenable. Grâce aux deux premières relations, on trouve $y = 2$, puis, avec la dernière relation $x = 1$. Réciproquement, le couple $(1, 2)$ convient bien.

Si nous avions considéré le système $(x^2 + y = 3) \wedge (x^2 + 2y = 5) \wedge (x + y^2 = 4))$, la phase d'analyse menée comme ci-dessus nous aurait donné $(0, 2)$ comme unique couple susceptible de convenir, mais la phase de synthèse aurait permis d'écarter ce couple candidat.

Dans les deux situations, on peut dire qu'il y a unicité, ou « unicité en cas d'existence ». Dans la phase de synthèse, on teste le candidat trouvé.

◇ ◇ ◇

Montrer un résultat d'existence et d'unicité par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent employé pour montrer un résultat d'existence et d'unicité : pour montrer l'existence et l'unicité, on peut raisonner par équivalence pour trouver un unique x_0 convenable, ou prouver séparément existence et unicité.
Dans ce dernier cas, on peut commencer par étudier l'unicité : en travaillant sur les contraintes imposées à un tel x, on peut arriver à un unique candidat convenable et explicite x_0. La phase d'existence s'en trouve grandement simplifiée, puisqu'il suffit alors de vérifier que ce candidat x_0 (explicite) vérifie bien les contraintes imposées. 7

Exercice 6 – *Raisonnement par analyse-synthèse* 2

1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f$. Montrer, en effectuant un raisonnement par analyse-synthèse, que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$, en montrant que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in \ker(f) \times \operatorname{Im}(f)$ tel que $x = y + z$.

2 Soit I un intervalle centré en 0, f une application de I dans $\mathbb{R}$.

i Montrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_i, appelées respectivement *partie paire* et *partie impaire de* f.

ii Que dire des applications partie paire et partie impaire ainsi définies de $\mathbb{R}^I$ dans lui-même ?

Exercice 7 – *Irrationalité de* $\sqrt{2}$ 1

Montrer par l'absurde l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Exercice 8 – *Exemple astucieux de disjonction des cas* 2

En utilisant l'éventuel caractère rationnel du nombre réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, montrer qu'il existe un nombre irrationnel x tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.

2. Applications

Les lettres E, F, G désignent des ensembles.

Vérifier qu'une application est bien définie

Montrer qu'une application $f : E \to F$ est bien définie consiste à montrer qu'à chaque élément de l'ensemble de départ E, on a associé un unique élément dans l'ensemble d'arrivée F 8

Exemple

(1) L'application
$$\alpha : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x^2+1) \end{array}$$
est bien définie car pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$.

(2) L'application
$$\beta : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & e^x(x^2+1) \end{array}$$
est bien définie car pour tout $x > 0$, e^x et $x^2 + 1$ sont strictement positifs.

(3) L'application
$$\gamma : \begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 & \to & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ (\overline{a}, \overline{b}) & \mapsto & \overline{a+b} \end{array}$$
est bien définie, car pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
$$((a \equiv c\,[5]) \wedge (b \equiv d\,[5])) \Rightarrow (a + b \equiv c + d\,[5])$$

◇◇◇

2.1. Composition, injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 9 – *Compatibilité entre injectivité et surjectivité* 0

Injectivité et surjectivité ne sont pas contraires : donner des exemples variés des quatre cas possibles.

Stabilité de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité

Ces trois notions sont stables par composition. 9

Comment établir l'injectivité d'une fonction ?

En général, on revient à la définition, ou on utilise la stabilité par composition de cette notion.
Cependant, dans le cas d'un morphisme de groupes (et donc d'anneaux, de corps, d'algèbres ou d'espaces vectoriels), la stratégie naturelle consiste à tester l'injectivité sur le noyau. 10
En analyse réelle, on utilise souvent un argument de stricte monotonie.

Comment établir la surjectivité d'une fonction ?

On peut bien sûr revenir à la définition, ou utiliser la stabilité de cette notion.
Si la fonction est un morphisme, on peut montrer qu'on atteint une partie génératrice de l'image.
Assez souvent, on montre la surjectivité à partir de l'injectivité (ce qui nous donne en fait la bijectivité), si la fonction va d'un ensemble fini vers un ensemble fini de même cardinal, ou si c'est une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension finie. 11

Comment établir la bijectivité d'une fonction ?

On peut utiliser l'injectivité et une autre propriété (voir la remarque ci-dessus), ou la stabilité de cette notion.
On peut exhiber un inverse à gauche et à droite pour la composition (voir un exercice ci-dessous). 12
En analyse réelle, on emploie souvent le théorème de la bijection continue.

Exercice 10 – *Composition, injectivité, surjectivité* 0

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1 Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective ;

2 Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

3 Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

4 Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 11 – *Inverse à droite, inverse à gauche* 1

On dit qu'une application $f : E \to F$ est *inversible à gauche* (resp. *inversible à droite*) s'il existe une fonction $g : F \to E$ (resp. $h : F \to E$) telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (resp. $f \circ h = \mathrm{Id}_F$). On dit que f est *inversible* si elle est inversible à gauche et à droite.

1 Montrer que si f est inversible à gauche d'inverse g et inversible à droite d'inverse h, alors $g = h$.

2 Montrer que f est bijective si et seulement si elle est inversible.

3 Montrer que si $f : E \to E$ est une involution (*i.e.* $f \circ f = \mathrm{Id}_E$), alors elle est bijective, et donner sa bijection réciproque.

4 Montrer plus généralement que si $f : E \to E$ vérifie $f^n = \mathrm{Id}_E$ (f composée n fois) pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$, alors f est bijective, et donner sa bijection réciproque.

5 Donner un exemple d'application admettant un inverse à droite mais pas à gauche (resp. un inverse à gauche mais pas à droite).

Résultats d'existence et d'unicité via une application

L'injectivité (resp. la surjectivité) peut se reformuler en une conjonction d'unicités (resp. d'existences). En ayant ceci en tête, on comprend mieux comment passer d'un résultat d'unicité à un résultat d'existence 13

Exemple

Soit A un anneau fini non nul sans diviseur de zéro. On veut montrer que tout élément non nul A admet un inverse (résultat d'existence). Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$. Par hypothèse, l'application $\varphi\ : x \in A \mapsto ax$ est injective (car le noyau de cet endomorphisme du groupe additif A est trivial, *i.e.* l'unique antécédent de 0_A par φ est 0_A), et, comme A est en outre fini, φ est bijective. En particulier, 1_A admet un antécédent par φ, *i.e.* a admet un inverse à droite. De même, en considérant $x \mapsto xa$, a admet un inverse à gauche, et donc a est bien inversible.

◇◇◇

2.2. Image directe, préimage

Confusion entre image réciproque et bijection réciproque

Attention, la notion d'image réciproque ne permet pas, en général, de définir une application de F dans E. Seul le cas où f est bijective le permet. Par ailleurs, il peut y avoir confusion des notations. 14

Quand peut-on définir une restriction ?

Il faut faire attention lorsqu'on restreint à l'arrivée, alors qu'on peut restreindre au départ sans précaution. 15

Exercice 12 – *Sous-espaces stables* 0

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ stables par f.

Exercice 13 – *Caractérisations de la surjectivité* 3

Soit f une application de E dans F. Établir l'équivalence des assertions suivantes :

(1) f est surjective ;

(2) $\forall\, y \in F,\quad f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$;

(3) $\forall\, Y \in \mathcal{P}(F),\quad f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$;

(4) $\forall\, Y \in \mathcal{P}(F),\quad (f^{-1}(Y) = \emptyset) \Rightarrow (Y = \emptyset)$.

3. Relations binaires

3.1. Relations d'ordre

Exercice 14 – *Une relation d'ordre sur un ensemble de fonctions* 2

Soit E un ensemble, $F = \mathbb{R}^E$. On introduit une relation $\preccurlyeq$ sur F par

$$\forall (f, g) \in F^2, \quad (f \preccurlyeq g) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)).$$

1 Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

2 L'ordre défini est-il total ?

3 Soit $f \in F$. Les assertions « f est majorée » et « $\{f\}$ est majorée » sont-elles équivalentes ?

4 Soit $f, g \in F$. L'ensemble $\{f, g\}$ admet-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?

5 Montrer que toute partie non vide et majorée de F admet une borne supérieure.

On ne compare pas deux nombres complexes 16

En général, on ne définit pas d'ordre sur $\mathbb{C}$: on prendra garde à ne pas écrire $2 + i \geqslant 0$ par exemple (souvent rencontré pour la résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$).

Exercice 15 – *Pourquoi ne définit-on pas d'ordre sur le corps des nombres complexes ?* 3

1 Donner une relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$.

2 Montrer que $\mathbb{C}$ n'admet pas de *structure de corps totalement ordonné*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps des nombres complexes.

3 Donner un ordre partiel sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations sur $\mathbb{C}$.

3.2. Monotonie

Le contraire de la croissance n'est pas la décroissance 17

Une fonction peut très bien n'être ni croissante, ni décroissante.

Exemple

La fonction sinus sur $\mathbb{R}$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Elle est bien « monotone par morceaux » (en un sens à préciser), mais la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ prolongée par continuité en 0 n'est monotone sur aucun voisinage de 0.

$\diamond \diamond \diamond$

Exercice 16 – *Sur la monotonie* 2

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ & f & \mapsto & f \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \end{array}$$

1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Que dire de la monotonie de $\Delta(f)$?

2 Préciser la monotonie de Δ.

Si une fonction monotone est injective, est-elle strictement monotone ? 18

Oui.

Si une fonction est strictement monotone, est-elle monotone et injective ?

Une fonction strictement monotone est bien monotone, mais elle n'est pas nécessairement injective. Cependant, si la fonction strictement monotone est définie sur un ensemble totalement ordonné, alors elle est injective. 19

Exemple

(1) La fonction sinus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ où l'ensemble de départ est ordonné par l'égalité, est strictement croissante (et strictement décroissante), mais non injective.

(2) La fonction $\varphi : f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est strictement croissante, mais non injective.

$\diamond \diamond \diamond$

Si une fonction bijective est monotone, sa réciproque est-elle monotone ?

Non en général. Oui si l'ensemble de départ est totalement ordonné. 20

Exemple

On considère l'ensemble E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'ensemble F des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, nulles en 0.

L'application

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & E & \to & F \\ & u & \mapsto & \left(v : x \mapsto \int_0^x u(t)\mathrm{d}t\right) \end{array}$$

est une bijection strictement croissante, de bijection réciproque non strictement croissante.

$\diamond \diamond \diamond$

Exercice 17 – *Stricte monotonie* 4

Soit $f : E \to F$ une application entre ensembles ordonnés.

1 On suppose f strictement monotone.

i Montrer que si E est totalement ordonné, alors f est injective.

ii Soit X un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 2$. Que dire de l'application

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathcal{P}(X) & \to & [\![0,n]\!] \\ & Y & \mapsto & \mathrm{Card}(Y) \end{array}$$

2 Montrer qu'en prenant un ordre bien choisi au départ, toute fonction est strictement monotone.

3 On suppose f bijective et strictement monotone.

i Montrer que si E est totalement ordonné, alors f^{-1} est strictement monotone.

ii Donner un exemple construit à partir de g de bijection strictement monotone de réciproque non strictement monotone (dans le cas où $n \geqslant 3$).

3.3. Relations d'équivalence

Quelle est la particularité de la relation d'équivalence d'homéomorphie ?

Si A et B sont deux parties de deux EVN, on dit que A est homémorphe à B s'il existe une bijection continue de A sur B, de réciproque continue.
On définit ainsi bien une relation d'équivalence, car dans la définition de l'homéomorphie, on impose que la bijection réciproque soit aussi continue (d'où la symétrie). 21
En général, la bijection réciproque d'une application continue bijective n'est pas continue (en revanche, la bijection réciproque d'un isomorphisme de groupes, anneaux, corps ou espaces vectoriels est un isomorphisme).

Exemple

Si $A = [0,1[\cup[2,3[$ et $B = [0,2[$, alors $f\ : x \mapsto x$ si $x \in [0,1[, x-1$ sinon est bijective continue de A sur B, mais sa bijection réciproque n'est pas continue.

◇◇◇

Une relation réflexive transitive peut-elle être symétrisée en une relation d'ordre ?

22

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, réflexive et transitive. On définit une nouvelle relation $\mathcal{R}'$ en posant, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$$

La relation ainsi définie est réflexive et symétrique, mais non transitive en général.

Exemple

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on dit que x est colinéaire à y (où $x, y \in E$) si $x \in \mathbb{K}y$, *i.e.* $\exists \lambda \in \mathbb{K}, x = \lambda y$.

Cela définit une relation binaire sur E réflexive et transitive, mais non symétrique (sauf si E est réduit au vecteur nul) : ce n'est pas une relation d'équivalence.

Parfois, on dit que x et y sont colinéaires si x est colinéaire à y ou y est colinéaire à x. On gagne la symétrie, mais on perd la transitivité.

En revanche, la colinéarité définit une relation d'équivalence sur $E \setminus \{0_E\}$.

◇◇◇

Exercice 18 – *Relation d'équivalence ?*

0

Soit $f, g : \{0,1\} \to \{0,1\}$. On pose $f\mathcal{R}g$ si et seulement si $f(0) = g(0)$ ou $f(1) = g(1)$. Est-ce une relation d'équivalence ?

4. Entiers naturels, récurrence, symboles de somme et de produit

4.1. Principe de récurrence

Dans quel contexte propose-t-on une démonstration par récurrence ?

23

Pour faire une démonstration par récurrence, il faut avoir une formule ou propriété à montrer par récurrence : elle peut avoir été donnée par l'énoncé (dans le cas où le sujet guide suffisamment). Elle peut aussi conjecturée sur des cas particuliers, mais cela nécessite de l'initiative.

L'initialisation d'une récurrence peut-elle se fonder sur une convention ?

24

Oui, tant que l'hérédité est bien valable dès le rang concerné.

Exemple

On appelle monoïde un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, possédant un élément neutre pour cette loi.

Soit $\varphi\ : G \to H$ un morphisme de monoïdes, *i.e.* $\varphi(e_G) = e_H$ et

$$\forall (x,y) \in G^2, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

Soit $g \in G$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$$

On rappelle qu'on a posé $g^0 = e_G$ (par convention), et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{n+1} = gg^n$.

◇◇◇

Exercice 19 – *Principe de récurrence*

0

1 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $2^p \geqslant p+1$.

2 Donner un exemple pertinent d'utilisation d'une récurrence forte (on pourra penser à l'arithmétique).

3

i Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application. Montrer que si f est strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) \geqslant n$.

ii Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 20 – *Structure des endomorphismes du groupe additif des rationnels* 1

Montrer que tout endomorphisme du groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est linéaire, *i.e.* de la forme $x \mapsto \alpha x$ pour un certain rationnel α.

Exercice 21 – *Inégalités entre sinus* 3

Montrer, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$: $|\sin(nt)| \leqslant n|\sin(t)|$.

4.2. Montrer qu'une suite récurrente est bien définie

Qu'apporte le théorème de définition des suites récurrentes ? 25

Non seulement il montre que la suite est bien définie, mais aussi que tous les termes sont dans un certain ensemble, ce qui permet d'obtenir des informations supplémentaires sur la suite.

Exemple

Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^3 - z^2 + 1$, et $\alpha = 3$. On considère la suite (u_n) d'itératrice f et de terme initial $u_0 = \alpha$.

(1) Comme $\mathbb{R}$ stable par f et comprend α, la suite est bien définie et à termes réels.

(2) Comme $[1, +\infty[$ est stable par f et comprend α, (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[1, +\infty[$. Comme f restreinte à $[1, +\infty[$ est croissante, (u_n) est monotone. Comme $u_1 \geqslant u_0$, (u_n) est croissante.

(3) Comme $[2, +\infty[$ est stable par f et comprend α, (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[2, +\infty[$. Comme $f(x) \geqslant x + 1$ sur $[2, +\infty[$, on obtient par récurrence $u_n \geqslant n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) Comme $[3, +\infty[$ est stable par f et comprend α, (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[3, +\infty[$. Comme $f(x) \geqslant 2x$ sur $[3, +\infty[$, on obtient par récurrence $u_n \geqslant 3 \cdot 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ ◇ ◇

Exercice 22 – *Suite récurrente bien définie* 0

1 Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) de nombres réels telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{1 + u_n}.$$

2 Même question pour les conditions $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 1 + \ln(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Même question pour les conditions $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = \sqrt{2 - w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 – *Suite récurrente mal définie* 2

Soit $f : x \mapsto \frac{1-x}{x}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \sqrt{2}$.
Montrer que la suite d'itératrice f et de terme initial α (resp. β) est mal définie (resp. est bien définie).

4.3. Symboles de somme et de produit

4.3.1. Calculs divers

Exercice 24 – *Symboles de somme et de produit* 0

1 Établir une formule pour $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ valable pour chaque entier $n \geqslant 2$.

2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $1\ 1! + 2\ 2! + \cdots + n\ n! = (n+1)! - 1$.

3 Évaluer, pour tout entier naturel n, la somme

$$S_n = \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, p+q\leqslant n\}} (p+q).$$

4 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Trouver une formule pour $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)$.

5 De même pour $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$.

6 Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n}\min(\{i,j\})$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\min(\{i,j\})$ et $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\min(\{i,j\})$.

7 Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} ij$.

Exercice 25 – *Sommes de puissances* 1

1 Montrer de deux manières que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2 Montrer de deux manières que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3 Trouver une formule analogue pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$. Quel est le lien entre cette somme et $\sum_{k=0}^{n} k$? Retrouver ce lien par un dessin.

Exercice 26 – *Somme de carrés de nombres de même parité* 3

Montrer de deux manières différentes que, pour tout entier pair $\geqslant 2$, on a :

$$2^2+4^2+\cdots+n^2 = \binom{n+2}{3}$$

Montrer que pour tout entier naturel impair n, on a

$$1^2+3^2+\cdots+n^2 = \binom{n+2}{3}.$$

Exercice 27 – *Utilisation de la factorielle et symbole de produit* 2I

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}u_n$$

Exprimer u_n en fonction de n à l'aide (notamment) de la factorielle.
Remarque : c'est l'occasion de revoir les intégrales de Wallis.

Exercice 28 – *Encadrement de Gauss de la factorielle* 2

1 Montrer que pout tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$n! = \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{ij}.$$

2 Montrer que si $i\geqslant 1$ et $j\geqslant 1$, alors

$$i+j-1\leqslant ij\leqslant \left(\frac{i+j}{2}\right)^2.$$

3 En déduire l'encadrement :

$$n^{n/2}\leqslant n!\leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 29 – *Un encadrement de* $\binom{2n}{n}$ 2

1 Montrer que :

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

2 En déduire que pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{2}.$$

5. Trigonométrie et nombres complexes

5.1. Trigonométrie

Exercice 30 – *Exemples de linéarisation* 0

Linéariser les expressions suivantes, dépendant de la variable réelle x : $\cos(x)^4$, $\sin(x)^5$, $\cos(x)^3 \sin^2(x)$.

Exercice 31 – *Polynôme de la fonction cosinus* 0

Exprimer comme un polynôme de la fonction cosinus la fonction f définie par $f(2k\pi) = 6$ et $f((2k+1)\pi) = -6$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout réel $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par

$$f(x) = \frac{\sin 6x}{\sin x}.$$

Exercice 32 – *Changement d'écriture d'une combinaison de cosinus et sinus* 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Déterminer un réel $A > 0$ et un réel θ_0 de sorte que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad a\cos\theta + b\sin\theta = A\cos(\theta - \theta_0).$$

Exercice 33 – *Calculs de sommes trigonométrique* 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel x, calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Exercice 34 – *Sommes trigonométriques à coefficients binomiaux* 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

5.2. Nombres complexes

Exercice 35 – *Ensemble d'entiers déterminé par une condition complexe* 0

Déterminer l'ensemble $\left\{ n \in \mathbb{N}, \left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3} \right)^n \in \mathbb{R}_+ \right\}$.

Exercice 36 – *Calculs de racines cubiques* 0

Déterminer les racines cubiques de $\sqrt{3} - i$ et de $\frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$.

Exercice 37 – *Équations algébriques complexes* 0

1 Résoudre l'équation $z^2 - (4 + 2i)z + (11 + 10i) = 0$.
2 Résoudre l'équation $(1 + i)z^2 - 4iz + 26 - 2i = 0$.

Exercice 38 – *Équations algébriques complexes plus compliquées* 2

1 Résoudre l'équation

$$(1 - i)z^3 + (-4 + 8i)z^2 + (3 - 25i)z + 30i = 0,$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

2 Résoudre l'équation

$$z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = 0,$$

sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

3 Résoudre l'équation

$$z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0.$$

Exercice 39 – *Banque CCP 2016 84* 2

1 Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

3 En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 40 – *Banque CCP 2016 89* 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\,\frac{2\pi}{n}}$.

1 On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2 On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

6. Calculus

6.1. Calculs de dérivées

Exercice 41 – *Calculs de dérivées* 0

Calculer les dérivées des fonctions (toujours appelées f) :

1 $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)^2}$.

2 $x \mapsto e^{\sin(x)}$.

3 $x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

4 $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^3-2}$.

5 $x \mapsto \frac{7}{(7x-3)^6}$.

6 $x \mapsto \frac{x}{2+(1-x)^3}$.

7 $x \mapsto (3x+4)\sqrt{5x+2}$.

8 $x \mapsto \int_{-x^2}^{\sin(x)} \frac{e^{\sin(t)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 42 – *Dérivation d'une fonction s'écrivant comme puissance* 0

On considère deux fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$. Calculer $(u^v)'$.

Exercice 43 – *Utilisation de la dérivation pour une somme* 2

Soit, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{R} \setminus \{1\})$:

$$f_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

Écrire $f_n(x)$ en fonction de n et calculer $f_{15}(2)$.

Exercice 44 – *Dérivées successives* 0

Calculer, pour tout entier naturel n, la dérivée d'ordre n de

1 $x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$.

2 $\cos^3$.

3 $x \mapsto 1/(x^2 - 1)$.

6.2. L'intégration par parties

Exercice 45 – *Primitive du logarithme* 0

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction logarithme (sur $\mathbb{R}_+^*$).

Exercice 46 – *Calcul d'intégrale* 0

Calculer $\int_0^1 \arctan(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 47 – *Suites de rationnels convergeant vers e^2* 3

On définit, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \mathrm{d}x.$$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} + I_n.$$

3 En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = e^2.$$

Exercice 48 – *Une suite bornée* 1

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_1^n \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Montrer que cette suite est bornée.

6.3. La formule de changement de variables

Exercice 49 – *Changements de variables* 2

Calculer

1 $\int_0^\pi \cos(x)^3 \sin(x)\mathrm{d}x$.

2 $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$.

3 $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$.

4 $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$. $(t = \tan(x/2))$

5 $\int_0^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)}$.

6 $\int_{1/2}^{3/4} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. $(t = \sin(u)^2)$

7 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. $(u = e^x$ puis $t = \sqrt{1+u^2})$

6.4. Suite d'intégrales

Exercice 50 – *Étude de suite intégrale* 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t dt$.

1

i Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

ii Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

iii En déduire la limite de (I_n).

iv Calculer $f(n) = I_{n+4} - I_n$ en fonction de n, où $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

6.5. Calcul asymptotique

Exercice 51 – *Calculs de limites* 0

Vérifier :

1 $\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 2\tan(x)}{1+\cos(4x)} = \frac{1}{2}$.

2 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln(x)} = -2$.

3 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\arctan^3(x)} \left(\ln(\ln(e+x)) - \frac{x}{e+x}\right) = \frac{1}{6e^3}$.

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi x+1}{2x+1}\right) = \frac{\pi-6}{4}$.

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right)\right)^x = e^2$.

6 $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x) = \frac{1}{\pi}$.

Exercice 52 – *Équivalents de fonctions* 2T

Donner des équivalents simples aux points considérés pour les fonctions définies par les formules suivantes :

1 $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ en 0.

2 $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$ en 0.

3 $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ en $+\infty$.

Exercice 53 – *Calcul de limites* 2T

1 Déterminer la limite en 0 de $\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

2 Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}$.

3 *(CCP MP)* Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$.

Exercice 54 – *Développements asymptotiques de fonctions* 2

1 Donner un développement à la précision $\frac{1}{x^3}$ de la fonction arctangente en $+\infty$.

2 Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $x + \ln(x) = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une unique solution, notée $f(a)$. Donner un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.

3 Montrer que pour tout $\alpha > e$, l'équation $e^x = \alpha x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet exactement deux solutions, que nous noterons $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$, avec $f(\alpha) < g(\alpha)$. Donner des développements asymptotiques à deux termes de f et g en $+\infty$.

6.6. Décomposition en éléments simples et primitives de fonctions rationnelles

Exercice 55 – *Décompositions élémentaires en éléments simples* 0

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle F donnée par :

1 $\frac{X^5}{(X-1)^4}$.

2 $\frac{X^3+X^2-X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

3 $\frac{X^2-4}{X^2-3}$.

4 $\frac{1}{X^3(X^2-1)}$.

5 $\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.

6 $\frac{2X^5-8X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.

Exercice 56 – *Fractions rationnelles* 0

Calculer

1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+1}$.

2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)}$.

3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2}$.

4 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+ix}$.

5 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

6 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$.

7 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$.

6.7. Calculs de primitives

Exercice 57 – *Fonctions trigonométriques circulaires* 0

Calculer

1 $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \mathrm{d}x$, où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

2 $\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

3 $\int \cos^2 x \sin^3 x \mathrm{d}x$.

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

5 $\int_{\sqrt{2}}^{\pi+\sqrt{2}} \frac{(\cos(2t))^3}{2+\sin^2 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

6 $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}$.

7 $\int \frac{\sin(x)\mathrm{d}x}{\sin^3(x)+\cos^3(x)}$.

8 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

9 $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 58 – *Fonctions trigonométriques hyperboliques* 0

Calculer

1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x(1+\operatorname{sh} x)}$.

2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x+4}$.

Exercice 59 – *Primitives diverses* 0

Trouver les primitives de f, où f est successivement donnée par

1 $x \mapsto x\arctan(x)^2$.

2 $x \mapsto \frac{1}{x+x\ln(x)^2}$.

3 $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\ln(x))$.

4 $x \mapsto \arctan \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 60 – *Primitives et racines* 3

Calculer

1 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \mathrm{d}x$.

2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

4 *(X MP 08)* $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\mathrm{d}x$.

5 *(X MP 08)* $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin t}\mathrm{d}t$.

6 $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}$.

7 $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}\mathrm{d}x$.

CHAPITRE XX

Algèbre linéaire (TD)

Sommaire

1. Matrices

1.1. Calcul matriciel

Exercice 61 – *Calcul d'inverse d'une matrice* 0

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 62 – *Puissances de matrices* 0

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$. Calculer B^n, puis A^n, pour tout entier naturel n.

2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n.

3 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $(A(\theta))^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 63 – *Puissances d'une matrice* 2

1 (TPE) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Faire le lien avec la suite de Fibonacci.

3 (Centrale) Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 64 – *(Centrale MP 10)* 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & & a^{n-1} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Calculer A^q pour $q \in \mathbb{Z}$.

Exercice 65 – *Matrices triangulaires supérieures* 1

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

1 Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *i.e.* un sous-espace vectoriel et un sous-anneau.

2 Montrer qu'un élément A de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, et que dans un tel cas, $A^{-1} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Remarque : on peut montrer plus généralement que tout inverse dans une algèbre d'un élément inversible d'une sous-algèbre de dimension finie est encore un élément de cette sous-algèbre.

Exercice 66 – *Une matrice a-t-elle toujours une racine cubique ? (Centrale MP 06)* 3

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Existe-t-il $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = X^3$?

Exercice 67 – *L'identité est-elle un crochet de Lie ?* 3

Existe-t-il des matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

1.2. Inverse d'une matrice

Exercice 68 – *Inverse d'une matrice (X PC 10, Mines MP 2015)* 2

Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 69 – *Matrice inversible et racines de l'unité (Mines MP 2015)* 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = \exp\dfrac{2i\pi}{n}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{k,l} = \omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$.

1 Calculer $\bar{A} \times A$. En déduire $|det(A)|$ puis A^{-1}.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall\, \theta \in \mathbb{C}$, $A_n(\theta) = (a^n_{k,l} = \theta^{(k-1)(l-1)})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$. Trouver tous les $\theta \in \mathbb{C}$ / $A_n(\theta)$ est inversible.

1.3. Matrices élémentaires

Exercice 70 – *Produit de matrices élémentaires* 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$. Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$ (matrices de taille n).

1.4. Matrices inversibles

Exercice 71 – *X MP 10* 3

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ ayant sa diagonale nulle et des ± 1 en dehors de la diagonale. Montrer que A est inversible.

Indication : Traiter d'abord le cas où les coefficients non diagonaux valent tous 1.

Exercice 72 – *Matrice à diagonale dominante (X MP 09, X PSI 09)* 1

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

(on dit que A est à *diagonale dominante*).

Montrer que A est inversible.

Exercice 73 – *Inverse d'une matrice (X MP 09)* 2

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $I_n - AB$ inversible. Montrer que $I_n - BA$ est inversible et déterminer son inverse.

1.5. Représentation matricielle, équivalence et similitude

Exercice 74 – *Mines MP 10* 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les endomorphismes de E ayant même matrice dans toute base.

Exercice 75 – *Changement de base* 0

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

On pose $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$, $e'_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

i Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii Écrire la matrice de f dans cette base.

iii Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose $e'_1 = (1,0,1)$, $e'_2 = (-1,1,0)$, $e'_3 = (1,1,1)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

i Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

iii Calculer $M_{\mathcal{B}}(f^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Soit h l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

i On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_2 + e_3, e_3 + e_1, e_1 + e_2).$$

Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?

ii On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :

$$(f'_1, f'_2) = \left(\frac{1}{2}(f_1 + f_2), \frac{1}{2}(f_1 - f_2)\right)$$

en conservant la base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 76 – *Représentation matricielle des endomorphismes de carré nul en dimension* 3 — 3

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit f un endomorphisme non nul de E. Montrer que f est de carré nul si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 77 – *Condition suffisante de non similitude* — 0

Soit A et B deux matrices carrées de taille n.

1 Montrer que si A et B sont semblables, et si P est un polynôme, alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

2 En déduire que s'il existe un polynôme P tel que $P(A) = 0$ mais $P(B) \neq 0$, alors A et B ne sont pas semblables.

3 Application : montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A et B ont même rang, même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A - I_3)^2$ et $(B - I_3)^2$).

Exercice 78 – *Similitude de matrices* — 2

1 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_2$, non scalaire. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA sont semblables. Ce résultat subsiste-t-il si A n'est plus supposée inversible ?

3 Soit $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$. Les matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ sont-elles semblables ?

Exercice 79 – *La similitude matricielle dépend elle du corps ?* — 4

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les matrices A et B sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 80 – *Matrice semblable à son opposée (X PC 10)* — 3

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = 0$.

2. Utilisation de la linéarité

Définition d'un morphisme par image d'une base

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. L'application linéaire φ est entièrement déterminée par l'image d'une base de E. Est-elle entièrement déterminée par l'image d'une famille génératrice ? Oui !
En revanche, pour se donner (*i.e.* définir légitimement) une application linéaire, il suffit de donner l'image d'une base, mais si on impose l'image d'une famille génératrice, il se peut que l'application linéaire voulue ne soit pas définie ! 26

Exemple
$(e_1, e_2, e_3) \overset{def}{=} ((1,2),(2,1),(1,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Il n'existe pas d'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(e_1) = (1,-1)$, $f(e_2) = (3,1)$ et $f(e_3) = (0,1)$ car la relation de liaison $e_1 + e_2 - 3e_3$ induirait la relation (évidemment fausse) :

$$(1,-1) + (3,1) - 3(0,1) = (0,0)$$

⋄ ⋄ ⋄

Montrer qu'une application est linéaire

On peut utiliser une des caractérisations de la linéarité, mais aussi utiliser les exemples fondamentaux et la stabilité de cette notion, un peu comme vous avez appris à justifier la dérivabilité d'une fonction. 27

Exemple
L'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_0^1 \sin(t) f'(t) \mathrm{d}t \end{array}$$

est linéaire, car la dérivation, la multiplication par la fonction sinus, et l'intégrale le sont.

⋄ ⋄ ⋄

Comment montrer qu'une application linéaire est injective ?

Comme pour tout morphisme de structure algébrique, on teste essentiellement l'injectivité d'une application linéaire sur le noyau. 28

Montrer la surjectivité d'un morphisme en atteignant une famille génératrice

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, si $(y_i)_{i\in I}$ engendre F, et si chaque y_i admet un antécédent par f, alors f est surjective. 29

Exercice 81 – *Propagation des propriétés par linéarité* 0

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$.

1 Montrer que si f est nulle sur une famille génératrice de E, alors f est identiquement nulle.

2 Montrer que si f et g coïncident sur une famille génératrice de E, alors $f = g$.

Exercice 82 – *Un problème de Cauchy pour l'opérateur différence (Mines MP 2015)* 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'existence et l'unicité de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$.

3. Endomorphismes

Exercice 83 – *Lorsque tout vecteur non nul est propre* 1

Soit E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est alors une homothétie.

3.1. Automorphismes

Exercice 84 – *Banque CCP 2016 59* 2

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1 Démontrer que f est bijectif de deux manières :
 i sans utiliser de matrice de f.
 ii en utilisant une matrice de f.

2 Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$. *Indication :* si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

Exercice 85 – *CNS pour qu'un endomorphisme soit bijectif (ENSAM 2015)* 2

Soit Q un polynôme de degré $d \leqslant n$. Soit f_Q définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f_Q(P) = (P \times Q)^{(n)}$

1 Montrer que f_Q est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que f_Q soit un automorphisme.

Exercice 86 – *Suite de polynômes par primitivation (Centrale MP 2015)* 3

On définit la suite de fonctions suivantes : $f_0(x) = \sin(x)$ et $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x t \cdot f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1 Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels. On définit ϕ sur $E \times E$ par $\phi : (P, Q) \mapsto (P' - Q, P + Q')$. Montrer que ϕ est un automorphisme de $E \times E$.

2 Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (P_n, Q_n) \in E \times E,$ tel que $f_n(x) = \sin(x)\,P_n(x) + \cos(x)\,Q_n(x)$, avec P_n pair, Q_n impair, et P_n à coefficients entiers.

3.2. Projecteurs et symétries

Exercice 87 – *Stabilité de sous-espaces par un projecteur* 3

Montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par le projecteur p si et seulement si

$$F = (F \cap \mathrm{Im}(p) + (F \cap \ker(p))$$

.

Exercice 88 – *Matrice d'un projecteur (Mines MP 08)* 2

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$, D la droite d'équations : $x = -y = z$. Trouver la matrice canonique de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.

Exercice 89 – *Banque CCP 2016 71* 2

Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1 Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2 Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3 Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 90 – *Projecteurs et puissances d'un endomorphisme* 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0$. On admet que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrer que le projecteur p sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f)$. On pose $q = \mathrm{Id}_E - p$. Expliquer en quoi p et q permettent de calculer les puissances de f.

Exercice 91 – *Combinaison de projecteurs avec des coefficients irrationnels donnés (CCP)* 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1 Soit p un projecteur de E. Prouver que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

2 On rappelle que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ pour $n \in \{2, 3, 6\}$. Soient p, q et r trois projecteurs de E. À quelle condition $p + \frac{1}{\sqrt{2}}q + \frac{1}{\sqrt{3}}r$ est-il un projecteur ?

Exercice 92 – *Matrice d'un projecteur (Mines-Ponts PSI 10)* 3

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & x \\ -1 & 0 & y \\ -1 & -1 & z \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1 Déterminer (x, y, z) pour que AB soit la matrice d'un projecteur.

2 Déterminer BA dans ce cas.

3.3. Endomorphismes nilpotents

Exercice 93 – *Stabilité de la nilpotence* 1

Considérons deux matrices nilpotentes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Montrer que pour tout scalaire λ, λA est nilpotente.

2 Montrer qu'en revanche, AB et $A + B$ ne sont pas en général nilpotentes.

3 Montrer que pour que $A + B$ soit nilpotente, il suffit que A et B commutent.

4 Montrer que pour que AB soit nilpotente, il suffit que A et B commutent. Plus généralement, si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec A (sans être nécessairement nilpotente), alors AC est nilpotente. Par exemple, si P est un polynôme admettant 0 pour racine, alors $P(A)$ est nilpotente.

5 Montrer que toute matrice semblable à une matrice nilpotente est nilpotente, de même indice de nilpotence.

Exercice 94 – *Quel est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes ?* 4

Montrer que le sous-espace vectoriel Ω de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes est l'hyperplan $\mathcal{H}$ constitué des matrices de trace nulle.

Exercice 95 – *La nilpotence passe au crochet de Lie* 1

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E. Montrer que $\varphi\ : v \mapsto uv - vu$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 96 – *Présence de matrices nilpotentes dans un hyperplan (Centrale PSI 10)* 3

Soit $n \geqslant 3$ et H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que H contient une matrice nilpotente non nulle.

Exercice 97 – *Matrice semblable à son double (X PC 10)* 3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose M semblable à $2M$. Montrer que M est nilpotente. Que dire de la réciproque ?

Exercice 98 – *Produit nul d'endomorphismes nilpotents* 2T

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutant. Montrer que si $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(f)$, alors $\mathrm{rg}(f \circ g^k) = \mathrm{rg}(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2 Montrer que si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de n endomorphismes nilpotents de E, commutant deux à deux, alors $u_1 \ldots u_n = 0$.

3.4. Trace

La trace d'un produit dépend de l'ordre d'apparition des facteurs

En général, $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(CBA)$. 30

Exercice 99 – *Toute matrice de trace nulle est-elle semblable à une matrice de diagonale nulle ? (Centrale PC 10)* 4

Toute matrice de trace nulle est-elle semblable à une matrice de diagonale nulle ?

Exercice 100 – *Trace d'une somme* 3

1 Soit $S = \{A_1, ..., A_k\}$ une partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ stable par produit, de cardinal k. Montrer : $\operatorname{tr} A_1 + \cdots + \operatorname{tr} A_k \equiv 0\ [k]$.

2 Soit $G = \{A_1, ..., A_r\}$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de cardinal r tel que $\operatorname{tr} A_1 + \cdots + \operatorname{tr} A_r = 0$. Montrer que $A_1 + \cdots + A_r = 0$.

Exercice 101 – *Endomorphismes conservant la trace d'un produit (ENS MP)* 4

On note G l'ensemble des endomorphismes u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \operatorname{tr}(u(A)\, u(B)) = \operatorname{tr}(AB)$.

1 Montrer que tout élément de G est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

3 Expliciter les éléments u de G vérifiant $u(I_2) = I_2$.

3.5. Polynôme d'endomorphisme

Exercice 102 – *CNS d'inversibilité et polynômes annulateurs (Mines PC 10)* 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible si et seulement si il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$ et $P(0) = 1$.

Exercice 103 – *Polynôme de matrice et commutant (Mines PC 10)* 2

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 1$ tel que $P(0) = 1$. On suppose $P(A) = BA$. Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

3.6. Commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice

Exercice 104 – *Matrices commutant* 0

1 Soit A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A et B commutent.

2 Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = I_n + A + A^2$. Montrer que $AB = BA$.

3 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 105 – *Commutant d'un endomorphisme* 1

On appelle *commutant* de f et on note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E commutant avec E :

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}.$$

1 Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$, contenant l'ensemble $\mathbb{K}[f]$ des polynômes en f.

2 Montrer qu'en général, $\mathcal{C}(f)$ n'est pas commutatif, et contient strictement $\mathbb{K}[f]$.

Exercice 106 – *Commutant d'une matrice* 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On nomme *commutant* de A et on note $C(A)$ l'ensemble des $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

1 Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, contenant l'ensemble $\mathbb{K}[A]$ des polynômes en A.

2 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires distincts deux à deux. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Que dire d'un endomorphisme représenté dans une certaine base par une telle matrice ?

Exercice 107 – *Dénombrement d'un ensemble de matrices (Mines PC 10)* 3

Soit $D = \mathrm{Diag}(1, 2, \dots, n)$. Déterminer le nombre de matrices commutant avec D et semblables à D.

Exercice 108 – *Commutant d'un projecteur* 3

Décrire $\mathcal{C}(f)$ lorsque f est un projecteur d'un espace vectoriel E. Donner la dimension de cet espace vectoriel lorsque E est de dimension finie.

Exercice 109 – *(Centrale PSI 10)* 3

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$. Déterminer le commutant de M.

Exercice 110 – *Matrices commutant avec un ensemble de matrices* 2

1 Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 111 – *Commutant d'une matrice diagonale par blocs* 2

Soit $M = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$. Déterminer le commutant de M.

3.7. Endomorphismes cycliques

Exercice 112 – *Endomorphismes cycliques* 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On dit qu'un endomorphisme f de E est *cyclique* s'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$ (*i.e.* f est nilpotent d'indice n). Montrer que f est cyclique

2 Montrer que le commutant d'un endomorphisme cyclique est constitué de ses polynômes.

4. Image et noyau

Exercice 113 – *Noyau et image d'un morphisme d'évaluation* 0

Soit $a \in I$, $\varphi\ : f \in \mathbb{R}^I \mapsto f(a)$. Décrire le noyau et l'image de φ.

Exercice 114 – *Stabilité du noyau et de l'image par un élément du commutant* 1

Soient f et g deux endomorphismes de E.

1 Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g. Montrer que l'implication réciproque peut être fausse.

2 Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par g.

3 Montrer sur un exemple que les sous-espaces stables par f ne le sont pas nécessairement par g.

4 Soit $h \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que g et h commutent avec f. Montrer que

$$F \overset{def}{=} \{x \in E,\ g(x) = h(x)\}$$

est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Exercice 115 – *Caractérisation de la supplémentarité du noyau et de l'image (INT 08)* 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\ker u = \ker u^2$;

(2) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$;

(3) $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Que subsiste-t-il en dimension infinie ?

Exercice 116 – *Polynôme annulateur* 1

1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant $f^3 + 2f + 5\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que f est un automorphisme de E.

2 Soit f un endomorphisme de E, vérifiant l'identité $f^2+f-2\mathrm{Id}_E = 0$. Établir $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Im}(f+2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, $E = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}_E)$.

3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Généraliser cet exemple

Exercice 117 – *Banque CCP 2016 60* 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1 Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

2 f est-il surjectif ?

3 Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$.

4 A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 118 – *Banque CCP 2015 62* 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1 Démontrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\ f$.

2 Démontrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\ g$.

3 Démontrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\ g$.

Exercice 119 – *Banque CCP 2016 62* 0

Soit Eun espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1 Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.

2 Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\ (f - 2\mathrm{Id})$:

- **i** en utilisant le lemme des noyaux ;
- **ii** sans utiliser le lemme des noyaux.

3 Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\ (f - 2\mathrm{Id})$.

Exercice 120 – *Banque CCP 2016 64* 1

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1 Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

2

- **i** Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.
- **ii** Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.

Exercice 121 – *CCP MP 2015* 1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1 Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2 Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

3 Le résultat est-il toujours valable en dimension infinie ?

Exercice 122 – *Supplémentarité* 2

Soit E, F des espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$. On suppose que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u = F$.

Exercice 123 – *Petites Mines MP 2015* 2

Soit E et F deux espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F, et v une application linéaire de F dans E telles que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

1 Montrer que $\ker(u \circ v) = \ker v$.

2 Montrer que $\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im} u$.

3 Montrer que $\ker v \oplus \operatorname{Im} u = F$.

Exercice 124 – *ENSEA MP 2015* 3

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dans $M_{2n}(\mathbb{R})$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence $rg(M) = n \iff D = CA^{-1}B$.
On pourra s'intéresser au noyau de M.

Exercice 125 – *ENSEA MP 2015* 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E. On suppose que
– le noyau de u est de dimension 1,
– u^2 n'est pas l'endomorphisme nul,
– $u^3 = 0$.

1 Montrer que $\ker(u) \subset \mathrm{Im}(u)$ et que $\dim \ker(u^2) = 2$.

2 Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 126 – *Télécom Sud Paris MP 2015* 3

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ si et seulement s'il existe un projecteur p et un automorphisme v de E tels que $u \circ v = v \circ u = p$.

Exercice 127 – *Mines MP 2015* 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $B = A +{}^t A$.

1 Montrer que $\ker B = \ker A \cap \ker({}^tA)$.

2 Montrer que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}({}^tA)$.

Remarque : exercice piège car l'approche naturelle se fait plutôt avec des techniques d'algèbre bilinéaire.

Exercice 128 – *Petites Mines MP 2015* 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$.

1 Montrer que u n'est pas bijective.

2

i Montrer que $\ker u + \operatorname{Im} u = E$.
ii Montrer que $\ker u = \mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.
iii Montrer que $\mathrm{Im} u = \ker(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.

3 On suppose que u n'est pas l'endomorphisme nul. Montrer que le rang de u vaut 2 et qu'il existe une base de E dans laquelle u a la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 129 – *(X MP 10)* 3

Soit A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tous scalaires t et t', $\mathrm{rg}(tA + t'B) \leqslant 1$.
Montrer que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$ ou $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$.

Exercice 130 – *Noyaux des itérés de dimension finie (X MP 10)* 3D

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $\ker(f)$ de dimension finie. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ker(f^n)$ est de dimension finie.

5. Rang

5.1. Généralités sur le rang

Faut-il retenir le lemme préparatoire au théorème du rang ? 31

C'est un résultat fin qui a plusieurs utilités :

(1) Il a pour principal intérêt (par rapport au théorème du rang) d'être valable en dimension quelconque.

(2) De plus, il est beaucoup plus précis que le théorème du rang en dimension finie.‘

Exemple

Pour montrer que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à $J_r(n,p)(=\sum_{i=0}^r E_{i,i}(n,p))$, on peut utiliser ce théorème.

◇ ◇ ◇

Caractérisation du rang d'une matrice par les matrices extraites inversibles 32

Le rang d'une matrice est la plus grande taille de ses matrices extraites inversibles.
C'est donc la plus grande taille de ses matrices extraites de déterminant non nul, mais vous connaissez un algorithme de calcul du rang de bien meilleure complexité !

Rang et composition 33

Si $f\ : E \to F$ et $g\ : F \to G$ sont deux applications linéaires de rang fini, alors

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$$

De plus, si f (resp. g) est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, g$ (resp. $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$).
Pour résumer, composer un morphisme par un autre fait « chuter » (au sens large) le rang, et donc le conserve quand on compose par un isomorphisme.

Exercice 131 – *Sous-espaces de matrices de rang majoré (Centrale MP 2015)* 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $r \in \{1, \dots, n\}$.

1 Montrer que : $rg(M) = r \Leftrightarrow \exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{R})^2 | PMQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Montrer que $rg(M) \geqslant r$ avec égalité si et seulement si $D = CB$.

2 Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, contenant $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tel que toutes les matrices de V soient de rang inférieur ou égal à r. Soit $W = \{\begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & A \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})\}$. Montrer que $V \cap W = \{0\}$.

3 Montrer que la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments sont de rang inférieur ou égal à r est inférieure ou égale à nr.

Exercice 132 – *Inégalités et rang* 1

1 Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ deux morphismes entre espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer :

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et u, v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - n \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$

Exercice 133 – *Rang d'une matrice par le déterminant* 2

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue en supprimant des lignes ou colonnes de A.

Montrer que le rang de A est la plus grande taille d'une matrice inversible extraite de A.

Ainsi, le rang de A est la plus grande taille d'un « déterminant extrait » de A non nul.

Exercice 134 – *Égalité de rangs* 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\operatorname{Im}(g)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans E, puis que $f, g, g \circ f, f \circ g$ ont le même rang.

Exercice 135 – *Rang d'une matrice à paramètres (Mines-Ponts PSI 10)* 3

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ avec $a + b + c = \pi$. Rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \tan(a/2) \\ 1 & \cos(b) & \tan(b/2) \\ 1 & \cos(c) & \tan(c/2) \end{pmatrix}$.

Exercice 136 – *Base de matrices de rang fixé (Centrale PSI 10)* 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 s'écrit comme différence de deux matrices de rang p. En déduire qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang p.

Exercice 137 – *Rang d'une matrice par blocs (Centrale)* 0

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Exprimer le rang de B en fonction de celui de A.

Exercice 138 – *Applications linéaires dont la composée est un projecteur de rang 2 (CCP)* 0

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$ puis que $v \circ u = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 139 – *Curiosité de rang* 3

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de même rang telles que $A^2 B = A$. Montrer que $B^2 A = B$.

5.2. Endomorphismes et matrices de rang 1

Exercice 140 – *Matrices de rang 1* 1

1 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs colonne $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $A = X^t Y$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A) A$.

Exercice 141 – *Matrices de rang 1* 2

1 (CCP MP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} A = 1$ et $\operatorname{tr} A = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

2 (ENSAM) Soient $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in K^{2n}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{i,j} = x_i y_j$. à quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ? Exprimer le déterminant de $I_n + A$ en fonction de la trace de A.

3 (X MP) Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, λ dans $\mathbb{R}$. La matrice $B \overset{def}{=} I_n + \lambda A$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

4 (Mines MP) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que f est nilpotent ou diagonalisable (*i.e.* il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale).

Exercice 142 – *(TPE PSI 10)* 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{rg}(A) = 1$. Montrer $A^2 = A$.

Exercice 143 – *(Mines PC 10)* 2

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

6. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

6.1. Structure d'espace-vectoriel, dimension

Comment établir une structure d'espace-vectoriel ?

En montrant qu'on a un espace vectoriel : en montrant qu'on a un sous-espace vectoriel. Définition d'un espace vectoriel : on n'y revient jamais, et si vraiment on nous la demande, on peut la retrouver avec un peu de bon sens. 34

Comment établir une structure de sous-espace vectoriel ?

On utilise la proposition II.3 35

Exemple

◇◇◇

Partie et sous-espace vectoriel

Si on veut montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, doit-on préciser dans la rédaction que F est une partie de E ?
Tout dépend du contexte : si F est donnée comme une partie de E, alors, ce n'est pas nécessaire. Si l'inclusion de F dans E ne va pas de soi, on pourra la justifier. 36

Exemple

Si on pose $E = \mathbb{R}^{[0,1]}$, F l'ensemble des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $G = \mathcal{C}_{pm}([0,1], \mathbb{R})$, alors il est clair que F et G sont des parties de E, mais, pour montrer que G est un sous-espace vectoriel de F, on pourra expliquer pourquoi une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

◇◇◇

Dimension d'un produit cartésien

La formule

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

passe mal. 37
Pour éviter d'écrire l'énormité $\dim(E \times F) = \dim(E)\dim(F)$, on peut se rappeler que $\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{m+n}$, ou prendre le cas où $F = \{0\}$.

Exercice 144 – *Étude algébrique d'une partie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (CCP)* 0

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & -b \\ c & b & a+b \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; préciser sa dimension. L'ensemble E est-il un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 145 – *Dimension d'un sous-espace matriciel (CCP 12)* 0

Soient $n \geqslant 2$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M + {}^tM = 2\operatorname{tr}(M)I_n\}$. Montrer que E est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer sa dimension.

Exercice 146 – *Sous-espaces d'intersection non triviale (CCP)* 3

Soient E un espace vectoriel de dimension n, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E tels que : $\dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_p > n(p-1)$. Montrer : $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_p \neq \{0\}$.

Exercice 147 – *Dimension d'un sous-espace d'endomorphismes* 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $x \in E$. Vérifier que

$$F \stackrel{def}{=} \{f \in \mathcal{L}(E), f(x) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et déterminer sa dimension.

6.2. Supplémentarité, somme directe

Multitude des supplémentaires d'un sous-espace donné 38

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie admet toujours un au moins un supplémentaire, mais surtout qu'il en admet plusieurs et même une infinité en général [a]. L'expression « le supplémentaire » est donc le plus souvent fautive.

[a] Quels sont les très rares cas où F n'a qu'un supplémentaire ?

Exemple

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, $i\mathbb{R}$ est certes un supplémentaire de $\mathbb{R}$, mais c'est le cas de tout $z\mathbb{R}$, où z est un complexe non réel.

◇ ◇ ◇

Confusion entre supplémentaire et complémentaire 39

Étant donné un sous-espace vectoriel F de E, ne pas confondre ses supplémentaires et son complémentaire $E \setminus F$, qui n'est *jamais* un sous-espace vectoriel de E.

Somme directe de plusieurs sous-espaces 40

Deux sous-espaces F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$, mais il ne faut pas généraliser hâtivement cette caractérisation à plusieurs sous-espaces.

Exemple

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}(1,0)$, $\mathbb{R}(0,1)$ et $\mathbb{R}(1,1)$ sont d'intersection triviale deux à deux, mais ces sous-espaces ne sont pas en somme directe.

◇ ◇ ◇

Comment montrer par récurrence qu'une somme est directe ?

On montre facilement que $F_1, \dots, F_{n+1}$ sont en somme directe si et seulement si

(1) $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.

(2) $F_{n+1} \cap (F_1 + \cdots + F_n) = \{0_E\}$.

ce qui permet de montrer par récurrence qu'une somme est directe.

41

Exemple
L'hérédité dans la démonstration du lemme des noyaux.

◇◇◇

Exercice 148 – *Supplémentaire* 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$H \overset{def}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et en donner un supplémentaire.

Exercice 149 – *Les sous-espaces propres sont en somme directe* 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires distincts deux à deux (où $n \in \mathbb{N}^*$).
Le but de cet exercice (qui sera un résultat de cours) est de montrer de façons diverses que $\ker(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)$, ..., $\ker(f - \lambda_n \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.

1 Montrer ce résultat par récurrence.

2

i Soit $i \in [\![1, n]\!]$, et soit $x_i \in \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(f)(x_i) = P(\lambda_i)x_i.$$

ii Conclure en utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange.

3 Montrer ce résultat en utilisant le lemme des noyaux.

Exercice 150 – *Division euclidienne et supplémentaires* 2

Interpréter le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ en termes de supplémentarité de deux sous-espaces vectoriels.

Exercice 151 – *Sous-espaces supplémentaires à un même troisième* 3

Montrer que si F_1 et F_2 sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel G, alors F_1 et F_2 sont isomorphes.

7. Familles de vecteurs

Pourquoi impose-t-on des familles de scalaires à support fini dans la notion de combinaison linéaire ?

(1) Une première raison évidente est qu'il nous fallait donner un sens à $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, ce qui poserait des problèmes insurmontables si une infinité de scalaires n'étaient pas nuls.

(2) De plus, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $(x_i)_{i \in I}$ (même si la famille est infinie).

42

Exercice 152 – *Base en dimension* 4 0

Soit $(u_1, \dots, u_4) = ((1,2,3,1),(2,1,2,1),(0,1,2,3),(0,0,1,1))$. Montrer que $(u_1, \dots, u_4)$ est une base de $\mathbb{K}^4$.

Exercice 153 – *Base selon la valeur d'un paramètre* 2

Soit $(u_1, u_2, u_3) = ((1, 2, 3), (2, 1, -1), (0, 1, a))$, où a est un paramètre réel. Déterminer pour quelles valeurs de a (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 154 – *Suppression d'un vecteur dans une famille génératrice* 0

Soit $x_1, \dots, x_{p+1} \in E$. Montrer que si x_{p+1} est combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_p$, alors $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{p+1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Exercice 155 – *Des exemples simples de liberté* 0

1 Soit $v_1 = (1, 2, 3, 0), v_2 = (0, 3, 5, 1), v_3 = (0, 0, 0, 7)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

2 Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E (où $p \geqslant 2$). Montrer que $(x_1, x_2 + x_1, \dots, x_p + x_1)$ est libre. Généraliser cet exemple. La famille $(x_1 - x_p, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_p - x_{p-1})$ est-elle libre ?

Exercice 156 – *Bases* 2

Soit $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une base de E (où $n \geqslant 2$). Montrer que $(x_1, x_2 + x_1, \dots, x_n + x_1)$ est une base de E. Expliquer pourquoi aucune sous-famille stricte de $\mathcal{B}$ ne peut être une base (de E). Même question avec une surfamille stricte.

Exercice 157 – *Décomposition en éléments simples et bases* 2

Interpréter le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ en termes de base. Faire de même pour $\mathbb{R}(X)$.

Comment montrer la liberté d'une famille ?

La plupart des démonstrations « abstraites » de liberté utilisent le lemme suivant :

Lemme pour une preuve de liberté

On considère une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E, et une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires. On suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E.$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Si $u_j \notin \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n)$, alors $\lambda_j = 0$.

XX.1

43

Autrement dit, si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs, pour montrer qu'un scalaire λ devant un vecteur u de $\mathcal{F}$ dans une relation de liaison de $\mathcal{F}$ est nul, on trouve une propriété *stable par combinaison linéaire* que seul le vecteur *u ne vérifie pas* dans $\mathcal{F}$.

Exemple

Soit E est un espace euclidien, v_0 un vecteur non nul, et v_1, …, v_p des vecteurs orthogonaux à u. Si $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des réels tels que

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i = 0_E$$

alors $\lambda_0 = 0$.

◇ ◇ ◇

Démarches typiques de preuve de liberté 44

On utilise essentiellement ce lemme de deux manières :

(1) « en parallèle », lorsque les u_i jouent un rôle symétrique (utilisation d'évaluations, vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, etc.)

(2) « en série », lorsqu'on peut hiérarchiser naturellement les vecteurs u_i (degrés échelonnés, ordres de multiplicité d'une racine échelonnés, comportement asymptotique, etc.)

Exercice 158 – *Liberté de familles* 2

1 La famille $(f_a \ : x \mapsto \cos(x+a))_{a\in\mathbb{R}}$ est-elle libre ? Quelles sont ses sous-familles libres ?

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on introduit $P_i \ : x \mapsto \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x-a_j)$. Montrer que $(P_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

3 *(Mines MP 08, Mines MP 09)* Montrer que la famille des fonctions réelles de la variable réelle $t \mapsto |t-a|$, lorsque a décrit $\mathbb{R}$, est libre.

4 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $g_a \ : x \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

5 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose que $f^p(x) = 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0$ pour un certain vecteur x de E et où $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n \ : x \mapsto x^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

7 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $u^m = (\sin(1/n^m))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est libre.

8 *(X MP 08)* Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \ : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x^n)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

9 *(X MP 08)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille de fonctions

$$(x \mapsto \sin(nx), x \mapsto \sin((n-1)x)\cos(x), \dots, x \mapsto \sin(x)\cos((n-1)x))$$

est-elle libre ?

10 *(X MP 08)* Soit $f \ : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que $(f, f\circ f, f\circ f\circ f)$ est un système libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

8. Déterminant

n désigne un entier naturel non nul.

8.1. Calculs de déterminants

Exercice 159 – *Nullité d'un déterminant* 0

Montrer sans calcul que pour tous réels a, b, c, d :

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 160 – *Déterminant d'une matrice triangulaire* 0

Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Exercice 161 – *Calculs simples de déterminants* 0

Calculer les déterminants suivants :

1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}$$

3

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2 & & n \end{vmatrix}$$

4

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que ce déterminant soit nul.

Exercice 162 – *Calculs divers de déterminants* 2

1 Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \vdots & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Réponse : $(-1)^{n-1} n^{n-2} \frac{n(n+1)}{2}$.

2 Calculer $(a, b, c \in \mathbb{R})$:

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Réponse : $2abc(a+b+c)^3$.

3 *(X MP 09, CCP PSI 09)* Soit $\Phi\ : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto^t A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det \Phi$.

4 *(X PC 09)* Soit $\Phi\ : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A + 2^t A$. Déterminer la trace et le déterminant de Φ.

Exercice 163 – *Matrice compagnon* 1

On considère un entier $n \geqslant 2$ et n scalaires $a_0, \dots, a_{n-1}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix}.$$

Exercice 164 – *Calcul de déterminant par multilinéarité* 2

(Mines PSI) Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $m_{i,i} = a_i + b_i$ et $m_{i,j} = b_i$ si $i \neq j$. Calculer le déterminant de M.

Exercice 165 – Mines MP 08 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = X^n - X + 1$.

1 Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.

2 Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$.

Exercice 166 – *Un déterminant tridiagonal* — 3

Soit a, b, c trois réels, et Δ_n le déterminant de taille n ($n \geqslant 2$) suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$.

1 Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$

2 En déduire une méthode de calcul de Δ_n pour tout entier naturel n.

3 Donner une formule explicite pour Δ_n dans le cas où $a^2 = 4bc$.

Exercice 167 – *Calcul astucieux de déterminant* — 3

(Centrale PC 09) Soit a, b, c trois réels, $b \neq c$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & \mathbf{b} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{c} & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 168 – Mines MP 08 — 4

On se donne m et n dans $\mathbb{N}^*$ avec $m < n$, $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}_m[X]$, $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 169 – *Déterminant d'un opérateur matriciel (Mines MP 10)* — 3

Soit $A = \mathrm{Diag}(1, 2, 1) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $u(M) = AM + MA$. Calculer $\det(u)$.

8.2. Propriétés du déterminant

Exercice 170 – *Déterminant par blocs* — 2

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ($p, q \geqslant 1$).

1 Calculer

$$\begin{vmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}.$$

2 Étendre ce résultat à $\begin{vmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}$, où $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Exercice 171 – *Perturbation matricielle sans effet sur le déterminant* — 3

1 *(X MP 09)* Soit n un entier pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que, pour tout réel t, $\det(A + tJ) = \det(A)$.

2 *(X PC 09, Petites Mines 12)* Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)$.

Exercice 172 – *Déterminant d'un endomorphisme matriciel* 3

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme u_A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $B \mapsto AB$. Préciser la matrice de u_A dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, et vérifier que $\det(u_A) = (\det A)^2$.

Exercice 173 – (Ulm MP 08) 3

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A+B) \geqslant 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^p+B^p) \geqslant 0$.

Exercice 174 – X 07, Mines MP 08 3

Soit A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg}(H) = 1$. Montrer : $\det(A+H)\det(A-H) \leqslant \det A^2$.

8.3. Utilisation du déterminant

Exercice 175 – *Racines carrées réelles de l'unité* 2

On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$. Montrer que n est pair. Si n est pair, existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$?

Exercice 176 – *Matrice antisymétrique de taille impaire* 2

Montrer qu'une matrice antisymétrique de taille impaire ne peut pas être inversible.

Exercice 177 – *Inversion matricielle par le déterminant* 0

En utilisant les déterminants, inverser la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 178 – *Indépendance de la similitude par rapport au corps des scalaires* 1

(Mines MP 08, X PC 09) Montrer que si deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 179 – *Déterminant avec des coefficients binomiaux (ENSAM 2015)* 3

Soit m et p deux entiers tels que $m \geq p \geq 1$ et $\Delta(m,p)$ le déterminant suivant :

$$\Delta(m,p) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \dots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Déterminer $\Delta(m, p+1)$.

Exercice 180 – *Mines MP 2015* 1

Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ C & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ C & \dots & C & x_n \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$. On définit $P(X) = \det(A + XJ)$.

1 Majorer fortement le degré de P.

2 Que vaut $\det A$? (On distinguera les cas $C \neq 1$ et $C = 1$.)

Exercice 181 – *X MP 10* 3

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ ayant sa diagonale nulle et des ± 1 en dehors de la diagonale. Montrer que A est inversible. **Indication :** Traiter d'abord le cas où les coefficients non diagonaux valent tous 1.

8.4. Comatrice

Exercice 182 – *Comatrice de la transposée* 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{com}({}^tA) = {}^t\,\mathrm{com}(A)$.

Exercice 183 – *Comatrice* 0

On considère trois réels a, b, c, et

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant et la comatrice de A. Quand A est inversible, préciser A^{-1}.

Exercice 184 – *Rang et déterminant de la comatrice* 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \geqslant 2$. Calculer $\mathrm{rg}(\mathrm{com}\, A)$ et $\det(\mathrm{com}\, A)$.
Indication : discuter selon le rang de A, le cas compliqué étant $\mathrm{rg}(A) = n-1$.

Exercice 185 – *Comatrice d'un produit (Mines MP 10)* 2

1 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

2 Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\,\mathrm{com}(B)$.

3 Soit A, B deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que leurs comatrices sont semblables.

4 Donner le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction de celui de A.

Exercice 186 – *Si A est une involution, sa comatrice aussi* 3

(CCP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = I_n$. Montrer que $(\mathrm{com}(A))^2 = I_n$.

8.5. Déterminant de Vandermonde

Exercice 187 – *Déterminant de Vandermonde* 1

On considère un entier $n \geqslant 1$ et $n+1$ scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 188 – *Centrale MP 2015* 3

1 Soient $a_1, \ldots, a_p$ des réels distincts et $t_1, \ldots, t_p$ des réels non tous nuls. On pose $f \;: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t_1 x^{a_1} + \cdots + t_p x^{a_p}$. Montrer que f s'annule au plus en $(p-1)$ points.
Indication : on pourra raisonner par récurrence.

2 Soient des n-uplets de réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Soit le déterminant

$$D \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_1} & \dots & x_n^{\alpha_1} \\ x_1^{\alpha_2} & x_2^{\alpha_2} & \dots & x_n^{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\alpha_n} & x_2^{\alpha_n} & \dots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Montrer que D est strictement positif. **Indication :** on pourra raisonner par récurrence et faire varier x_n.

9. Hyperplans, dualité

Exercice 189 – *Intersection d'hyperplans* 2

On suppose E de dimension finie n.

1 Montrer que l'intersection de m hyperplans de E est de dimension au moins $n-m$.

2 Réciproquement, montrer que tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.

Exercice 190 – *Tout hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *rencontre* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 1

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geqslant 2$).

1 Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M, \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.

2 En déduire que H contient une matrice inversible.

Exercice 191 – *Sur le dual* 2

Soit E un espace vectoriel. On note E^* son dual.

1 Montrer que si f et g sont deux formes linéaires sur E de même noyau, alors f et g sont colinéaires.

2 On suppose ici que $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{array}{rccl} \Phi_n : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f^{(n)}(0) \end{array}.$$

Montrer que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

3 Ici, E est de dimension 3, et u est un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Montrer l'existence de $(a, f) \in E \times E^*$ tel que, pour tout $x \in E$:

$$u(x) = f(x)a.$$

Exercice 192 – *Formes linéaires coordonnées* 4

Donner la base duale de $((1,1),(2,-1))$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 193 – *Liberté d'une famille de formes linéaires* 3D

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ des formes linéaires sur E ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

(2) Pour tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, il existe un vecteur x de E tel que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on ait : $\varphi_i(x) = \lambda_i$.

Exercice 194 – *Base antéduale et bidual* 5

E est supposé de dimension finie non nulle n.

1 Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & E & \to & E^{**} \\ & x & \mapsto & (f \mapsto f(x)) \end{array}$$

est un isomorphisme de E sur son *bidual* E^{**}. On l'appelle *isomorphisme canonique* entre E et son bidual.

2 Soit L une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base B de E telle que $L = B^*$: c'est la *base antéduale* de L.

3 Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_0, \ldots, f_n)$ est une base de E^* et donner la base anteduale lorsque :

i $f_i(P) = P(x_i)$ où $x_0, \ldots, x_n$ sont des scalaires distincts.

ii $f_i(P) = P^{(i)}(a)$, où $a \in \mathbb{K}$.

4 Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p, l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n-p$.

5 Soit $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ une famille libre de formes linéaires sur E. Soit F l'intersection des noyaux respectifs H_i des formes linéaires φ_i.

i Montrer que toute forme linéaire ψ s'annulant sur F est combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$.

Indication : on pourra introduire l'application

$$\begin{array}{rccl} \Delta \ : & E & \to & \mathbb{K}^{q+1} \\ & x & \mapsto & (\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_q) \end{array}$$

et considérer une équation d'un l'hyperplan contenant son image.

ii Montrer que F est de dimension $n-q$.

Exercice 195 – *Détermination d'une base antéduale (CCP 12)* 5

Soit $f_1 : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2x_1 - x_2 + x_3$, $f_2 : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_2 - x_3$, $f_3 : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto -x_1 + 4x_2 + 2x_3$. Montrer que (f_1,f_2,f_3) est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ et déterminer la base antéduale.

Exercice 196 – *Formes linéaires sur des espaces de polynômes* 3

1 *(Mines MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $(c_1,\dots,c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout P de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$:

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k(P(k) + P(-k) - 2P(0)).$$

2 *(Centrale MP 07)* Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^n P^{(k)}(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de A ? Donner une base de A.

3 *(X MP 09)* Déterminer les $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tels qu'il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_4[X], \quad P'(a) = \alpha P(-2) + \beta P'(-2) + \gamma P(-1) + \delta P(1/2).$$

Exercice 197 – *Formes linéaires et une propriété de positivité (Centrale MP 2015)* 3

1 Soient f et g deux formes linéaires non nulles d'un espace vectoriel E. Montrer que f et g sont colinéaires si et seulement si elles ont le même noyau.

Soient $f_1,\dots,f_n,f$ des formes linéaires d'un espace vectoriel réel E.

On suppose que, pour tout $x \in E$, $f_1(x) \geqslant 0, \dots, f_n(x) \geqslant 0$ implique $f(x) \geqslant 0$. On veut montrer qu'il existe des réels $a_1,\dots a_n$ tels que $f = a_1f_1 + \cdots + a_nf_n$.

2 Montrer cette propriété pour $n=1$.

3 Établir le cas général (on pourra restreindre $f_1,\dots,f_n$ à $\ker(f_n)$).

Exercice 198 – *Forme linéaire nulle sur le noyau d'une autre* 3

1 Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, et $H = \ker\varphi$ l'hyperplan de E qu'elle définit. Montrer que toute forme linéaire ψ nulle sur H est colinéaire à φ.

2 Soit $u \in E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, f \in R, \quad \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^1 u(t)f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que u est constante.

Exercice 199 – *Équations d'hyperplans* 2

Soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des familles de scalaires non tous nuls. Montrer que les deux équations

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = 0$$

définissent un même hyperplan si et seulement si les vecteurs $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ sont colinéaires.

CHAPITRE XXI

Suites et séries (TD)

Sommaire

1. Borne supérieure

Exercice 200 – *Caractérisation de la borne supérieure dans le cas d'un ordre total* 0

On se donne un ensemble E totalement ordonné, $b \in E$, et A une partie de E.

Montrer que b est la borne supérieure de A dans E si et seulement si il vérifie simultanément les deux conditions :

(1) $\forall a \in A, a \leqslant b$.

(2) $\forall c \in E, (c < b) \Rightarrow \exists a \in A, c < a$.

Exercice 201 – *Autour de la borne supérieure* 2

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1 On suppose B bornée et A incluse dans B. Montrer que A et B admettent des bornes supérieures et inférieures (dans $\mathbb{R}$), et que

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

2 On suppose que, pour tout couple $(a,b) \in A \times B$, $a \leqslant b$. Montrer que A admet une borne supérieure, B une borne inférieure, et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

3 On suppose A et B majorées. On note $A+B$ l'ensemble des réels s'écrivant comme somme d'un élément de A et d'un élément de B. Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$.

Exercice 202 – *Borne supérieure de fonctions numériques* 1

Soit X un ensemble non vide, f et g deux fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1 Montrer que $f+g$ est bornée, et que : $\sup_X(|f+g|) \leqslant \sup_X(|f|) + \sup_X(|g|)$.

2 Montrer que λf est bornée, et que : $\sup_X(|\lambda f|) = |\lambda| \sup_X(|f|)$.

3 Montrer que fg est bornée et que : $\sup_X(|fg|) \leqslant \sup_X(|f|) \sup_X(|g|)$.

4 Montrer que les deux inégalités établies ci-dessus peuvent être strictes.

5 A-t-on $\sup_X(f+g) \leqslant \sup_X(f) + \sup_X(g)$? $\sup_X(fg) \leqslant \sup_X(f) \sup_X(g)$?

2. Expressions séquentielles de notions ou propriétés topologiques

Exercice 203 – *Borne supérieure et suites* 0

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une suite (a_n) d'éléments de A, de limite $\sup(A)$.

Exercice 204 – *Caractérisation séquentielle de la densité* 1

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, il existe une suite d'éléments de A, de limite x.

Exercice 205 – *Caractérisation séquentielle des fermés de* $\mathbb{R}$ 2

Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite *ouverte* si elle est voisinage de chacun de ses points (*i.e.* pour tout élément u de U, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[u-\varepsilon, u+\varepsilon] \subset U$). Une partie F de $\mathbb{R}$ est dite *fermée* si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.

Montrer qu'une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F.

3. Généralités sur les suites numériques

Quand employer epsilon ?

Le but du cours sur les suites (et sur les séries) est d'éviter autant que possible le recours à ε. On n'y revient que si les résultats généraux de cours n'ont rien donné. 45

Utilisation d'epsilon

On peut distinguer trois types d'utilisation de ε dans l'assertion formelle de convergence d'une suite.

(1) Utilisation d'une unique valeur de ε, arbitrairement fixée : détériore considérablement l'information, donne un résultat grossier.

(2) Utilisation d'une unique valeur de ε, bien choisie : résultat intermédiaire. 46

(3) Utilisation de toutes les valeurs de ε (ou au moins d'une suite de valeurs de ε de limite nulle) : résultat fin.

Exemple

(1) Toute suite convergente est bornée (prendre $\varepsilon = 1$, ou 42, ou 10000, peu importe).

(2) Toute suite convergeant vers un réel strictement positif l est minorée, à partir d'un certain rang, par un réel strictement positif (prendre $\varepsilon \in]0, l[$, pas l ou $2l$).

(3) Résultats importants du cours, théorème de Cesàro (voir ci-dessous).

◇◇◇

Exercice 206 – *Divergence d'une suite réelle* 0

Écrire dans le registre formel le fait qu'une suite réelle u diverge.

Exercice 207 – *Expression formelle de la convergence* 0

Soit l un réel, et (u_n) une suite réelle. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes à la convergence de la suite (u_n) vers l ?

1 $\forall \varepsilon \in]0,1[, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

2 $\forall \varepsilon > 1000, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

3 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in [\![1000, +\infty[\![, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

4 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

5 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon$.

6 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 208 – *Suite convergente d'entiers relatifs* 0

Montrer que toute suite de nombres entiers relatifs convergente est stationnaire.
Pour les 5/2 : proposer une généralisation de ce résultat.

Exercice 209 – *Étude élémentaire de convergence ou de divergence* 2

1 Étudier la convergence des suites suivantes : $u = \left(n - \sqrt{n^2 - n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = \left(\frac{n\sin(n)}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 On considère k réels $A_1, \ldots, A_k$, avec $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_k \geqslant 0$. Évaluer

$$\lim_{n\to\infty} \left(A_1^n + \cdots + A_k^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

3 Étant donné x réel, étudier la suite indexée par $\mathbb{N}^*$, de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx)$$

Exercice 210 – *Une autre étude de convergence* 3

Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{E(\sqrt{k+1}) - E(\sqrt{k})}{k+1}.$$

Exercice 211 – *Théorème de Cesàro* 1

On considère une suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ et la suite des *moyennes* $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$, de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

1 Montrer que si la suite u croît, il en est de même de v.

2 Montrer que si u tend vers une limite finie ou infinie $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors v tend vers l (c'est le *théorème de Cesàro*).

3 Montrer, en donnant un contre-exemple, que la réciproque est fausse.

4 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, telle que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers un réel λ. Montrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers λ.

Exercice 212 – *Moyenne arithmético-géométrique* 2

Soit a, b deux réels, avec $0 < a \leqslant b$. On considère les suites u et v définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que u et v sont adjacentes. Leur limite commune est appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.

Exercice 213 – *Étude d'une suite définie par un nombre de chiffres (Petites Mines MP 2015)* 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(n)$ le nombre de chiffres de n dans son écriture décimale. On note $U_n = P(n)^{-P(n)}$. Étudier $\big(U(n)\big)$.

Exercice 214 – $\sin(\ln(n))$ *(X PSI 05)* 3

Montrer que la suite de terme général $\sin(\ln n)$ n'a pas de limite.

Exercice 215 – *Suite réelle (x_n) telle que $(2x_{n+1} - x_n)$ converge* 3D

(X MP) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle telle que $(2x_{n+1} - x_n)$ converge vers a. Montrer que (x_n) est convergente.

Exercice 216 – *Suite réelle bornée vérifiant une condition de convergence* 3D

(X MP 05) Déterminer les suites réelles bornées telles que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ converge.

Exercice 217 – *Suite d'entiers naturels* 3D

1 Montrer que si l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective, alors la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

2 Soit φ une permutation de $\mathbb{N}^*$ telle que la suite $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_n$ soit convergente. Que dire alors de $\lim_n \frac{\varphi(n)}{n}$?

3 Soit α un nombre irrationnel positif, et (p_n, q_n) une suite de couples d'entiers naturels non nuls, telle que $\lim_n \frac{p_n}{q_n} = \alpha$. Montrer que les suites (p_n) et (q_n) divergent vers $+\infty$.

4. Suites extraites, valeurs d'adhérence

Une suite extraite d'une suite extraite est-elle extraite ? 47

Oui, on utilise d'ailleurs de résultat dans la preuve de la proposition III.17 page 90, ou la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas complexe (voir votre cours de MPSI).
Soit $u = (u_n)$ une suite de réels, et soit $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de u : il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, pour tout entier naturel n. De façon plus synthétique, $v = u \circ \varphi$. Soit $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de v ($\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_{\psi(n)}$). La suite w est alors une suite extraite de u, et $w = u \circ \varphi \circ \psi$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_{\varphi(\psi(n))}$$

Exemple
Si v est extraite de u via $\varphi : n \mapsto 2n$ et w est extraite de v via $\psi : n \mapsto 3n+1$, alors w est extraite de u via

$$\varphi \circ \psi : n \mapsto 6n + 2$$

(et non $n \mapsto 6n + 1$).

◇◇◇

Exercice 218 – *Extraction convergente d'une suite monotone* 0

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite est convergente est elle-même convergente.

Exercice 219 – *De la convergence de sous-suites à la convergence* 2

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1 Montrer que u converge si et seulement si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

2 Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors u converge.

Exercice 220 – *Infinité de sous-suites convergentes* 2

Donner un exemple de suite (u_n) divergente, telle que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la suite extraite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 221 – *D'une suite réelle non majorée, peut-on extraire une suite tendant vers $+\infty$?* 4

Montrer que toute suite réelle non majorée admet une suite extraite divergeant vers $+\infty$.

Exercice 222 – *Quels sont les intervalles vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass ?* 4

On dit qu'une partie Ω de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass si toute suite d'éléments de Ω admet une valeur d'adhérence dans Ω.

Pour les 3/2 : montrer que les intervalles I non vides vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass sont (exactement) les segments.

Pour les 5/2 : montrer que les compacts de $\mathbb{R}$ (*i.e.* les parties vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass) sont les parties fermées bornées de $\mathbb{R}$.

5. Suites récurrentes

5.1. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 223 – *Banque CCP 2016 55* 0

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in (\mathbb{C})^2$.

1

i Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

ii Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

2 Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 224 – *Suite de Fibonacci* 1

On définit la *suite de Fibonacci*, (u_n), par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall\, n > 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

1 Trouver une fonction f telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$.

2 En déduire un équivalent simple de (u_n), et la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 225 – *Suites récurrentes linéaires, ou presque* 2

Pour chacune des suites suivantes, expliciter le terme général en fonction de l'indice.

1 (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 (u'_n) définie par $u'_0 = 0$, $u'_1 = 2$ et $u'_{n+2} = 2u'_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 (v_n) définie par $v_1 = 1$, $v_2 = 4$ et $v_{n+2} = \frac{v_{n+1}^3}{v_n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 (w_n) définie par : $w_1 = 1$, $w_2 = 3$ et $w_{n+2} = -w_{n+1} + 6w_n + 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 (z_n) définie par : $z_1 = 1$, $z_2 = 3$ et $z_{n+2} = 2z_{n+1} - z_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.2. Étude de suites récurrentes

Exercice 226 – *Étude élémentaire de suites récurrentes* 2

1 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite (x_n) en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer la convergence de (x_n).

2 Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 = a > 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

3 Étudier les suites récurrentes définies par un terme initial et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est successivement la fonction sinus, la fonction cosinus, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, la fonction $x \mapsto 1 + x^2$.

4 *(X PC 09)* Étudier la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^3+3}{3u_n+1}$.

Exercice 227 – *Suite récurrente complexe* 3

Soit (z_n) la suite complexe définie par son terme initial $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + |z_n|\right),$$

pour tout entier naturel n.

Étudier la convergence de (z_n).

Exercice 228 – *Suite récurrente à l'envers* 3

Rappeler le domaine de définition de la fonction arccos. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(u_{n+1})$. Que dire de u_0 ?

Exercice 229 – *Suite récurrente et fonction lipschitzienne (ENS Cachan MP 08)* 3

Soit f une fonction 1-lipschitzienne de $[0,1]$ dans lui-même, (x_n) la suite définie par $x_0 \in [0,1]$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge.

6. Étude locale de suites

6.1. Relations de comparaison

Sommation d'équivalents 48

Si la notion d'équivalence de suites se comporte bien avec le produit et le quotient, il n'en vas pas de même pour la somme : si $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$, il n'est pas sûr que $(u_n + v_n) \sim (x_n + y_n)$.
Pour éviter ce genre d'erreur, il vaut mieux travailler avec o et O et ne passer aux équivalents qu'à la fin.

Exemple

$\sin(1/n) \sim \arctan(1/n)$, mais $\sin(1/n) - 1/n \nsim \arctan(1/n) - 1/n$.

◇ ◇ ◇

Composition d'équivalents 49

Si $u_n \sim v_n$ et si f est une fonction telle que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ soient bien définies (au moins à partir d'un certain rang), il n'est pas sûr que $f(u_n) \sim f(v_n)$.
L'exercice ci-dessous donne toutefois des cas de compositions valides intéressants à connaître (mais ce n'est pas un résultat de cours).

Exemple

(1) Bien que $n+1 \sim n$, $e^{n+1} \nsim e^n$.

(2) Bien que $1+1/n \sim 1+1/n^2$, $\ln(1+1/n) \nsim \ln(1+1/n^2)$.

◇◇◇

Exercice 230 – *Composition des équivalents* 2I

On considère deux suites réelles u et v.

1 Montrer que si f (une certaine fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est continue en $a \in \mathbb{R}$, si u et v convergent vers a, et si $f(a) \neq 0$, alors $f(u_n) \sim f(v_n)$.

2 Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $u - v$ converge vers 0.

3 On considère désormais deux suites u et v de réels strictement positifs, équivalentes.

i Montrer que si u et v tendent vers $l \in \left(\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}\right) \setminus \{1\}$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

ii Montrer que $\ln(u_n) \sum \ln(v_n)$ si et seulement si

$$u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n \ln(v_n))$$

Exercice 231 – *Banque CCP 2016 1* 0

1 On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2 Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 232 – *Équivalents et convergence* 0

1 Montrer que la suite de terme général $\frac{n+3\sin(n)}{2n+(-1)^n}$ converge.

2 Montrer que la suite de terme général $\frac{E(\ln(n))}{\ln(n^2+n)}$ converge.

Exercice 233 – *Équivalents simples* 0

Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, de $\frac{e^n+n!}{n+1}$, $\frac{e^n+e^{-n}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}$, $e^{n^2+n!+\frac{1}{n}}$.

Exercice 234 – *Limite par analyse asymptotique (Centrale MP 10)* 2

Limite de $u_n = \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}$.

Exercice 235 – *Un énoncé type Cesàro (Centrale MP 2015)* 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \lambda + o(1)$. Montrer que $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge vers λ.

Remarque : exercice sans doute tronqué.

Exercice 236 – *Équivalent d'une suite* 3

Soit (u_n) une suite de réels de limite nulle et telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

1 Montrer que si l'on suppose (u_n) décroissante, alors $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

2 Montrer que ce résultat peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus (u_n) décroissante.

Exercice 237 – *Développements asymptotiques de suites* 2

1 Donner un développement asymptotique de la suite de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\frac{1}{n^3}$.

2 Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \ln(n+u_n)$.

3 (Mines MP) On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

i Montrer que (a_n) converge et trouver sa limite λ.
ii Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

6.2. Étude asymptotique de suites récurrentes

Exercice 238 – *Comportement asymptotique de suites récurrentes* — 2

1 Soit $s > 0$ et $a_0 \in]0, 1/s[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = a_n - sa_n^2$. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{sn}$.

2 *(X PC 08)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner un équivalent de u_n.

3 *(INT PSI 08)* On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$. Étudier la convergence de u_n. Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

4 *(ENS Lyon MP 09)* La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 239 – *Application des séries aux suites récurrentes* — 3D

1 Soit (u_n) la suite de terme initial $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et d'itératrice sinus. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

2 (Mines MP 2010) Soit (u_n) telle que $u_0 > 0$ et d'itératrice $f \ : x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

3 Soit (x_n) une suite définie par $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2.$$

i Montrer que (x_n) tend vers $+\infty$.
ii On pose $u_n = 2^{-n}\ln(x_n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge. En déduire que (u_n) converge.
iii Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

4 (Mines MP 2006) Soit $u_0 \in]0, 2\pi[$, puis $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.
i Montrer que (u_n) tend vers 0.
ii Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.
iii Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$.

Réponse : $u_n - A2^{-n} \sim \frac{A^3}{18\cdot 8^n}$.

Exercice 240 – *Suite récurrente et nature d'une série associée* — 3

$u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = 2\arctan(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$, nature de $\sum(u_n - \lambda)$?

Exercice 241 – *Équivalent d'une suite récurrente d'itératrice rationnelle (Centrale MP 10)* — 2

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \frac{1+2u_n}{1+3u_n}$.

1 Étudier la convergence de (u_n).

2 Donner un équivalent de u_n. **Réponse :** $u_n \sim 1/n$.

Exercice 242 – *Étude d'une suite via une série* — 3D

Fixons $\alpha \in]0, 1[$ et définissons la suite u par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \ln(1 + \alpha u_n).$$

1 Étudier la monotonie et la convergence de la suite u.

2 En posant $v_n = u_n/\alpha^n$, étudier la quantité $w_n = v_{n+1}^\beta - v_n^\beta$ pour β bien choisi, afin de montrer qu'il exite un réel $A > 0$ tel que $u_n \sim A\alpha^n$ lorsque n tend vers l'infini. On ne cherchera pas à expliciter A.

3 Déterminer un équivalent de $u_n - A\alpha^n$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 243 – *Étude d'une suite puis d'une série (Mines MP 06)* 3

Soit $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+u_n^2}$. Étudier la suite (u_n) puis la série $\sum(u_n - 1)$.

6.3. Étude asymptotique de suites implicites

Exercice 244 – *Exemple de suite implicite* 2

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution, que nous noterons u_n.

2 Étudier la monotonie de (u_n). En déduire la limite de cette suite.

3 Montrer que $u_n \sim n$.

4 Montrer que $u_n - n \sim -\ln(n)$.

Exercice 245 – *Une autre suite implicite* 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n = 1$. Étudier (u_n). Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 246 – *Mines MP 2015* 3

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n e^{nx_n} = 1$.

2 Existence et valeur de $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$?

3 La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ est-elle convergente ?

4 Donner un équivalent de x_n. **Réponse :** $x_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 247 – *Une suite implicite avec tangente* 3

Si $n \in \mathbb{N}$, soit x_n la solution de $\tan x = x$ qui appartient à $[n\pi, n\pi + \pi/2[$. Donner un développement de x_n à la précision $1/n^2$.

Exercice 248 – *Développement asymptotique d'une suite de racines (Mines MP 05)* 3DT

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n = 1$$

possède une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$. Convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Développement asymptotique à deux termes ?
Réponse : $x_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, où α est l'unique solution de $(y-1)e^y = 1$ (ou de $y - 1 = e^{-y}$).

Exercice 249 – *Équivalent d'une suite de racines de polynômes dérivés (Mines MP 2015)* 3DT

Pour $n \geqslant 2$, soit $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(X-k)$.

1 Montrer que P_n' admet une unique racine dans $]0,1[$. On la note x_n.

2 Limite de (x_n) ?

3 Trouver un équivalent de (x_n). **Réponse :** $\frac{1}{\ln(n)}$.

Exercice 250 – *Un autre développements asymptotiques de suite implicite* 3DT

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet une unique solution v_n. Donner un développement asymptotique à deux termes de v_n.
Indication : une fois la limite de (v_n) déterminée, on pourra poser $w_n = 1 - v_n$, puis utiliser le logarithme.

7. Nature de séries

7.1. Séries à termes positifs

Exercice 251 – *Nature de séries à termes positifs* 0

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :

1 $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

2 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3 $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$.

4 $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

5 $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

6 $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.

7 $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 252 – *D'autres natures de séries à termes positifs* 2

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :

1 $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

2 $u_n = \sqrt{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}$.

3 $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

4 (CCP) Nature de la série de terme général $(\cos(1/n))^{n^3}$?

5 (CCP) Nature de la série de terme général $(1 - \operatorname{th} n)$?

6 (Mines MP 10) Nature de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$, où σ est une injection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$?

Exercice 253 – *Cas douteux de la règle de d'Alembert* 2

Soit $a > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.
Étudier, selon la valeur de a, la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 254 – *Produit et série* 3

1 Montrer que la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

est convergente.

2 On pose, lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k} + 1}.$$

i Étudier la convergence de la suite (u_n).

ii Étudier la nature de la série de terme général (u_n^α) lorsque $\alpha > 0$ est donné.

Exercice 255 – *(Mines MP 2015)* 3

Soit a et α dans $\mathbb{R}_+^*$. Nature de la série de terme général $u_n = a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}$?

Exercice 256 – *Nature d'une série définie à l'aide d'une fonction* 3

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et α un réel < 0 tels que $\frac{f'}{f}$ tende vers α en $+\infty$. Étudier la nature de la série de terme général $f(n)$.

7.2. Séries de Bertrand

Exercice 257 – *Séries de Bertrand* 1

Soit $\alpha, \beta > 0$.

1 Montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

2 Donner un équivalent des sommes partielles lorsque $\alpha = \beta = 1$.

Exercice 258 – *Banque CCP 2016 5* 2

1 On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i **Cas** $\alpha \leqslant 0$ En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

ii **Cas** $\alpha > 0$ Étudier la nature de la série.

Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

7.3. Règle de d'Alembert

Exercice 259 – *Banque CCP 2016 6* 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1 Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge. **Indication** : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2 Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

7.4. Règle de Raabe-Duhamel

Exercice 260 – *Nature d'une série par un argument type Raabe-Duhamel (X MP 2015)* 3D

Soit u une suite à termes réels strictement positifs, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in]1, +\infty[$. On suppose :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{r}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^b}\right)$$

Nature suivant r de la série de terme général u_n ?

7.5. Nature de série par développement asymptotique de son terme général

Exercice 261 – *Banque CCP 2016 46* 2

On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1 Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2 En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 262 – *Nature d'une perturbation d'une série de Riemann (Petites Mines MP 2015)* 2

Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n}$ $(n \geqslant 2)$.

Exercice 263 – *Petites Mines MP 2015* 2

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \cos(n^2\pi \ln \frac{n}{n+1})$.

Exercice 264 – *Nature de série à paramètres* 2

1 (Petites Mines MP 2015) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On définit, au moins à partir d'un certain rang, $u_n = \tan(\pi\sqrt{n^2+an+b})$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n en fonction des valeurs de a et b ?

2 (Mines MP 2015) Convergence de la série $\sum \left(\dfrac{n+1}{an+b}\right)^{n\ln n}$ selon la valeur des réels strictement positifs a et b.

7.6. Nature de séries alternées

Exercice 265 – *Critère spécial des séries alternées* 0

1 Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2 Montrer sur un exemple l'importance de la condition de décroissance dans l'énoncé du CSSA.

Exercice 266 – *Nature de séries alternées* 2

1 $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.

2 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

3 $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

4 (ENTPE PSI 08) Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

5 (Mines Alès) Nature de la série de terme général $u_n = \ln\Big(1 + (-1)^n/n^\alpha\Big)$ en fonction de $\alpha > 0$.

6 (Centrale MP 10) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général : $(-1)^n \frac{\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha-1}}{n^\beta}$.

Exercice 267 – *Nature d'une série alternée* 3

(CCP) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}/(n+1)$.

1 Déterminer les limites éventuelles des suites (u_n) et (nu_n).

2 Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?

7.7. Séries à termes de signe indéterminé

Séries semi-convergentes

La convergence n'entraîne pas l'absolue convergence, comme le montre l'exemple de la série harmonique alternée. Une telle série (convergente non absolument convergente) est *dite semi-convergente*. Cela dépasse de loin le programme officiel, mais dans le cas de la semi-convergence, une permutation des termes de la série peut bouleverser son comportement asymptotique.
On revient donc à l'aspect asymptotique de la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, qu'il ne faut pas perdre de vue.
On pourra à ce sujet consulter le problème Maths I PSI 2009.

50

Exercice 268 – *Nature de séries à termes quelconques* 0

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :

1 $u_n = \frac{v_n}{2^n}$, où v est une suite bornée.

2 $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$.

Exercice 269 – *Nature d'une série se ramenant à une série de Bertrand* 2

Nature de la série de terme général $\ln(n)^\alpha \sin\left(\pi n\sqrt{1+n^2}\right)$?

Exercice 270 – *Un terme général pas si incontrôlable que ça* 3

Montrer que la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$ est convergente.

Indication : On pourra d'abord s'intéresser à la série de terme général $v_n = \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$.

Exercice 271 – *Nature d'une série de cosinus* 0

Nature de $\sum \cos\left(\pi n\sqrt{1+n^2}\right)$?

Exercice 272 – *Nature d'une série complexe non absolument convergente (Centrale PSI 10)* 3

Nature de la série de terme général $\frac{j^n}{n}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 273 – *Nature de séries en vrac* 3

1 (Centrale PSI 10) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n(n+(-1)^n)}}$. Nature de la série de terme général u_n ?

2 (Mines MP 10) Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n \cos(\sqrt{n})}{n}$?

3 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \arccos\left(1-\frac{1}{n}\right) - \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Exercice 274 – *Étude de convergence d'une série selon le choix d'un polynôme* 3

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que la série de terme général u_n converge.

Exercice 275 – *Nature d'une série dont le terme général est donné par une intégrale* 3

(CCP) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$.

1 Montrer : $u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + O(1/n^2)$.

2 Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 276 – *D'autres natures de séries* 2

1 Nature de la série de terme général $d\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \mathbb{Z}\right)$ (où $d(x,\mathbb{Z}) \overset{def}{=} \min\{|x-n|, n \in \mathbb{Z}\}$, pour tout réel x).

2 On considère la suite de terme initial $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = \sin(-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 277 – *Divergence d'une série (X MP 10)* 3D

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que ni f ni f' ne s'annulent et $f(0) = 1$. Soit (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n f(a_n)$. Montrer que la série de terme général a_n diverge.

Exercice 278 – *Étude d'une série compliquée* 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}.$$

1 Étudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

2 Reprendre la question précédente en supposant u_1 complexe tel que $\mathrm{Re}(u_1) \geqslant 0$.

7.8. Transformation d'Abel (hors-programme)

La transformation d'Abel est hors-programme, mais tombe parfois à l'oral des concours X/ENS, ainsi qu'à l'écrit : on pourra consulter le problème du sujet Maths 1 MP CCP 2014.

Exercice 279 – *Transformation d'Abel* — 3HP

Soit (a_n) et (B_n) deux suites complexes. On définit deux suites complexes (A_n) et (b_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{ et } \quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1 Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

Remarque : cette formule, appelée *formule d'Abel* ou *formule de sommation par parties*, est la version discrète de l'intégration par parties.

2 Montrer que si (B_n) converge vers 0, (A_n) est bornée, et $\sum b_n$ est absolument convergente, alors $\sum a_n B_n$ est convergente.

3 Applications :

i Montrer que $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ converge.

ii Étudier l'absolue convergence de cette dernière série.

Indication : utiliser les formules trigonométriques et (à nouveau) la transformation d'Abel.

8. Calculs de sommes de séries

Exercice 280 – *Lorsque le terme général est une fonction rationnelle* — 0

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :

1 $u_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

2 $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ (où $n \geqslant 3$).

3 $u_n = \frac{1}{n^2+3n}$.

4 $u_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$.

Exercice 281 – *Série et produit* — 2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n}(a^{2^k}+1)}$.

1 Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ selon les valeurs de a.

2 Calculer la somme de cette série lorsqu'elle converge.

Exercice 282 – *Autres calculs de sommes* — 2 à 4

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :

1 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $(n \geqslant 2)$.

2 $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

3 On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{H_n}{n(n+1)(n+2)}$ converge, et calculer sa somme.

4 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ $(n \geqslant 2)$.

Indication : on pourra utiliser la formule de Stirling.

Exercice 283 – *Calcul de somme de série liée à l'écriture décimale (ENSEA MP 2015)* — 3

Pour tout $n \geqslant 1$, on note c_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{c_n}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 284 – *Somme de série dont le terme général est une intégrale (Petites Mines MP 2015)* — 2Rev

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^n(x)}$.

1 Justifier la définition de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Montrer la convergence et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3 Convergence et somme éventuelle de la série $\sum u_n$.

4 Convergence et somme éventuelle de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 285 – *Série des inverses des sommes de carrés (Mines MP)* 3

On définit la suite réelle (v_n) par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Convergence de la série de terme général $\frac{1}{v_n}$? Somme ? **Réponse :** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 18 - 24\ln(2)$.

Exercice 286 – *Calcul de* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ 2

1 Nature de la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n}$? $(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$?

2 Nature de la série de terme général $v_n = \frac{\ln(n)}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$.

3 Montrer que la suite de terme général $w_n = \sum_{q=2}^{n} \frac{\ln(q)}{q} - \frac{\ln(n)^2}{2}$ converge.

4 Trouver $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ grâce à

$$\sum_{p=1}^{2n} \frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p \ln(p)}{p}.$$

Réponse : $\gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$.

Exercice 287 – *Nature et somme d'une série* 2

1 (École de l'air) Nature et somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^1 \cos^n x \mathrm{d}x$.

2 (CCP) Justifier la convergence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$.

Exercice 288 – *Série et produit, calcul de somme* 3

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prenant jamais la valeur -1. On pose, pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}.$$

1 On suppose dans cette question (u_n) à termes positifs ou nuls. Montrer que la série de terme général v_n converge. Calculer la somme de cette série lorsque la série de terme général u_n diverge.

2 Étudier la série $\sum v_n$ lorsque :

i $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

ii $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 289 – *Nature et somme d'une série donnée par les termes modulo* 3 3

(TPE) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{3n+1} = \frac{1}{4n+1}$, $u_{3n+2} = \frac{1}{4n+3}$, $u_{3n+3} = -\frac{1}{2n+2}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 290 – *Série exponentielle lacunaire (Centrale MP 08)* 3

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.
Indication : penser à la série exponentielle et aux racines cubiques de l'unité.

Exercice 291 – *Un opérateur sur certaines séries (Mines-Ponts PSI 10)* 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ décroissante. On suppose que la série de terme général u_n est convergente. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_{n+1} - u_n)$. Montrer que la série de terme général v_n est convergente. Exprimer sa somme en fonction de celle de u_n.

Exercice 292 – *Développement en série de Engel et irrationalité de e* 4I

Pour une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers croissante telle que $u_1 \geqslant 2$, on note

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 \ldots u_n}.$$

1 Montrer que pour tout réel $x \in]0,1[$, il existe une unique suite u telle que

$$S_n \to x.$$

2 Montrer que x est rationnel si et seulement si u finit par stationner.

3 En déduire que e est irrationnel.

9. Série harmonique

Exercice 293 – *Divergence de la série harmonique par les équivalents* 0

En observant que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 294 – *Série harmonique et calcul de somme (Centrale MP 2015)* 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \times \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1 Question de cours : soit (u_n) une suite réelle telle que : $u_n = O(\frac{1}{n^2})$. Que dire de $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$? Le démontrer.

2 Montrer que : $H_n = ln(n) + \gamma + O(\frac{1}{n})$.

3 Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 295 – *Série harmonique tronquée* 4

Donner le cardinal de l'ensemble A_n des $k \in [\![10^n, 10^n - 1]\!]$, dont l'écriture ne contient aucun 5.
Soit $S_5 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{k\in A_n} \frac{1}{k}$. Montrer que $S_5 \leqslant 72$. De même pour $S_0, \ldots, S_9$. Conclusion ?

Exercice 296 – *Série harmonique alternée* 1

Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (appelée *série harmonique alternée*) est convergente, et calculer sa somme en observant que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 (-x)^{n-1} \mathrm{d}x.$$

Remarque : l'inégalité de Taylor-Lagrange (appliquée à la bonne fonction) fournit également ce résultat.

Exercice 297 – *Nature de la série des restes de la série harmonique alternée* 3

(ENSAM) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1 Justifier l'existence de u_n.

2 Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 298 – *Développement asymptotique de la série harmonique* 1

Donner un développement asymptotique à trois termes de la série harmonique (de terme général $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$).

Exercice 299 – *Nature d'une série donc le terme général est lié à la série harmonique* 3

(Mines MP 10) Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$?

10. Somme partielles, restes

Exercice 300 – *Nature de la série des restes de la série exponentielle* 3

(CCP) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k!}$.

1 Prouver la convergence de la suite de terme général R_n et de la suite de terme général $(n+1)!\, R_n$.

2 Étudier la convergence de la série de terme général $\sin(2\pi e n!)$.

Exercice 301 – *Application à l'étude de sommes partielles et de restes* 1

On considère la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Donner un équivalent des sommes partielles en cas de divergence, et un équivalent des restes en cas de convergence.

Exercice 302 – *Équivalents de sommes partielles* 2

1 Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux :

i $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

ii $\sum_{k=0}^{n} k!$.

2 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et on suppose

$$u_n \sim R_n^2.$$

Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 303 – *Série telle que $u_{n+1}/u_n \to +\infty$* 3

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, telle que $u_{n+1}/u_n \to +\infty$. Montrer que $\sum u_n$ diverge, et que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim u_n$.

Exercice 304 – *Nature d'une série dont le terme général est un reste de série convergente* 3

Soit $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$. Nature de $\sum u_n$?

Exercice 305 – *Équivalent d'une somme partielle à paramètre (Mines MP 2015)* 3

Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^k ln(k)$ quand $n \to +\infty$. (Discuter selon les valeurs de a.)

Exercice 306 – *Développement asymptotique à deux termes d'une suite de sommes partielles* 3

Développement asymptotique à deux termes de $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p)}{p}$.

Exercice 307 – *Série et dérivation discrète* 3

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n.

1 Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{R_n^2} = 1.$$

2 La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 308 – *Nature compliquée de séries* 4

On donne une suite (a_n) d'éléments de $]0,1[$, et on note

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} s_k.$$

Déterminer la nature des séries

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{t_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{s_n^2}{t_n^2}.$$

Exercice 309 – *Nature d'une série définie à l'aide d'une fonction convexe (Mines MP 07)* 3D

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ convexe et telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

1 Montrer que la série de terme général $(-1)^k f(k)$ converge.

2 Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f(k)\right| \leqslant \frac{f(n)}{2}$.

11. Un calcul de zeta(2)

Exercice 310 – *Un calcul de $\zeta(2)$ (Mines MP 2015)* 1

1 Quelle valeur (indépendante de n) faut-il donner à $a, b \in \mathbb{R}^2$ pour que $\displaystyle\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$?

Réponse : $b = 1$ et $a = -1/(2\pi)$.

2 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} cos(nt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\,\sin(2t)} - \frac{1}{2}$.

3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, C^1, montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$.

4 En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. **Réponse :** $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

12. Comportement asymptotique du terme général, natures comparées

Exercice 311 – *Banque CCP 2016 7* 0

1 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang. Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2 Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$. ($i$ est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

Exercice 312 – *Opérateurs sur les séries convergentes à termes positifs* 2

On considère une série convergente à termes positifs $\sum a_n$.
Étudier la convergence des séries suivantes :

1 $\sum a_n^2$.

2 $\sum \frac{a_n}{a_n+1}$.

3 $\sum a_n a_{2n}$.

4 $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Remarque : pour prolonger l'exercice, on peut se poser les questions suivantes :

5 Étude des réciproques.

6 Que se passe-t-il si on ne suppose plus la série à termes positifs ?

Exercice 313 – *Lois de composition interne sur les séries convergents à termes positifs* 2

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.
Établir la convergence des séries suivantes :

1 $\sum \max(a_n, b_n)$.

2 $\sum \sqrt{a_n b_n}$.

3 $\sum \frac{a_n b_n}{a_n+b_n}$ (en supposant que $(a_n + b_n)$ ne s'annule pas).

Exercice 314 – *Équivalence de nature entre deux séries (Centrale PSI 08)* 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite monotone de réels positifs.

1 Montrer que les séries de termes généraux u_n et nu_{n^2} sont de même nature.

2 Qu'en est-il si on enlève l'une ou l'autre des deux hypothèses ?

Exercice 315 – *Lien entre convergences de séries* 3

On suppose que la série de terme général positif a_n converge. Prouver que la série de terme général $\sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge également. Montrer que la réciproque est fausse. Montrer que si la suite est (a_n) est décroissante, alors la réciproque est vraie.

Exercice 316 – *Si $\sum u_n$ converge, a-t-on $u_n = \mathrm{o}(1/n)$? (X MP 2015)* 4

1 Soit (a_n) une suite réelle décroissante telle que la série de terme général a_n converge. Montrer que $a_n = \mathrm{o}(1/n)$.

2 Donner un exemple de série convergente $\sum u_n$ tel que $u_n \neq \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ (si possible avec $u_n \geqslant 0$).

Exercice 317 – *Une série dont le terme général tend vers 0 et dont la suite des sommes partielles est bornée est-elle convergente ? (X MP)* 4

Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 318 – *Un opérateur linéaire continu d'un espace préhilbertien (Centrale MP 2015)* 3

1 Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2 Soit (a_n) une suite de réels telle que $\sum a_n^2$ converge. On pose $b_n = \dfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$. Montrer que $\sum b_n^2$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \leqslant 4 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.

Indication : Montrer que $(n+1)b_n^2 - (n-1)b_{n-1}^2 \leqslant a_n b_n$.

3 Montrer que la constante 4 est la meilleure possible dans la majoration précédente.

CHAPITRE XXII

Intégration (TD)

Sommaire

1. Intégration sur un segment

Quelles fonctions continues par morceaux admettent une primitive ?

On peut montrer qu'une fonction en escalier sur $[a, b]$ admet une primitive (*i.e.* est la dérivée d'une fonction) si et seulement si elle est continue. Or une fonction continue par morceaux f s'écrit comme somme d'une fonction continue g (qui admet une primitive) et d'une fonction en escalier h : f admet une primitive si et seulement si h en admet une, si et seulement si h est continue, si et seulement si f est également continue.
Ainsi, une fonction continue admet une primitive si et seulement si elle est continue (et sa primitive est alors non seulement dérivable, mais aussi de classe $\mathcal{C}^1$. C'est pourquoi les résultats du cours utilisant le lien entre intégrale et primitive, comme l'intégration par parties et le changement de variable, supposent que les fonctions considérées soient de classe $\mathcal{C}^1$.
En revanche, certaines fonctions non continues par morceaux sont la dérivée d'une fonction (par exemple la dérivée sur $\mathbb{R}$ du prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$). 51

À quoi sert l'intégration par parties ?

(1) À se débarrasser de fonctions transcendantes.
(2) À établir une relation de récurrence pour une suite d'intégrales. 52
(3) À effectuer une étude asymptotique fine.

Exemple

(1) Calcul d'une primitive de ln, de arctan.
(2) Intégrales de Wallis.

(3) Bornitude de $\left(\int_1^n \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\right)$, convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

$\diamond\diamond\diamond$

Sauf mention contraire, a et b sont deux réels, $a < b$.

1.1. Annulation et intégrales

Exercice 319 – *Lorsque la valeur moyenne est aussi le maximum* 0

Déterminer les fonctions f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues, telles que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{[a,b]}|f|$.

Exercice 320 – *Annulation de fonction et intégrales* 0

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, d'intégrale nulle sur $[a, b]$. Montrer que f s'annule sur $]a, b[$.

2 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 321 – *Annulation et intégrales* 3

1 Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n + 1$ zéros distincts dans $]0, 1[$.

2 *(X PC 09)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$. On suppose que : $\int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0, \pi]$.

3 *(Cachan 07)* Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de moyenne nulle. Montrer que $f + f''$ s'annule quatre fois au moins sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 322 – *Nullité de fonction et intégrales* 3

1 Soit $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues, telles que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer $f = g = 0$.

2 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f^2 = \int_{[0,1]} f^3 = \int_{[0,1]} f^4$. Montrer $f = 0$ ou $f = 1$.

3 Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall g \in \mathcal{E}\left([0, 1], \mathbb{R}\right), \quad \int_{[0,1]} fg = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

4 *(Centrale 08)* Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b f \int_a^b g = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

5 Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f^n(u)du$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs quand n décrit $\mathbb{N}$. Montrer que $f = -1$ ou $f = 0$ ou $f = 1$.

1.2. Inégalités intégrales

Exercice 323 – *Inégalité entre valeurs moyennes* 2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a < b < c$. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, c], \mathbb{R})$. Montrer :

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t \leqslant \max\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \frac{1}{c-b}\int_b^c f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 324 – *Inégalités intégrales* 3

1 Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, continues et positives, telles que $fg \geqslant 1$. Montrer

$$\left(\int_{[0,1]} f\right)\left(\int_{[0,1]} g\right) \geqslant 1.$$

2 *(X MP 05)* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f = 0$, m le minimum de f et M son maximum. Prouver $\int_{[0,1]} f^2 \leqslant -mM$.

3 (D) *(X MP 05)* Soit f et g deux fonctions croissantes et continues sur $[0,1]$. Comparer $\int_{[0,1]} fg$ et $(\int_{[0,1]} f)(\int_{[0,1]} g)$.

1.3. Suites et intégrales

Exercice 325 – *Suites étudiées à l'aide d'intégrales*	1

1 En remarquant que $\frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 (-x)^{k-1}\mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

2 *(Mines MP 08)* Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$.

Exercice 326 – *Comparaison somme intégrale*	2

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante de limite nulle en $+\infty$, telle que $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ tende vers un réel l lorsque x tend vers $+\infty$.

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n^2-1} f(\frac{k}{n})$$

En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n^2} f(\frac{k}{n})$ tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Application : calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Exercice 327 – *Lemme de Lebesgue*	1D

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Montrer que la suite de terme général $\int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$ converge vers 0.
Indication : le montrer d'abord pour les fonctions en escalier.
Remarque : si la question est trop difficile, montrer le résultat pour f de classe $\mathcal{C}^1$.

1.4. Sommes de Riemann

Exercice 328 – *Calcul d'intégrale en passant par une somme de Riemann*	0

Calculer à l'aide d'une somme de Riemann : $\int_a^b e^t\mathrm{d}t$.

Exercice 329 – *Calcul de limites par les sommes de Riemann*	0

Calculer :

1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+n^2}$.

3 $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$;

Exercice 330 – *Une pseudo-somme de Riemann*	3D

Soit f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

1.5. Calculs

Exercice 331 – *Calcul d'une intégrale* 2

Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))\mathrm{d}t$.

Exercice 332 – *Méthode de calcul pour une intégrale* (Centrale MP 09) 2

Donner une méthode pour calculer $\int_0^1 \frac{t^p}{(1+t^2)^q}\mathrm{d}t$, lorsque $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 333 – *Une astuce de calcul intégral* (Mines PSI 08) 2

Soit f continue sur $[a,b]$ telle que : $\forall\, x\in[a,b], f(a+b-x)=f(x)$.

1 Montrer que $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2 Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{xe^{ix}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Exercice 334 – *La même astuce de calcul intégral* (Centrale MP 09) 2

1 Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer : $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$.

2 Calculer $\int_0^\pi \frac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$.

Exercice 335 – *Calcul de primitive (Petites Mines MP 2015)* 2

Soit $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}$.

1 Décomposer f en éléments simples.

2 Calculer $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $t<1$.

1.6. Divers

Exercice 336 – *Extremums d'une fonction définie par des intégrales* (CCP 09) 2

Soit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi\ : f\in E\mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\times\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\inf\Phi$ et $\sup\Phi$.

Exercice 337 – *Équations fonctionnelles intégrales* 2

1 *(X PC 09)* Déterminer les $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t$.

2 *(Centrale PC 09)* Trouver les $f\in\mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ telles que $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.

Exercice 338 – *Étude d'un opérateur moyenne glissante (ENSEA MP 2015)* 3

Soit $E=C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a>0$ et T_a la fonction qui à $f\in E$ associe $T_a(f)$ défini par $T_a(f)(x)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$

1 Soit $f\in E$. Montrer que $T_a(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2 Soit $f\in E$. Montrer que $T_a(f)$ est constante si et seulement si f est périodique, de période $2a$.

3 Montrer que $T_a\in L(E)$ et déterminer $\ker(T_a)$.

4 L'application T_a est-elle surjective ?

2. Intégrabilité

2.1. Existence d'intégrales, intégrabilité

Exercice 339 – *Exemples d'absolue convergence* — 0

Montrer que les intégrales $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$, $\int_{\mathbb{R}_+} t^7 e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes.

Exercice 340 – *Intégrabilité des fonctions exponentielles* — 0

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1 On se limite ici au cas où α est réel. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge.

2 On revient au cas général.
 i Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge.
 ii Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge absolument.

Exercice 341 – *Intégrabilité d'une fonction selon la valeur de paramètres* — 0

(CCP) Étudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto \frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$ selon les valeurs (réelles) de a et b .

Exercice 342 – *Banque CCP 2016 28* — 2

N.B : les deux questions sont indépendantes.

1 La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

2 Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 343 – *Mines MP 2015* — 3

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}_+$ de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}\,\mathrm{d}t$ existe. Montrer que $\forall s > s_0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$ existe.

Exercice 344 – *Non intégrabilité du sinus cardinal* — 2

(TPE)

1 Établir la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)-\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

2 La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$?

Exercice 345 – *Étude de convergence d'une intégrale* — 3

1 (Mines MP 2015) Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+\sqrt{t}\sin(t)}}\mathrm{d}t$?

2 Convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\cos(x^2)}{x}\mathrm{d}x$.

3 Même question pour $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin(x+1/x^2)\cos(x^2+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$

Exercice 346 – *Normes euclidiennes de f, f' et f''* — 2

Prouver que si les intégrales $\int_a^{+\infty}(f(x))^2\mathrm{d}x$ et $\int_a^{+\infty}(f''(x))^2\mathrm{d}x$ convergent, alors $\int_a^{+\infty}(f'(x))^2\mathrm{d}x$ converge également.

2.2. Calcul d'intégrales généralisées

Exercice 347 – *La fonction Gamma d'Euler, première approche* 1

1 Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$ converge. Ainsi, on peut définir une fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$, en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(x) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

C'est la *fonction* Γ *d'Euler.*

2 Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3 Déterminer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 348 – *Calcul d'intégrale à paramètres (Mines MP 2015)* 1

Existence et calcul de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t} \mathrm{d}t$. **Indication :** intégrer à partir de $\varepsilon > 0$. Majorer $|\cos(u) - 1|$.

Exercice 349 – *ENSEA MP 2015*

Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-\lfloor x \rfloor} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 350 – *Calculs d'intégrales généralisées* 3

1 Existence et calcul de $\int_0^1 \left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x$.
Indication : pour le calcul, on peut effectuer au choix les changements définis par $u = \sqrt{1+x^2}$ ou $x = \mathrm{sh}(u)$.

2 Existence et calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \ln(\tan(x)) \mathrm{d}x$.

3 Existence et calcul de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(x))^3}{x^2} \mathrm{d}x.$$

Exercice 351 – *Calculs d'intégrales généralisées plus délicats* 3D

1 Existence et calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin(x) \cos(x)}{\tan(x)^2 + \mathrm{cotan}(x)^2} \mathrm{d}x$.
Indication : pour le calcul, on peut effectuer le changement de variable $u = \cos(2x)$.

2 Existence et calcul éventuel de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\, \ln(x)}{(1+x)^2} \mathrm{d}x.$$

Indication : pour le calcul, astucieux, on pourra commencer par utiliser une intégration par parties, en dérivant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\, \ln(x)$.

3

i Existence et calcul de $I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)} \mathrm{d}t$, où $(n,x) \in \mathbb{N} \times]0, \pi[$.
Indication : pour le calcul, on pourra trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour la suite $(I_n(x))$, en exprimant $I_n(x) + I_{n+2}(x)$ en fonction de $I_{n+1}(x)$.

ii Nature de la série $\sum x^n I_n(x)$.

.

Exercice 352 – *D'autres calculs d'intégrales* 3

1 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4} \mathrm{d}x$.

2 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$.

3 *(X MP 08)* $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)} \mathrm{d}x$.

4 *(X MP 08)* $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin t} \mathrm{d}t$.

Exercice 353 – *Convergence et calcul* 3

1 (CCP) Convergence et calcul de $I_n = \int_0^{+\infty} t\, e^{-nt} \mathrm{d}t$.

2 Convergence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}} \mathrm{d}t$.

3 (Centrale MP 10) Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 354 – *Existence et calcul d'une intégrale* 3

(CCP)

1 Étudier la continuité par morceaux de $f : x \mapsto x\, E(1/x)$ sur $]0,1]$ et sur $[0,1]$.

2 Montrer l'existence et calculer $I = \int_0^1 x\, E(1/x) \mathrm{d}x$.

Exercice 355 – *Calcul surprenant d'intégrale généralisée* 3D

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} \mathrm{d}t$.

2 Établir : $f(x) \sim_0 -\ln(x)$ et $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} + \mathrm{O}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

3 Montrer que $\int_0^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 356 – *Fonction définie par une intégrale sur $\mathbb{R}_+$* 0

(CCP MP 2015) Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+x^2} \mathrm{d}t$.

1 Déterminer le domaine de définition de f.

2 Calculer $f(1)$.

3 Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Indication : Effectuer un changement de variable.

2.3. Étude locale

Exercice 357 – *Fonctions définies par une intégrale* 2

1 On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f\ : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t$. Calculer la limite de f en 0, en $+\infty$.

2 Étudier en 1 la fonction $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

Exercice 358 – *Quel est le comportement asymptotique d'une fonction dont l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ converge ?* 4

1 Montrer que si $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge et si f admet une limite l en $+\infty$, alors $l = 0$.

2 Donner un exemple de fonction $f\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, telle que $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge, mais telle que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$.

Exercice 359 – *Intégrale résiduelle (Mines MP 2015)* 3

Montrer que $\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 360 – *Équivalents aux bornes d'une primitive (Télécom Sud Paris MP 2015)* 3

Étudier $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_e^x \ln(\ln(t))\, \mathrm{d}t$. Donner des équivalents aux bornes du domaine de définition.

Exercice 361 – *Lorsque $f + f'$ est de carré intégrable (X MP 10)* 3D

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f + f'$ soit de carré intégrable. Montrer que f est bornée, puis que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 362 – *Condition suffisante pour qu'une fonction soit de limite nulle en $+\infty$* 3D

(X MP 10) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

2.4. Semi-convergence

Intégrales semi-convergentes 53

Il se peut qu'une intégrale soit convergente sans l'être absolument : on dit alors que l'intégrale est *semi-convergente*. L'étude de cette notion n'est pas un objectif du programme, mais il est intéressant de connaître des exemples classiques de telles intégrales.

Exercice 363 – *Intégrale de Dirichlet* 1

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ (appelée *intégrale de Dirichlet*) est semi-convergente.

Exercice 364 – *Intégrale semi-convergente (Mines MP 10)* 3

Montrer que $f\ : x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ mais que $\int_0^x f$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

2.5. Divers

Exercice 365 – *Sommes de Riemann pour des intégrales généralisées* 1

Déterminer $\lim\limits_{n\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

Exercice 366 – *Limite d'une suite définie par des intégrales* 3

Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 367 – *Comparaison d'intégrales* 3

(TPE) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ telle que $\int_a^b f = 1$. Comparer $\left(\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t\right)^2$ et $\int_a^b t^2 f(t)\mathrm{d}t$.

CHAPITRE XXIII

Structures algébriques (TD)

Sommaire

1. Groupes

1.1. Structure de groupe, de sous-groupe

Intérêt de la notion de sous-structure

La notion de sous-structure est extrêmement importante, car elle permet de prouver à moindres frais qu'un ensemble muni de certaines opérations est structuré.
Prenons l'exemple le plus spectaculaire : aux concours, pour montrer que tel ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, vous montrerez toujours que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel déjà connu E.
Vous ne reviendrez jamais à la définition d'un espace vectoriel : vous n'aurez donc pas à vérifier les propriétés données dans cette définition (comme les pseudo-distributivités par exemple), car F héritera de toute façon de ces propriétés déjà vérifiées dans E.

54

L'union de plusieurs sous-groupes sans relation d'inclusion peut-il être un sous-groupe ?

L'union de deux sous-groupes n'est donc un sous-groupe que dans le cas évident où cette union est l'un des deux sous-groupes. Cependant, l'union de trois sous-groupes de G sans relation d'inclusion peut être un sous-groupe de G. 55

Exemple

Dans le groupe produit $G = \{-1, 1\}^2$, $\{(1, 1), (-1, -1)\}$,{(1,1),(1,-1)} et $\{(1, 1), (-1, 1)\}$ sont trois sous-groupes sans relation d'inclusion, mais leur réunion est égale à G.

⋄ ⋄ ⋄

Comment décrire le sous-groupe engendré par une partie ?

Soit A une partie d'un groupe G. On peut se donner $< A >$ de deux manières : 56
- « Par l'intérieur : » $< A >$ est l'ensemble des mots construits sur l'alphabet constitué des éléments de A et leur symétriques.
- « Par l'extérieur : » $< A >$ est l'intersection des sous-groupes de G contenant A.

Quel est le sous-groupe engendré par la réunion de deux sous-groupes ?

On considère ici un groupe additif $(G, +)$ et H et K deux de ses sous-groupes. On a

$$< H \cup K >= H + K,$$

où la somme $H + K$ de H et de K désigne l'ensemble

$$\{h + k, (h, k) \in H \times K\}$$

C'est pourquoi en algèbre linéaire, les opérations pertinentes sur les sous-espaces vectoriels sont l'intersection et la somme (et non l'union).

Que se passe-t-il en notation multiplicative ? On peut être tenté de poser 57

$$HK = \{hk, (h, k) \in H \times K\}$$

et espérer que $< H \cup K >= HK$.

Cependant cette formule est fausse en général, pour la simple raison que HK ne constitue pas, en général, un sous-groupe de G. Dans le cas où HK est un sous-groupe de G, cette formule est valable. C'est par exemple le cas lorsque G est abélien [a].

a. On vient d'ailleurs de l'affirmer (pour la notation additive).

Exercice 368 – *Quand le produit de deux sous-groupes est-il un sous-groupe ?* 4

Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G.

1 Montrer que HK est un groupe si et seulement si $HK = KH$.

2 Donner un exemple de couple (H, K) de sous-groupes tels que $HK = KH$ et tels qu'il existe $(h, k) \in H\times K$ tel que $hk \neq kh$.

Exercice 369 – *Structure des sous-groupes additifs réels* 1

Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ additif, non réduit à 0. Notons a la borne inférieure de $G\cap\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$ (on dit que G est *discret*). Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* rencontre tout intervalle $]\alpha, \beta[$, où $\alpha < \beta$).

Exercice 370 – *L'addition des vitesses relativistes* 0

Soit $G =] - 1, 1[$, $\star$ définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 371 – *Partie finie stable par multiplication* 0

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 372 – *Monoïde fini et régulier* 1

On appelle *monoïde* un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre pour cette loi. Montrer qu'un monoïde fini et régulier (*i.e.* tout élément est simplifiable à gauche et à droite) est un groupe.

Exercice 373 – *Existence d'un idempotent (X MP 07)* 3

Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne associative notée T. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $eTe = e$.

Exercice 374 – *Éléments réguliers de E^E* 3

Soit E un ensemble non vide. Déterminer les éléments de E^E réguliers à gauche (resp. à droite), pour la composition.

Exercice 375 – *Structure de groupe* 3D

1 Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à gauche et tel que chaque élément de G admette un symétrique à gauche. Montrer que G est un groupe.

2 Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative $\cdot$ telle que :

$$\forall\, a, b \in G,\ \exists x, y \in G \ :\ a = x \cdot b = b \cdot y \quad (\star)$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

3 Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que G est un groupe.

Exercice 376 – *Une loi de groupe sur un ensemble de polynômes* 3

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $G_n = \left\{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i X^i \ ;\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ et } \lambda_1 \neq 0\right\}$.

1 Si P et Q sont dans G_n, montrer qu'il existe un unique R de G_n tel que $R \equiv P \circ Q\ [X^n]$.
On note $R = P * Q$.

2 Montrer que $(G_n, *)$ est un groupe.

3 Déterminer un morphisme surjectif de G_n dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1.2. Morphismes de groupes

Propriétés conservées par un isomorphisme

Soit $(G, \star)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\varphi : G \to H$.
Cela signifie que G et H ont même structure, *i.e.* que tout calcul mené dans l'un se transporte dans l'autre via φ ou φ^{-1} : par exemple, pour passer de G à H, on change chaque élément g de G par $\varphi(g)$, et chaque $\star$ par $\diamond$.
Pour résumer, deux groupes sont isomorphes si et seulement si ils diffèrent tout au plus par l'écriture.
Ainsi, beaucoup de propriétés se transfèrent de G à H, par exemple : 58

(1) Le fait que G soit de cardinal fini n.

(2) Le fait que G soit abélien.

(3) Le fait que G admette un élément d'ordre p.

(4) Le fait que G admette un centre trivial (*i.e.* réduit à e_G).

(5) Le fait que dans G, tout élément admette une « moitié » (en notation additive) ou une « racine carrée » (en notation multiplicative).

Exercice 377 – *Un isomorphisme de groupes* 0

Montrer que $\mathbb{C}^*$ (multiplicatif) et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ sont isomorphes.

Exercice 378 – *Caractérisation de la commutativité* 1

Soit G un groupe.

1 Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(1) G est abélien.

(2) L'application carré de G dans G est un endomorphisme de G.

(3) L'application inverse de G dans G est un automorphisme de G.

2 Généralisation : montrer que s'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $g \mapsto g^i$, $g \mapsto g^{i+1}$ et $g \mapsto g^{i+2}$ soient des morphismes de groupes, alors G est abélien.

3 Donner un groupe non abélien tel que $g \mapsto g^3$ soit un endomorphisme.

4 On suppose que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 379 – *Groupes d'ordre* 4 *(X MP 10)* 0

Déterminer les groupes d'ordre 4 à isomorphisme près.

Exercice 380 – *Étude d'isomorphie (X PC 10)* 0

1 Les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ sont-ils isomorphes ?

2 Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

3 Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 381 – *Théorème de Cayley* 1

Soit G un groupe, et a un élément de G.

1 Montrer que les applications $\alpha_a : g \mapsto ag$ et $\beta_a : g \mapsto ga$ – appelées respectivement applications de *multiplication (ou de translation) à gauche et à droite par a* – sont des permutations de G.

2 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle application soit un endomorphisme de G.

3 Montrer que l'application $\phi : a \mapsto \alpha_a$ est un morphisme injectif de G vers $\mathcal{S}_G$. En déduire que tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations (théorème de Cayley).

4 Prolongement : montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe linéaire (et même que l'on peut choisir le corps des scalaires librement).

Exercice 382 – *Transfert de structure* 1

Soit G un groupe multiplicatif, E un ensemble et $\phi : G \to E$ une bijection. On définit une opération $*$ sur E par :

$$\forall x, y \in E, x * y = \phi\left(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $*$ confère à E une structure de groupe, et que les groupes G et E sont isomorphes.

Exercice 383 – *Un sous-groupe à un paramètre (Petites Mines MP 2015)* 2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. $A(h) = \begin{pmatrix} a^h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \{A(h), h \in \mathbb{R}\}$.

1 Montrer que E est un groupe multiplicatif isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

2 Calculer $\exp(tV)$ avec $V = A'(0)$.

Exercice 384 – *Groupe d'automorphismes d'un groupe, automorphismes intérieurs* 1

(Centrale MP 07) Soit G un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

1 Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

2 Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

3 Pour $a \in G$ on note ϕ_a l'application de G dans G telle que $\phi_a(x) = axa^{-1}$, pour tout élément x de G : ϕ_a est appelée *conjugaison par a* (dans G). Montrer que ϕ_a est un automorphisme de G, (on dit que ϕ_a est un automorphisme *intérieur*).

4 Montrer que l'application $\psi\ : a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce morphisme soit injectif. Donner un exemple où il n'est pas surjectif.

Exercice 385 – *Équipotence et isomorphisme* 2

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$ peuvent-ils être mis en bijection ? Sont-ils isomorphes ?

Exercice 386 – *Partie génératrice finie stable par passage à l'inverse* 3

Soit $(G, \cdot)$ un groupe engendré par une partie finie S stable par passage à l'inverse. Pour $x \in G$, on note $L(x, G)$ la longueur minimale d'une décomposition de x comme produit d'éléments de S. Pour un endomorphisme $\varphi : G \to G$, on note $\Lambda(\varphi, S) = \max\limits_{x \in S} L(\varphi(x), S)$.

1 Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln\bigl(\Lambda(\varphi^n, S)\bigr)$ existe dans $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de S.

2 Calculer la limite précédente pour $G = \mathbb{Z}^2$ et $\varphi : (x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$.

Exercice 387 – *Reconnaître un groupe connu* 3

1 Déterminer $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Quelle est sa structure algébrique ?

2 À quel groupe est-il isomorphe ?

Exercice 388 – *Le premier théorème d'isomorphie, dégradé en relation entre cardinaux (ENS MP 10)* 2

Soit G et H deux groupes, avec G fini, f un morphisme de G dans H. Donner une relation entre $|G|$, $|\ker f|$ et $|\operatorname{Im} f|$.

Exercice 389 – *Morphismes de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Q}^*$* 2

Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$.

Exercice 390 – *Groupe abélien d'exposant fini (Mines MP 2015)* 3

Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien de neutre e. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $x \in G$, $x^n = e$.

1 On suppose que $n = ab$, avec a et b premiers entre eux. On note $G_a = \{x^a,\ x \in G\}$. Montrer que G_a est un sous-groupe de G.

2 On introduit également G_b. Montrer qu'il existe un unique couple $(u, v) \in G_a \times G_b$ tel que $x = uv$.

3 On suppose n impair.

i Montrer que $\phi_1 : x \mapsto x^2$ est un automorphisme et déterminer l'application réciproque.

ii Même question avec $\phi_k : x \mapsto x^k$, avec k et n premiers entre eux.

1.3. Ordre d'un groupe, d'un élément. Groupes cycliques

Exercice 391 – *Existe-t-il des groupes infinis dont tout élément est d'ordre fini ?* 4

Donner un exemple de groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini.

Exercice 392 – *Structure des groupes d'ordre p où p est un nombre premier* 2

Soit p un nombre premier. Montrer que tous les groupes d'ordre p sont cycliques.

Exercice 393 – *Ordre d'un produit dans un cas particulier* 2

Soit G un groupe fini. On suppose que a et b commutent, et sont d'ordres respectifs m et n premiers entre eux.

1 Déterminer l'ordre de ab.

2 Montrer que ce résultat peut tomber en défaut lorsque a et b ne commutent pas.

Exercice 394 – *Périodicité d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$* 0

Soient $u_0, u_1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$. Étudier la périodicité de la suite (u_k).

Exercice 395 – *Résultats élémentaires sur les ordres* 0

1 Soit G et G' deux groupes et f un morphisme de G dans G'. Pour $a \in G$, comparer l'ordre de a et celui de $f(a)$.

2 Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de a et de bab^{-1}.

3 Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de ab et de ba.

Exercice 396 – *Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$* 2

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 397 – *Existence d'une involution non triviale dans un groupe d'ordre pair* 3

Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer l'existence d'un élément x de G, distinct de l'élément neutre e, tel que $x^2 = e$.

Exercice 398 – *Groupe n'ayant qu'un nombre fini de sous-groupes* 3

Montrer qu'un groupe G est fini si et seulement si il n'a qu'un nombre fini de sous-groupes.

Exercice 399 – *Racine carrée dans un groupe d'ordre impair* 3

Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que :

$$\forall\, x \in G,\ \exists ! y \in G \text{ tel que } x = y^2.$$

Exercice 400 – *Sous-groupes de type fini de $(\mathbb{Q}, +)$* 3

Montrer que les sous-groupes de type fini (*i.e.* engendrés par une partie finie) de $(\mathbb{Q}, +)$ sont monogènes.

Exercice 401 – *Groupe fini d'involutions (Mines MP 08)* 2

1 Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini de cardinal $\geqslant 2$ tel que : $\forall\, g \in G, g^2 = e$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(G, \cdot)$ soit isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 402 – *Sur le ppcm des ordres des éléments d'un groupe fini* 3

Soient G un groupe commutatif fini, m le ppcm des ordres des éléments de G.

1 Montrer qu'il existe g dans G d'ordre m.

2 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n de $\mathbb{Z}[X]$ tel que, si x et y sont dans $\mathbb{R}$ avec $x^2 + y^2 = 1$ et $(x + iy)^n + (x - iy)^n = 2$, alors $P_n(x) = 0$.

3 On suppose G de cardinal majoré par $2m - 1$. Montrer que G est cyclique.

4 Soit p un nombre premier. Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec x, y dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$ est un sous-groupe cyclique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercice 403 – *Ordre d'un élément dans un groupe abélien (X MP 07)* 3

Soit G un groupe abélien, $x \in G$ d'ordre m et $y \in G$ d'ordre n. Montrer qu'il existe $z \in G$ d'ordre $m \vee n$.

Exercice 404 – *Élément d'ordre p (X MP 06)* 4

Soit p un nombre premier, $p > 2$, et G un groupe de cardinal $2p$. Montrer que G admet au moins un élément d'ordre p.

Exercice 405 – *Théorème de Lagrange, cas général* 5

Soit G un groupe fini, et H un sous-groupe de G. On considère l'ensemble Ω des *translatés à gauche* de H par un élément de g :

$$\Omega = \{gH,\ g \in G\}$$

(pour $g \in G$ fixé, gH désigne l'ensemble $\{gh,\ h \in H\}$).

1 Montrer que la réunion des éléments de Ω est G.

2 Montrer que chaque élément de Ω est de même cardinal que H.

3 Montrer que deux éléments distincts de Ω sont disjoints.

4 En déduire que l'ordre de H divise celui de G : c'est le théorème de Lagrange.

Exercice 406 – *Groupe n'ayant que deux classes de conjugaison* 5

Que dire d'un groupe fini n'ayant que deux classes de conjugaison ?

Exercice 407 – *Groupe n'ayant que deux classes sous l'action de* $\mathrm{Aut}(G)$ 5

Que dire d'un groupe sur lequel le groupe des automorphismes agit en créant deux orbites ?

Exercice 408 – *Loi de groupe sur les points entiers d'une branche d'hyperbole* 3

1 (Centrale MP 06) Montrer que $\{x + y\sqrt{3}/x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

2 (X MP 08)Soit $G = \{x + \sqrt{2}y | x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{Z} \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1\}$.
i Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
ii Montrer que G est monogène.

1.4. Groupe symétrique

Quel est l'intérêt de la décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints 59

(1) Comparaison de permutations : grâce à l'unicité, deux permutations sont égales si et seulement si on a trouvé les mêmes décompositions.

(2) Vérification d'une propriété sur $\mathcal{S}_n$: si on veut vérifier une propriété [a] sur $\mathcal{S}_n$, il suffit de vérifier qu'elle est vraie pour tous les cycles, et qu'elle est stable par produit.

(3) Puissances d'une permutation : muni d'une telle décomposition, il est aisé de calculer toute puissance d'une permutation (car les cycles intervenant dans cette décomposition commutent deux à deux). Ainsi, dans l'exercice ci-dessus,

$$\sigma^{17} =$$

a. On peut comparer cela au principe de récurrence : pour vérifier une propriété sur $\mathbb{N}$, il suffit de la vérifier au rang 0 et d'établir qu'elle est stable par passage au successeur. On a aussi utilisé ce genre d'arguments en algèbre linéaire.

Exercice 409 – *Cardinal du groupe symétrique alterné d'indice n* 0

On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est d'ordre $n!/2$.

Exercice 410 – *Autre point de vue sur la signature* 3

Étant donné $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, où $i < j$, on dit que σ inverse i et j si $\sigma(j) < \sigma(i)$.

1 Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$, où $inv(\sigma)$ désigne le nombre d'inversions sous l'action de σ, *i.e.* le nombre de couples $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, où $i < j$, tels que σ inverse i et j, soit encore

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

2 En utilisant la question précédente, montrer à nouveau que ε est un morphisme de groupes.

Exercice 411 – *Sous-groupes de $\mathcal{S}_3$ (Centrale MP 07)* 0

Le groupe des permutations de $\{1,2,3\}$ est-il cyclique ? Et ses sous-groupes stricts ?

Exercice 412 – *$\mathcal{S}_n$ est de rang 2 (Centrale MP 08)* 1

Soient t la transposition $(1,2)$ et c le cycle $(1,\dots,n)$. Calculer c^k et $c^{-k} \circ t \circ c^k$. En déduire que c et t engendrent $\mathcal{S}_n$.

Exercice 413 – *Transpositions et groupe symétrique* 4

Quel est le nombre minimum de transpositions qui engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 414 – *Sous-groupes maximaux de $\mathcal{S}_n$ (ENS MP 10)* 3

Soit G le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ formé des éléments qui fixent n. Montrer que G est maximal parmi les sous-groupes stricts de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 415 – *Racine carrée d'une permutation circulaire (Mines MP 10)* 3

Le cycle $(1,2,\dots,n)$ admet-il une racine carrée dans $\mathcal{S}_n$?

Exercice 416 – *Nombre d'éléments d'ordre donné* 3

Soit p un nombre premier. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre p du groupe symétrique $\mathcal{S}_{2p}$.

2. Arithmétique

2.1. Divisibilité, diviseurs, division euclidienne

Exercice 417 – *Divisibilité* 0

1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 ne divise jamais n^2+1.

2 Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 24.

3 Montrer que 39 divise $7^{37}+13^{37}+19^{37}$.

4 Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si 9 divise $a^3+b^3+c^3$, alors 3 divise a ou b ou c.

5 Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que a^2+b^2 est divisible par 7 si et seulement si a et b le sont.

Exercice 418 – *Calculs de restes* 0

1 Trouver, pour tout entier naturel non nul n, le reste de la division de $\sum_{k=1}^{n} k$ par 2.

2 Trouver le reste de la division euclidienne de 234^{122} par 7.

3 Trouver le reste de la division de $(a^2+(a-1)^2)^2$ par $4a^2$ ($a \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 419 – *Nombre de diviseurs* 3

Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ a au moins autant de diviseurs de la forme $3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) que de diviseurs de la forme $3k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 420 – *Une caractérisation des carrés parfaits* 3

Soit n un entier strictement positif, et soit $d(n)$ le nombre d'entiers positifs divisant n. Prouver que $d(n)$ est impair si et seulement si n est un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un nombre entier).

Exercice 421 – *Somme des diviseurs* 3

Pour tout entier naturel non nul n, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs naturels. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

Exercice 422 – *Égalité de ppcm* 3

Montrer que $\operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, 2n) = \operatorname{ppcm}(n+1, n+2, \ldots, 2n)$.

Exercice 423 – *Centrale MP 08* 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

Exercice 424 – *CCP MP 2015* 0

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3, montrer que p^2-1 est divisible par 12 (et même par 24).

2.2. Une preuve du petit théorème de Fermat

Exercice 425 – *Banque CCP 2016 86* 2

1 Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

2 Soit p un nombre premier.

i Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis que p divise $\binom{p}{k}$.

ii Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.

Indication : Procéder par récurrence.

iii En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

2.3. Congruences

Exercice 426 – *Chiffres en base 10* 0

1 Montrer que chaque nombre du type

$$2^{2^n}+1$$

(où $n \geqslant 2$) se termine par 7.

2 Montrer qu'un nombre entier positif de six chiffres dont la représentation décimale est de la forme « abcabc » est nécessairement divisible par 13.

Exercice 427 – *Chiffres en base 10* 2

1 (Mines MP) Trouver le chiffre des unités de 7^{7^7}.

2 Trouver les deux derniers chiffres de la représentation décimale de $19^{19^{19}}$.

3 On admet que 2^{29} est un nombre de 9 chiffres, tous différents (en base 10). Quel est le chiffre manquant ?

Exercice 428 – *Somme des chiffres de la somme des chiffres* 3D

Trouver la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444}.

Exercice 429 – *Restes chinois* 0

Trouver les $a \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv 3\,[7]$, $a \equiv 8\,[17]$ et $c \equiv 13\,[27]$.

Réponse : 1606.

Exercice 430 – *Banque CCP 2016 94* 2

1 Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

2 Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.

3 On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 6 \mod(17) \\ x & \equiv & 4 \mod(15) \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

i Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

ii *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

2.4. Nombres premiers

Exercice 431 – *Nombres de Mersenne et de Fermat* 1

Trouver une condition nécessaire sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que 2^n-1 soit premier. Même question avec 2^n+1.

Exercice 432 – *Vers le théorème de Dirichlet* 1

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 433 – *Mines MP 2015* 3

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{Z}[X]$. On note D l'ensemble des diviseurs de $P(m)$ pour m dans $\mathbb{Z}$. Montrer que D contient une infinité de nombres premiers.

2.5. Équations diophantiennes

Exercice 434 – *2011 est-il la somme de deux carrés d'entiers ?* 0

(CCP) Existe-t-il $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a^2+b^2=2011$?

Exercice 435 – *Équations diophantiennes* 3

1 Montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2 - 5y^2 = 3.$$

2 L'équation diophantienne

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

possède-t-elle dans $\mathbb{Z}^3$ une autre solution que le triplet nul ?

3. Anneaux

3.1. Généralités sur les anneaux

Présence de l'unité pour un sous-anneau

Pour montrer qu'une partie B d'un anneau en est un sous-anneau, il faut s'assurer que $1_A \in B$. Contrairement au cas des sous-groupes et des sous-espaces vectoriels, il ne suffit pas de préciser B n'est pas vide. De même, dans le cas d'une sous-algèbre, on vérifiera la présence de l'élément unité. 60

Exercice 436 – *Développement dans un anneau* 0

Développer $(a-b)(a+b)$, $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$ pour a et b (éléments d'un certain anneau) ne commutant pas.

Exercice 437 – *D'un inverse à un autre* 2

(Centrale PSI 10) Soit A un anneau, a et b dans A tels que $1 + ab$ est inversible. Montrer que $1 + ba$ est inversible d'inverse $1 - b(1 + ab)^{-1}a$.

Exercice 438 – *Centre d'un anneau* 0

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On appelle *centre* de A l'ensemble $C = \{x \in A, \forall\, y \in A, xy = yx\}$. Montrer que C est un sous-anneau de A.

Exercice 439 – *Parité du nombre d'idempotents dans un anneau* 0

(Centrale PSI 10) Soit A un anneau non nul et $M = \{a \in A, a^2 = a\}$. On suppose que M est fini. Montrer que son cardinal est pair.

Exercice 440 – *Y a-t-il toujours un morphisme d'anneaux entre deux anneaux ?* 4

Étant donné deux anneaux A et B quelconques, existe-t-il au moins un morphisme d'anneaux de A vers B ?

Exercice 441 – *Éléments associés* 0

Soit $a, b \in A$.

1 Montrer que si a et b sont associés, alors ils se divisent mutuellement.

2 Montrer que dans le cas où on suppose A intègre, la réciproque est vraie.

Exercice 442 – *Sous-anneau engendré par* $1/5$ 0

Quel est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $1/5$? Quel est son groupe des inversibles ?

Exercice 443 – *Puissances identiques dans un anneau fini* 2

Soit A un anneau fini. Montrer l'existence d'entiers distincts m et n tels que, pour tout $x \in A$: $x^m = x^n$.

Exercice 444 – *Anneau des endomorphismes d'un groupe commutatif* 1

Soit $(G,+)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G, sur lequel on définit la loi (notée abusivement) $+$ par :

$$\forall f,g\in \mathrm{End}(G), \forall x\in G, (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

Montrer que $(\mathrm{End}(G),+,\circ)$ est un anneau.

Exercice 445 – *Éléments nilpotents d'un anneau* 1

Soit $(A,+,\times)$ un anneau non nul. On dit que $x\in A$ est *nilpotent* s'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $x^n=0$.

1 Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle.

2 Montrer qu'un élément de A ne peut pas être à la fois nilpotent et inversible.

3 Montrer qu'il peut exister des éléments ni inversibles ni nilpotents.

4 Montrer que si x est nilpotent, alors $1-x$ est inversible.

5 Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x+y$ sont nilpotents.

3.2. Idéaux

Exercice 446 – *Un anneau principal est-il toujours intègre ?* 4

Donner un exemple d'anneau principal non intègre.

Exercice 447 – *Radical d'un idéal* 3

Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A. On appelle *radical* de I et on note $\sqrt{I}$ l'ensemble :

$$\sqrt{I}=\{x\in A,\ \exists n\in\mathbb{N}, x^n\in I\}.$$

Dans $\mathbb{Z}$, calculer $\sqrt{12\mathbb{Z}}$, $\sqrt{72\mathbb{Z}}$.

Exercice 448 – *Nilradical d'un anneau commutatif* 2

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{N}$ des éléments nilpotents de $\mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{A}$. On l'appelle *nilradical* de $\mathcal{A}$.

Exercice 449 – *Idéaux maximaux* 3

Un idéal propre $\mathcal{I}$ d'un anneau A est dit *maximal* si $\mathcal{I}$ et A lui-même sont les seuls idéaux de A contenant $\mathcal{I}$.

1 Donner les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$, de $K[X]$.

2 Donner les idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

3.3. Anneaux particuliers

Exercice 450 – *Anneau local* 3

1 Soit A un anneau commutatif qui n'est pas un corps. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(1) La somme de deux non inversibles est non inversible.

(2) Les non inversibles forment un idéal propre.

(3) A possède un idéal maximal unique

Lorsque l'une de ces conditions est remplie, on dit que A est un *anneau local*.

2 Montrer que dans un anneau local, les seuls idempotents sont 1 et 0.

Exercice 451 – *Anneau des entiers de Gauss* 1

On pose $\mathbb{Z}[i]=\{z\in\mathbb{C}, \exists (a,b)\in\mathbb{Z}^2,\quad z=a+ib\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre pour les lois d'addition et de multiplication déduites de celles de $\mathbb{C}$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 452 – *Sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par j* 2

On note $j=e^{2i\pi/3}$ et on considère l'ensemble $\mathbb{Z}[i]=\{x+jy,(x,y)\in\mathbb{Z}^2\}$.

1 Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un anneau.

2 Montrer que $u \in \mathbb{Z}[j]$ est inversible si et seulement si $|u| = 1$.

3 Montrer que l'ensemble des inversibles $\mathbb{Z}[j]^*$ est un groupe cyclique.

Exercice 453 – *Écriture de* $(1+\sqrt{2})^n$ *comme somme de racines* 3

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p+1} + \sqrt{p}.$$

Exercice 454 – *Pseudo division euclidienne* 2

Soit $A = \{a + ib\sqrt{2};\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1 Montrer que A est un anneau intègre.

2 Montrer qu'on peut définir une pseudo division euclidienne dans A (sans unicité) : pour tous $x \in A$ et $y \in A \setminus \{0\}$, il existe $(q,r) \in A^2$ tels que $x = qy + r$ et $|r| < |y|$.

Exercice 455 – *Anneau dont l'ensemble des inversibles est monogène* 3

Soient A l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ et G l'ensemble des éléments inversibles de A.

1 Vérifier que G est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^*$.

2 Soit $x + y\sqrt{7} \in G$. Donner, au signe près, une formule pour $\left(x + y\sqrt{7}\right)^{-1}$. En déduire un élément non trivial de G.

3 Pour $x + y\sqrt{7} \in G$, on pose $\Phi(x + y\sqrt{7}) = (\ln|x + y\sqrt{7}|, \ln|x - y\sqrt{7}|)$.
Montrer que Φ est un morphisme de G dans $(\mathbb{R}^2, +)$ dont on précisera le noyau. Montrer que $\operatorname{Im}\Phi$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$.

4 En déduire que $G = \{\pm(8 + 3\sqrt{7})^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 456 – *Irréductibles d'un anneau de matrices* 3

1 Décrire les inversibles de l'anneau $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2 Un élément M non inversible de A est dit irréductible si l'égalité $M = UV$ avec U et V dans A implique que l'une des deux matrices U, V est un inversible de A. Une matrice de A de déterminant nul peut-elle être irréductible ?

3 Caractériser les irréductibles de A.

4. Corps

Sous-corps

Si K est un sous-corps de L, alors on peut voir L comme un K-espace vectoriel. Lorsque L est de dimension finie sur K, cette dimension est appelée *degré* de cette extension de corps, et est notée $[L:K]$.
Plus généralement, tout L-espace vectoriel E peut-être vu comme un K-espace vectoriel. Si l'extension de corps est finie, et si E est de dimension finie sur L, alors il l'est aussi sur K, et : 61

$$\dim_K(E) = [L:K]\dim_L(E).$$

Par exemple, tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n peut-être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de dimension $2n$ (car $[\mathbb{C}:\mathbb{R}] = 2$).

Sous-corps engendré par une partie

Soit K un corps, et soit A une partie de K. Il existe un plus petit sous-corps de K contenant A : il peut se décrire comme l'intersection des sous-corps de K contenant A. On peut aussi dire que c'est la partie de K que l'on peut construire à partir de A et des opérations d'addition, multiplication, passage à l'opposé et passage à l'inverse (d'un élément non nul).
Par exemple, $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sont les sous-corps de $\mathbb{C}$ engendrés par i et $\sqrt{2}$ respectivement [a].
En particulier, on peut regarder le sous-corps de K engendré par $\emptyset$ (ou par 1_K, cela revient au même) : c'est un sous-corps de K, contenu dans chaque sous-corps de K. On dit que c'est le *sous-corps premier* de K. Dans le cas de $\mathbb{C}$ (et donc de tous ses sous-corps), le sous-corps premier est $\mathbb{Q}$. 62

a. Au fait, quel est le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par i ?

Corps finis (hors-programme)

Vous savez qu'il existe des corps finis, à savoir les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier. En fait, il en existe d'autres. Étant donné un corps fini K, son sous-corps premier est nécessairement isomorphe à un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (où p est premier). On peut ensuite voir K comme un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel, de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, donc K est de cardinal p^n.
Réciproquement, on peut construire, pour tout nombre premier p et tout $n \in \mathbb{N}^*$, un corps fini de cardinal p^n. Cependant, cette construction est délicate, surtout celle de la loi multiplicative : par exemple, les anneaux $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$ et $\left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)$ *ne sont pas* des corps, puisqu'ils ne sont pas intègres. 63
Signalons enfin qu'un corps infini n'admet pas toujours $\mathbb{Q}$ comme sous-corps premier : le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(X)$ des fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ admet $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ comme sous-corps premier.

Nombres algébriques, nombres transcendants (culturel, lecture facultative)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, et soit $\mathbb{Q}(\alpha)$ le sous-corps de $\mathbb{C}$ qu'il engendre. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Q}[X] & \to & \mathbb{Q}[\alpha] \\ & P & \mapsto & P(\alpha) \end{array}$$

est un morphisme surjectif d'algèbres. En particulier, son noyau est un idéal $\mathcal{I}$.
Si $\mathcal{I} = \{0\}$, *i.e.* si le seul polynôme à coefficient rationnels dont α est racine est le polynôme nul, on dit que α est *transcendant*, et $\mathbb{Q}[\alpha]$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[X]$. 64
Sinon, on dit que α est un *nombre algébrique*, $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$, le générateur unitaire P de $\mathcal{I}$ est alors irréductible sur $\mathbb{Q}$, et son degré est aussi le degré de l'extension de corps $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
Par exemple $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}$ sont algébriques, e et π sont transcendants, mais on ne sait pas si $e + \pi$ l'est !

Exercice 457 – *Caractérisation des morphismes de corps* 0

On considère deux corps K et L. Montrer que si $f : K \to L$ vérifie $f(a+b)$ et $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tout $(a,b) \in K^2$, et si f n'est pas identiquement nul, alors f est un morphisme de corps

Quand un anneau peut-il être vu comme sous-anneau d'un corps ?

Un anneau A peut-il être vu comme un sous-anneau d'un corps ? Pas forcément, car il est nécessaire que A soit intègre. Réciproquement, on peut effectivement associer un corps K à un anneau intègre A, tel que A soit un sous-anneau de K : le corps que l'on construit s'appelle le *corps des fractions* de A. C'est $\mathbb{Q}$ pour $\mathbb{Z}$. C'est le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles pour l'anneau $\mathbb{K}[X]$, qui est bien intègre. Cependant, la construction effective du corps des fractions d'un anneau intègre dépasse le cadre du programme. 65

Exercice 458 – *Automorphismes du corps des réels* 1

Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres réels.
Indication : on pourra vérifier qu'un tel automorphisme est croissant, et utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 459 – *Morphisme de corps* 0

Montrer que tout morphisme de corps est injectif.

Exercice 460 – *Anneau intègre fini* 1

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 461 – *Condition suffisante pour être un corps* 3

Soit A un anneau commutatif fini non nul, et tel que, pour tout $x \in A$:

$$((x^2 = 0) \Rightarrow (x = 0)) \wedge ((x^2 = x) \Rightarrow (x \in \{0, 1\}))$$

Montrer que A est un corps.

Exercice 462 – *Groupe d'automorphismes d'une extension quadratique de* $\mathbb{Q}$ 3

On pose $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{z \in \mathbb{R}, \exists (a, b) \in \mathbb{Q}^2, \quad z = a + b\sqrt{3}\}$.

1 Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un corps pour les lois déduites de celles de $\mathbb{R}$.

2 Déterminer le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Exercice 463 – *Calculs dans une extension de* $\mathbb{Q}$ *de degré* 3 3

Soit θ l'unique racine réelle de $P = X^3 - X + 1$. Montrer que $\mathbb{Q}(\theta)$ est un corps. Calculer l'inverse de $\theta^2 - 2\theta - 3$.

Exercice 464 – *Une caractérisation des corps* 3

Soit A un anneau commutatif non nul dont tout idéal est premier, c'est-à-dire vérifie, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$$xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Montrer que A est un corps.

Exercice 465 – *Corps algébriquement clos* 5

Un corps K est dit *algébriquement clos* si tout polynôme non constant à coefficients dans K admet une racine dans K.

1 Montrer qu'un corps algébriquement clos est de cardinal infini.

2 Donner un exemple de corps algébriquement clos.

3 Montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps algébriquement clos.

5. Anneaux de congruence

Exercice 466 – *Sommes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$* 2

Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k \in \{-1, 0\}$. Préciser à quelle condition on obtient 0 ou -1.

Exercice 467 – *Banque CCP 2016 66* 0

On note p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par : $x\,\mathcal{R}\,y \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kp$.On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

1 Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?

2 Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
On justifiera que ces définitions sont cohérentes.

3 On admet que, muni de ces opérations, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau.
Démontrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

Exercice 468 – *Groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (Mines MP 08)* 0

Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Ce groupe est-il cyclique ?

Exercice 469 – *Isomorphie entre groupes d'inversibles (Mines MP 07)* 2

Les groupes multiplicatifs $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 470 – *Nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (Mines MP 2015, Centrale MP 2015)* 3I

Soit p premier impair.

1 Montrer que le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est $\dfrac{p+1}{2}$.

2 Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 4$.

3 Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est somme de deux carrés.

Exercice 471 – *Points sur le « cercle unité » dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$* 3

Soit p un nombre premier impair. Dénombrer les $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ tels que : $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 472 – *Suite modulaire périodique (Centrale MP 2015)* 3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *périodique* s'il existe $T \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n$. Le plus petit tel entier T est alors appelé *période* de la suite. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite (F_n) de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ par $F_0 = F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1 Lorsque $m \in \{2, 3, 7, 21\}$, montrer que cette suite est périodique et trouver sa période.

2 Montrer que $f\ : (x, y) \mapsto (y, x + y)$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$ dans lui même.

3 Montrer que (F_n) est périodique de période $T \leqslant m^2 - 1$.

4 Dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$, montrer qu'une suite (v_n) vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 8v_n + 11$, prend toutes les valeurs de $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$.

6. Algèbres

Exercice 473 – *Sous-algèbres, ou pas* 0

Donner des parties de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[X]$ qui sont :

1 Des sous-algèbres de $\mathbb{C}[X]$.

2 Des sous-anneaux mais pas des sous-algèbres de $\mathbb{C}[X]$.

3 Des sous-espaces vectoriels mais pas des sous-algèbres de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 474 – *Éléments inversibles d'une sous-algèbre de dimension finie* 1I

1 Soit A une K-algèbre, B une sous-algèbre de A de dimension finie et soit b un élément de B, inversible dans A.

En considérant

$$\varphi : \begin{array}{rcl} B & \to & B \\ x & \mapsto & bx \end{array}$$

montrer que b^{-1} appartient à B.

2 Montrer sur un exemple que ce résultat ne s'étend pas en dimension infinie.

Exercice 475 – *Quelles sont les $\mathbb{R}$-algèbres commutatives intègres de dimension finie ? (Centrale MP 2015)* 4

Soit $(A, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension $n \geqslant 2$, $a \in A$.

1 Montrer que $x \mapsto ax$ est linéaire, puis que a est inversible si et seulement si a est non nul.

2 Montrer que a admet un polynôme annulateur non nul.

3 Montrer que $\mathbb{C}$ est, à isomorphisme près, la seule $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension finie $n \geqslant 2$.

Exercice 476 – *Quel est le groupe des automorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}(X)$?* 4

Déterminer les automorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 477 – *$\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ sont-ils isomorphes en tant qu'algèbres ?* 4

(X MP 06) Existe-t-il un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$?

7. Polynômes

7.1. Division euclidienne

Exercice 478 – *Calculs de restes* 2

1 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)$, par $(X-a)(X-b)$?

2 Trouver le reste de la division euclidienne de $X^6 - 5X^4 + 3X^3 - X^2 + X + 2$ par $(X-1)^3$.

3 Trouver par trois méthodes le reste de la division euclidienne de $P = X^5 + 4X^3 + 3X^2 - X + 6$ par $(X-1)^2(X+2)$.

4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

5 Chercher le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

6 Soit $B = X^3 - X^2 + X - 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = (X^2+X+1)^n - X^{2n} - X^n - 1$.

i Donner une condition sur n pour que B divise A_n.

ii Donner le reste de la division euclidienne de A_n par B.

Exercice 479 – *Bézout effectif* 0

Trouver les polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$, où :

1 $A = X^5 + 1$ et $B = X^7 + X^6 + X^3 + 1$.

2 $A = X^5 - 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

3 $A = (X^{10} - 1)$ et $B = (X^6 - 1)$.

Exercice 480 – *Division euclidienne (Mines MP 2015)* 3

Soit $m \geqslant n \geqslant 1$. Calculer le quotient et le reste de la division de $X^m - 1$ par $X^n - 1$.

Exercice 481 – *Algorithme d'Euclide étendu* 0

1 Trouver une relation de Bézout pour $A = 19$ et $B = 33$ (dans $\mathbb{Z}$).

Réponse : $7A - 4B = 1$.

2 Même question pour $A = X^2 + X + 2$ et $B = X^3 + 2X + 1$.
Réponse : $\frac{X^2-3X+3}{8}A + \frac{-X+2}{8}B = 1$.

Exercice 482 – *Couple de Bézout optimal* 3I

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non associés et $D = P \wedge Q$.
Montrer qu'il existe un unique couple (U, V) de polynômes tels que :

$$UP + VQ = D, \deg U < \deg Q - \deg D \text{ et } \deg V < \deg P - \deg D$$

7.2. Aspects linéaires

Exercice 483 – *Exemple de base polynomiale* 1

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 484 – *Familles de* $\mathbb{R}_3[X]$ (TPE PC 08) 0

Soit $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}_3[X]$.
1 On suppose que : $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 0$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?
2 On suppose que : $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 1$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?

Exercice 485 – *Un automorphisme de* $\mathbb{R}[X]$ (TPE PC 08) 0

1 Soit $\phi\ : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P + P'$. Montrer que ϕ est un automorphisme.
2 Étudier de même $\psi\ : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto aP + XP'$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 486 – *Un opérateur sur les polynômes* 1

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $U_p = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(X-k)}{p!}, p \in \mathbb{N}$ (par convention, un produit indexé par l'ensemble vide vaut 1), et

$$\Delta\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1 Démontrer que la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Delta^n(U_p)$.
3 En déduire que : pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$.
4 *(X MP 09)* Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P prend en tout entier relatif une valeur entière relative si et seulement si les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières.
5 *(X MP 09)* On prolonge naturellement l'application Δ en un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction. Montrer que f est polynomiale si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $\Delta^n(f) = 0$.
6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Démontrer que la famille $(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n))$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Exercice 487 – *Bases d'espaces polynomiaux* 2

1 *(TPE)* Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$, et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2 *(Mines PSI 09)* Soit P un polynôme de degré n et $a_0, \ldots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que la famille $(P(X + a_k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ constitue une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 488 – *(Centrale MP) Sous-espace de* $\mathbb{R}_n[X]$ 0

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de A ? Donner une base de A.

Exercice 489 – *Une base de* $\mathbb{R}_n[X]$*, dans laquelle on exprime la base canonique* 0

(CCP) Soient $n \geqslant 2$ et, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

1 Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 Exprimer $1, X, \dots, X^n$ dans la base précédente.

7.3. Multiplicité d'une racine

Exercice 490 – *Banque CCP 2016 85* 0

1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

2 Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.

3 Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

4 Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 491 – *Multiplicité de racines* 2

1 *(Mines MP 07, X MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les racines complexes du polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X-k) + a$ sont de multiplicité au plus 2.

2 *(X MP 09)* Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.

7.4. Polynôme scindé, scindé à racines simples

Exercice 492 – *Polynômes scindés* 1

(Mines MP 09) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 493 – *Polynômes scindés* 3D

1 *(X MP 09)* Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $Q + aQ'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

2 *(X MP 09)* Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$. On pose $R = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^{(k)}$. Montrer que R est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 494 – *ENSAM 2015* 2

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé à racines réelles simples. On pose $Q = XP(X)$. Montrer que Q' est scindé à racines réelles simples.

7.5. Polynômes irréductibles

Exercice 495 – *Décomposition en produit d'irréductibles* 2

1 Factoriser $P(X) = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$, sachant que P admet au moins deux racines rationnelles (comptées avec leur ordre de multiplicité).

2 Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

3 *(CCP MP 08)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$: $X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$.

Exercice 496 – *Polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$* 3D

1 Démontrer que $1 + (X-1)^2(X-3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

7.6. Relation coefficients-racines

Exercice 497 – *Relations coefficients-racines* 2

1 *(X PC 08)* Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de P. On note x_1, x_2, x_3 les racines de P. Déterminer : $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 x_2 x_3$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} + \frac{1}{x_3 - 2}$, $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

2 Soit x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de $X^4 + X + 1$. Calculer $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i - 1}$.

3 Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que ces nombres sont en progression géométrique si et seulement si $(ab+ac+bc)^3 = abc(a+b+c)^3$.

Exercice 498 – *(Mines MP 08) Relations coefficients-racines* 3

Calculer : $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{2ik\pi/n})$ où $n \geqslant 2$.

Exercice 499 – *Une curiosité polynomiale (Centrale PSI 10)* 3

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x + y + z = 0$. Montrer :

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}.$$

7.7. Localisation des racines

Exercice 500 – *Théorème de Gauss-Lucas* 1

1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P. C'est le *théorème de Gauss-Lucas*.

Indication : Utiliser la dérivée logarithmique.

2 Soit K un convexe fermé de $\mathbb{C}$ et $A = \{a \in \mathbb{C}, P^{-1}(\{a\}) \subset K\}$. Montrer que A est convexe.

Exercice 501 – *Localisation des racines* 2

1 (X-ENS PSI 08) Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$. Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $\max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$.

2 (Mines MP 08) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.

i Soit z une racine de P distincte de 1. Montrer que $|z| < 1$.

ii Montrer que les racines de P sont simples.

Exercice 502 – *Polynôme scindé en prenant les parties réelles des coefficients* 3

(Centrale PSI 10) Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que toutes ses racines ont une partie imaginaire strictement négative. Montrer que le polynôme $Q(X) = \mathrm{Re}(a_0) + \mathrm{Re}(a_1)X + \cdots + \mathrm{Re}(a_n)X^n$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

7.8. Divers

Exercice 503 – *Centrale MP 2015* 3

Soit $n \geqslant 1$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit $\mathcal{F}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$ et $\breve{\mathcal{F}}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) X^k$.

1 Montrer que $\mathcal{F}$ et $\breve{\mathcal{F}}$ définissent des endomorphismes de $\mathbb{C}[X]$.

2 Calculer $\breve{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}$ et en déduire que $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dont on précisera la réciproque.

3 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

– pour tout $z \in \mathbb{U}_n$, on ait $|P(z)| \leqslant 1$;

– il existe $z \in \mathbb{U}_n$ racine de P.

Montrer que $X^n - 1$ divise P. **Indication :** on admettra que si P et A unitaire sont à coefficients entiers, alors le quotient et le reste de la division euclidienne de P par A sont également à coefficients entiers.

Exercice 504 – *Développement eulérien du sinus (Mines MP 2015)* 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)$$

1 Déterminer les racines de Q_n.

2 Démontrer alors que celui-ci s'écrit

$$Q_n = X \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right).$$

3 En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right).$$

Exercice 505 – *Petites Mines MP 2015* 3

Soit P un polynôme à coefficients entiers et quatre entiers $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ tels que $P(\lambda_i) = 7$ pour i entre 1 et 4. Montrer que l'équation $P(n) = 14$ n'admet pas de solution entière.

Exercice 506 – *Centrale MP 2015* 3D

Soit $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) \subset U$.

Exercice 507 – *Équation d'inconnue polynomiale* 3

1 (Mines MP 08) Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0 \text{ et } P(X^2) = P(X)P(X-1)\}$.
i Soit $P \in \mathcal{A}$. Montrer que les racines de P sont de module 1.
ii Déterminer A.

2 Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0 \text{ et } P(X^2) = P(X)P(X-1)\}$. Soit $P \in \mathcal{A}$. Montrer que les racines de P sont de module 1. Déterminer $\mathcal{A}$.

3 *(Mines PC 09)* Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

4 *(Centrale PC 09)* Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

5 Trouver les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = P'P''$.

Exercice 508 – *D'un polynôme positif à un autre (Mines MP 2015)* 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) \geqslant 0$. Démontrer que pour tout réel x, on a $(P+P'+P''+\dots)(x) \geqslant 0$.

Exercice 509 – *Polynôme prenant aux entiers des valeurs entières* 4

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non constant $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) \in \mathcal{P}$.

Exercice 510 – *Polynômes cyclotomiques (X MP 07)* 3DC

On définit par l'égalité

$$\Phi_n(X) \overset{def}{=} \prod_{k\wedge n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

le *polynôme cyclotomique* d'ordre n, le produit portant sur les entiers $k \in [\![1, n]\!]$ premiers avec n.

1 Montrer que $\prod_{k|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$, le produit ne portant que sur les diviseurs positifs de n.

2 Montrer que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercice 511 – *Un polynôme irréductible sur* $\mathbb{Q}$ *de degré* 3 2

1 Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
On désigne par α une de ses racines complexes, et on pose

$$A = \{a + b\alpha + c\alpha^2, (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$$

2 Montrer que A est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 512 – *Irrationnalité de* π 1

1 Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $P_n = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}$ et ses dérivées successives prennent, en 0 et $\frac{a}{b}$, des valeurs entières.

2 Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t$ converge vers 0.

3 Montrer par l'absurde que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 513 – *Une curiosité polynomiale* 3D

(X MP) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $P = X^2 + aX + b$. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, \quad P(n)P(n+1) = P(k)$.

7.9. Interpolation de Lagrange

Exercice 514 – *Banque CCP 2016 87* 0

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1 Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in \{0, \cdots, n\} \ P(a_i) = b_i.$$

2 Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \ \ b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } \ i = k \end{cases}$$

3 Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 515 – *Banque CCP 2016 90* 2

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1 Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
- **i** Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
- **ii** Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3 Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4 *Application :* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice 516 – *Prolongement de l'interpolation de Lagrange* 3

Déterminer les polynômes P prenant des valeurs données $(b_0, \ldots, b_n)$ sur une famille $(a_0, \ldots, a_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux.

Exercice 517 – *Polynôme complexe laissant stable l'ensemble des rationnels* (Mines PSI 08) 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

8. Fractions rationnelles

Exercice 518 – *Décomposition en éléments simples par développement limité* 2T

Soit $x_1, \ldots, x_n$, n scalaires distincts deux à deux. On pose

$$P(X) = (X - x_1) \ldots (X - x_n) \text{ et } F(X) = \frac{1}{P}$$

Décomposer F et F^2 en éléments simples (on exprimera les coefficients en fonction des $P'(x_i)$ et $P''(x_i)$).

Exercice 519 – *Décompositions en éléments simples* 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

1 *(Mines MP 05)* $\frac{1}{X(X+1)\ldots(X+n)}$.

2 *(Mines MP 05)* Soit P un polynôme unitaire de degré n et $Q = \prod_{i=0}^{n}(X-i)$.

i Décomposer P/Q en éléments simples.

ii Montrer que : $\max\{|P(k)|, 0 \leqslant k \leqslant n\} \geqslant n!/2^n$.

3 $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

4 $\frac{1}{X^2(X-1)^n}$.

5 $\frac{1}{(X^n-1)^2}$.

Exercice 520 – *Fraction rationnelle à coefficients rationnels* (Centrale MP 06) — 3

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non pôle de F, $F(n) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

Exercice 521 – *Sommes classiques et fractions rationnelles* — 3T

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ à racines simples : $x_1, \ldots, x_n$.

1 *(Centrale MP 05, X MP 07)* Calculer : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}$.

2 On suppose $P(0) \neq 0$. Montrer : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$.

3 *(Centrale MP 05)* Calculer : $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{P''}{P'}\right)(x_k)$.

4 *(Centrale MP 05)* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de P comptées avec leurs multiplicités, et on suppose que x_1 est une racine simple. On note $y_2, \ldots, y_n$ les racines de P' comptées avec leurs multiplicités. Montrer que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_1 - x_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_1 - y_k}.$$

Exercice 522 – *Le théorème de Gauss-Lucas (Centrale MP 06)* — 1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$.
(Théorème de Gauss-Lucas) Montrer que les zéros de P' sont dans l'enveloppe convexe des zéros de P.

Exercice 523 – *Autour de la dérivée logarithmique* — 3D

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$.

1 On suppose que toute racine de P est de partie réelle positive. Montrer qu'il en va de même des racines de P'.

2 On suppose de plus que P possède des racines non imaginaires pures. Montrer que toute racine imaginaire pure de P' est racine de P.

3 Ici, $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si les racines de P sont réelles et simples, alors le polynôme $Q = {P'}^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

Exercice 524 – *Utilisation de la dérivée logarithmique* — 2

1 *(X PC 08)* Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de P. On note x_1, x_2, x_3 les racines de P. Déterminer : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}$

2 On note $w_1, \ldots, w_{n-1}$ les racines de $X^n - 1$ différentes de 1. Calculer : $\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$, $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$.

Exercice 525 – *Identité polynomiale* — 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n, scindé à racines simples. On note $a_1, \ldots, a_n$ les racines de P. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)} = \frac{Q^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}.$$

CHAPITRE XXIV

Fonctions numériques, convexité (TD)

Sommaire

Par défaut, toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

1. Propriétés de fonctions

1.1. Monotonie

Exercice 526 – *Par quelles opérations la propriété de croissance est-elle stable ?* 4

1 Montrer que la somme (resp. la composée) de deux fonctions croissantes est croissante. Montrer que le produit d'une fonction croissante par un réel positif est croissant.

2 Montrer que le produit de deux fonctions croissantes n'est pas toujours croissant, mais que le produit de deux fonctions croissantes et positives est croissant.

Exercice 527 – *Point fixe et croissance* 3D

Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est croissante, alors f admet un point fixe.

Exercice 528 – *Une fonction minimale en un point est-elle croissante au voisinage à droite de ce point ?* 4

On pose $f : x \mapsto |x| \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue et minimale en 0, mais que pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ n'est pas monotone.

Exercice 529 – *Étude d'un comportement asymptotique* 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante, $a > 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(ax) - f(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n} \frac{f(a^n)}{n} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\ln(x)} = 0$.

1.2. Périodicité

Exercice 530 – *Groupe des périodes* 0I

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $T \in \mathbb{R}$ est *une période* de f si, pour tout réel x : $f(x+T) = f(x)$.
Vérifier que l'ensemble des périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On l'appelle *groupe des périodes de* f. Dans le cas où ce groupe est de la forme $a\mathbb{Z}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que a est *la période* de f.

Exercice 531 – *Par quelles opérations l'ensemble des fonctions périodiques est-il stable ?* 4

1 Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'ensemble des fonctions T-périodiques est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2 Montrer qu'en revanche, l'ensemble des fonctions périodiques n'est stable ni par somme, ni par produit.

3 Que dire de la composition au sujet des fonctions périodiques ?

Exercice 532 – *Fonctions périodiques et limite en l'infini* 0

Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques admettant une limite en $+\infty$.

Exercice 533 – *Groupe des périodes de la dérivée* 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable périodique. Montrer que f' est périodique, de même groupe des périodes que f.

Exercice 534 – *Fonction continue périodique non constante* 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique, continue et non constante.

1 Montrer que f admet une plus petite période T strictement positive.

2 Montrer que ce résultat tombe en défaut si on ne suppose plus f continue.

3 Montrer que f est bornée, et qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = f([u, u + T/2])$.

Exercice 535 – *Fonction continue ayant 1 et $\sqrt{3}$ pour périodes (X PC 10)* 3

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{3})$.

1.3. Fonctions lipschitziennes

Exercice 536 – *Par quelles opérations le caractère lipschitzien est-il stable ?* 4I

1 Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes l'est.

2 Montrer que la composée de deux fonctions lipschitziennes l'est.

3 Montrer que si f et g sont lipschitziennes sur un domaine borné, alors leur produit est lipschitzien.

4 Soit f une fonction lipschitzienne sur un segment, ne s'annulant pas. Montrer que $\frac{1}{f}$ est lipschitzienne.

Exercice 537 – *Mines PSI 06* 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est k-lipschitzienne si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Exercice 538 – *(ENS MP 10)* 3D

Soit f 1-lipschitzienne de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment.

2. Limite, continuité

2.1. Inégalités, étude de limites

Exercice 539 – *Condition suffisante pour qu'une fonction ait une limite finie en l'infini* 3T

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x, y > A, |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 540 – *Une limite (X PC 10)* 2

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer la limite de $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 541 – *Une inégalité (X PC 10)* 3

Soit $(x, y) \in]0, 1]^2$. Montrer : $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y} \leqslant x^x y^y$.

Exercice 542 – *Inégalité (X PC 10)* 3

Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, a^4 + ax + x^4 \geqslant 0$.

2.2. Continuité

Exercice 543 – *Continuité du max et du min* 1

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues.

Exercice 544 – *Prolongements par continuité* 0

Déterminer le prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1 $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$.

2 $g : x \mapsto \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$.

3 $h : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$.

Exercice 545 – *Continuité d'une fonction définie par une borne supérieure* 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\Phi : x \mapsto \sup\limits_{[0,x]} f$ est continue.

Exercice 546 – *Une condition suffisante de continuité inattendue* 3D

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = f(x)/x$. On suppose f croissante et g décroissante. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.3. Utilisation de la continuité

Exercice 547 – *Points fixes* 0

1 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a \leqslant b$. Soit f une application continue telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 548 – *Points fixes* 3

1 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a \leqslant b$. Soit f une application continue telle que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

2 Soit $l \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. On suppose $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.
Montrer que si $l \neq 1$, alors f admet un point fixe. Et si $l = 1$?

Exercice 549 – *Une valeur moyenne est atteinte* 0

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $x_1, \dots, x_n \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$

Exercice 550 – *Fonction continue de valeur absolue constante* 0

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, telle que $|f|$ soit constante sur I. Montrer que f est constante sur I.

Exercice 551 – *Enfin une application concrète* 0

Un homme parcourt 8 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure durant lequel il a parcouru 4 kilomètres.

Exercice 552 – *Contrôle sur un segment* 0

Soit f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $|f(x)| < |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall\, x \in [a,b], |f(x)| \leqslant k|x|$. Existe-t-il $k \in]0,1[$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, |f(x)| \leqslant k|x|$?

Exercice 553 – *Minoration, majoration, encadrement* 2

1 Montrer qu'une fonction continue sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ est minorée par un réel strictement positif.

2 Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ ayant une limite finie l_- en $-\infty$ et une limite finie l_+ en $+\infty$. Montrer que f est bornée, puis que si $l_- = l_+$, alors f atteint sa borne inférieure ou sa borne supérieure.

3 Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$: $0 < f(x) < g(x)$.
Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$: $C\, f(x) \leqslant g(x)$.

Exercice 554 – *Utilisation du TVI* 2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in [0, 1-1/n]$ tel que $f(\alpha_n + 1/n) = f(\alpha_n)$.

Exercice 555 – *Il existe deux points sur l'équateur où la température est la même (X PC 10)* 2

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que la restriction de f à un cercle n'est pas injective.

Exercice 556 – *Existence d'un point où deux fonctions coïncident* 2

Soit $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $x' \in [a,b]$ tel que $f(x) = g(x')$. Montrer l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 557 – *Valeur atteinte une unique fois par une fonction continue* 2

Soit f continue sur $[a,b]$ avec $f(a) = f(b)$ et $c \in [a,b]$ tel que $\forall\, x \neq c, f(x) \neq f(c)$. Que dire de $f(c)$?

2.4. Propriétés de fonctions continues

Exercice 558 – *Cardinal de l'image d'un intervalle par une fonction continue* 0

Soit I un intervalle réel, f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(I)$ est infini ou f est constante.

Exercice 559 – *Un segment inclus dans l'image continue d'un segment est-il l'image d'un segment ?* 4

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et $[a,b] \subset f([0,1])$. Soit $c = \sup\{t \in [x,y], f(t) \leqslant a\}$ et $d = \inf\{t \in [x,y], f(t) \geqslant b\}$, où $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Montrer que $f([c,d]) = [a,b]$.

Exercice 560 – *Ensemble de valeurs d'adhérence à l'infini* 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue, A l'ensemble des réels de la forme $\lim_n f(u_n)$, où $u_n \to +\infty$. Montrer que A est un intervalle.

Exercice 561 – *Fonction continue sans extremum local* 3

Montrer qu'une fonction $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et sans extremum local est strictement monotone.

Exercice 562 – *Une partie bornée n'est pas réversible (Centrale PSI 10)* 3

Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas de $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(A)\subset\mathbb{R}\setminus A$ et $f(\mathbb{R}\setminus A)\subset A$.

Exercice 563 – *Fonction continue passant d'un rationnel à un irrationnel, et réciproquement* 5

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q})\subset\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$.

Exercice 564 – *Bijectivité d'une fonction solution d'une équation fonctionnelle* 3D

Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, telle que $f\circ f(x)=2f(x)-x$. Montrer que f est une bijection strictement croissante de f sur lui-même.

2.5. Lieu de (dis)continuité

Exercice 565 – *Que dire du lieu de dicontinuité d'une fonction quelconque ?* 4

Existe-t-il une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec un seul point de continuité ? Un seul point de discontinuité ?

Exercice 566 – *Que dire du lieu de discontinuité d'une fonction monotone ?* 4DI

Soit $f\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ croissante. Montrer que le lieu de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice 567 – *Points de discontinuité d'une fonction réglée* 3DI

Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, soit la propriété P :

$$P:\begin{cases}\forall a\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R},\ \text{ on la note } f(a^+)\\ \forall a\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R},\ \text{ on la note } f(a^-)\end{cases}$$

1 Montrer que f monotone vérifie P.
Dans la suite, on suppose que f vérifie P.

2 Soit $a\in\mathbb{R}$, tel que $|f(a^+)-f(a^-)|>0$. Montrer qu'il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $y\in[a-\eta,a[\bigcup]a,a+\eta]$, $|f(y^+)-f(y^-)|\leqslant\dfrac{|f(a^+)-f(a^-)|}{2}$.

3 Montrer que le nombre de points où f est discontinue est fini ou dénombrable.

Exercice 568 – *Existe-t-il une permutation de $[0,1]$ discontinue en tout point ?* 4

Exhiber une fonction $f\ :[0,1]\to[0,1]$, bijective, discontinue en tout point.

Exercice 569 – *Lieu de continuité original* 3

Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nulle en tout irrationnel, et valant $\frac{1}{q}$ en tout rationnel $\frac{p}{q}$ mis sous sa forme canonique. Donner le lieu de continuité de f.

3. Dérivée

3.1. Dérivabilité, calcul de dérivée

Exercice 570 – *Dérivation, dérivabilité* 2

1 Dériver, en tout point où cela est possible, $x\mapsto\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}$.

2 La fonction $x\mapsto\cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

3 Montrer que

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \sin \frac{1}{x} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement $\tilde{g}$ est dérivable en 0, mais non de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 571 – *Prolongement dérivable* 2

Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+x)}{x} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0. Soit F ce prolongement. Montrer que F est dérivable en 0.

Exercice 572 – *Banque CCP 2016 56* 2

On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1 Montrer que H est C^1 sur $]1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2 Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.

3 En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

3.2. Utilisation de la dérivation

Exercice 573 – *Limite d'une suite définie par une fonction dérivable en 0* 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en 0, nulle en 0. Trouver la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n f(k/n^2)$.

Exercice 574 – *D'une inégalité entre fonctions à une inégalité entre réels* 2

Soit (a_k) une famille de complexes. Montrer que si

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx) \right| \leqslant |\sin(x)|$$

au voisinage de 0, alors $|\sum_{k=1}^n k a_k| \leqslant 1$.

Exercice 575 – *(ENS PC 10)* 3

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Montrer qu'il existe $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $f'(x_n) \to 0$.

Exercice 576 – *Majoration du nombre d'annulations d'une fonction* 3

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous réels $a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, où les a_i sont tous non nuls et les λ_i distincts deux à deux, que

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k}$$

s'annule au plus n fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 577 – *Cesàro intégral sans intégrale* 3I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $\lim_{+\infty} f' = l$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 578 – *Fonction à dérivée logarithmique bornée (X PC 09)* 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. On suppose que $f(a) = 0$ et qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [a,b], |f'(x)| \leqslant k|f(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

3.3. Autour de la définition du nombre dérivé

Exercice 579 – *Une caractérisation de la dérivabilité* 3

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue en 0, $l \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = l$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h, k \in]0, \delta[, \quad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h + k} - l \right| \leqslant \varepsilon$$

Exercice 580 – *Taux d'accroissement à bornes variables (Centrale PSI 09)* 3I

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles de limite a. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n \neq y_n$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

1 On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < a$ et $y_n > a$. Quelle est la limite de (u_n) ?

2 On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a. Que dire de (u_n) ?

3 Que se passe-t-il dans le cas général ?

3.4. Propriété de la dérivée

Exercice 581 – *Effets de la dérivation* 0

On considère une fonction dérivable f. Que dire de sa dérivée si f est paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 582 – *Dérivée et comportement asymptotique* 2

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1 On suppose que f' tend vers $l \in \mathbb{R}_+^*$ en $+\infty$. Que dire du comportement asymptotique de f en $+\infty$?

2 On suppose que f' tend vers 0 en $+\infty$. Que dire du comportement asymptotique de f en $+\infty$?

3 On suppose que f tend vers 0 en $+\infty$. Que dire du comportement asymptotique de f' en $+\infty$? Que dire si on suppose en outre f monotone (X PC 09) ?

Exercice 583 – *Signe de la dérivée* 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose que f ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f'(a)f'(b) \leqslant 0$.

Exercice 584 – *À quel point la stricte monotonie empêche l'annulation de la dérivée ?* 4

1 Donner un exemple de fonction strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée s'annule une infinité de fois.

2 Donner un exemple de fonction strictement croissante et dérivable sur un intervalle borné, dont la dérivée s'annule une infinité de fois.

Remarque : en fait, on peut même montrer qu'il existe des fonctions strictement croissantes dérivables dont la dérivée est nulle sur une partie dense (voir les travaux de Dimitrie Pompeiu).

Exercice 585 – *Une fonction de dérivée strictement positive en un point est-elle croissante au voisinage de ce point ?* 4

Donner un exemple de fonction dérivable en 0, de dérivée strictement positive en 0, mais non croissante au voisinage de 0.

Exercice 586 – *Condition suffisante d'annulation de la dérivée* 2

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dérivable sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$. Montrer l'existence de $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 587 – *Théorème de Darboux* 3CDI

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

3.5. Lieu de dérivabilité

Exercice 588 – *À quel point une fonction continue peut-elle ne pas être dérivable ?* 4

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 4-périodique telle que : $\forall x \in [-2,0], g(x) = 1+x$, $\forall x \in [0,2], g(x) = 1-x$.

1 Tracer le graphe de g.

2 Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $g_k : x \in \mathbb{R} \mapsto g(2^k x)$. Quelle est la périodicité de g_k ?

3 Soit $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g_k(x)}{2^k}$. Justifier la définition de F. La fonction F est-elle continue ?

4 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout k, il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tel que le segment reliant les points $(x, g_k(x))$ et $\left(x + \frac{\varepsilon}{2^k}, g_k\left(x + \frac{\varepsilon}{2^k}\right)\right)$ soit inclus dans le graphe de g_k.

5 Montrer que F n'est dérivable en aucun point.

3.6. Dérivations successives

Exercice 589 – *Banque CCP 2016 3* 0

On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

1 On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^n(x)$.

2 Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 590 – *Dérivées successives en* 0 3

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 591 – *Mines MP 2015* 3

Soit $f(x) = \dfrac{x}{sh(x)} - \dfrac{x}{\sin(x)}$ si $x \in [0;\pi[$. On pose $f(0) = 0$

1 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi[$. Calculer $f'(0)$.

2 La fonction f est-t-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;\pi[$? Calculer $f''(0)$

Remarque : pour cette question, attendre le cours sur les séries entières.

Exercice 592 – *Étude d'une fonction s'annulant au moins n fois* 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^n([a,b], \mathbb{R})$. On suppose que f s'annule sur $[a,b]$ en au moins n points distincts $a_1, \ldots, a_n$, où $a_1 < \cdots < a_n$.

1 Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ pour lequel :

$$f(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_n)\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

2 Soit M un majorant de $|f^{(n)}|$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$:

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{n!}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|.$$

Exercice 593 – *Quelles sont les séries de Taylor réalisables ? (Centrale MP 2015)* 4D

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Établir l'existence de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = a_n$.

Ce résultat est connu sous le nom de lemme de Borel.

3.7. Théorème de Rolle, accroissements finis

Exercice 594 – *Rolle généralisé* 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, ayant la même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer qu'il existe un réel c en lequel f' s'annule :

1 En utilisant la technique du rétrécissement.

2 En montrant par l'absurde que f n'est pas injective.

Exercice 595 – *Rolle itéré* 1

n désigne un entier naturel non nul.

1 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f s'annule en $n+1$ points distincts, alors f' s'annule en n points distincts sur $[a, b]$

2 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Montrer que si f s'annule en $n+1$ points distincts, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Si $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$

4 Montrer que si un polynôme réel P possède (au moins) n racines réelles distinctes ($n \geqslant 2$), alors son polynôme dérivé P' possède (au moins) $n-1$ racines réelles distinctes.

5 Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, tous réels a et b, le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, T-périodique ($T > 0$), s'annulant au moins n fois sur $[0, T[$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[0, T[$.

7 Que dire d'une fonction polynomiale coïncidant avec la fonction sinus en une infinité de points ?

Exercice 596 – *Une hypothèse et un dessin à interpréter* 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 0 de dérivée croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$.

Exercice 597 – *Applications du théorème de Rolle* 2

1 Soit f continue sur $[a, +\infty[$ (pour un certain $a \in \mathbb{R}$), et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

2 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant une même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule.

3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, il existe une tangente au graphe Γ de f passant par le point $(d, 0)$.

4 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$. Montrer l'existence de $c \in]0, 1[$ tel que la tangente au graphe de f en son point d'abscisse c passe par O.

5 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. En utilisant $g : x \mapsto e^x(f(x) - f'(x))$, montrer l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

6 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout réel λ, il existe $c_\lambda \in]a, b[$ tel que $\lambda f(c_\lambda) + f'(c_\lambda) = 0$.

7 Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $g'(c)f(c) + f'(c) = 0$.

8 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$. Montrer l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Exercice 598 – *Banque CCP 2016 4* 0

1 Énoncer le théorème des accroissements finis.

2 Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et que f est dérivable sur $]a; x_0[$ et sur $]x_0; b[$
Démontrer que, si f' admet une limite en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

3 Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 599 – *(Mines MP 06)* 3

Soit f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (*i.e.* une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ dont la bijection réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$) croissant de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on peut trouver une suite $(x_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \frac{k-1}{n} \leqslant x_{k,n} \leqslant \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_{k,n})} = n.$$

3.8. Uniforme continuité

Exercice 600 – *Exemple d'uniforme continuité* 0

Montrer que $x \mapsto x \ln(x)$ est uniformément continue sur $]0,1]$.

Exercice 601 – *Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité* 1I

1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que si (x_n) et (y_n) sont des suites d'éléments de I telles que $\lim_n (y_n - x_n) = 0$, alors $\lim_n (f(y_n) - f(x_n)) = 0$.

2 Réciproquement, cette propriété séquentielle entraîne-t-elle l'uniforme continuité de f ?

3 Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 602 – *Condition suffisante d'uniforme continuité* 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 603 – *Uniforme continuité et limite finie en un point adhérent* 3I

1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f admet une limite finie en b. Montrer que f est uniformément continue sur $[a, b[$.

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 604 – *Encadrement d'une fonction uniformément continue (Mines MP 2015)* 3

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leqslant ax + b$.

Exercice 605 – *Uniforme continuité et périodicité* 2

Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 606 – *Uniforme continuité et limite en l'infini* 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue, telle que $f(n) \to +\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 607 – *Comment caractériser les fonctions uniformément continues sur un intervalle borné ?* 4I

On considère $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$. On se propose de montrer que $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si elle se prolonge par continuité en b.

1 Montrer que si f se prolonge par continuité en b, alors f est uniformément continue.

2 On suppose désormais f uniformément continue, et on va montrer qu'elle admet une limite finie en b.

i Montrer que f est bornée.

Remarque : question posée à l'X MP sous la forme : Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

ii Montrer l'existence d'une suite (x_n) de points de $[a, b[$, convergeant vers b, telle que $(f(x_n))$ converge. On note l la limite d'une telle suite (x_n) (fixée pour la suite).

iii En déduire que pour toute suite (y_n) de points de $[a, b[$ convergeant vers b, $(f(y_n))$ tend vers l, et conclure.

Exercice 608 – *Comportement asymptotique d'une fonction uniformément continue* 3D

Soit $f\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\infty} f(\frac{n}{p}) = 0.$$

Montrer que $\lim_{\infty} f = 0$.

4. Équations fonctionnelles

Exercice 609 – *Banque CCP 2016 43* 0

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1

i Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

ii Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2 Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

Exercice 610 – *Équations fonctionnelles* 0

1 Trouver toutes les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x^2) = f(x).$$

2 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 611 – *Équation fonctionnelle classique* 1

Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que $f(x + y) = f(x)f(y)$ pour tous réels x et y.

Exercice 612 – *Mines MP 2015* 3

Déterminez les solutions de classe C^1 dans $\mathbb{R}$ de $f'(f(x))f'(x) = 1$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$.

Exercice 613 – *Équations fonctionnelles* 3

1 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

2 Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ admettant pour périodes 1 et $\sqrt{2}$.

3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et involutive (*i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$). Montrer que f est l'application identique sur $\mathbb{R}$.

4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax + b) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a est fixé différent de 1 et -1, et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

5 Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\lim_{0} f = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = 0$ et : $\quad \forall x, y > 0, \quad f(xf(y)) = yf(x)$.

Indication : étudier les points fixes de f.

Exercice 614 – *Équations fonctionnelles et dérivation* 2

1 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\quad f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. Réciproque ?

2 Déterminer l'ensemble E des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout réel x : $f\circ f(x)=\frac{x}{2}+3$.

3 (Centrale MP 09) Caractériser les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f\circ f=f$.

Exercice 615 – *Équation fonctionnelle d'un autre siècle (X 98)* 3

Déterminer les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que, pour tout réels distincts x et y :

$$\min\{f(x),f(y)\}\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$$

Exercice 616 – *Équation fonctionnelle* 3

Déterminer les $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)=f\left(x^2+\frac{3}{16}\right).$$

Exercice 617 – *Équation fonctionnelle* 3

Déterminer les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que $f\circ f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 618 – *Une équation fonctionnelle (X PC 10)* 3

Soit $a\in\mathbb{R}$ avec $|a|\neq 1$. Trouver les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en 0 et telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)-f(ax)=x$.

Exercice 619 – *X PC 10* 3

Déterminer les $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(f(x))=f(x)$.

Exercice 620 – *X PC 10* 3

Trouver les couples de fonctions (f,g) où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)-f(y)=(x-y)g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Exercice 621 – *(Centrale MP 10)* 3

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f^n=-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 622 – *X MP 06* 3

Trouver les f dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.
Trouver les $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)\,f(y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Exercice 623 – *X PC 10* 3

Déterminer les $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}_+, (f'(x)-f(x))f(x)=x$.

Exercice 624 – *Centrale MP 10* 3

Trouver les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=f(1-x)$.

5. Convexité

Exercice 625 – *Fonction convexe périodique* 0

Que dire d'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et périodique ?

Exercice 626 – *Fonction convexe bornée* 0

1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.

2 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que g est constante.

Exercice 627 – *Comparaison des moyennes harmonique, géométrique, arithmétique* 1

1 On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.
– La *moyenne arithmétique* de ces réels est $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$
– La *moyenne géométrique* de ces réels est $g = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$
– La *moyenne harmonique* de ces réels est $h = n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{-1}$

Montrer que $h \leqslant g \leqslant a$.

Indication : on pourra utiliser la concavité du logarithme pour prouver $g \leqslant a$, et utiliser ce résultat pour prouver $h \leqslant g$.

2 Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs ($n \geqslant 2$). Montrer que : $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 628 – *Fonctions convexes dont la somme est affine* 0

Soit f, g convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f + g$ soit affine. Montrer que f et g sont affines.

Exercice 629 – *Sup de fonctions convexes* 2

Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions convexes. Montrer que $\sup\{f_1, \dots, f_n\}$ est une fonction convexe.

Indication : utiliser l'épigraphe.

Exercice 630 – *Fonction convexe et bornée (X PC 10)* 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 631 – *Quelle régularité espérer pour une fonction convexe ?* 4

Une fonction convexe sur I est continue sur $\mathring{I}$ (l'intérieur de I, *i.e.* l'ensemble des points dont I est un voisinage), dérivable à gauche et à droite en tout point a de $\mathring{I}$, et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.

Montrer qu'elle n'est pas nécessairement continue en les extrémités de I, et que si elle l'est, elle n'y est pas forcément dérivable.

Exercice 632 – *Caractérisation de convexité par une autre fonction* 3

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, $g : x \mapsto x f(1/x)$. Montrer que f est convexe si et seulement si g est convexe.

Exercice 633 – *Étude asymptotique générale d'une fonction convexe en $+\infty$* 3

Soit f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1 Montrer que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite, finie ou égale à $+\infty$, en $+\infty$.

2 Montrer que si cette limite α est réelle, alors $h : x \mapsto f(x) - \alpha x$ admet une limite, finie ou égale à $-\infty$, en $+\infty$.

Exercice 634 – *Convexité et bijection réciproque (Centrale PC 09)* 3

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ convexe et injective. On pose $J = f(I)$.

1 Montrer que f est strictement monotone sur I.

2 Montrer que la réciproque de f est convexe ou concave. Donner deux exemples.

Exercice 635 – *Condition suffisante de changement de concavité (X MP 09)* 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f''(c) = 0$. Que dire si f est seulement supposée deux fois dérivable ?

Exercice 636 – *Plus grande fonction convexe inférieure à une fonction positive (ENS MP 10)* 3

Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction convexe $g \leqslant f$ telle que, pour toute fonction convexe $h \leqslant f$, on ait : $h \leqslant g$.

Exercice 637 – *Détermination du maximum d'un produit avec contrainte sur la somme (ENS PC 10)* 3

Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer max $\left\{\prod_{i=1}^k x_i, (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^k x_i = n\right\}$.

Exercice 638 – *Nature d'une série par concavité (Centrale PC 10)* 3

1 Montrer que sinus est concave sur $[0, \pi/2]$.

2 En déduire la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)}$.

Exercice 639 – *Inégalité de Hölder pour un ensemble fini* 3C

Soient p et q dans $]1, +\infty[$ avec $1/p + 1/q = 1$.

1 Montrer : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

2 En déduire, si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}_+$, l'inégalité :
$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$.

Exercice 640 – *Convexité et positivité d'une intégrale* 3C

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$, convexe. Montrer que $\int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) \mathrm{d}t \geqslant 0$.

Exercice 641 – *Décroissance d'une suite de moyennes pour une fonction convexe* 3

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que (S_n) est décroissante.

CHAPITRE XXV

Espaces vectoriels normés (TD)

Sommaire

1. Normes

Comment définir une norme sur un espace vectoriel de dimension finie ?

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, et un tel isomorphisme permet de définir des normes du même type pour E. Par exemple, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et si $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de E (*i.e.* pour tout $x \in E, x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i$, ou encore $(e_1^*(x), \dots, e_n^*(x))$ est le n-uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$), alors on peut lui associer la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ sur E par

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_{\mathcal{B},\infty} = \sup\{|e_i^*(x)|, i \in [\![1, n]\!]\},$$

appelée *norme infinie sur E associée à la base $\mathcal{B}$.* 66

Il faut cependant avoir conscience qu'une telle norme est assujettie à un choix d'une base de E, et qu'elles perdent donc le caractère canonique des exemples de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnés dans le cours.

Notion de semi-norme

Lorsqu'une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est homogène et vérifie l'inégalité triangulaire, on dit que N est une *semi-norme*. Une norme n'est rien d'autre qu'une semi-norme vérifiant en outre l'axiome de séparation. Une somme $N_1 + \cdots + N_p$ de semi-normes est une semi-norme, et peut être une norme alors qu'aucune N_i ne l'est. 67

La notion de semi-norme n'est pas au programme, mais elle est intéressante car, dans beaucoup d'exercices, une norme est définie comme somme de semi-normes.

Exemple

La composée $N \circ \psi$ d'une norme et d'une application linéaire est une semi-norme, et c'est une norme si et seulement si ψ est injective. Par exemple, sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, l'application

$$N \ : f \mapsto |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$$

est une semi-norme comme somme des semi-normes $f \mapsto |f(0)|$ et $f \mapsto \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$, et c'est même une norme car si $f(0) = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.

◇◇◇

Norme plus fine qu'une autre (hors-programme)

L'existence de $\beta > 0$ tel que $\|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1$ pour tout $x \in E$ signifie que tout voisinage d'un point pour $\|\cdot\|_2$ est un voisinage de ce point pour $\|\cdot\|_1$: de façon imagée, on peut dire que « E possède plus de voisinages pour $\|\cdot\|_1$ que pour $\|\cdot\|_2$ », ou encore que « $\|\cdot\|_1$ sépare mieux les parties de E que $\|\cdot\|_2$ ». On dit alors que $\|\cdot\|_1$ est *plus fine* que $\|\cdot\|_2$. 68

Sur la notion de distance (hors-programme)

Les propriétés (avec la positivité) que vérifie la distance associée à une norme (voir la définition VIII.iii page 209) définissent plus généralement la notion générale (hors-programme) de *distance*, un ensemble muni d'une distance étant appelé *espace métrique*. Vous ne rencontrerez que des distances associées à une norme, mais on peut quand même mentionner la distance sur $\mathbb{R}$ donnée par 69

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad d(x,y) \overset{def}{=} |\arctan(y) - \arctan(x)|$$

et qui s'étend naturellement en une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$, pour laquelle les deux infinis sont distants de π.

Exercice 642 – *Normes sur un espace de fonctions continues et périodiques* 2

1 On note E l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

i Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} N \ : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & f & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\mathrm{d}t \end{array}$$

est une norme sur E.

ii Même question pour

$$\begin{array}{rccl} N_2 \ : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & f & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t} \end{array}$$

iii Vérifier que pour chacune de ces normes, la fonction $g_n \ : t \mapsto e^{int}$ est unitaire (pour tout $n \in \mathbb{Z}$).

Exercice 643 – *Exemple de norme* 2

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$, et on note, pour tout $f \in E$: $N(f) = \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$.

1 Montrer que N est une norme sur E.

2 Trouver une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ qui induit N sur E.

Exercice 644 – *Normes d'algèbres* 1

1 Soit X un ensemble non vide, et $E = \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$. Montrer que la norme infinie sur E est une norme d'algèbre.

2 Montrer que l'on définit une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en posant, pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\|A\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\right\}$$

Exercice 645 – *Banque CCP 2016 37* 3

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose, $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.

1

i Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

ii Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.

iii Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

2 Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 646 – *Banque CCP 2016 38* 2

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

$\forall\, P \in E$, on pose $N_1(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

1

i Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

ii Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.

iii Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

2 On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

Exercice 647 – *Comparaison de normes* 2

On travaille dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, (où $a, b \in \mathbb{R}, a < b$). Vérifier qu'il n'y a pas d'équivalence entre les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 648 – *Valeurs absolues ultramétriques sur $\mathbb{R}$ (Centrale MP 2015)* 5

Une application N de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$ est appelée valeur absolue si
– $\forall x \in \mathbb{Q}, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
– $\forall x, y \in \mathbb{Q}^2, N(xy) = N(x)N(y)$;
– $\forall x, y \in \mathbb{Q}^2, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.
Une valeur absolue N est dite ultramétrique si $\forall x, y \in \mathbb{Q}^2, N(x + y) \leqslant \max(N(x), N(y))$; N est dite triviale si elle est constante sur $\mathbb{Q}^*$.

Si p est un nombre premier, on note $\nu_p(n)$ la valuation p-adique définie sur les entiers. On pose par convention $\nu_p(0) = +\infty$.

1 Soit N une valeur absolue. Déterminer $N(1)$ et $N(-1)$.

2 Soit $q = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, où $a, b \in \mathbb{Z}^{*2}$, et p un nombre premier. Montrer que $\nu_p(a) - \nu_p(b)$ ne dépend que de q. On le notera $\nu_p(q)$.

On définit, pour $q \in \mathbb{Q}$, $|q|_p = p^{-\nu_p(q)}$. Montrer que $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique.

3 Soit N une valeur absolue ultramétrique non triviale. Montrer qu' il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et p premier tels que $N = |.|_p^\alpha$.

Exercice 649 – *Norme sur un espace de fonctions* 3

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $g \in E$. On pose $N(f) = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)g(x)\}$, pour tout $f \in E$.

1 Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme sur E.

2 Si, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \neq 0$, montrer qu'alors N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes équivalentes. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 650 – *Norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par des fonctions* 0

Soit $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$N \;: (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$$

soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 651 – *Comparaison de normes sur les polynômes* 0

On pose, pour $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sum_{n=0}^{\infty} |P^{(n)}(0)|.$$

1 Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2 Ces normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 652 – *Somme de distances à des sous-espaces* 0

Soit (E, N) un evn de dimension finie, d la distance associée à N. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E d'intersection triviale.

Montrer l'existence de réels strictement positifs α et β tels que, pour tout vecteur x de E :

$$\alpha\, N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{p} d(x, F_i) \leqslant \beta\, N(x).$$

Remarque : selon l'état d'avancement du cours, on pourra admettre que chaque F_i est fermé, ou même que pour tout $x \in E$, il existe $f_i \in F_i$ tel que $d(x, F_i) = d(x, f_i)$.

Exercice 653 – *Comparaison de normes, toujours* 1

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$, $N(f) = N_\infty(3f + f')$. Montrer que (E, N) est un EVN et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $f \in E$, on ait $N_\infty(f) \leqslant \alpha N(f)$.

Indication : en posant $g = 3f + f'$, on pourra exprimer f en fonction de g.

Exercice 654 – *Équivalence de normes sur des espaces de fonctions* 1

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f|$, $N(f) = \sup_{[0,1]} |f + f''|$ et $N_1(f) = \sup_{[0,1]} |f| + \sup_{[0,1]} |f''|$.

1 Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.

2 Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1, ni à N.

3 Montrer que N et N_1 sont équivalentes.

Exercice 655 – *Comparaison de normes* 1

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1 Montrer que N est une norme.

2 Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leqslant cN(f)$.

Exercice 656 – *Comment caractériser les normes euclidiennes parmi les normes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?* 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On sait déjà que toute norme associée à un produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme. Montrer que la réciproque est vraie (c'est le théorème de Fréchet-Von Neumann-Jordan).

Indication : utiliser une identité de polarisation pour trouver l'unique produit scalaire dont la norme est susceptible de provenir, puis vérifier sa bilinéarité (pour le respect de la multiplication par un scalaire, on passera des rationnels aux réels par un argument de densité et de continuité).

Exercice 657 – *D'autres équivalences de normes* 3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $p, q\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues à valeurs positives ou nulles, ne s'annulant chacune qu'en au plus un nombre fini de points. Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$.

Soit

$$\varphi_p \ : \ \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{C} \\ (f, g) & \mapsto & \int_{[a,b]} \bar{f} g p \end{array},$$

et

$$N_p : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \varphi_p(f,f)^{1/2} \end{array}.$$

De même pour φ_q et N_q.

1 Montrer que N_p et N_q sont des normes.

2 Montrer que N_p et N_q sont équivalentes si et seulement si il existe des réels strictement positifs m et M tels que, pour tout point t de $[a,b]$, on ait

$$m\,p(t) \leqslant q(t) \leqslant M\,p(t).$$

Exercice 658 – *Pseudo-normes multiplicatives* 3

Soit $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$, où $n \geqslant 2$, vérifiant $N(AB) = N(BA)$.

1 Montrer que N ne peut pas être une norme.

2 On suppose en outre que $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$ et $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.

i Montrer que $|\operatorname{tr}|$ convient.

ii Montrer que si $N(B) = 0$, alors $N(A+B) = N(A)$.

iii Trouver toutes les applications possibles.

Exercice 659 – *Comparaison des normes infinie et euclidienne (Centrale PSI 10)* 3

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$.

1 Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, f \in E, \|f\|_2 \leqslant b\,\|f\|_\infty$.

2 Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, f \in V, \|f\|_\infty \leqslant c\,\|f\|_2$.

3 Soit V un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\, f \in V, \|f\|_\infty \leqslant n\,\|f\|_2$. Montrer que V est de dimension finie et que $\dim V \leqslant n^2$.

Exercice 660 – *En dimension finie, convergences simple et uniforme sont équivalentes* 2

(ENS MP 10) Soit $d \in \mathbb{N}$. On pose $V = \mathbb{R}_d[X]$ et on considère une suite (P_n) d'éléments de V. Établir l'équivalence des conditions suivantes.

1 (P_n) converge dans V.

2 (P_n) converge simplement sur $[0,1]$.

3 (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 661 – *Comparaison de deux normes sur un espace de fonctions continues* 2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose : $N(f) = \int_0^1 e^t\,|f(t)|\mathrm{d}t$.

1 Montrer que N définit une norme. Comparer N et $\|\ \|_\infty$.

2 Trouver le meilleur $\beta > 0$ tel que : $\forall f \in E,\ N(f) \leqslant \beta\|f\|_\infty$.

Exercice 662 – *Idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (Centrale MP 06)* 2

On pose $\mathcal{A} = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

1 Soit $f \in \mathcal{A}$ non constante. Montrer que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

2 Quelles sont les sous-algèbres de dimension finie de $\mathcal{A}$?

3 Pour $c \in [a,b]$, on note $\mathcal{I}_c$ l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ telles que $f(c) = 0$. Montrer que $\mathcal{I}_c$ est un idéal de $\mathcal{A}$.

On dit d'un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ qu'il est *maximal* si $\mathcal{I}$ est un élément maximal au sens de l'inclusion parmi les idéaux de $\mathcal{A}$ distincts de $\mathcal{A}$.

4 Montrer que les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$ sont les $\mathcal{I}_c$, où c parcourt $[a,b]$.

Exercice 663 – *Valeurs d'adhérence de (u_n) lorsque $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 (X MP 10)* 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in E^{\mathbb{N}}$.

1 On suppose que u est bornée, que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, que u n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence : montrer qu'alors u converge.

2 On suppose $E=\mathbb{R}$ et $u_{n+1}-u_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Exercice 664 – *Une fonction polynomiale à une indéterminée est fermée (Mines MP 10)* 3

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ et F un fermé de $\mathbb{C}$. Montrer que $P(F)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

Exercice 665 – *Partie convexe dense (X MP 10)* 3D

Soit E un evn de dimension finie, C une partie de E convexe et dense dans E. Montrer que $C=E$.

Exercice 666 – *Un cas particulier de Hahn-Banach (X MP 10)* 3D

Soit A une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle disjointe de A.

Exercice 667 – *Condition suffisante tordue pour être un disque (ENS MP 10)* 3D

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^2$. On suppose que le projeté orthogonal de l'origine sur n'importe quelle droite coupant K est dans K. Montrer que K est un disque.

Exercice 668 – *Encore une version d'Hahn-Banach (ENS MP 10)* 3D

Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, on considère deux parties convexes non vides A et B, respectivement fermée et compacte, telles que $A\cap B=\emptyset$. Montrer qu'il existe un réel α et une forme linéaire f sur E telle que

$$\forall(x,y)\in A\times B,\quad f(x)<\alpha<f(y).$$

Exercice 669 – *Toute isométrie est affine (ENS MP 10)* 3D

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et $f\ :E\to F$ une application bijective telle que $f(0)=0$ et $\forall(x,y)\in E^2,\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$.

1 Montrer que f est linéaire si et seulement si $\forall(x,y)\in E^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$.

2 Montrer que f est linéaire.

Exercice 670 – *Endomorphismes conservant un compact dans $\mathbb{R}^n$* 3D

Soit C un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. On note L l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f(C)=C$.

1 Montrer que $L\subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

2 On suppose L infini. Montrer que l'on peut trouver une suite injective d'éléments de L qui converge vers I_n.

3 On suppose L infini et $n=2$. Montrer l'existence de $f\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f(C)$ soit invariant par toutes les rotations de centre 0.

Exercice 671 – *Recouvrement d'un compact par des pavés (X MP 12)* 3D

Soit $((a_i,b_i))\in(]0,1]^2)^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}a_ib_i=+\infty$$

Montrer que tout compact peut être recouvert par des translatés des pavés $[0,a_i]\times[0,b_i]$.

2. Fermés, ouverts, voisinages

Parties bornées

Dans le cas où on travaille dans l'evn $\mathbb{R}$, nous aurions pu déclarer bornée une partie à la fois majorée et minorée. De même pour une fonction ou pour une suite. Cela est bien équivalent (dans le cas de l'evn E) à la définition VIII.vi page 211), mais une *bonne pratique* consiste à montrer par exemple qu'une fonction f à valeurs réelles est bornée en montrant que $|f|$ est majorée, plutôt qu'en montrant séparément qu'elle est majorée et minorée. 70

Exercice 672 – *Banque CCP 2016 41* 0

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques

1 On utilisera au moins une fois des suites.

2 On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire

3 Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

Exercice 673 – *Boules selon la norme* 0

Dessiner la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne usuelle N_2, puis pour les normes N_∞ : $(x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$ et N_1 : $(x, y) \mapsto |x| + |y|$.

Exercice 674 – *Boules et sphères vides* 2

Soit $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

1 $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$ n'est jamais vide.

2 $\mathcal{B}(a, r)$ est non vide si et seulement si $r > 0$.

3 $\mathcal{S}(a, r)$ est non vide si et seulement si $r = 0$ ou $E \neq \{0_E\}$.

Exercice 675 – *Centre d'une boule* 2

Montrer que si $E \neq \{0_E\}$, une boule non vide admet un unique centre et un unique rayon.

Exercice 676 – *Diamètre d'une partie non vide bornée* 2

On appelle *diamètre* d'une partie non vide et bornée A de E le réel

$$\sup\{d(x, y), (x, y) \in A^2\}.$$

1 Justifier la bonne définition de cette notion.

2 Déterminer le diamètre d'une boule ou sphère non vide de rayon r.

Exercice 677 – *Inclusion d'une boule fermée dans une autre (Centrale MP 10)* 3

Soit E un espace normé, x et x' dans E, r et r' dans $\mathbb{R}_+$, B (resp. B') la boule fermée de centre x (resp. x') et de rayon r (resp. r'). Caractériser à l'aide de x, x', r, r' l'inclusion $B \subset B'$.

Exercice 678 – *Sous-espace engendré par une partie d'intérieur non vide* 0

Soit Ω une partie de E d'intérieur non vide. Montrer que $\mathrm{Vect}(\Omega) = E$. Qu'en déduire sur l'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict de E ?

Exercice 679 – *Sous-espace ouvert* 0

Que dire d'un sous-espace vectoriel ouvert F d'un EVN E ?

Exercice 680 – *Topologie des hyperplans* 1

Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Exercice 681 – *Sous-espace d'intérieur non vide* 0

(TPE) Soit (E, N) un espace normé. Montrer que le seul sous-espace de E d'intérieur non vide est E.

Exercice 682 – *Séparation de fermés disjoints* 2

Soit F, G deux fermés disjoints. Montrer qu'il existe des ouverts disjoints U et V contenant respectivement F et G.

Exercice 683 – *Les fermés à partir d'ouverts* 2

Montrer que tout fermé est une intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 684 – *Hyperplan fermé ou dense selon la norme choisie* 2

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, et

$$F = \{f \in E, f(0) = f(1)\}$$

1 Vérifier que F est un hyperplan de E.

2 Que dire de $\mathring{F}$?

3 Trouver une norme sur E pour laquelle F est fermé.

4 Trouver une norme sur E pour laquelle F est dense dans E.

Exercice 685 – *Ouvert étoilé* 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit U un ouvert étoilé, V l'ensemble des points x de U tel que U soit étoilé par rapport à x.

1 Montrer que V est convexe.

2 Montrer que V n'est pas nécessairement ouvert ou fermé dans E.

3 Montrer que V est fermé dans U.

Exercice 686 – *Un opérateur sur les espaces de fonctions* 3

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f) \ : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

1 Montrer que T est un endomorphisme continu de E. Déterminer sa *norme subordonnée*, *i.e.* $\sup\{\|T(x)\|, x \in \mathcal{S}(0,1)\}$.

2 Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1]$ tel que : $\forall x \in [0, x_0[, |f(x)| < |f(x_0)| = \|f\|_\infty$. En déduire que l'espace propre de T associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

Exercice 687 – *Un fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$* 3

1 Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Montrer que si λ est racine de P, alors

$$|\lambda| \leqslant \max\{1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\}.$$

2 Montrer que l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 688 – *Boule fermée contenant une partie bornée donnée* 3D

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

1 Montrer qu'il existe un plus petit r tel que A soit inclus dans une boule fermée de rayon r.

2 Montrer que cette boule est unique.

3 On suppose ici $n = 2$, et on pose $M = \sup\{\|a - b\|, (a, b) \in A^2\}$. Montrer que $r\sqrt{3} \leqslant M$.

Exercice 689 – *Distance à une partie atteint en un unique point* — 4

Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $f \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, f)$. Que dire de F ?

3. Intérieur, adhérence

Point isolé, partie discrète (non au programme, lecture facultative)

On sait que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain réel a, ou denses dans $\mathbb{R}$. Topologiquement, que dire du premier type de sous-groupe ? Pour tout $x \in a\mathbb{Z}$, $\{x\}$ est un voisinage relatif de x dans $a\mathbb{Z}$ (*i.e.* il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x dans $\mathbb{R}$ tel que $a\mathbb{Z} \cap \mathcal{V} = \{x\}$). On dit qu'un tel point x est *isolé* (dans $a\mathbb{Z}$). Tout point de $a\mathbb{Z}$ est isolé (dans $a\mathbb{Z}$) : on dit que $a\mathbb{Z}$ est *discret*. C'est pourquoi vous entendrez parfois que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit discret, soit dense. — 71

Exercice 690 – *Sur la frontière* — 1I

1 Montrer que la frontière de A est égale à $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

2 En déduire que A est ouverte si et seulement si elle ne possède aucun point de sa frontière, et est fermée si et seulement si elle possède tous les points de sa frontière.

Remarque : Attention cependant : en général, une partie A de E possède certains points de sa frontière, mais pas tous.

Exercice 691 – *Banque CCP 2016 34* — 2

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.

1 Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.

2 Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

3 Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

4 Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

Exercice 692 – *Banque CCP 2016 44* — 2

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1

i Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

ii Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

2 Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3

i Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

ii Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 693 – *Banque CCP 2016 45* — 2

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1 Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

i Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.

ii Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

2 Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On pose $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$.

i Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.
ii On suppose que A est fermée et que, $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$, $d_A(tx+(1-t)y) \leqslant t d_A(x)+(1-t)d_A(y)$. Prouver que A est convexe.

Exercice 694 – *Distance à un sous-espace affine (Mines MP 2015)* 3

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, où $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|,\ t \in [0,1]\}$.
On définit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t)\mathrm{d}t$. On note alors $A = \{|\varphi(f)|,\ f \in E, \|f\|_\infty = 1\}$.
1 Trouver $M = \sup(A)$, puis montrer que $M \notin A$.
2 Soit $F = \{f \in E,\ \varphi(f) = 1\}$. Montrer que F est fermé. Calculer la distance de 0 (fonction nulle) à F.

4. Continuité, uniforme continuité, fonctions lipschitziennes

4.1. Étude de continuité

Continuité des applications bilinéaires en dimension infinie 72

Nous avons caractérisé la continuité des applications linéaires en dimension quelconque. En fait, il existe une caractérisation analogue pour les applications bilinéaires ne figurant pas au programme : soit E, F, G trois EVN, et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) B est continue sur $E \times F$ (pour la structure d'evn produit).
(2) Il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \|B(x,y)\| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\|$$

Il est déconseillé d'utiliser cette caractérisation hors-programme. Pourtant, vous pouvez avoir à utiliser la continuité de certaines applications bilinéaires en dimension infinie, comme le produit $\varphi : (f,g) \in \mathcal{C}([0,1])^2 \mapsto fg$ pour la norme infinie sur $\mathcal{C}([0,1])$, ou pour le produit scalaire $\psi : (u,v) \in E^2 \mapsto (u|v)$, où E est préhilbertien de dimension infinie.
Pour la continuité de φ, on peut invoquer la proposition VIII.20, et éventuellement la redémontrer en une ligne.
Pour la continuité de ψ, le plus simple est d'utiliser encore la caractérisation séquentielle, et d'imiter la preuve de convergence du produit de deux suites convergentes :
$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (a|b)| &= |(x_n|y_n) - (x_n|b) + (x_n|b) - (a|b)| \\ &= |(x_n|y_n - b) + (x_n - a|b)| \\ &\leqslant |(x_n|y_n - b)| + |(x_n - a|b)| \\ &\leqslant \|x_n\|\,\|y_n - b\| + \|x_n - a\|\,\|b\| \end{aligned}$$

Exercice 695 – *Continuité du polynôme caractéristique* 1

Montrer que l'application $\chi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}_n[X]$, qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est continue.

Exercice 696 – *Continuité de l'inverse matriciel* 1

Montrer que l'application $i : M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

Exercice 697 – *Continuité de la distance à une partie* 1

Soit E un evn, A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, on pose $d(x,A) = \inf\{\|x-a\|, a \in A\}$. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue.

Exercice 698 – *Application continue pour une norme, pas pour une autre* 3D

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$, et soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Montrer que $\varphi : f \mapsto \int_{[a,b]} f^2$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 699 – *Condition suffisante de linéarité et continuité* 3

Soit E et F deux evns réels, $f : E \to F$ une application telle que pour tous $x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, et il existe une boule fermée de rayon non nul dans E, d'image bornée dans F par f. Montrer que f est linéaire continue.

4.2. Utilisation de la continuité

Exercice 700 – *Parties fermées ou ouvertes par préimage* 2

1 Montrer que les boules ouvertes sont ouvertes, et que les boules fermées sont fermées, en utilisant la notion de préimage.
Remarque : on admettra (si nécessaire) que l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ est continue.

2 Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Remarque : on admettra (si nécessaire) que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue.

Exercice 701 – *Le graphe d'une fonction continue est fermé* 2

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que le graphe Γ de f ($\Gamma = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$) est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
Montrer que le graphe de la fonction inverse $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 702 – *Parties réversibles* 3D

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *réversible* s'il existe une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$ et $f(\mathbb{R} \setminus A) \subset A$.

1 Donner un exemple de partie réversible.

2 $\mathbb{Q}$ est-il réversible ?

3 Une partie réversible peut-elle être ouverte ? fermée ?

4 Une partie réversible peut-elle être un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$?

5 Une partie réversible peut-elle être bornée ? minorée ?

4.3. Fonctions lipschitziennes

Exercice 703 – *Par quelles opérations le caractère lipschitzien est-il stable ?* 4

1 Montrer qu'une combinaison linéaire de fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

2 Montrer qu'une composée de fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

3 Montrer que, lorsque F est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, le produit de fonctions lipschitziennes n'est pas toujours lipschitzien, mais qu'une condition suffisante pour qu'il le soit est que f et g soient en outre bornées.

Exercice 704 – *Prolongement lipschitzien d'une fonction lipschitzienne* 3

On considère une partie non vide A d'un espace vectoriel normé E et une application k-lipschitzienne $f : A \to \mathbb{R}$, avec $k > 0$. Montrer que

$$g : x \mapsto \inf_{y \in A} (f(y) + k \|x - y\|)$$

définit une application k-lipschitzienne sur E, qui constitue un prolongement de f.

Exercice 705 – *Une fonction lipschitzienne* 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $f : x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$.

1 Montrer que f est 1-lipschitzienne.

2 Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$(\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|) \Leftrightarrow (x = y).$$

4.4. Prolongation d'une identité par continuité et densité

Exercice 706 – *Banque CCP 2016 35* 0

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1 Soient f une application de E dans F et a un point de E. On considère les propositions suivantes :

P1.: f est continue en a.

P2.: Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2 Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F désignant un espace vectoriel normé. Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice 707 – *Prolongation d'une égalité par densité et continuité* 2

Vérifier que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Remarque : on admettra (si nécessaire) que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \chi_M \in \mathbb{K}_n[X]$ est continue.

4.5. Continuité des applications linéaires

Exercice 708 – *Banque CCP 2016 36* 0

Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1 Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1.: f est continue sur E.

P2.: f est continue en 0_E.

P3.: $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant k\,\|x\|$.

2 Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 709 – *Continuité (ou pas) de l'endomorphisme de dérivation* 2

1 Montrer que l'endomorphisme D de dérivation de $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ n'est continu pour aucune norme.

2 Montrer qu'on peut trouver deux normes N et N' sur E de sorte que $D\ : (E,N) \to (E,N')$ soit continu.

3 Montrer l'existence d'une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la dérivation est continue.

Exercice 710 – *Forme linéaire préservant la positivité* 2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit L une forme linéaire sur E telle que si $f \geqslant 0$, alors $L(f) \geqslant 0$. Montrer que L est continue.

Exercice 711 – *Banque CCP 2016 39* 2

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1

i Démontrez que pour $x = (x_n) \in l^2$ et $y = (y_n) \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

ii Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans l^2. On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme associée.

2 Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{C}$.

3 On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
Déterminer $F^{\perp}$. (au sens de $(\,|\,)$).
Comparer F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Exercice 712 – *Banque CCP 2016 54* | 2

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1 Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

2 On pose $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

i Prouver que $||\,.||$ est une norme sur E.

ii Prouver que $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

iii On pose alors $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

Prouver que f est continue sur E.

Exercice 713 – *Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire* | 3D

Montrer qu'une forme linéaire φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 714 – *Homéomorphisme, cas des applications linéaires* | 3I

Soit A et B des parties respectives de E et de F. On dit que l'application $f\ : A \to B$ est un *homéomorphisme* si c'est une bijection, continue, et de bijection réciproque continue.

1 Montrer qu'un isomorphisme entre deux evn de dimension finie est toujours un homéomorphisme.

2 Montrer que deux normes N et N' sur E sont équivalentes si et seulement si Id_E est un homéomorphisme de (E, N) sur (E, N').

3 Donner un exemple d'isomorphisme entre evn, qui n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 715 – *Mines MP 2015* | 3

On considère E l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ admettant une limite finie en $+\infty$. Pour tout fonction f de E on note $||f|| = \sup\limits_{t\geqslant 0} |f(t)|$.

1 Montrer que $||\cdot||$ est une norme.

2 On considère L une forme linéaire positive sur E (i.e. si $f \geqslant 0$ alors $L(f) \geqslant 0$).

i Montrer que L est continue.

ii On pose $f_x : t \mapsto e^{-xt}$. Montrer que la fonction définie pour $x > 0$ par $x \mapsto L(f_x)$ est dérivable.

Exercice 716 – *Mines MP 2015* | 2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1 Montrer que si f envoie chaque partie bornée sur une partie bornée, alors f est continue.

2 Montrer que si f envoie toute suite de limite nulle sur une suite bornée, alors f est continue.

Exercice 717 – *Étude de régularité selon la norme (Mines MP 2015)* | 3

1 Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'opérateur $P \mapsto XP$ soit continu ?

2 Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'opérateur $P \mapsto P'$ soit continu ?

3 Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'opérateur $P \mapsto XP'$ soit continu ?

5. Compacité

Les fermés bornés sont-ils compacts ?

Nous avons vu que tout compact d'un evn E en était une partie fermée et bornée (voir la proposition VIII.31 page 237). Nous avons qu'*en dimension finie*, la réciproque était vraie (théorème VIII.38 page 240). 73
Cependant, si l'evn E est de dimension infinie, alors on peut trouver une partie fermée bornée qui n'est pas compacte : en effet, un théorème hors-programme (le théorème de Riesz) affirme que la boule unité fermée d'un evn E de dimension infinie n'est jamais compacte.

Caractère intrinsèque de la compacité

Soit A une partie d'un evn E. Hormis cette précision, la définition de la compacité de A ne fait référence qu'à des propriétés de A, pas à des propriétés de A *vue comme partie de* E : autrement dit, le fait que A soit compacte ne dépend que de la topologie induite sur A par celle de E.
Ainsi, si A est incluse dans un sous-espace vectoriel F de E, alors elle est compacte comme partie de F si et seulement si elle l'est comme partie de E : on dit que la compacité est une propriété *intrinsèque*. 74
En revanche, le fait d'être fermé (ou d'être ouvert) n'est pas une propriété intrinsèque.

Exercice 718 – *Sommes de parties* 1

Soit A et B deux parties non vides de E. On note

$$A + B \overset{def}{=} \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$$

1 Que dire de $A + B$ si A est ouvert ?

2 Montrer que si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé.

3 Donner un exemple de deux fermés dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 719 – *Le rang est localement croissant* 2

Montrer que pour l'application rang r, pour tout point A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un voisinage V de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall B \in V, \quad r(A) \leqslant r(B).$$

Exercice 720 – *Distance entre deux compacts* 3

On définit la distance $d(A, B)$ entre deux parties non vides d'un EVN E par :

$$d(A, B) \overset{def}{=} \int \{d(x, y), (x, y) \in A \times B\}$$

Soit A et B des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'existence de $(a, b) \in A \times B$ tel que $\|a - b\| = d(A, B)$. Cela reste-t-il vrai si A compact et B fermé ? A et B fermés ?

Exercice 721 – *Injection continue ayant pour source un compact* 3

Soit K un compact de E, et $f : K \to F$ une application continue et injective. Montrer que la corestriction g de f à son image est un homéomorphisme (*i.e.* g est une bijection continue, de réciproque continue).

Exercice 722 – *Distance à un fermé en dimension finie* 1

Soit B une partie fermée non vide d'un evn E de dimension finie. Montrer que pour tout $a \in E$, la distance de a à B est atteinte, *i.e.* il existe $b \in B$ tel que

$$d(a, B) = d(a, b)$$

Exercice 723 – *Théorème de Carathéodory (X MP 10)* 3D

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et X une partie de $\mathbb{R}^d$.

1 Montrer que tout point de l'enveloppe convexe de X est barycentre d'un système de $d+1$ points de X affectés de coefficients positifs.

2 Si X est compacte, montrer que son enveloppe convexe est compacte.

6. Algèbres normées

Exercice 724 – *Norme d'algèbre* 3

1 Déterminer sur $\mathbb{R}[X]$ une norme N telle que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad N(PQ) \leqslant N(P)N(Q).$$

2 Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie. Déterminer une norme N sur A telle que :

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad N(ab) \leqslant N(a)N(b).$$

3 Peut-on déterminer une telle norme si A est une algèbre de dimension infinie ?

Exercice 725 – *Banque CCP 2016 40* 1

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $|| \, ||$. On suppose que $\forall (u, v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1 Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

i Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

ii Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2 Démontrer que, pour tout u de A, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

Exercice 726 – *Boule ne contenant que des éléments inversibles* 1

1 Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. Montrer que tous les éléments de la boule ouverte de centre 1_E et de rayon 1 sont inversibles.

Indication : on pourra penser à la formule de Bernoulli, ou au développement limité en 0 de $(1-u)^{-1}$.

2 En déduire que le groupe des inversibles de E est un ouvert de E.

7. Théorèmes de point fixe

Exercice 727 – *Point fixe et compacité (Centrale PSI 10)* 1

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], [a, b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $K \subset E$ un compact non vide de $f \ : K \to K$ telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| .$$

Montrer qu'il existe un unique $c \in K$ tel que $f(c) = c$.

Indication : on pourra considérer l'application $x \in K \mapsto d(x, f(x))$.

Exercice 728 – *Point fixe d'un opérateur linéaire sur un convexe compact* 3D

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, K un convexe compact non vide de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(K) \subset K$. Montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 729 – *Description topologique d'un ensemble de points fixes* 3

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un fermé non vide.

2 Soit F un fermé non vide de $[0,1]$. Montrer que F est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même.

Exercice 730 – *Théorème du point fixe de Banach-Picard* 2CD

Soit E un evn de dimension finie. On dit qu'une application f de E dans E est *contractante* s'il existe $k \in [0,1[$ tel que f soit k-lipschitzienne. On se donne une telle application f.

1 Montrer que f admet au plus un point fixe.

2 Soit $\alpha \in E$, et soit (x_n) la suite récurrente de terme initial α, et d'itératrice f.

i Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n \|x_1 - x_0\|$$

ii En déduire que la suite (x_n) est convergente, et que sa limite est un point fixe de f.

Indication : utiliser le lien suite série.

3 En déduire le théorème de Banach-Picard : f admet un unique point fixe c, pour tout $\alpha \in E$, la suite (x_n) de terme initial α et d'itératrice f converge vers c, et, plus précisément :

$$x_n - c = \mathrm{O}(k^n)$$

8. Connexité par arcs

Exercice 731 – *Par quelles opérations ensemblistes la connexité par arcs est-elle stable ?* 4

1 Montrer qu'une union de connexes par arcs ne l'est pas toujours.

2 Montrer qu'une intersection de connexes par arcs ne l'est pas toujours.

3 Montrer qu'une union de connexes par arcs possédant un point commun est connexe par arcs.

4 Montrer qu'un produit cartésien de connexes par arcs est connexe par arcs.

Exercice 732 – *Par quelles opérations topologiques la connexité par arcs est-elle stable ?* 4

Soit A une partie connexe par arcs d'un evn E de dimension finie.

1 $\mathring{A}$ est-elle nécessairement connexe par arcs ?

2 $\overline{A}$ est-elle nécessairement connexe par arcs ?

Exercice 733 – *Connexité par arcs de la sphère unité (ou pas)* 3

Soit $\mathcal{S}$ la sphère unité d'un evn E. $\mathcal{S}$ est-elle connexe par arcs ?

Exercice 734 – *Connexité par arcs (ou pas) du complémentaire d'un hyperplan* 3D

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, de noyau H. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si φ n'est pas continue.

Exercice 735 – *Le cercle unité est-il homéomorphe à un segment ? (X PC 10)* 3

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Existe-t-il $f : [0,1] \to S^1$ continue et bijective ?

Exercice 736 – *Pas d'homéorphisme grâce à la connexité par arcs* 3

Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Indication : utiliser la connexité par arcs de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 737 – *Applications de la connexité par arcs* 3I

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I (d'intérieur non vide).

1 On introduit $\Omega = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$. Vérifier que Ω est connexe par arcs.

2 On suppose f continue. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des taux d'accroissements de f est un intervalle.

3 En déduire que si on suppose f continue et injective, alors f est strictement monotone.

4

i En déduire que si on suppose f dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle (c'est le *théorème de Darboux*).

ii Donner un exemple de fonction f dérivable mais non de classe $\mathcal{C}^1$.

9. Topologie matricielle

Exercice 738 – *Connexité par arcs de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 1

Le but de cet exercice est de montrer la connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Nous allons constuire un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de I_n à A.
Pour cela, on considère la fonction $\varphi : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda A + (1 - \lambda)I_n$, qui vérifie $\varphi(0) = I_n$ et $\varphi(1) = A$.

1 Montrer que $\det \circ\varphi$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle.

2 En déduire que $Z \overset{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C}, \varphi(\lambda) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est fini.

3 Conclure en utilisant la connexité par arcs de $\mathbb{C} \setminus Z$.

Exercice 739 – *Existe-t-il une norme matricielle invariante par conjugaison ?* 4C

Soit $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison (*i.e.* telle que deux matrices semblables quelconques aient même norme) ?
Indication : on pourra chercher une matrice non nulle semblable à son double.

Exercice 740 – *Banque CCP 2016 61* 0

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \sup\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

1 Prouver que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2 Démontrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n \|A\| \|B\|$.
Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1} \|A\|^p$.

3 Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
Est-elle convergente ?

Exercice 741 – *Existence de l'exponentielle matricielle complexe avec* $\|\cdot\|_\infty$ 2

(CCP) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme N définie par : $N((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}) = \max\{|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.
Vérifier que si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $N(AB) \leqslant nN(A)N(B)$. En déduire la convergence de $\sum \frac{A^k}{k!}$.

Exercice 742 – *Mines MP 10* 2

1 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

2 Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\,\mathrm{com}(B)$.

3 Soit A, B deux matrices sembables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que leurs comatrices sont semblables.

Exercice 743 – *Centrale MP 2015* 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ fixé. On note $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(M) = 0\}$.
On appelle point isolé de E une matrice M de E telle qu'il existe $r > 0$ vérifiant $B(M, r) \cap E = \{M\}$.

1 Que dire de E et de ses points isolés quand $n = 1$?

2 Montrer qu'il existe ν_1 un voisinage de 0 tel que $\forall H \in \nu_1, \mathrm{I}_n + H$ est inversible 3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

3 Construire $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ injective qui vérifie

i $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = \lambda \mathrm{I}_n$;

ii $\forall k \in \mathbb{N}, (M_k - \lambda \mathrm{I}_n)^2 = 0$.

Soit maintenant M un point isolé de E.

4 Montrer qu'il existe ν_2 un voisinage de 0 tel que $\forall H \in \nu_2, (\mathrm{I}_n + H)M(\mathrm{I}_n + H)^{-1} = M$.

5 En déduire que M commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis que M est une homothétie et préciser son rapport.

6 Montrer en utilisant la question 3) que, si λ est racine de P de multiplicité 2 ou plus, alors $\lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas un point isolé de E.

7 Montrer que, si λ est racine simple de P, alors $\lambda \mathrm{I}_n$ est un point isolé de E.

Exercice 744 – *Adhérence des racines de l'unité (Centrale MP 2015)* 3

On se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. On considère l'ensemble $X = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ M^p = I_n\}$.

1 Montrer que, pour toute matrice M dans X, $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}$, et qu'elle est diagonalisable.

2 Montrer que l'ensemble $\{M \in M_n(\mathbb{C}); Sp(M) \subset \mathbb{U}\}$ est un fermé.

3 Calculer l'adhérence de X.

Exercice 745 – *Quelles sont les matrices dont la classe de similitude est bornée ? (Mines MP 2015)* 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On appelle classe de A l'ensemble $\left\{PAP^{-1} | P \in GL_n(\mathbb{C})\right\}$. On suppose la classe de A bornée.

1 On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$, avec $\lambda \neq 0$. Montrer que A est diagonale en utilisant les matrices de dilatation. Montrer que toutes les matrices de classe de A sont diagonales.

2 En utilisant les matrices $M_i = I_n + E_{i,i+1}$, montrer que A est une matrice scalaire.

Exercice 746 – *Densité des diagonalisables, ou pas* 1

1 Montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de taille n est dense lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2 Montrer que $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 747 – *Matrices dont la classe de similitude est bornée* 1

Décrire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

Exercice 748 – *Caractérisation topologique de la diagonalisabilité d'une matrice complexe* 3C

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

Exercice 749 – *Caractérisation topologique de la nilpotence d'une matrice complexe (Mines MP 10)* 3C

1 Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2 Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors 0 est adhérent à la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.

Exercice 750 – *Adhérence des matrices de rang donné* 2

Soit $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$. On note $M_r(n,p)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Déterminer l'adhérence de $M_r(n,p)$.

CHAPITRE XXVI

Fonctions vectorielles (TD)

Sommaire

1. Dérivation des fonctions vectorielles

Il n'y a pas de théorème de Rolle vectoriel

On rappelle qu'il n'y a pas de prolongement du théorème de Rolle aux fonctions vectorielles, et donc pas de prolongement non plus de l'égalité des accroissements finis.

On rappelle également qu'en première année, l'inégalité des accroissements finis est vue comme une conséquence de l'égalité correspondante. 75

Pourtant, l'inégalité des accroissements finis reste essentiellement valable dans le cadre des fonctions vectorielles : c'est une belle illustration de l'adage « une invalidité de preuve n'est pas une preuve d'invalidité ».

Exercice 751 – *Sous-groupe à un paramètre de matrices* 2

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on introduit l'application

$$\begin{array}{rccl} \exp_A : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & t & \mapsto & \exp(tA) \end{array}$$

1 Montrer que pour tout réel t, $\exp(tA)$ et A commutent.

2 Montrer que $\exp_A$ est dérivable en 0, et que

$$\exp_A'(0) = A$$

3 En admettant que pour tous réels s et t, $\exp_A(s+t) = \exp_A(s)\exp_A(t)$, vérifier que $\exp_A$ est dérivable en tout réel t, et que :

$$\exp_A'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

4 (Question facultative) Montrer directement le résultat précédent (sans admettre de résultat).

Exercice 752 – *Trajectoire sur une sphère* 2

On suppose que la norme de E est issue d'une norme euclidienne, que f est dérivable en a, et que toutes les valeurs de f sont situés sur une même sphère centrée en 0_E. Montrer que le vecteur vitesse $f'(a)$ est orthogonal au vecteur position $f(a)$.

Exercice 753 – *Dérivation et composition par une application multilinéaires* 3

Proposer et établir une extension de la proposition IX.5 aux applications multilinéaires.

Exercice 754 – *Paramétrage de matrices orthogonales* 2

Soit $f : I \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.

1 En exploitant le fait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ soit inclus dans une sphère centrée en 0_n pour la structure euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifier que pour tout $t \in I$, $f'(t)(f(t))^T$ est [1] de trace nulle.

2 En revenant à la définition d'une matrice orthogonale, vérifier que $f'(t)(f(t))^T$ est en fait antisymétrique [2].

Exercice 755 – *Dérivée de l'inverse d'une fonction inversible* 1

On suppose que E est une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie, et que $f : I \to E$ est dérivable, à valeurs dans l'ensemble des éléments inversibles de E.

On introduit la fonction $g : I \to E$, qui, à tout $t \in I$, associe $(f(t))^{-1}$.

Vérifier que g est dérivable sur I, et que, pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = -g(t)f'(t)g(t)$$

Exercice 756 – *Calcul d'un déterminant par dérivation* 2

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on pose :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Calculer $\Delta_n(x)$.

Exercice 757 – *Croissance du module d'une fonction* 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable, telle que f ne s'annule pas sur I. Montrer que $|f|$ est croissante si et seulement si $\mathrm{Re}\left(\frac{f'}{f}\right) \geqslant 0$.

Exercice 758 – *Une équation fonctionnelle matricielle* 3

On considère une application $M : t \mapsto M(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que, pour tout réel t :

$$M^2(t) = M(0) = I_n$$

1 Montrer que, pour tout réel t, $M(t)$ est diagonalisable.

2 Montrer que, pour tout réel t, $M'(t) = -M(t)M'(t)M(t)$.

3 Montrer que l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(t) = \operatorname{tr} M(t)$ est une fonction constante.

4 Déterminer toutes les applications M.

5 Le résultat subsiste-t-il si on remplace l'hypothèse M de classe $\mathcal{C}^1$ par M continue ?

Exercice 759 – *Dérivée d'une fonction définie par un déterminant* 2

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer $\det(A + tJ)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 760 – *Fonction à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$* (X MP 08) 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout réel t, $\Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 761 – *Suite de valeurs de la dérivée tendant vers l'infini* 3

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ de classe C^1. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de réels telle que $(f'(x_n))$ tende vers 0.

1. On a ici noté A^T la tranposée d'une matrice A, pour des raisons évidentes.
2. Au fait, pourquoi est-ce bien plus fort ?

2. Intégration et formules de Taylor

Primitive et fonction continue par morceaux

A priori, nous pourrions définir la notion de primitive d'une fonction continue par morceaux f comme une fonction dérivable F telle que $F' = f$. Nous savons que dans le cas particulier où f est continue, il existe une telle primitive. Qu'en est-il pour les fonctions supposées seulement continues par morceaux ? Soit f une fonction continue par morceaux. On sait que f peut s'écrire comme somme d'une fonction continue g et d'une fonction en escalier h. Si f admet une primitive, alors h également. Or il est relativement facile de voir qu'une fonction en escalier qui admet une primitive est nécessairement continue [a], donc f est en fait continue : il n'est donc pas envisageable d'étendre la notion de primitive des fonctions continues aux fonctions continues par morceaux. 76

Cependant, on peut trouver des fonctions dérivables de dérivée non continue, et on pourrait donc parler de primitives de certaines fonctions non continues (mais qui ne sont pas non plus continues par morceaux).

a. On peut aussi le voir avec le théorème de Darboux, mais c'est plus sophistiqué

Exercice 762 – *Inégalité de Jensen* 1

On suppose $E = \mathbb{R}$, f continue, et on considère une fonction continue convexe φ, définie sur $f(I)$. Montrer que pour tout $a, b \in I$ distincts :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\mathrm{d}t.$$

C'est l'inégalité de Jensen, qui est la version intégrale de l'inégalité de convexité généralisée.

Exercice 763 – *Différence entre deux exponentielles matricielles* 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\exp(A) - \exp(B) = \int_0^1 \exp(sA)(A-B)\exp((1-s)B)\mathrm{d}s.$$

Exercice 764 – *Un raffinement de l'inégalité des accroissements finis* 3

On suppose g à valeurs réelles, f et g continues sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, et telles que, pour tout $t \in]a, b[$, $\|f'(t)\| \leqslant g'(t)$. Montrer que :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant (g(b) - g(a)).$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Cette formule est difficile à retenir, surtout le terme intégral. Pour ne pas se tromper, on pensera à la vérifier pour $n = 0$. Se rappeler que la puissance n-ième est associée à $n!$. On peut également penser à l'appliquer à $x \mapsto \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Ne pas oublier non plus l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui est naturelle, puisqu'on intègre la fonction $x \mapsto \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$. 77

De ce théorème découlent toutes les autres formules de Taylor : il est donc à la fois le plus précis et le plus puissant. Comme il s'agit d'une égalité, il n'y a aucune approximation, et donc aucune perte d'information.

Exercice 765 – *Égalité de Taylor-Lagrange* 1

Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, à valeurs réelles, dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Exercice 766 – *Fonction nulle sur un voisinage de* $+\infty$ 2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 1$, et : $\forall x \geqslant \frac{1}{2},\ f(x) = 0$.

1 Montrer que $\sup_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| \geqslant 2^n n!$.

2 Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\sup_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| > 2^n n!$

Exercice 767 – *Fonction dont les dérivées sont nulles en* 0 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

(2) $\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} \left|f^{(n)}\right| \leqslant \lambda^n n!$.

1 Montrer que f est nulle sur l'intervalle $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, puis sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que la première condition n'est pas suffisante pour que f soit nulle.

Exercice 768 – *Majoration de la vitesse par la position et l'accélération* 2C

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose f et f'' bornées, et on note $M_0 = \|f\|_\infty \overset{def}{=} \sup\{\|f(x)\|, x \in \mathbb{R}\}$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1 En écrivant une formule de Taylor pour $x \in \mathbb{R}$ et $x+h$, pour une valeur bien choisie de h, montrer que f' est également bornée, et que si $M_1 = \|f'\|_\infty$:

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$$

2 En reprenant la démonstration précédente, et en utilisant aussi $f(x-h)$, montrer qu'en fait :

$$M_1 \leqslant \sqrt{2 M_0 M_2}$$

Exercice 769 – *Un produit infini* 2

1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$.

2 En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{e}.$$

3. Arcs paramétrés

Tangente en un point stationnaire (hors programme)

Pour déterminer la tangente en un point stationnaire $M(t_0)$, on peut :

(1) Étudier la pente
$$\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$$
lorsque t tend vers t_0. Si cette quantité a une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors le support présente en $M(t_0)$ une tangente de pente l.

(2) Trouver le plus petit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(m)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ (ce vecteur dirigera alors la tangente).

(3) Effectuer des développements limités de x et y en t_0, pour voir « les forces en présence ».

78

Exercice 770 – *Astroïde* 0

1 Tracer la courbe paramétrée : $(x(t), y(t)) = (\sin^3(t), \cos^3(t))$.

2 Exprimer l'équation de la tangente en un point $M(t_0)$ de la courbe.

Exercice 771 – *Droites tangentes et normales à une même courbe* 3

(Centrale MP 08, Mines PC 10) Trouver les droites à la fois tangentes et normales à la courbe $\Gamma\ : x(t) = 3t^2, y(t) = 2t^3$.

Exercice 772 – *Étude poussée d'un arc paramétré* 3

(Centrale MP 08)
Soit C l'arc paramétré : $x(t) = \frac{t}{1+t^4}, y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$.

1 Tracer cette courbe.

2 Montrer que C est un arc simple (*i.e.* injectif).

3 Donner l'équation de la tangente D_t à C au point $M(t) = (x(t), y(t))$.

4 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur t pour que D_t coupe C en deux points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ distincts de $M(t)$. Calculer $t_1 + t_2$ et $t_1 t_2$.

5 Donner les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle $OM(t_1)M(t_2)$.

Exercice 773 – *Étude d'arcs paramétrés classiques* 1

Étude et représentation

1 de la *cycloïde*

$$f\ : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

2 de la *cardioïde*

$$f\ : t \mapsto (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$$

Exercice 774 – *Étude d'arcs paramétrés rationnels* 2

Étude et représentation de

1 $f_0\ : t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{t^2-2t}{t-1}\right)$.

2 $f_1\ : t \mapsto \left(\frac{t^2}{(t-2)(t+1)}, \frac{t^2(t+2)}{t+1}\right)$.

3 $f_2\ : t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{1}{t^3-t}\right)$.

Exercice 775 – *Arcs paramétrés plans* 3

1 On considère un arc régulier $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Montrer l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a)$ soit colinéaire à $f'(c)$.

2 La conclusion reste-elle valable si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 776 – *Étude d'arcs paramétrés trigonométriques* 2

Étude et représentation

1 de la *courbe de Lissajous* $f : t \mapsto (\cos 3t, \sin 2t)$.

2 de $g\ : t \mapsto (2\,\cos(t), \sin(2t))$.

3 de la *deltoïde* $h\ : t \mapsto (2\,\cos(t) + \cos(2t), 2\,\sin(t) - \sin(2t))$.

Exercice 777 –

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soit $a > 0$, $A(a, 0)$ et $B(-a, 0)$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_a$ des $M \in \mathbb{R}^2$ tels que : $MA \times MB = a^2$. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_a$. Tracer la courbe.

CHAPITRE XXVII

Suites et séries de fonctions (TD)

Sommaire

1. Suites de fonctions

1.1. Étude pratique d'une suite de fonctions

Exercice 778 – *Convergence simple ou uniforme de suites de fonctions* 2

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, des suites de fonctions définies par :

1 $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx-1)^2}$.

2 $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

3 $f_n(x) = x^n(1-x)$.

4 $f_n(x) = nx^n(1-x)$.

5 $f_n(x) = n^3x^n(1-x)^4$.

6 $f_n(x) = \cos(x)^n \sin(x)^{2n}$.

Exercice 779 – *Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions et de sa dérivée* 2

(Navale 13) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}^+$, soit $u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(u'_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 780 – *Banque CCP 2016 9* 2

1 Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2 On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.

i Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

iii Soit $a>0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;+\infty[$?

iv La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 781 – *Étude de convergence uniforme et passage à l'inverse (Mines MP 2015)* 3

Pour $x\in]0,+\infty[$, on définit la suite $(u_n(x))_n$ par $u_0(x)=x$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}(x)=\frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1+u_n(x)}$.

1 Montrer que la suite (u_n) converge simplement.

2 On pose $v_n=\frac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) converge uniformément sur tout compact de $]0,+\infty[$.

3 Que peut-on dire de la convergence uniforme de (u_n) sur les compacts de $]0,+\infty[$?

Exercice 782 – *Étude de convergence uniforme d'une suite de fonctions définie par des intégrales (Mines MP 2015)* 3

Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f est bornée sur $\mathbb{R}$. On pose de plus $\forall n\in\mathbb{N}$ $\phi_n=\dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2t^2}$. On pose alors $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ $f_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\phi_n(t)dt$.

Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'elle converge uniformément sur tout segment.

Exercice 783 – *Exemple de convergence uniforme* 3

Vérifier que la suite (f_n), où

$$f_n(x)=n\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2},$$

pour tout réel x, tout entier naturel n, converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 784 – *Étude de mode de convergence (Mines MP 2015)* 3

Étudier le mode de convergence de $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^4x^4}$.

Exercice 785 – *Un exemple de convergence uniforme* 3

Sur $[0,1]$, on considère (p_n) par $p_0=1$ et

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\forall\, x\in[0,1],\quad p_{n+1}(x)=p_n(x)+\frac{1}{2}(x-p_n(x)^2).$$

Montrer que (p_n) converge uniformément sur $[0,1]$, et donner sa limite.

Exercice 786 – *Itérée d'une fonction par un opérateur* 3

Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $f_n\ :[0,1]\to\mathbb{R}$ telles que $f_0=f$ et

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\forall\, x\in[0,1],\quad f_{n+1}(x)=\frac{1}{2}\left(f_n\left(\frac{x}{2}\right)+f_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application constante.

Exercice 787 – *Étude de convergence d'une suite de fonctions* 3

Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)\in\left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)^{\mathbb{N}}$, où $f_{n+1}(x)=2\int_0^x\sqrt{f_n(t)}\mathrm{d}t$.

1.2. Étude théorique de suites de fonctions

Exercice 788 – *La convergence uniforme est-elle stable par composition ?* 4

1 Montrer que si h est une application quelconque de B (partie d'un EVN F) dans A, et si (f_n) est une suite de fonctions de A dans E, convergeant uniformément vers f, alors $(f_n\circ h)$ converge uniformément vers $f\circ h$.

2

i Donner un exemple de suite (f_n) de fonctions de A dans E, convergeant uniformément vers f, et d'une fonction $g\ : E \to F$ (où F est un EVN de dimension finie) continue telle que $(g \circ f_n)$ ne converge pas uniformément vers $g \circ f$.

ii Montrer cependant que si on renforce l'hypothèse de continuité de g en l'uniforme continuité de g, alors la convergence uniforme de (f_n) vers f entraîne celle de $(g \circ f_n)$ vers $g \circ f$.

Exercice 789 – *Une convergence uniforme théorique* 3

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $f(1) = 0$, $f_n(x) = x^n f(x)$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$, telles que $|f| \leqslant 1$ et, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f(x)| = 1 \Rightarrow g(x) = 0.$$

Montrer que $(f^n g)$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Indication : pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, montrer que $U \overset{def}{=} \{x \in [a,b], |g(x)| < \varepsilon\}$ est un ouvert relatif de $[a,b]$, et considérer $K \overset{def}{=} [a,b] \setminus U$.

Exercice 790 – *Théorème de Chudnosky* 3

Soit I un segment contenu dans $]0,1[$.

1 Soit φ l'application $x \mapsto 2x(1-x)$. Étudier la convergence sur I de la suite de fonctions (φ_n), où $\varphi_1 = \varphi$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi_n$.

2 Soit $f\ : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ convergeant uniformément vers f sur I.

Exercice 791 – *Théorème de sélection de Helly* 3D

1 Soit $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable et (f_n) une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n et tout x de E, $|f_n(x)| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f\ : E \to \mathbb{R}$.

2 Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f\ : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

1.3. Conditions nécessaires de convergence uniforme

Exercice 792 – *Banque CCP 2016 11* 2

1 Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.

2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$.

i Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 793 – *Convergence uniforme sur tout segment mais non uniforme* 0

(CCP MP 13) Soit $f_n : x \mapsto \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$.

1 Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

2 Étudier la convergence uniforme sur tout segment $[-a, a]$.

3 Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Indication : utiliser $x_n = (n+1)x$.

Exercice 794 – *Banque CCP 2016 12* 0

1 Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
Démontrer que f est continue en x_0.

2 On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Exercice 795 – *Banque CCP 2016 13* 2

1 Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
On suppose que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
Démontrer que la fonction g est bornée.

2 On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

1.4. Conditions suffisantes de convergence uniforme

Exercice 796 – *Quelles propriétés sur les fonctions permettent de déduire la convergence uniforme de la convergence simple ?* 4

1 Soit (f_n) une suite de fonctions K-lipschitziennes sur un segment $[a, b]$, qui converge simplement vers f.
Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, b]$.

2 Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur le segment $[a, b]$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $]a, b[$.

Exercice 797 – *Comment caractériser séquentiellement la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues ?* 4

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge simplement vers une fonction f et que pour toute suite (x_n) de $[0, 1]$ convergente de limite $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

1 Prouver la continuité de f.

2 En déduire que la convergence est uniforme.

Exercice 798 – *Convergence simple dans un espace de dimension finie* 2I

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de V qui converge simplement sur $[0, 1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 799 – *Espace de fonctions de dimension finie invariant par translation* 3DI

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $f \in E$. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on définit $f_\tau : x \mapsto f(x + \tau)$. On suppose que $V = \mathrm{Vect}(f_\tau, \tau \in \mathbb{R})$ est de dimension finie. Que dire de f ?

1.5. Intégration et convergence uniforme d'une suite de fonctions

Intégration d'une limite uniforme sur tout segment

Pourquoi le théorème X.6 fait-il référence à une convergence uniforme sur tout segment de I ? Ne peut-on pas supposer directement la convergence uniforme sur I, et obtenir la convergence uniforme de (F_n) vers F sur I ?
La réponse est non :

79

Ainsi, la seule conclusion raisonnable était la convergence uniforme de (F_n) vers F sur tout segment de I : il est donc naturel d'avoir affaibli les hypothèses du théorème (et donc renforcé le théorème) en supposant seulement la convergence uniforme de (f_n) vers f sur tout segment de I.

Exercice 800 – *Banque CCP 2016 10* 2

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1 Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

2 Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

Exercice 801 – *La convergence uniforme permet-elle d'intervertir limite et intégrale sur un intervalle non borné ? (Mines MP 2015)* 4

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1 Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2 Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Que constate-t-on ?

1.6. Le théorème de Weierstrass

Exercice 802 – *Banque CCP 2016 48* 2

$C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$.

1 Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.

2 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.

i Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)_{n\in N}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.

ii Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)dt$.

iii Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,dt$.

3 En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

Exercice 803 – *Une application du théorème de Weierstrass* 1

Soit $f\ : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 804 – *Suite polynomiale convergeant uniformément vers une fonction non polynomiale* 3I

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, non polynomiale.

Soit (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. On peut sans perte de généralité supposer les P_n tous non nuls.

Montrer que la suite des degrés des P_n tend vers l'infini.

2. Séries de fonctions

2.1. Convergence uniforme d'une série de fonctions

Exercice 805 – *Banque CCP 2016 17* 3

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1 Démontrer l'implication :

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\Big(\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\Big)$$

2 On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0;+\infty[$, $f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.

$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

Exercice 806 – *Étude d'une série de fonctions par transformation d'Abel* 5

Montrer que $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ converge simplement, puis montrer la convergence uniforme sur tout segment ne rencontrant pas $2\pi\mathbb{Z}$. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

2.2. CVU et intégration terme à terme

Exercice 807 – *Banque CCP 2016 14* 2

1 Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2 Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3 Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 808 – *Étude de série de fonctions (CCP MP 2015)* 3

Pour $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1 Démontrer la convergence simple de la série de terme général f_n. On note $f(x)$ la somme des $f_n(x)$ pour $n \geqslant 0$.

2 La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$? dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?

3 Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 809 – *Calcul d'intégrale par une série de fonctions* 3

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos(\cos(\theta))\,\mathrm{ch}(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$.

2.3. Convergence normale

Ne pas confondre la convergence normale et la convergence absolue en tout point 80

Il ne faut pas confondre la convergence absolue en tout point et la convergence normale : la convergence absolue en tout point équivaut à

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N, \sum_{n=p+1}^{\infty} \|u_n(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore à

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

alors que la convergence normale équivaut à

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N \sum_{n=p+1}^{\infty} \|u_n\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$

ou encore à

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

La convergence normale implique donc la convergence uniforme de $\sum \|u_n\|$ (attention, il s'agit de la norme sur E, pas de la norme infinie), soit

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall p \geqslant N \sum_{n=p+1}^{\infty} \|u_n(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x)\| \leqslant \varepsilon$$

D'une certaine façon, l'« écart » entre convergence normale et la convergence absolue en tout point est encore plus grand qu'entre la convergence uniforme et la convergence simple.

Exercice 810 – *Banque CCP 2016 15* 2

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

2 Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

3 La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Exercice 811 – *Étude de série de fonctions (Mines MP 2015)* 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série $\sum u_n$.

Exercice 812 – *Peut-il y avoir convergence uniforme, et convergence absolue en tout point, sans qu'il y ait convergence normale ?* 2

Soit

$$f_n \;:\; \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x(1-x)^n}{\ln(x)} \end{array}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément mais non normalement sur $]0,1[$.

2.4. Équations fonctionnelles et séries de fonctions

Exercice 813 – *Équation fonctionnelle et séries de fonctions* 3

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 814 – *Équation fonctionnelle et série de fonctions* 3

(CCP MP 13) Soit E l'ensemble des $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x+1) - f(x) = 1/x$; $f(1) = 0$; f est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1 On pose $u_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Montrer que $u : x \mapsto -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $u \in E$.

2 Soient f et g deux fonctions de E, et $\delta = f - g$. Montrer que δ est 1-périodique. Quelle est la limite de δ en $+\infty$?

3 En déduire que $f = g$. Que vaut E ?

Exercice 815 – *Le théorème de Bohr-Mollerup (Centrale MP 2015)* 3D

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \to x\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{x}{n})$.

1 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série de terme général $u_n(x)$ converge.

2 On définit une fonction $f : x \to -ln(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Montrer que f est l'unique fonction de classe C^1 vérifiant

i $\forall x > 0, f(x+1) - f(x) = ln(x)$;

ii f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$;

iii $f(1) = 0$.

4 Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$

2.5. Calcul de somme d'une série de fonctions

Exercice 816 – *Calcul de somme d'une série trigonométrique (Centrale MP 2015)* 2

1 Rappeler la formule d'intégration par parties sur un segment et la démontrer.

2 Pour $N \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in]0,2\pi[^2$, calculer $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_a^b \frac{\cos(\frac{Nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \sin\frac{(N+1)t}{2} dt$ (par intégration par parties).

3 Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}$ pour t dans $]0,2\pi[$.

Exercice 817 – *Somme d'une série de monômes (Mines MP 2015)* 3

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$. Donner l'ensemble de définition de f et calculer la somme.

Exercice 818 – *Étude d'une série de fonctions dont les termes sont des primitives itérées d'une fonction (Mines MP 2015)* 3

Soit f_0 une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $g = \sum_{n\geqslant 0} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la calculer en fonction de f_0.

Exercice 819 – *Régularité d'une série de fonctions puis détermination de la somme* 3

(CCP MP 13) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}$.

1 Déterminer le domaine de définition de f. En quels points f est-elle dérivable ?

2 Calculer f' puis f.

3. Étude pratique de séries de fonctions

Étude pratique d'une série de fonctions

On considère une série de fonctions $\sum u_n$, où les u_n sont des fonctions de variable réelle, à valeurs réelles ou complexes.

(1) Déterminer le domaine de définition de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ revient à déterminer le domaine de convergence simple.

(2) Pour étudier la régularité de la somme, on étudie s'il y a convergence uniforme (et si les u_n sont régulières).

(3) Pour étudier la convergence uniforme, on peut d'abord étudier la convergence normale.

(4) Pour les questions de régularité, ces notions étant locales, il suffit d'avoir la convergence uniforme localement en tout point, c'est-à-dire que pour tout point x du domaine, il existe un voisinage relatif de x dans ce domaine sur lequel il y a convergence uniforme. 81

(5) Pour l'étude asymptotique d'une série de fonctions, on pourra utiliser
- le théorème de la double limite, quitte à multiplier $u_n(x)$ par un certain $g(x)$ afin que $\sum x \mapsto g(x)u_n(x)$ converge uniformément et que $x \mapsto g(x)u_n(x)$ ait une limite finie au point considéré.
- Si $u_n(x) \sim l_n$ où $\sum l_n$ diverge, on peut tenter une comparaison série-intégrale (pour x fixé, on voit $u_n(x)$ comme $\varphi(n)$ où φ est monotone, et où φ est intégrable au voisinage de $+\infty$, et où on sait calculer $\int_\alpha^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$).
- On peut aussi utiliser le critère spécial des séries alternées, et notamment la majoration du reste.
- On revient aussi parfois à la somme partielle, ou on regroupe des termes par « paquets ».

Étudier la somme d'une série de fonctions ne revient pas à étudier la série de fonctions

Si on vous demande d'étudier la somme d'une série de fonctions $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, il est naturel d'étudier la série de fonctions $\sum u_n$. Cependant, si la convergence simple est acquise, on peut réécrire la fonction F comme somme d'autres séries de fonctions : par exemple, on a en tout point x pour lequel $\sum u_n(x)$ converge : 82

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(x) + u_{2n+1}(x)$$

en regroupant les termes d'indices $2n$ et $2n+1$. Il se peut que $\sum u_{2n} + u_{2n+1}$ converge normalement (ou uniformément) sans que ce soit le cas de $\sum u_n$, ouvrant la porte à l'étude de régularité de F.

3.1. Série de fonctions à termes positifs

Exercice 820 – *Banque CCP 2016 53* 2

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1

i Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

ii Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

iii $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

2 Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 821 – *Étude de la somme d'une série de fonctions (Télécom Sud Paris MP 2015)* 3

Soit la série de fonctions de terme général défini par $u_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}$ $(n \geqslant 1)$. Donner le domaine de définition de la fonction somme de la série. Étudier sa continuité et sa limite en $+\infty$.

Exercice 822 – *Étude d'une série de fonctions* 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 2$, on pose $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1 Donner le domaine de convergence (simple) de $\sum f_n$. On note φ la somme.

2 Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement ?

4 φ est-elle continue en 0 ?

5 Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 823 – *Toujours une étude de série de fonctions* 1

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

1 Donner le domaine de définition de f.

2 Y a-t-il continuité ?

3 Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?

4 Donner la limite de f en $+\infty$.

5 Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 824 – *Convergence d'une série de fonctions (CCP MP 13)* 2

Soit, pour $n \geqslant 2$: $u_n : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{\ln n}\, x^n(1-x)$. Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général u_n.

3.2. Régularité de la somme d'une série de fonctions

Exercice 825 – *Banque CCP 2016 16* 2

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1 Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2 Calculez $S'(1)$.

Exercice 826 – *Continuité de la somme d'une série de fonctions* 0

(CCP MP 13) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+e^{nx}}$.
1 Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général f_n.
2 Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 827 – *Régularité de la somme d'une série de fonctions* 0

(CCP MP 13) Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-n^2x}}{1+n^2}$.
1 Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2 Montrer que f est continue sur D.
3 La fonction f est-elle dérivable sur D ? intégrable sur D ?

Exercice 828 – *Peut-il y avoir convergence uniforme, et convergence absolue en tout point, sans convergence normale ?* 4

On étudie la série de fonctions $\sum f_n$, avec $n \geqslant 2$, avec $\forall x \in [0;+\infty[$, $f_n : x \to \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.
1 Montrer que l'on a convergence simple de la série. Montrer que l'on n'a pas convergence normale.
2 Montrer la convergence uniforme.
3 On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}^{\infty} f_n(x)$.
i Montrer que f est définie, puis continue sur $[0;+\infty[$.
ii Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$. La fonction f' a-t-elle une limite en 0 ?
iii Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^k \times f(x)$ pour tout $k \geqslant 2$.

3.3. Série de fonctions alternée

Exercice 829 – *Banque CCP 2016 8* 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
1
i Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente. **Indication** : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
ii Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2 On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
i Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
ii Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice 830 – *Banque CCP 2016 18* 3

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
1 Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2
i Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
ii La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice 831 – *Une étude d'une série de fonctions alternée* 1

Étudier $\sum_{n\geqslant 1} f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, où

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n n}{x^2+n^2}.$$

Exercice 832 – *Expression intégrale de la somme d'une série de fonctions (Centrale MP 2015)* 3

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$

1 Trouver l'ensemble de définition D. Montrer que f est de classe C^∞ sur D.

2 Montrer que $ef(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$ et calculer $xf(x) - f(x+1)$.

3 Montrer que $f(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

3.4. Étude asymptotique

Exercice 833 – *Convergence uniforme non normale* 3

On définit la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par la relation

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1 Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3 Montrer que F est décroissante, et que

$$F(x+1) + F(x) = \frac{1}{x}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4 Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.
5 Vérifier aussi que pour tout $x > 1$:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\mathrm{d}t$$

Indication : on pourra intégrer sur $[0,1]$ la relation :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{x+n-1} = t^{x-1}\frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t},$$

valable pour tout $(N,t,x) \in \mathbb{N} \times [0,1] \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 834 – *Équivalent pour une série de fonctions, encore* 1

Montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right) \sim_{+\infty} \pi\sqrt{x}$.

Exercice 835 – *Un autre équivalent pour une somme de série de fonctions* 1

Pour $n \geqslant 2$, on pose

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sqrt{x}\ln(n)}{1+n^2x} \end{array}$$

Trouver un équivalent de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en $+\infty$.

Exercice 836 – *Étude d'une série de fonctions* 1

On définit la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par la relation

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$$

1 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2 Donner un équivalent de F en 0^+.
3 Donner un équivalent de F en $+\infty$.

Exercice 837 – *Équivalents de séries de fonctions* 1

1 Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$.
2 Même question pour $S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

4. La fonction zêta de Riemann

Exercice 838 – *Équivalent de la fonction zêta de Riemann en 1* 1

Donner un équivalent de la fonction ζ (de variable réelle) en 1, et trouver sa limite en $+\infty$.

Exercice 839 – *Équivalent faisant intervenir la fonction ζ* 4

Soit $\alpha \in [1, \infty[$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$. On pose $S_\alpha(n) = \sigma_\alpha(1) + \cdots + \sigma_\alpha(n)$.
1 Prouver que $S_\alpha(n) = \sum_{k=1}^{n} E(n/k)k^\alpha$.
2 Montrer qu'on a l'équivalent suivant quand $n \to +\infty$:

$$S_\alpha(n) \sim \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1} n^{\alpha+1}.$$

3 En déduire un équivalent quand $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de $L_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha t^n}{1-t^n}$, lorsque $t \to 1^-$.

5. Applications du théorème de la double limite

Exercice 840 – *Application du théorème de la double limite* 2

1 Montrer, avec le Le théorème de la double limite, que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{n\sin(x)e^{-nx}}{1-e^{-nx}}$$

ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
2 Montrer la non convergence uniforme par une autre technique.
3 Montrer cependant la convergence uniforme sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 841 – *Application topologique du théorème de la double limite* 3C

On munit l'espace $l^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme infinie.
1 L'ensemble des suites convergentes est-il un fermé de $l^\infty(\mathbb{R})$?
2 Même question pour l'ensemble des suites qui sont le terme général d'une série absolument convergente.

Exercice 842 – *Double limite pour une série de fonctions* 2

1 On considère $\sum u_n$, où $u_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{n+n^2x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que sa somme S est définie au voisinage de $+\infty$, et qu'elle tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ (*i.e.* vers $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) en $+\infty$.

2 On considère $\sum u_n$, où $u_n : x \in]1, +\infty[\mapsto \frac{1}{n^x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que la convergence de $\sum u_n$ vers ζ n'est pas uniforme sur $]1, +\infty[$.

Exercice 843 – *Série de fonctions cachée* 1

Trouver la limite de

$$u_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Indication : on pourra introduire une série de fonctions $\sum v_k$, et utiliser le théorème de la double limite en $+\infty$.

CHAPITRE XXVIII

Intégrales à paramètres (TD)

Sommaire

1. Le théorème de convergence dominée

1.1. Application directe

Exercice 844 – *Banque CCP 2016 25* 0

1 Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2 On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 845 – *Application directe du théorème de convergence dominée* 0

Montrer que la suite de terme général

$$\int_0^{\pi} \frac{(\cos(t))^n}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

est bien définie, puis qu'elle converge (on donnera sa limite).

Exercice 846 – *CCP MP 2015* 0

Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$.

1 Montrer que I_n existe.

2 Montrer que la suite (I_n) converge.

Exercice 847 – *Banque CCP 2016 27* 2

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1 Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$.

i Soit $a \in]0;1[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;1]$?

ii La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

2 Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 848 – *Limite d'une suite intégrale (Mines MP 2015)* 2

Pour n supérieur à 1 on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{n^2t^2e^{-n^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que I_n existe et calculer sa limite.

Exercice 849 – *Limite de suites d'intégrales* 2

1 *(Mines PC)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+^*)$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$. Que peut-on dire de la suite (I_n) ?

2 *(X PC 09)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$: $I_n = n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de (I_n).

3 *(Centrale et Mines MP 05, TPE 09)* Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$.

Exercice 850 – *Limite d'intégrales* 3

$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+x}}\mathrm{d}t$.

Exercice 851 – *Convergence dominée, cas d'un paramètre réel (X MP 08)* 3

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$, et $b\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{a\}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \lim_{b\to a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

En déduire $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$.

Exercice 852 – *Convergence monotone* 1

On considère une suite (f_n) de fonctions positives et continues par morceaux sur I.

1 On suppose que la suite (f_n) est croissante, et qu'elle converge simplement vers une fonction φ, continue par morceaux et intégrable sur I.

Montrer qu'alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \varphi(t)\mathrm{d}t$$

C'est le *théorème de convergence monotone pour les suites de fonctions.*

2 On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement, et que sa somme est continue par morceaux et intégrable sur I.

Montrer qu'alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$$

C'est le *théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions.*

3 Application (Mines 2004 MP1). Justifier l'existence de l'intégrale

$$I \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{e^{\pi t}-1}\mathrm{d}t$$

et vérifier que

$$I = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\pi k t}\arctan(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\pi k t}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Exercice 853 – *Limite d'intégrales, encore* 3

Déterminer $\lim_{n\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\mathrm{d}x$.

Exercice 854 – *Toujours une limite d'intégrales* 3

Soit $f\ :[0,1]\to\mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer : $\left(\int_0^1((f(x))^{1/n}\mathrm{d}x\right)^n \to \exp(\int_0^1 \ln(f(x)))$.

Exercice 855 – *Existence et calcul d'une intégrale* 3

Soit φ 1-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = (t - \frac{1}{2})^2$ sur $[0, 1]$.
Existence et calcul de $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 856 – *Existence et limite d'une suite d'intégrales* 0

(CCP) Existence et limite de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}} \mathrm{d}t$.

Exercice 857 – *Limite d'une suite d'intégrales dépendant d'une fonction* 0

(CCP)

1

i Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1/n} \mathrm{d}x$. Calculer I_n puis $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose $x \mapsto f(x)/x^2$ intégrable sur $]0, 1]$.

ii Montrer que $x \mapsto f(x)/x$ est intégrable sur $]0, 1]$.

iii Déterminer la limite de la suite de terme général $J_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{x+1/n} \mathrm{d}x$.

2

i (TPE) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = n \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t$.

ii Montrer que le résultat obtenu la question précédente est encore vrai pour f seulement continue.

1.2. Utilisation du TCVD pour étudier la nature d'une série

Exercice 858 – *Banque CCP 2016 26* 2

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$.

1 Justifier que I_n est bien définie.

2

i Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ii Déterminer sa limite.

3 La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Exercice 859 – *Petites Mines MP 2015* 2

On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x) \mathrm{d}x$

1 Montrer que a_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer la limite de la suite (a_n).

2 Calculer a_0.

3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)a_n - na_{n-1} = \dfrac{-1}{n+1}$.

4 Déterminer la nature de la série de terme général a_n.

Exercice 860 – *Nature d'une série alternée d'intégrales (CCP MP 13)* 0

1 Pour n dans $\mathbb{N}^*$, justifier l'existence de

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

2 Montrer que (u_n) tend vers 0.

3 Nature de la série de terme général u_n.

Exercice 861 – *Nature d'une série dont le terme général est une intégrale* 3

(Centrale MP 10) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit : $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin(nt) \mathrm{d}t$.

1 Convergence et limite de (u_n).

2 Nature de la série de terme général u_n.

1.3. Utilisation du TCVD pour déterminer un équivalent

Exercice 862 – *Un équivalent d'une suite d'intégrales* 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.

1 Montrer que (I_n) tend vers 0.

2 En effectuant le changement de variable $u = t^n$, montrer que $I_n \sim \frac{C}{n}$, où

$$C = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$$

3 En observant que, pour tout $u \in]0,1[$

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n+1},$$

montrer que $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

4 En admettant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, déterminer la valeur de C.

Exercice 863 – *Mines MP 10* 2

Donner un équivalent simple de $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 864 – *Mines MP 2015* 3

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par $f_n(x) = \cos(x^n)\sin x$.

1 Convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$?

2 Limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 865 – *Mines MP 2015* 3

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1 Existence ?

2 Limite de $(I_n)_n$?

3 Équivalent en $+\infty$?

Exercice 866 – *Développement asymptotique d'une suite d'intégrales* 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $I_n = \int_0^1 f(t)\ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.

1 Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite l.

2 On suppose $f(1) \neq 0$. Montrer l'existence de $C \neq 0$ tel que $I_n - l \sim \frac{C}{n}$.

Indication : effectuer le changement de variable $u = t^n$.

3 Sachant $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, trouver C.

Exercice 867 – *Mines MP 2015* 3D

On définit pour $n \geqslant 2, x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \dfrac{1}{(x+1)\dots(x+n)}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

1 Définition de u_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2 Équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. **Indication :** Introduire $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$.

3 Équivalent quand $n \to +\infty$ de u_n.

4 Déterminer u_n.

Exercice 868 – *Étude d'une suite d'intégrales* 1

Soit $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}$.

1 Montrer que (u_n) est bien définie, calculer u_1.

2 Montrer que (u_n) converge vers $2/3$.

3 Montrer que $u_n - \frac{2}{3} \sim \frac{I}{n^{3/2}}$, où I est un réel strictement positif que l'on ne cherchera pas à calculer.

Indication : effectuer le changement de variable $u = t^{n+1}$.

Exercice 869 – *Équivalent d'une suite d'intégrales* 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\mathrm{d}x$.

1 Vérifier que (I_n) converge vers 0.

2 Donner un équivalent simple de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\mathrm{d}x$.

Indication : effectuer le changement de variable $u = n^4x^3$.

Exercice 870 – *Équivalent d'une suite d'intégrales faisant intervenir Γ* 3

On note, pour $(a,b) \in]-1,+\infty[\times]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-nt}}{\sqrt{1+t^b}}\mathrm{d}t.$$

1 Étudier l'existence de I_n.

2 Déterminer la limite de (I_n).

3 Déterminer un équivalent simple de I_n (la réponse fera intervenir la fonction Γ d'Euler).

Exercice 871 – *Calcul d'une limite d'intégrales* 3

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Déterminer :

$$\lim_n n \int_0^1 f(x)\ln(1+x^n)\mathrm{d}x.$$

On admet : $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 872 – *Limite et équivalent d'une suite d'intégrales* 0

(TPE) Limite et équivalent de $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$.

Exercice 873 – *Équivalent d'une suite d'intégrales (Télécom Sud Paris)* 0

1 Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, calculer $J_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt}\mathrm{d}t$.

2 Donner un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^3e^{-nt}}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 874 – *Équivalents de suites d'intégrales* 3

1 (Centrale PSI 10) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-nt}}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de (I_n). Donner un équivalent de I_n.

2 (Mines MP 10) Donner un équivalent simple de $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 875 – *Limite d'une suite d'intégrales* 3

1 (TPE) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t+t^n}$. Déterminer la limite de (I_n).

2 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)$.

- **i** Montrer que f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.
- **ii** Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

3 (CCP) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$.

- **i** La fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- **ii** Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = n\int_0^{+\infty} f_n$.

Exercice 876 – *Développement asymptotique d'une suite d'intégrales* 3

(CCP MP 13) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1 Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.

2 Donner un développement asymptotique à trois termes de a_n.

2. Intégrales à paramètres

2.1. Calculs d'intégrales grâce par dérivation sous le signe somme

Exercice 877 – *Calcul d'une intégrale à paramètre (ENSAM 2015)* 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

1 Donner l'ensemble de définition de f.

2 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3 Donner une équation différentielle vérifiée par f.

4 En déduire une expression de f faisant intervenir une intégrale sans paramètre.

Exercice 878 – *Étude d'une intégrale à paramètre (ENSEA 13)* 0

Domaine de définition et calcul de $f\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}\ \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 879 – *Calcul d'une intégrale à paramètres (CCP MP 2015)* 2

Soit la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)-\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

1

i Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii La fonction F est-elle continue et dérivable ?

2 En déduire une expression simplifiée de F.

3 Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at)-\arctan(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 880 – *Calcul d'une intégrale à paramètre (Télécom Sud Paris MP 2015)* 2

Soit g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

1 Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.

2 Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.

3 Calculer la limite de g en $+\infty$ et déterminer g.

Exercice 881 – *Existence et calcul d'une intégrale à paramètre, encore* 2

Existence et calcul, pour $x \in]-1, 1[$ de :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + x\cos(t))}{\cos(t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 882 – *Existence et calcul d'une intégrale à paramètre, toujours* 2

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction d'une variable réelle par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + xt^2)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

2 Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$.

3 Existence et calcul de : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(1+t^2)}{t^3}\mathrm{d}t$.

(On utilisera $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{6}$.)

Exercice 883 – *Calcul d'une intégrale à paramètre (Centrale MP 2015)* 2

Soit $F(x) = \int_0^{\pi} \ln(x + \cos(t))dt$

1 Montrer que F est définie sur $[1, +\infty[$.

2 Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(]1, +\infty[)$.

3 Calculer $F'(x)$ (on pourra poser $u = \tan(\frac{t}{2})$). En déduire $F(x)$.

Exercice 884 – *Existence et calcul d'une intégrale à paramètre* 3

Existence et calcul, pour $x \in \mathbb{R}$, de :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Exercice 885 – *Simplification d'expressions intégrales à paramètres* 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer sans symbole d'intégration

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

Exercice 886 – *Un calcul d'intégrale via une intégrale à paramètre* 2

Calculer $\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b - \cos(x)}{a - \cos(x)}\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 887 – *Égalité entre deux intégrales* 2

Montrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1 + t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{x} \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} \mathrm{d}t.$$

2.2. Étude générale d'une intégrale à paramètre

Exercice 888 – *Simplification de fonctions définies par des intégrales à paramètres* 3

(Centrale MP 10) On pose $u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\mathrm{d}t$ et $v(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\mathrm{d}t$.

1 Déterminer le domaine de définition D de u et v. Montrer que u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

2 Exprimer u et v au moyen des fonctions usuelles.

Exercice 889 – *Représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale* 2

Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \int_0^1 t^x \sqrt{1 + t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 890 – *Le théorème fondamental de l'algèbre par les intégrales* 2I

(TPE) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose par l'absurde que P ne possède pas de racine complexe. Soit $I : r \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{1}{P(re^{i\theta})} \mathrm{d}\theta$.

1 Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que I est constante.

2 Déterminer la limite de $I(r)$ quand $r \to +\infty$. Conclure.

Exercice 891 – *Étude d'une intégrale à paramètre* 3

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \mathrm{d}t$.

1 Montrer que f est définie et continue sur $]-1, +\infty[$.

2 Calculer $f(1)$. Montrer : $\forall x > -1$, $(x + 2)\, f(x + 2) = (x + 1)f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to -1^+$.

3 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

4 Justifier : $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t$. En déduire $f'(0)$.

Exercice 892 – *Uniforme continuité d'une intégrale à paramètre* 3

(CCP MP 13) Pour x dans $\mathbb{R}$, soit $F(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t \mathrm{d}t}{1+(\cos(xt))^2}$.

1 Calculer $F(1/2)$. Indiquer une méthode permettant de calculer $F(n)$ si $n \in \mathbb{N}$.

2 La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$? uniformément continue ?

Exercice 893 – *Étude fonctionnelle d'une intégrale à paramètre* 2

Soit $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^x}\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de f, puis analyser sa continuité, sa dérivabilité et sa limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 894 – *Études d'intégrales à paramètre* 2

1 Donner le domaine de définition de $S\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\mathrm{d}t$.

2 Soit $f\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t+x}\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, et étudier son comportement en 0.

3 On pose $f(x) = \int_1^{x} \frac{e^{-t^2x^2}}{t}\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition, tracer le graphe, effectuer l'étude en 0, en $+\infty$.

4 On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^3}}\mathrm{d}t$. Limite ?

5 Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha < \beta$. Déterminer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{M \to +\infty} \int_{M\alpha}^{M\beta} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$$

2.3. Étude asymptotique d'une intégrale à paramètre

Exercice 895 – *Banque CCP 2016 50* 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}dt$.

1 Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

2 Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

3 Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Exercice 896 – *Étude d'une intégrale à paramètre avec équivalent (Petites Mines MP 2015)* 2

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan(t))^x \mathrm{d}t$

1 Domaine de définition de f ?

2 Montrer que f est continue et décroissante. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3 Calculer $f(x) + f(x+2)$ et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 897 – *Développement asymptotique d'une fonction intégrale* 3

Former un développement asymptotique à trois termes en 0^+ de :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

On admettra $\int_0^{+\infty} e^{-u}\ln(u)\mathrm{d}u = -\gamma$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 898 – *Équivalent en $+\infty$ d'une intégrale à paramètre* 3

Équivalent en $+\infty$ de $\phi(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^t}$.

Exercice 899 – *Régularité et équivalent d'une intégrale à paramètre (Mines MP 2015)* 2

Domaine d'existence, caractère $\mathcal{C}^1$ et équivalents aux bornes de $f\ : x \to \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

Exercice 900 – *Fonction définie par une intégrale* 1

On pose, pour tout réel x pour lequel cela a un sens :

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$

1 Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2 Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4 Montrer :

$$F(x) \sim_{0^+} -\ln(x).$$

Indication : effectuer le changement de variable $u = xt$, et regarder les forces en présence.

2.4. Intégrales à paramètres et équations différentielles

Exercice 901 – *Banque CCP 2016 30* 2

1 Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2 Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3
  i Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
  ii Résoudre (E) .

Exercice 902 – *Équivalent d'une intégrale à paramètre (CCP MP 2015)* 2

Soit la fonction définie par $g(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx}}{t+1}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$..
1 Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2 Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3 En déduire :
  i une équation différentielle simple vérifiée par g ;
  ii un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 903 – *Expression sous forme intégrale d'une solution d'une équation différentielle* 0

(CCP) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée.
1 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-|t|} f(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2 Montrer que $g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, f(x-t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $g'' = g - 2f$.

Exercice 904 – *Résolution d'une équation différentielle via une intégrale à paramètre* 2

(ENSAM) Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
1 Déterminer l'ensemble de définition de F. Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
2 Vérifier que F est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y'' + y = 1/x$. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\mathrm{d}t$.
3 Qu'obtient-on en faisant tendre x vers 0 ?

Exercice 905 – *Intégrale à paramètre et résolution d'une équation différentielle (Centrale MP 2015)* 3

Soit $f\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$.
1 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
2 Montrer que $x \mapsto xf(x)$ vérifie $(E) : x^2y' + y = x$.

3 Montrer qu'il existe une unique solution g de (E) telle que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$.
4 Montrer que g n'est pas rationnelle.

Exercice 906 – *Intégrale à paramètre et équation différentielle* | 3

(CCP MP 13) Soit $f : x \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$.

1 Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$; calculer $f(0)$.

2 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin t)\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3 Montrer que f est solution de $x\,y'' + y' + x\,y = 0$.

2.5. Calcul d'une intégrale à l'aide d'intégrales à paramètres

Exercice 907 – *Calcul de l'intégrale de Gauss par convergence dominée* | 1

On rappelle qu'en posant $W_n = \int_0^{\pi/2}\sin(u)^n\mathrm{d}u$ (ce sont les *intégrales de Wallis*, sans doute déjà vues en MPSI), on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

1 Montrer que

$$\lim_n \int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

2 En déduire, grâce au résultat rappelé, que

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 908 – *Un calcul de l'intégrale de Gauss par intégrale à paramètre* | 1

1 Exprimer l'application

$$G\ : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

en fonction de $F\ : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

2 En déduire la valeur de l'*intégrale de Gauss* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 909 – *Calcul de l'intégrale de Dirichlet* | 2I

On pose, pour tout réel positif ou nul x :

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \lim_{n\infty}\int_{t=0}^{n}\frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t.$$

1 *(Étude de f)*
  i Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et qu'elle y est continue.
  ii Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle est solution sur ce domaine de

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + y = \frac{1}{x}$$

  iii Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

2 *(Étude de g)* Vérifier que g est aussi définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de limite nulle en $+\infty$.

3 En déduire que $f = g$, puis la valeur de l'*intégrale de Dirichlet* $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 910 – *Calcul d'une intégrale via une intégrale à paramètre* | 2

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1 Existence et continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$, calculer $f'(x)$ sur ce domaine.

3 En déduire $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

2.6. Fonction Γ d'Euler

Revoir d'abord l'exercice 347

Exercice 911 – *Continuité de la fonction Gamma d'Euler* 1

Montrer que la fonction $\Gamma\ : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ d'Euler est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 912 – *Banque CCP 2016 29* 1

On pose : $\forall\, x \in]0;+\infty[$ et $\forall\, t \in]0;+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1 Démontrer que, $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$. On pose alors, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2 Démontrer que, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3 Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 913 – *Dérivées de la fonction Gamma d'Euler* 1

Montrer que la fonction Γ d'Euler est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

On notera en particulier que Γ est convexe.

3. Intégration terme à terme

Exercice 914 – *Banque CCP 2016 49* 2C

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}e^{-t}$.

1

i Justifier que la suite (a_n) est bornée.

ii Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2

i Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt$.

ii Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\, t^n}{n!}\, e^{-t}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 915 – *Équivalent d'une intégrale à paramètre* 2

1 Montrer :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+a)^2}.$$

2 En déduire : $\int_0^1 \frac{x^{a-1}\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x \sim_{a\to+\infty} -\frac{1}{2a}$.

Exercice 916 – *Information sur $\zeta(3/2)$* 0

(CCP) On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,e^{-nt}\mathrm{d}t$. Calculer I_n et en déduire : $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$.

Remarque : On rappelle que $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 917 – *Une application du théorème d'intégration terme à terme* 2

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On pose

$$I_k\overset{def}{=}\int_0^{+\infty}\frac{t^k}{e^t-1}\mathrm{d}t$$

Vérifier que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$I_k=k!\,\zeta(k+1)$$

Indication : On pourra partir du fait que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{e^t-1}=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nt}$$

et faire intervenir la fonction Γ d'Euler.

Exercice 918 – *Une interversion somme-intégrale (Centrale PSI 10)* 2

Soit (u_n) une suite croissante d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, tendant vers l'infini. Montrer l'existence des deux quantités écrites et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-u_n x}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{u_n}.$$

Exercice 919 – *Intégrale sur $\mathbb{R}_+$ d'une série de fonctions* 2

(CCP) Soit $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-\sqrt{n}x}$. Montrer que f est définie et intégrable sur $]0,+\infty[$. Calculer $\int_0^{+\infty}f$.

Exercice 920 – *Interversion série-intégrale* 2

1 (ENSAM) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement positive, strictement croissante, de limite infinie. Montrer : $\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-a_n t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$.

2 (TPE) Justifier la convergence et montrer : $\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$.

3 (CCP) Soient $r>0$ et $z\in\mathbb{C}$ tels que $|z|<r$. Montrer que $\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\mathrm{d}\theta=2\pi$.

4 (TPE) Montrer : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

5 (Mines-Télécom MP 2015) Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{1-\mathrm{e}^{-bx}}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}$$

6 (ENSEA MP 2015)

i Montrer que $\forall x\in[-1,1]$, $\displaystyle\int_0^1\frac{1-t}{1-x^3t^3}\,\mathrm{d}t=\sum_{n\in N}\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$.

ii Calculer $\displaystyle\sum_{n\in N}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

7 (Mines MP 2015) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(\operatorname{th}x)\,\mathrm{d}x=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

8 (Mines MP 2015)Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer : $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+na}$.

9 (Mines MP 2015)Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer : $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 e^{x(1-t)}f(t)\mathrm{d}t$.

CHAPITRE XXIX

Réduction des endomorphismes (TD)

Sommaire

1. Valeurs propres, vecteurs propres

1.1. Valeurs propres, éléments propres en dimension finie

Exercice 921 – *Liberté et sous-espaces propres* 0

On considère des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, distincts deux à deux. Montrer que la famille constituée des $g_k : x \mapsto \cos(\lambda_k x)$ est libre.

Exercice 922 – *Effet d'un automorphisme intérieur sur les éléments propres* 2I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $v \in \mathrm{GL}(E)$, et on pose $w = vuv^{-1}$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K} : E_\lambda(w) = v(E_\lambda(u))$.

Exercice 923 – *Valeurs propres et polynômes annulateurs (CCP MP 2015)* 0

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n, soit f un endomorphisme de E. Les deux questions sont indépendantes.

1

i Montrer que la famille $(id_E, f, ..., f^{n^2})$ est liée.
ii En déduire que f admet un polynôme annulateur non nul.

2 Soit λ une valeur propre de f et P un polynôme annulateur quelconque de f. Montrer qu'on a $P(\lambda) = 0$.

Exercice 924 – *Étude de spectre (CCP MP 2015)* 2

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement a vérifie : $a(e_1) = e_1 + e_{2n+1}$ et $\forall i \in [\![2, 2n+1]\!], a(e_i) = e_{i-1} + e_i$

1 Déterminer le polynôme caractéristique de A.

2 Montrer que A est inversible.

3 Écrire A^{-1} sous la forme d'un polynôme en A.

4 Déterminer les valeurs propres complexes de A. Calculer $\prod_{i=0}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1})$.

Exercice 925 – *Éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (Mines MP 2015)* 2

Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = X(X+1)P' - nXP$. Éléments propres ?

Exercice 926 – *Banque CCP 2016 93* 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1 Montrer que $\mathrm{Im} u \oplus \ker u = E$.

2
i Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
ii En déduire que $\mathrm{Im} u = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

3 On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.
Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Exercice 927 – *Valeur propre double pour une combinaison linéaire* 3

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer l'existence de scalaires α, β, γ non tous nuls, tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une valeur propre double.

Exercice 928 – *Réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$* 3

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\, A \neq 0$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{tr}\, A)\, M - (\mathrm{tr}\, M)\, A$.

Exercice 929 – *Encore une réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$* 3

(ENSAM MP 13) Soit $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto -A + \mathrm{tr}(A) I_n$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 930 – *Réduction d'une matrice par blocs* 0

(ENSAM MP 13) Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$.

1.2. Étude de spectre en dimension infinie

Exercice 931 – *Banque CCP 2016 83* 3

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1 Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

2 On considère sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$. Déterminer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

3 Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

Exercice 932 – *Valeurs propres d'un endomorphisme de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ 3

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $f\ : u \mapsto \left(\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n^2}\right)$. Quelles sont les valeurs propres de f ?

Exercice 933 – *Éléments propres d'un endomorphisme de* $\mathbb{R}[X]$ *(Télécom Sud Paris MP 2015)* 2

On définit u sur $\mathbb{R}[X]$ par $u(P) = P(1)X + P(2)X^2$. Étudier les valeurs propres et espaces propres de cet endomorphisme.

Exercice 934 – *Éléments propres d'un opérateur fonctionnel* 3

(Centrale PSI 10) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$. Pour $f \in E$, on définit

$$u(f)\ : x \mapsto f(tx + (1-t)).$$

1 Montrer que u est un automorphisme de E.

2 Montrer que le spectre de u est inclus dans $]-1,1]$. Si g est vecteur propre de u, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{(k)} = 0$. En déduire les éléments propres de u.

Exercice 935 – *Étude topologique du spectre d'un endomorphisme de primitivation (Mines MP 2015)* 3

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $H\ : f \mapsto H(f)$ où, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $H(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f$ et $H(f)(0) = f(0)$.

1 Vérifier que H est un endomorphisme de E. Déterminer son image et son noyau.

2 Déterminer les valeurs propres de H ainsi que les sous-espaces propres associés.

3 L'ensemble des valeurs propres est-il fermé ? compact ?

Exercice 936 – *Éléments propres d'un opérateur sur les fonctions continues* 3

(ENSAM MP 12) Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit $\Phi(f)\ : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min\{x,t\}\, f(t)\mathrm{d}t$.

1 Vérifier que Φ est un endomorphisme E.

2 Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de Φ.

Exercice 937 – *Éléments propres d'un endomorphisme de* $\mathbb{R}[X]$ 0

(TPE 13) Montrer qu'en posant $f(P) = (X^3+X)P' - (3X^2-1)P$, on définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. En déterminer les éléments propres.

1.3. Valeur propre commune, vecteur propre commun

Exercice 938 – *Une condition nécessaire et suffisante pour que les spectres soient disjoints* 2

1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les spectres de A et de B sont disjoints si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.

Soit A, B, P trois matrices carrées complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

2 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

(1) $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = C$.

(2) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX = XB \Rightarrow X = 0$.

(3) $\chi_A(B)$ est inversible.

(4) A et B n'ont pas de valeur propre en commun.

Exercice 939 – *CNS d'existence d'une valeur propre commune* 1

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AU = UB$.

Exercice 940 – *Matrices sans valeur propre commune* 1

(TPE MP 13) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(1) $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = C$,

(2) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\},\ AX \neq XB$,

(3) $\chi_B(A)$ est inversible,

(4) A et B n'ont pas de valeur propre commune.

Exercice 941 – *CNS d'existence d'une valeur propre commune (TPE-EIVP MP 2015)* 1

Soit $n \geqslant 2$ et deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulles. On s'intéresse à l'équation $(E)\quad AM = MB$.

1 On suppose que l'équation (E) admet une solution M non nulle.

i Montrer que, pour tout polynôme $P \in [X]$, $P(A)M = MP(B)$.

ii Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

2 On suppose que A et B ont une valeur propre commune.

i Montrer que, si X et Y sont deux matrices colonnes non nulles, alors $X \cdot {}^t Y$ est non nulle.

ii Prouver l'existence d'une solution de (E).

Exercice 942 – *Valeurs propres en commun pour deux matrices (X MP 10)* 3D

Soit A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose $CA = BC$ et que $\operatorname{rg} C = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres (comptées avec multiplicité) en commun.

Exercice 943 – *Vecteurs propres communs à des endomorphismes commutant deux à deux* 2

(CCP MP 13) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

2 Soient $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes de E qui commutent deux à deux. Montrer que les u_i ont un vecteur propre commun.

2. Diagonalisation, diagonalisabilité

2.1. Diagonalisation pratique

Exercice 944 – *Réduction de J* 0

Réduire la matrice J (carrée de taille n) dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 945 – *Banque CCP 2016 68* 0

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :

i sans calcul,

ii en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

iii en utilisant le rang de la matrice,

iv en calculant A^2.

2 On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 946 – *Banque CCP 2016 70* 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Exercice 947 – *Diagonalisabilité et limite des puissances d'une matrice (Mines MP 2015)* 3

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $A(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

1 La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

2 Représenter $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2, \lim\limits_{n \to +\infty} A(a, b)^n = 0\}$.

2.2. Étude pratique de diagonalisabilité

Exercice 948 – *Preuves de diagonalisabilité (Télécom Sud Paris MP 2015)* 0

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable par 4 méthodes différentes :

1 sans calculs ;

2 en calculant le polynôme caractéristique de A et en déterminant ses espaces propres ;

3 en utilisant le théorème du rang ;

4 en calculant A^2.

Exercice 949 – *Diagonalisabilité d'une matrice de taille* 3 0

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 950 – *Étude d'élements propres (ENSEA MP 2015)* 0

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (0) & 1 \end{pmatrix}$. (Les 1 forment un N).

1 Rang de N et $N - I_n$?

2 Base de $\mathrm{Im}(N)$?

3 Montrer que f induit un endomorphisme de $Im(f)$, noté $\widetilde{f}$. (f est l'endomorphisme associé à N).

4 Montrer que $\widetilde{f}$ a deux valeurs propres, trouver un vecteur propre associé à la valeur autre que 1.

5 La matrice N est-elle diagonalisable ?

Exercice 951 – *Banque CCP 2016 63* 2

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1 Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

2 Déterminer D_n en fonction de n.
3 Justifier que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A ?

2.3. Étude pratique de diagonalisabilité avec un ou plusieurs paramètres

Exercice 952 – *Banque CCP 2016 69* **2**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1 Déterminer le rang de A.
2 Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?
3 (Ajout) Effectuer la diagonalisation pratique de A (lorsque c'est possible).

Exercice 953 – *Étude de diagonalisabilité en fonction d'un paramètre* **0**

Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M est diagonalisable.

Exercice 954 – *Étude de diagonalisabilité d'un $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathbb{C}$ (ENSAM 2015)* **2**

Soit $E = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}$ considéré comme un espace vectoriel réel.
1 Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z},\ a, b \in \mathbb{C}\}$.
2 Déterminant et trace de $f_{a,b}$?
3 CNS pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable ?

Exercice 955 – *Étude de diagonalisabilité d'une matrice symétrique complexe (ENSAM 2015)* **2**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, avec a et b deux complexes.

1 Étudier la diagonalisabilité de A.
2 Déterminer ses sous espaces propres.

Exercice 956 – *Banque CCP 2016 67* **2**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

1 M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
2 M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 957 – *Diagonalisabilité et suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Centrale MP 2015)* **3**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\beta & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont des constantes.

1 Rappeler la forme des solutions de $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ pour $a \neq 0$
2 Étudier l'inversibilité de A_n.
3 Étudier la diagonalisabilité de A_n dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

Exercice 958 – *Étude de diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (Mines MP 2015)* **2**

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2.4. Étude de diagonalisabilité d'un endomorphisme de rang 1

Exercice 959 – *Quand une matrice carrée de rang 1 est-elle diagonalisable ?* — 4I

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$.

Exercice 960 – *Banque CCP 2016 72* — 2

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1 Donner le rang de f.

2 f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 961 – *Étude de diagonalisabilité d'une matrice produit d'une colonne et de sa transposée (Mines MP 2015)* — 2

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficient général $a_{i,j} = a_i a_j$. Condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 962 – *Diagonalisabilité d'une matrice de fractions* — 2

1 La matrice (i/j) est-elle diagonalisable ?

2 (CCP) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2.5. Polynômes de matrices et diagonalisabilité

Exercice 963 – *Diagonalisabilité de certaines matrices en dimension 2* — 2I

1 Vérifier que toute matrice réelle symétrique de taille 2 est diagonalisable.

2 Déterminer les matrices réelles antisymétriques de taille 2 diagonalisables.

3 Trouver un exemple de matrice complexe symétrique de taille 2 non diagonalisable.

Exercice 964 – *Équivalence entre deux diagonalisabilités* — 1

On introduit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'est.

Exercice 965 – *Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$* — 0

Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(1-X)$. f est-il diagonalisable ? Trouver une base de vecteurs propres.

Exercice 966 – *Codiagonalisation* — 1

On suppose que u et v sont diagonalisables et commutent.

1 Montrer que u et v sont *codiagonalisables* c'est-à-dire qu'ils admettent une base commune de diagonalisation.

2 En déduire que uv et $u+v$ sont diagonalisables.

Exercice 967 – *Endomorphisme diagonalisable sur un espace de matrices* — 1

On suppose A diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & B & \mapsto & ABA \end{array}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable :

1 En utilisant les exercices 964 et 966.

2 En explicitant une base de diagonalisation.

Exercice 968 – *Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$* | 0

L'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X^n P(1/X) \in \mathbb{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 969 – *Étude de diagonalisabilité de $M \mapsto M + ({}^tM)$ (Centrale PSI 10)* | 0

(Centrale PSI 10) Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + ({}^tM)$. Déterminer les valeurs propres de f. L'application est-elle diagonalisable ?

Exercice 970 – *Une CNS de diagonalisabilité pour un certain endomorphisme* | 0

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ (où $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$) tel que p^2 soit un projecteur. Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Exercice 971 – *Diagonalisabilité d'une matrice diagonale par blocs* | 2

Montrer qu'une matrice diagonale par blocs si et seulement si chacun de ses blocs diagonaux est diagonalisable.

Exercice 972 – *Banque CCP 2016 88*

1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.

i Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

ii u est-il diagonalisable ?

Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question 1.).

Exercice 973 – *Comparaison de diagonalisabilité entre un endomorphisme et son carré (CCP MP 2015)* | 2I

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 On suppose que f est diagonalisable. Montrer que f^2 est diagonalisable et que $\ker f = \ker f^2$. On s'intéresse à la réciproque.

2 On suppose que f^2 est diagonalisable et inversible.

i On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f^2. Montrer que $(X^2 - \lambda_1)\ldots(X^2 - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de f.

ii Montrer que f est diagonalisable.

3 On suppose que f^2 est diagonalisable et que $\ker f = \ker f^2$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 974 – *Comparaison de diagonalisabilité entrer une matrice inversible et l'une de ses puissances (ENS MP 10)* | 3

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^d l'est.

Exercice 975 – *Étude de diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ (Mines MP 2015)* | 3

Soit E un espace vectoriel, p un endomorphisme vérifiant $p^2 = p$ et F définie par $F(f) = f \circ p + p \circ f$ sur $\mathcal{L}(E)$.

1 Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer un polynôme annulateur de F de degré 3.

2 On suppose $\dim(E) = n > 0$ et $\mathrm{rg}(p) = r$, F est-il diagonalisable ?

Exercice 976 – *Polynôme du polynôme* 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 977 – *Égalité des cubes pour des endomorphismes diagonalisables* 2

Soit $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalisables, tels que $u^3 = v^3$. montrer que $u = v$.

Exercice 978 – *Appartenance à un groupe multiplicatif matriciel* 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à un groupe multiplicatif matriciel si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$.

Exercice 979 – *Matrice inversible dont le carré est diagonalisable* 0

(Télécom Sud Paris) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose M^2 diagonalisable. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 980 – *Liens entre A et g_A : $M \mapsto AM$ (ENS MP 10)* 0

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et g_A l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1 Calculer le rang de g_A en fonction de celui de A.

2 Montrer que g_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 981 – *Diagonalisabilité et matrices par blocs* 0

(CCP) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$. On suppose B diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 982 – *Quand un polynôme d'un projecteur est-il un projecteur ?* 0

(CCP MP 13) Soient E un espace vectoriel, p un projecteur de E et Q un polynôme. À quelle condition $Q(p)$ est-il un projecteur ?

Exercice 983 – *Étude concrète de diagonalisabilité* 0

(CCP) Soient $n \geqslant 2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = P(-4)\, X + P(6).$$

1 Déterminer l'image et le noyau de u.

2 Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 984 – *Matrice diagonalisable polynôme de l'un de ses polynômes* 2

(Mines-Ponts PSI 08) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 985 – *Diagonalisabilité de la transposée de la comatrice* 2

(CCP PSI 08) Comparer la diagonalisabilité d'une matrice carrée et celle de la transposée de sa comatrice.

Exercice 986 – *Diagonalisabilité d'une matrice par blocs* 2

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 987 – *CNS de diagonalisabilité d'une matrice diagonale par blocs* 2

(TPE MP 13) Soient $A_1, \dots, A_p$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et M une matrice diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux : $A_1, \dots, A_p$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 988 – *Étude de diagonalisabilité d'un opérateur sur les matrices* 3

(ENSAM PSI 08) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$, on note M' la matrice de colonnes $C'_1, \dots, C'_n$, où $C'_i = S - C_i$ avec $S = C_1 + \cdots + C_n$.

1 Exprimer $\det(M')$ en fonction de $\det(M)$.

2 L'application qui envoie M sur M' est-elle diagonalisable ?

Exercice 989 – *Étude de diagonalisabilité de AB connaissant explicitement BA* 3

(Mines MP 10) Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telles que $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice AB est-elle diagonalisable ?

Exercice 990 – *Diagonalisabilité d'un endomorphisme particulier* 3

(CCP MP 13) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^4 = f^2$ et $\{-1, 1\} \subset \operatorname{Sp} f$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 991 – *Condition suffisante de diagonalisabilité* 3

(CCP MP 13) Soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et A, B, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $M = \alpha A + \beta B$, $M^2 = \alpha^2 A + \beta^2 B$ et $M^3 = \alpha^3 A + \beta^3 B$.

Montrer que M est diagonalisable.

3. Applications de la réduction

3.1. Renseignements sur la trace, le rang et le déterminant

Exercice 992 – *Renseignements sur la trace d'une symétrie (CCP MP 2015)* 0

Soit $n \geqslant 2$ et on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $A \in E$ telle que $A \neq I_n$ et $A \neq -I_n$, mais on a $A^2 = I_n$.

1 Montrer que $\operatorname{tr}(A) \equiv n[2]$.

2 Montrer que $\operatorname{tr}(A) \leqslant n - 2$.

Exercice 993 – *Déterminant et trace d'une matrice à polynôme minimal irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ (ENSEA MP 2015)* 2

Soit A une matrice réelle de taille (n, n) tel que $A^2 + A + 4I_n = 0$. Montrer que A ne peut pas avoir de valeurs propres réelles et que n est nécessairement pair. Trouver le déterminant et la trace de A.

Exercice 994 – *Condition suffisante pour que le déterminant soit strictement positif* 0

(ENSEA) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 995 – *Informations sur une matrice réelle dont on connaît un polynôme annulateur* 3

(ENSAM MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A - I_n = 0$.

1 La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2 Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 996 – *Condition suffisante pour que la trace soit paire* 3

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - 2A^3 + 2A^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) \in 2\mathbb{N}$.

Exercice 997 – *Déterminant strictement positif pour une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$* 0

(TPE PSI 08) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et que $\det(A)$ est un réel strictement positif.

Exercice 998 – *Réduction d'un projecteur* 0

Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et $\operatorname{tr}(A) = 0$?

Exercice 999 – *Trace d'une racine carrée de $-I_n$* 0

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Que vaut $\operatorname{tr}(A)$?

Exercice 1000 – *Rang et polynôme annulateur* 0

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que A est de rang pair.

Exercice 1001 – *Polynôme minimal et trace nulle* 0

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geqslant 2)$ telle que $A^n = I_n$, et telle que $(I, A, \ldots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 1002 – *Déterminant et polynôme annulateur* 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

3.2. Puissances d'une matrice

Exercice 1003 – *Banque CCP 2016 91* 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1 Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

2 La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3 Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.

4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 1004 – *Puissances d'une matrice (ENSAM 2015)* 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{C}$.

1 Étudier la diagonalisabilité de M en fonction de z.

2 Pour $z = 0$, calculer M^n, $n \in \mathbb{N}$.

3 Déterminer les valeurs propres pour $z = e^{i\theta}$.

Exercice 1005 – *Nature de $\sum \operatorname{tr}(A^n)$ pour une matrice particulière A* 3

(CCP MP 13) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \operatorname{tr}(A^n)$.

1 Déterminer le polynôme caractéristique de A. Que peut-on dire des valeurs propres de A ?

2 Donner un équivalent de u_n. Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 1006 – *Rayon de convergence de $\sum \operatorname{tr}(A^n) z^n$* 3

(Télécom Sud Paris) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\operatorname{tr}(A^n) z^n$.

3.3. Équation matricielle

Exercice 1007 – *Équation matricielle (Petites Mines MP 2015)* 3

Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A^3$ et $\operatorname{tr}(A) = n$.

Exercice 1008 – *Équation polynomiale d'inconnue matricielle* 0

(CCP MP 13) Trouver les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 1009 – *Équation matricielle (Mines MP 2015)* 3

Trouver toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\left\{ \begin{array}{cc} (A+I_n)^7 - (A^7 - I_n) & = 0 \\ \operatorname{tr}(A) & = 0 \end{array} \right.$

Exercice 1010 – *Résolution de* $A^2 = (\operatorname{tr} A)A + I_n$ 3

On veut déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$: $\quad A^2 = (\operatorname{tr} A)A + I_n$.

1 Montrer que les matrices A vérifiant $(*)$ sont diagonalisables. Que dire de A si $\operatorname{tr}(A) = 0$?

2 Pour $n = 2$, montrer qu'il existe des solutions de trace non nulle. Discuter l'existence de solutions pour $n = 3$ ou $n \geqslant 4$.

Exercice 1011 – *Matrice polynôme de son carré (Mines MP 2015)* 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Existe t-il un polynôme P tel que $P(A^2) = A$? Que dire pour $P(A^k) = A$, avec k impair ?

Exercice 1012 – *Équation matricielle faisant intervenir la transposée (Mines MP 2015)* 3

On considère le système $\left\{ \begin{array}{ccc} M^2 + I_n & = & 0 \\ M^tM & = & {}^tMM \end{array} \right.$

1 Résoudre le système pour n impair.

2 Résoudre le système pour n pair.

Exercice 1013 – *Une équation d'inconnue matricielle* 3D

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. À quelle condition l'équation $Y = AX - XB$ admet-elle une solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3.4. Matrices stochastiques

Exercice 1014 – *Matrices stochastiques* 1

(ENSAM MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. On suppose que la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 1.

1 Montrer que le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1 est propre pour A.

2 Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

3 On suppose que A est diagonalisable. Soient $p \in \mathbb{N}$ et X un vecteur colonne. On considère la suite $Y_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k X$. Montrer que cette suite est convergente et donner sa limite, en commençant par le cas où X est un vecteur propre de A.

Exercice 1015 – *Matrice stochastique* 1

$P = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls, et si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

1 Montrer que les éléments de $\mathcal{S}$ ont une valeur propre commune.

2 $\mathcal{S}$ est-il stable par produit ?

3 Soit λ une valeur propre complexe de $P \in \mathcal{S}$. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

4 Montrer que si $\lambda \in \mathbb{U}$ est valeur propre de $P \in \mathcal{S}$, alors λ est une racine m-ième de l'unité avec $m \leqslant n$.

5 Montrer que si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, alors la seule valeur propre de module 1 est 1.

6 Montrer que $\mathcal{S}$ est convexe compact.

3.5. Réduction et exponentielle matricielle

Exercice 1016 – *Calcul d'exponentielle de matrice (CCP MP 2015)* 2

Soit $A \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1 Diagonaliser A.

2 En déduire e^A.

Exercice 1017 – *Antécédents de I_n par l'exponentielle matricielle complexe (Mines MP 2015)* 3

1 Trouver les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $e^M = I_2$.

2 Généraliser aux matrices de taille $n \times n$.

Exercice 1018 – *Matrices diagonalisables dont les exponentielles sont égales* 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. On suppose $e^A = e^B$. Montrer $A = B$.

Exercice 1019 – *Surjectivité de l'exponentielle matricielle complexe (X MP 10)* 3D

Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $P(B) = A$ et $\exp(A) = B$.

Exercice 1020 – *Trajectoires planes de sous-groupes à un paramètre* 3D

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On dit que $A \in \mathcal{E}$ si pour tout vecteur colonne X, il existe un plan affine Π tel que, pour tout réel t, $\exp(tA)X \in \Pi$.

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(tA)$. A-t-on $A \in \mathcal{E}$?

2 Montrer que si $\det(A) = 0$, alors $A \in \mathcal{E}$.

3 Caractériser, parmi les matrices inversibles et diagonalisables, celles qui appartiennent à $\mathcal{E}$.

4 Déterminer $\mathcal{E}$.

3.6. Applications de la réduction à l'étude du groupe linéaire

Exercice 1021 – *Équivalence de diagonalisabilité pour AB et BA dans le cas inversible* 0

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1 Montrer que AB et BA ont même spectre.

2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P annule AB si et seulement si P annule BA.

3 Montrer que AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable.

Exercice 1022 – *Éléments propres de la somme des termes d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (Mines MP 2015)* 3I

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1 En exhiber un non trivial.
On pose $f = \sum_{g \in G} g$.

2 Que dire de f ?

3 Trouver les valeurs propres de f.

4 Caractériser le sous-espace propre de f pour la valeur propre non nulle (par rapport aux éléments de G).

Exercice 1023 – *Diagonalisabilité des puissances d'une matrice inversible* 2

1 Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si il existe $k \geqslant 2$ tel que M^k soit diagonalisable.

2 Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous ses éléments sont diagonalisables.

3 Soit G un groupe multiplicatif fini inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous ses éléments sont diagonalisables.

Exercice 1024 – *Quelles sont les matrices semblables à leur carré (en taille 2) ?* 4

Déterminer les $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que $A \sim A^2$.

Exercice 1025 – *Un théorème de Burnside (Centrale MP 2015)* 3C

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1 On suppose que G est fini. Montrer que $\forall g \in G\ \exists N_g \in \mathbf{N}$ tel que $g^{N_g} = I_n$.
On note $\mathrm{Tr}(G) = \{\mathrm{Tr}(g),\ g \in G\}$. Soit les propositions :
(i) G est fini ;
(ii) $\mathrm{Tr}(G)$ est fini et tous les éléments de G sont diagonalisables.

2 Montrer que (i) implique (ii).

3 Montrer la réciproque. Indication : Considérer $(A_1, ..., A_p)$ une base de l'espace vectoriel engendré par G et l'application $f : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C}^p \\ g & \mapsto & (\mathrm{Tr}(A_1 g), ..., \mathrm{Tr}(A_p g)) \end{array}$.

4 (Ajoutée) On dit qu'un groupe multiplicatif H est d'exposant fini s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $h \in H$, on ait $h^N = e_H$.

i Montrer que si H est fini, alors il est d'exposant fini.

ii On suppose que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que H est fini si et seulement si il est d'exposant fini (ce résultat est du à Burnside).

iii Donner un exemple de groupe infini d'exposant fini.

Exercice 1026 – *Ordre d'un élement d'un groupe fini de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *(Mines MP 2015)* 3

1 Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ \det M \neq 0 \text{ et } M^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\}$. Caractériser G.

2 Soit H un sous-ensemble fini de G stable par la multiplication. Soit $A \in H$. Montrer que $A^{12} = \mathrm{I}_2$

Exercice 1027 – *Quand* $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ *et* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *sont-ils isomorphes ?* 4

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ distincts. Montrer que $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.
Indication : on pourra étudier les sous-groupes d'involutions maximaux dans les groupes linéaires.

Exercice 1028 – *Cardinal d'unipotentes dans un anneau matriciel fini (ENS MP)* 5

Soient p un nombre premier impair et $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{tr}(A^p) \equiv (\mathrm{tr}\, A)^p\ [p]$.

2 Déterminer le cardinal de $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),\ A^p = I_n\}$.

3.7. Commutant

Exercice 1029 – *Comment caractériser le fait de commuter avec un endomorphisme diagonalisable donné ?* 4

Soit u un endomorphisme diagonalisable de E. Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec u si et seulement si v stabilise tous les sous-espaces propres de u.

Exercice 1030 – *Autant de valeurs propres que la dimension* 1

1 Soit u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes (on rappelle que $n = \dim(E)$).

i Montrer que u est diagonalisable.

ii En déduire que le commutant de u est l'ensemble des polynômes en u.

2 En déduire que si A est triangulaire supérieure, et de coefficients diagonaux distincts deux à deux, alors A est diagonalisable.

Exercice 1031 – *Banque CCP 2016 73* 0

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2 Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(I_2, A)$.

Exercice 1032 – *Condition suffisante de commutation en cas de diagonalisabilité (Centrale MP 2015)* 3

1 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, diagonalisable. Donner χ_M à l'aide de $\mathrm{tr}\, M$ et de $\det M$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}\, M$ et $\det M$ pour que M soit une matrice scalaire.

2 Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et $\Delta(z)$ le discriminant de χ_{A+zB}. Montrer que, si $\Delta \leqslant 1$, alors $AB = BA$.

3 Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout complexe z, $A + zB$ est diagonalisable. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 1033 – *Toutes les dimensions sont-elles possibles pour le commutant ? (Mines MP 2015)* 4

1 (Mines MP 15) Existe-t-il une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'espace vectoriel des matrices qui commutent avec A soit de dimension impaire ?

2 (Mines MP 10) Donner la dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 1034 – *Deux matrices qui commutent sont-elles des polynômes d'une même matrice ?* 4

1 Donner un exemple de deux matrices qui commutent, mais qui ne sont pas polynômes d'une même matrice.

2 Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, commutant. Montrer que l'une est polynôme de l'autre.

Exercice 1035 – *Lorsque $fg = gf$, équivalence de conditions sur images et noyaux* 3D

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1 $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

2 $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = E$.

3 Pour tout t dans $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini, $f + tg \in \mathrm{GL}(E)$.

4. Polynôme minimal, polynôme caractéristique

Le lemme de décomposition des noyaux 83

L'une des difficultés de ce théorème est de retenir l'hypothèse : les P_1 sont-ils premiers entre eux deux à deux ou dans leur ensemble ? On peut retenir que ce théorème exige une hypothèse forte (premiers entre eux deux à deux), pour conclure à une conclusion forte (non seulement les $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ sont en somme directe deux à deux, mais ils sont même en somme directe).
On peut aussi le tester dans le cas où les P_i sont premiers entre eux dans leur ensemble mais où $P_1 = P_2$ par exemple, pour constater que ce n'est pas la bonne hypothèse.

4.1. Polynôme minimal

Exercice 1036 – *Valuation du polynôme minimal* 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, P son polynôme minimal et p l'ordre de 0 dans P.

1 Si $p = 0$, que dire de u ?

2 Si $p = 1$, montrer : $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

3 Dans le cas général, montrer : $E = \mathrm{Im}(u^p) \oplus \ker(u^p)$.

Exercice 1037 – *Matrice de polynôme minimal imposé* 2

Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^2 + X + 1$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

4.2. Polynôme caractéristique

Exercice 1038 – *Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont-ils les mêmes racines ?* 4I

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (où E est de dimension finie). Montrer que μ_u et χ_u ont les mêmes racines.

Exercice 1039 – *Déterminant d'une matrice et de son opposée (CCP MP 2015)* 0

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer $\det(A)$ et $\det(-A)$.

2

i Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Discuter de la parité du polynôme caractéristique de B.

ii Retrouver le fait que, si n est impair et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $\det(B) = 0$.

Exercice 1040 – *Détermination d'un polynôme caractéristique* 3

Soit $A \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{tr}\, A = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 1041 – *Polynôme caractéristique d'une certaine matrice inversible* 3

Soit $A \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\, A = 2$ et $A^3 + A^2 - 2A = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 1042 – *Polynôme caractéristique d'un produit (Centrale MP 12)* 2

1 Soient $a_0, \dots, a_n$ distincts dans $\mathbb{C}$, $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $(a_0, \dots, a_n)$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, exprimer χ_A à l'aide de $(L_0, \dots, L_n)$.

2 En déduire que $A \mapsto \chi_A$ est continue.

3 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On suppose A inversible. Montrer que AB est semblable à BA. En déduire : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

4 Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 1043 – *$\chi_{A^{-1}}$ et χ_{A^2} en fonction de χ_A* 2

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(0) \neq 0$. Justifier que A est inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ et χ_{A^2} en fonction de χ_A.

Exercice 1044 – *Calcul de déterminant se ramenant à un calcul de polynôme caractéristique* 0

(TPE MP 13) Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,j} = a_j$ si $i \neq j$ et $m_{i,i} = 0$. Calculer : $P(X) = \det(M + XI_n)$.

Exercice 1045 – *Égalité de polynômes caractéristiques* 3

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^n = AB = 0_n$. Montrer que B et $A + B$ ont même polynôme caractéristique.

Exercice 1046 – *Banque CCP 2016 65* 0

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1 Démontrer que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)\ .$$

2

i Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

ii Démontrer que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

5. Trigonalisation, endomorphismes nilpotents

Exercice 1047 – *Matrices nilpotentes (CCP MP 2015)* 0

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On dit qu'une matrice M est p-nilpotente (avec $p \in \mathbb{N}^*$) si $M^p = 0$.

1 Montrer que U est 3-nilpotente

2

i Soit A une matrice m-nilpotente. Montrer que $P^{-1}AP$ est m-nilpotente

ii Parmi les matrices nilpotentes, lesquelles sont inversibles ?

3

i Soit A une matrice 3-nilpotente. Montrer que $I_n + A$ est inversible.

ii Montrer que $I_n + aA$ est inversible (où a est un réel).

Exercice 1048 – *Banque CCP 2016 59 (antagonisme entre nilpotence et diagonalisabilité)* 0

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1 Démontrer que f est bijectif de deux manières :

i sans utiliser de matrice de f.

ii en utilisant une matrice de f.

2 Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$. *Indication :* si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3 f est-il diagonalisable ?

Exercice 1049 – *Caractérisation de la nilpotence par la trace des puissances* 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \operatorname{tr}(A^i) = 0$. Montrer que A est nilpotente. Réciproque ?

Exercice 1050 – *Caractérisation de la nilpotence par nullité de traces (X MP 10)* 1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall\, k \in [\![1,n]\!], \operatorname{tr}(u^k) = 0$. Montrer que u est nilpotent.

2 Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\, k \in [\![1,n]\!], \operatorname{tr} v^k = n$. Montrer que $v - \operatorname{Id}_E$ est nilpotent.

Exercice 1051 – *Ajout à une matrice d'un nilpotent avec lequel elle commute* 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA$ et B nilpotente. Montrer que A est inversible si et seulement si $A + B$ l'est.

Exercice 1052 – *Coefficients en position donnée nuls sur une classe de similitude (Centrale MP 2015)* 3

On note $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une matrice A appartenant à $M_n(K)$, et on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A

1 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit trigonalisable.

2 On suppose que toute matrice B semblable à A a son coefficient $b_{2,1} = 0$. Soit $x \in K^n$. Montrer que $(x, u(x))$ est une famille liée. Donner alors la forme de la matrice A.

3 On suppose désormais que toute matrice B semblable à A a son coefficient $b_{1,1} = 0$, et A appartient à $M_n(\mathbb{C})$. Que dire de A ?

Exercice 1053 – *Existence de matrices non trigonalisables par un argument de cardinalité (Petites Mines MP 2015)* 3

Soit p un nombre premier. On note $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1 Calculer le cardinal de $K_2[X]$.

2 Montrer qu'il existe des polynômes de $K_2[X]$ non constants qui ne soient pas scindés.

3 En déduire qu'il existe des matrices dans $\mathcal{M}_2(K)$ non trigonalisables.

Exercice 1054 – *Caractérisation de nilpotence par nullité de traces (Petites Mines MP 2015)* 1

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie vérifiant $\mathrm{tr}(u^k) = 0$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$. Montrer que u est nilpotent. Réciproque ?

Exercice 1055 – *Dimension de noyaux et polynôme caractéristique (Centrale MP 2015)* 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère u un endomorphisme de E. On note χ le polynôme caractéristique de u

1 Soient V et W deux sous espaces de E stables par u et tels que $E = V \bigoplus W$. En notant χ' (resp. χ'') le polynôme caractéristique de u_V (resp. u_W), montrer $\chi = \chi'\chi''$.

2 On note $\chi = \prod_i P_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de χ. Montrer que pour tout i, $\dim(\ker(P_i^{\alpha_i}(u)) = \alpha_i \deg P_i$.

3 Si le polynôme minimal de u est χ, montrer que pour tout $k \leqslant \alpha_i$, $\dim(\ker(P_i^k(u)) = k \deg P_i$.

6. Non diagonalisabilité

Exercice 1056 – *Matrice réelle de polynôme minimal $X(X-1)^2$ (Navale MP 13)* 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A - I_n)^2 \neq 0$, $A(A - I_n) \neq 0$ et $A(A - I_n)^2 = 0$.

1 Montrer que $\mathrm{Sp}\, A = \{0, 1\}$.

2 Montrer que A n'est pas diagonalisable.

3 Pour $n = 3$, donner un exemple de matrice vérifiant ces hypothèses.

Exercice 1057 – *Représentation matricielle de $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\chi_v = \mu_v = (X-1)^3$* 0

(Centrale PSI 10) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim(\ker(u)) = 1$, $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

1 Montrer $\ker(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

2 Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$.

3 Montrer qu'il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de polynôme caractéristique $(X-1)^3$ et tel que $(v - \mathrm{Id})^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle v est représenté par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1058 – *Écriture matricielle d'un endomorphisme (CCP MP 2015)* 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1 Que peut-on dire du déterminant de u ?

2 De son polynôme minimal ?

3 L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

4 Soit $x \in E$, $x \neq 0$ et $F = Vect(x, u(x))$. Déterminer la dimension de F et montrer que F est stable par u.

5 Soit $y \notin F$ et $G = Vect(y, u(y))$. Montrer que $E = F \oplus G$

6 Montrer que E admet une base de la forme $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2))$ et donner la matrice de u dans une telle base.

Exercice 1059 – *Cas particulier de réduction de Jordan (ENSEA MP 2015)* 3

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1 Montrer que son polynôme caractéristique est $(X-1)^2(X+1)$.

2 Est-elle diagonalisable ?

3 Montrer qu'elle est semblable à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1060 – *Réduction de Frobénius simultanée dans un cas de non codiagonalisabilité* 3

Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^2 = B^2 = I_2$, $AB + BA = 0$. Montrer l'existence de $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Sous-espaces stables

Endomorphisme induit

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit enfin $m \in [\![1, n-1]\!]$. On peut considérer la matrice A' extraite de A en n'en conservant que les m premières lignes et colonnes, et écrire A par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)$$

Soit v l'endomorphisme du sous-espace vectoriel $F \overset{def}{=} \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$ de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans $(e_1, \ldots, e_m)$ est A'.

Cette construction a un sens, mais elle n'a que peu de lien avec l'endomorphisme de départ u. Par exemple, il n'y a aucune raison à ce que v soit bijectif si u l'est, et v^2 n'a *a priori* aucun rapport avec u^2. 84

Si, matriciellement, la considération de A' peut sembler naturelle, il n'y a pas d'interprétation géométrique simple de A' (hormis justement dans le cas où F est stable par u, *i.e.* le bloc matriciel C' sous A' dans A est nul).

On peut cependant noter que si $M = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline 0 & D' \end{array}\right)$, alors pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$Q(M) = \left(\begin{array}{c|c} Q(A') & \star \\ \hline 0 & Q(D') \end{array}\right)$$

Bien que D' n'ait pas d'interprétation géométrique simple (sauf si B' est nulle), ce bloc se comporte bien avec la multiplication matricielle.

Exercice 1061 – *Par quelles opérations la notion de sous-espace stable est-elle stable ?* 4

On considère deux endomorphismes u et v de E, F un sous-espace vectoriel de E.

1 Montrer que la somme et l'intersection de deux sous-espaces vectoriels stables par u le sont encore.

2 Montrer que si F est stable par u et v, alors il l'est par $u \circ v$, et par toute combinaison linéaire de u et v.

3 Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E stabilisant F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 1062 – *Quand un endomorphisme laisse-t-il stable tout sous-espace ?* 4

On suppose que u laisse stable tout sous-espace vectoriel de E. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 1063 – *Comment caractériser les sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable ?* 4

On suppose u diagonalisable. Montrer que F (sous-espace vectoriel non trivial de E) est stable par u si et seulement si il admet une base de vecteurs propres.

Exercice 1064 – *Semi-simplicité et diagonalisabilité* 2

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Exercice 1065 – *Recherche de sous-espaces stables (Mines MP 2015)* 3I

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $B_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -\lambda \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par B_λ.

Exercice 1066 – *Sous-espaces stables d'une matrice compagnon* 3

(ENSAM) Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et A sa matrice dans la base canonique.

1 Montrer que la droite engendrée par un vecteur non nul u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Montrer que le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par f si et seulement si le vecteur ${}^t(a, b, c)$ est vecteur propre pour ${}^tA$.

3 Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

(1) f admet une unique droite stable.

(2) f admet un unique plan stable.

(3) Le polynôme caractéristique de f admet une seule valeur propre réelle, de multiplicité 1 ou 3, et l'espace propre correspondant est une droite.

4 Déterminer les sous-espaces stables par f quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Crochet de lie

Exercice 1067 – *Crochet de Lie (Centrale MP 2015)* 3

Soit E un K-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'opérateur suivant : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$

1 Ici, $E = K[X]$ et $f(P) = P'$, $g(P) = XP$. Calculer $[f, g]$.

2 On suppose que E est de dimension finie et qu'il existe $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[f, g] = \mathrm{Id}_E$. Montrer $\forall P \in K[X], [f, P(g)] = P'(g)$.

3 On suppose encore E de dimension finie. En considérant $(g^k)_{k \in N}$, montrer que l'on ne peut pas avoir $f, g \in L(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 1068 – *Vecteur propre pour un crochet de Lie* 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) de dimension n, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v - v \circ u = kv$, où $k \in \mathbb{K}^*$.

1 Montrer que v n'est pas inversible.

2 Montrer que pour tout p, $u \circ v^p - v^p \circ u = pkv^p$.

3 Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{rg}(v^q) = \mathrm{rg}(v^{q+1})$.

4 Montrer que v est nilpotent.

5 Retrouver ce résultat directement par l'absurde.

9. Endomorphismes cycliques, matrice compagnon

Exercice 1069 – *Matrice diagonale à termes diagonaux distincts* 0

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts. Montrer que $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une base de l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 1070 – *Recherche des racines carrées d'une matrice à spectre scindé simple (ENSEA MP 2015)* 2

1 Soit $A \in M_n(R)$. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes. On pose $B \in M_n(R)$ telle que $B^2 = A$. Montrer que B est diagonalisable.

2 Résoudre $B^2 = A$ pour $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1071 – *Matrice compagnon (Petites Mines MP 2015)* 2

1 Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et M la matrice dont les coefficients valent $m_{i,j} = a_{j-1}$ si $i = n$, 1 si $j = i + 1$, 0 sinon. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres sont simples. En déduire les vecteurs propres en fonction de leur valeur propre associée.

2 Soit une suite complexe (v_n) vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = 3v_{n+1} + 2v_n$. Déterminer v_n en fonction de n.

CHAPITRE XXX

Variables aléatoires discrètes (TD)

Sommaire

1. Ensembles finis

1.1. Dénombrement

Exercice 1072 – *Dénombrement concret* 0

1 Soit $E = [\![1, 6]\!]$. Combien peut-on former de nombres différents avec trois chiffres distincts choisis dans E ? Quelle est la somme de ces nombres ?

2 Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 5 boules noires numérotées de 1 à 5. On tire successivement 4 boules sans remise. Combien de résultats amènent 3 boules blanches et une boule noire ?

3 Combien y a-t-il de mots :
- **i** de 6 lettres écrits avec les lettres A à F ?
- **ii** de 5 lettres écrits avec deux A et trois B ?
- **iii** de 6 lettres écrits avec exactement deux A et trois B ?
- **iv** de 6 lettres écrits avec deux A, trois B, un C ?

4 Combien existe-t-il d'anagrammes du mot chaise ? d'anagrammes du mot anagramme ?

5 Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.
- **i** Quel est le nombre de mains possibles ?
- **ii** Combien de mains contiennent au moins un as ?
- **iii** Combien contiennent exactement un roi ?
- **iv** Combien contiennent au moins un coeur ou une dame ?
- **v** Combien ne contiennent que des cartes de 2 couleurs au plus ?

6 Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.
- **i** Combien y a t-il de tirages possibles ?
- **ii** Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?
- **iii** Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
- **iv** Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

Exercice 1073 – *Dérangements* 1

Soit E un ensemble fini non vide. On appelle *dérangement* de E toute permutation f de E sans point fixe, c'est-à-dire telle que :

$$\forall k \in E, \quad f(k) \neq k$$

Bien entendu, le nombre de dérangements d'un ensemble fini ne dépend que de son cardinal.

Pour tout entier naturel non nul n, on note Der_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$, et d_n son cardinal.

1 Soit n un entier naturel non nul. Donner le cardinal de l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

2 Calculer d_1 et d_2.

3 On fixe un entier naturel $n \geqslant 3$, et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on considère les ensembles

$$X_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = f(n) = k\} \quad \text{et} \quad Y_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = k, f(n) \neq k\}$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer les cardinaux de X_k et de Y_k en fonction de d_{n-2} et d_{n-1}.

Indication : on pourra établir une bijection entre Y_k et Der_{n-1}.

4 En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la formule :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

5 Montrer, pour tout $n \geqslant 2$:

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

6 En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$d_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

Exercice 1074 – *Nombre d'applications (strictement) croissantes* 2

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1 Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

2 Combien y a-t-il d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice 1075 – *Formules de convolution de Vandermonde* 3

1 Montrer :

$$\forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}.$$

2 En déduire une expression plus simple de $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Exercice 1076 – *Dénombrement lié à des parties* 3

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\text{Card}\left\{(A, B) \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])^2, A \subset B\right\}.$$

2 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Calculer

$$\sum_{A \subset E} \text{Card}(A), \quad \sum_{A,B \subset E} \text{Card}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \sum_{A,B \subset E} \text{Card}(A \cup B).$$

Exercice 1077 – *Décomposition d'un entier en somme* 3D

On fixe un entier $n \geqslant 1$, et $p \in [\![1, n]\!]$. Calculer :

$$\text{Card}\{(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{N}^p, a_1 + \cdots + a_p = n\}.$$

Exercice 1078 – *Divers dénombrements d'ensembles d'applications (X MP 10)* 3

Soit X et Y deux ensembles finis. Dénombrer :

1 Les fonctions de X dans Y.

2 Les injections de X dans Y.

3 Les bijections de X sur Y.

4 Les surjections de X sur Y.

Exercice 1079 – *Dénombrement de relations binaires* 3D

1 (Mines MP 93) Soit E un ensemble à n éléments. Trouver le nombre de relations binaires sur E. Combien d'entre elles sont réflexives ? symétriques ? réflexives et symétriques ?

2 (X MP 90) Soit A un ensemble de cardinal n, R une relation d'équivalence sur A avec k classes. Soit m le cardinal du graphe de R. Montrer que $n^2 \leqslant km$.

Exercice 1080 – *Parties donnant une intersection fixée avec une partie fixée* 3

(Mines PSI 08, X PC 08) Soit E un ensemble fini, A et B des parties de E.

1 Combien y a-t-il de parties X de E telles que $A \cup X = B$?

2 Soit E un ensemble de cardinal n et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Déterminer le nombre de $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \cap X = B$.

Exercice 1081 – *Banque CCP 2016 112* 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1 Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

2 Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

3 Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

1.2. Probabilités élémentaires

Exercice 1082 – *Probabilités sur les cartes* 0

1 Au Tarot, à cinq joueurs, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un bout dans une main ? *On rappelle qu'un jeu de Tarot est constitué de* 78 *cartes dont* 3 *cartes appelées « bout », et qu'à* 5 *joueurs, les mains sont de* 15 *cartes.*

2 On considère un jeu de 52 cartes dont on pioche 5 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un full (3 cartes d'une même hauteur et 2 autres d'une autre et même hauteur) ?

Exercice 1083 – *Probabilités sur les dés* 0

1 On lance deux dés équilibrés. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ces deux dés donne un nombre pair est égale à $\frac{3}{4}$.

2 On lance un dé équilibré 2 fois de suite.
- **i** Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8 ?
- **ii** Il y a 11 sommes possibles. Pourquoi la réponse à la question précédente n'est-elle pas $\frac{1}{11}$?

3 On lance 3 dés distincts. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 faces identiques ? Et 3 faces distinctes ?

4 On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la troisième fois. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
- **i** A_n : « le troisième 6 apparait au n-ième lancer » (où $n \geqslant 3$)
- **ii** B_n : « au n-ième lancer le troisième 6 n'est toujours pas apparu » (où $n \geqslant 3$)
- **iii** C : « le troisième 6 n'apparait jamais. »

5 On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la quatrième fois. Déterminer la probabilité de l'événement A_n : « le quatrième 6 apparait au n-ième lancer » (où $n \geqslant 4$).

Exercice 1084 – *Probabilités sur les chaussettes* 0

1 Un tiroir contient 15 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 6 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :
- **i** 3 paires complètes ?
- **ii** au moins une paire ?
- **iii** exactement une paire ?

2 Un tiroir contient n chaussettes dont 3 rouges. Quelle doit être la valeur de n pour qu'en prenant au hasard 2 chaussettes, la probabilité qu'on obtienne 2 chaussettes rouges soit égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 1085 – *Probabilités diverses* 0

1 On range les 20 tomes d'une encyclopédie sur une étagère, complètement au hasard. Quelle est la probabilité que les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

2 Une loterie compte 1000 billets dont 2 gagnants. Combien faut-il acheter de billets, pour avoir au moins une chance sur deux de gagner quelque chose ?

3

i On choisit au hasard une partie à 3 éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 3$. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

– A : « la partie contient 1 et 2 »
– B : « la partie ne contient ni 1 ni 2 »
– C : « la partie contient 1 ou 2 »

ii Reprendre les trois questions précédentes, lorsque l'on choisit au hasard une partie quelconque de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 3$.

Exercice 1086 – *Les délices de la randonnée* 0

Un randonneur emporte 6 rations, prises au hasard dans un stock de 18 rations, 6 avec un menu A, 6 avec un menu B, et 6 avec un menu C. Quelle est la probabilité que les 6 rations emportées soient composées d'exactement deux menus A, deux menus B, et deux menus C ? Quelle est la probabilité que les six rations soient toutes d'un même menu ?

Exercice 1087 – *9 avant 7* 0

On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la somme des points indiqués par les deux dés. Calculer la probabilité de l'événement E : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un 9 a lieu avant la première obtention d'un 7.*

Exercice 1088 – *Le paradoxe du chevalier de Méré* 2

1 Si l'on jette 4 fois un dé à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

2 Maintenant on jette 24 fois deux dés à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un double 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

Exercice 1089 – *Jetons (CCP MP 2015)*

On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9. On considère une matrice carrée d'ordre 3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p pour que le déterminant de la matrice soit impair.

1 Question préliminaire. Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 2$. Montrer que la classe du déterminant de A modulo 2 est égale à la classe du déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes $r_{i,j}$ de la division euclidienne de $a_{i,j}$ par 2.

2 On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\mathrm{Card}(\mathcal{M})$.

3 On définit $\Omega = \{M \in \mathcal{M},\ \det(M) \text{ impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair. Donner une relation entre $\mathrm{Card}(\Omega)$ et $\mathrm{Card}(\Delta)$.

4 Détermination de $\mathrm{Card}(\Delta)$.

i Déterminer le nombre K_1 des matrices de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1.

ii Déterminer le nombre K_2 des matrices de Δ dont deux colonnes possèdent exactement un coefficient nul.

iii Calculer $\mathrm{Card}(\Delta)$.

iv En déduire $\mathrm{Card}(\Omega)$.

5 Déterminer la probabilité p.

1.3. Divers

Exercice 1090 – *Parties disjointes de même somme* 3

Soit S un ensemble de 10 entiers distincts choisis parmi les nombres $1, 2, \ldots, 99$. Montrer que S contient toujours deux sous-ensembles disjoints dont la somme de leurs éléments respectifs est la même.

Exercice 1091 – *Monoïde fini et régulier* 1

On appelle *monoïde* un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre pour cette loi. Montrer qu'un monoïde fini et régulier (*i.e.* tout élément est simplifiable à gauche et à droite) est un groupe.

Exercice 1092 – *Utilisation du principe des tiroirs* 2

Soit n un entier naturel non nul. On choisit $n+1$ nombres quelconques (distincts deux à deux) dans $[\![1, 2n]\!]$. Montrer qu'il en existe deux qui sont premiers entre eux. Montrer qu'il en existe deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 1093 – *Nombre de zéros* 3

Par combien de zéros se termine le nombre $1000000!$?

Exercice 1094 – *Trois calculs d'une même somme (X MP 08)* 3

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ par trois méthodes différentes.

2. Dénombrabilité, ensembles infinis

Exercice 1095 – *Théorème de Cantor* 3

Montrer que pour tout ensemble X, X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents.
Indication : étant donné $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$, on pourra montrer que φ n'est pas surjective en considérant

$$F \stackrel{def}{=} \{x \in X, x \notin \varphi(x)\}$$

Exercice 1096 – *Théorème de Cantor-Bernstein* 3D

Soit X et Y deux ensembles non vides. On suppose qu'il existe une injection f de X vers Y, et une injection g de Y vers X. Il s'agit de montrer que X et Y sont équipotents (c'est le *théorème de Cantor-Bernstein*).

1 Traiter le cas où $f(X) = Y$.
On suppose dans la suite que $f(X) \neq Y$, et on note $\varphi = f \circ g$. On définit par récurrence les ensembles $A_0 = Y \setminus f(X)$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \varphi(A_n)$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

2 Montrer que A est stable par φ.

3 Montrer que les termes de (A_n) sont deux à deux disjoints.

4 Soit $y \notin A$. Montrer qu'il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

5 Soit $x \in X$. Montrer que si $f(x) \in A$, alors $x \in g(A)$.

6 On définit la fonction $h : Y \to X$ par $h(y) = g(y)$ si $y \in A$ et $h(y)$ est l'unique antécédent de y par f si $y \notin A$.
 i Montrer que h est bien définie.
 ii Montrer que h est injective.
 iii Montrer que h est surjective.

7 Conclure.

Exercice 1097 – *Points sous la première bissectrice d'une permutation de* $\mathbb{N}$ 3D

(ENS MP 10) Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective et $A = \{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \geqslant n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) < n\}$.

1 Est-il possible que A soit infini et B fini ?

2 Est-il possible que A et B soient infinis ?

3 Est-il possible que A soit fini et B infini ?

Les cardinaux comme classes d'équivalence

La notion de cardinal (éventuellement infini) revient à celle de classe d'équivalence pour la relation d'équipotence, dans un ensemble Ω fixé d'ensembles. Étant donné deux éléments A et B de Ω, on note $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(B)$ s'il existe une injection de A dans B. On définit ainsi une relation d'ordre sur l'ensemble des classes d'équivalence [a] de Ω pour l'équipotence.
Même si nous sommes tentés d'écrire $\mathrm{Card}(A) = \infty$ si A est infini, nous allons voir que les ensembles infinis n'appartiennent pas tous à la même classe d'équivalence (*i.e.* ne sont pas nécessairement équipotents), et donc qu'il y a plusieurs cardinaux infinis. D'ailleurs, l'exercice 1095 permet de montrer que si A est un élément de Ω, et si $\mathcal{P}(A)$ appartient aussi à Ω, alors $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$. 85
Le théorème de Cantor-Bernstein est intéressant d'un point de vue théorique, mais en pratique, nous nous intéresserons principalement à des ensembles au plus dénombrables, pour lesquels il est inutile d'y avoir recours.

a. La partie difficile à établir, *i.e.* l'antisymétrie, consistant précisément en le théorème de Cantor-Bernstein.

Exercice 1098 – *Cardinal du lieu de discontinuité d'une fonction monotone* 3D

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble Ω des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
Indication : on pourra construire (pas de façon explicite) une injection de Ω dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 1099 – *Droite évitant un nombre dénombrable de points* 3

Soit (A_n) une suite de points du plan, tous distincts de l'origine. Montrer l'existence d'une droite passant par l'origine, et ne passant par aucun des points A_n.

Exercice 1100 – *Fonction continue passant d'un rationnel à un irrationnel, et réciproquement* 3

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 1101 – *Dessiner des 8 dans le plan* 3

Montrer qu'on peut [1] dessiner un nombre non dénombrable de O disjoints dans le plan, mais qu'on ne peut dessiner qu'un nombre au plus dénombrable de 8 disjoints dans le plan.

Exercice 1102 – *Enlever un nombre dénombrable de points à un ouvert dense* 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit U est un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$. Soit X est une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $U \setminus X$ est dense. Est-ce nécessairement un ouvert ?

Exercice 1103 – *Existence non constructive de nombres transcendants* 5

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques (*i.e.* qui sont racines d'un polynôme non nul à coefficients rationnels) sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Qu'en déduire sur l'ensemble des nombres complexes transcendants ?

1. Enfin, façon de parler ...

3. Familles sommables, produit de Cauchy

Famille sommable indexée par un ensemble infini non dénombrable (hors programme) 86

On pourrait définir la notion de famille sommable indexée par un ensemble infini non nécessairement dénombrable. Y gagnerait-on beaucoup ?
Considérons une famille sommable $(u_k)_{k\in K}$ de réels positifs ou nuls. Soit $K' = \{k \in K, u_k > 0\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\Omega_n = \left\{k \in K,\ u_k > \frac{1}{n}\right\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la famille $(u_k)_{k\in K}$ étant sommable, Ω_n est fini. Or

$$K' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n,$$

donc K' est au plus dénombrable : les u_k sont nuls, sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'indices.
Par conséquent, pour notre étude, il n'y avait pas grand intérêt à définir la notion de famille sommable sur un ensemble non dénombrable.

Exercice 1104 – *Familles sommables et calculs de somme* 2

1 Existence et calcul de

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

2 Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}$.

Exercice 1105 – *Une famille non sommable* 2

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_{n,n} \overset{def}{=} 0$, et, si $n \neq p$: $a_{n,p} \overset{def}{=} \frac{1}{n^2-p^2}$.

1 Montrer que la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

2 Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Exercice 1106 – *Sommabilité d'une série double de termes positifs* 1

Étudier la sommabilité de $\left(\frac{1}{(i+j)^p}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ où $p > 0$, et calculer sa somme le cas échéant.

Indication : on pourra poser, pour tout $n \geqslant 2$

$$I_n \overset{def}{=} \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, i+j = n\}$$

Exercice 1107 – *Sommation par paquets et fonction zêta de Riemann* 2

Montrer que

$$\sum_{p=2}^{\infty}(\zeta(p)-1) = 1$$

Exercice 1108 – *Famille sommable complexe* 0

Soit $x, y \in \mathbb{C}$, où $|x| < 1$ et $|y| < 1$. Montrer que la famille $\left(x^i y^j\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 1109 – *Une sommabilité arithmétique (Centrale MP 99)* 3

Étudier $\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*, p\wedge q=1}\frac{1}{p^2q^2}$. On donne $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 1110 – *Études diverses de sommabilité* 3

1 (Mines MP 00) Pour quelles valeurs du réel α la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?

2 (Mines MP 98) Trouver un équivalent simple de $s_n = \frac{1}{n^3}\sum_{p,q\in[\![1,n]\!]}\frac{pq}{p+q}$.

3 (Mines MP 98) Calculer

$$\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}}\frac{1}{k(2k+1)(2n)^{2k}}$$

4 (Mines MP 97) Sommabilité et somme de $\left(\frac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$.

5 (Mines MP 92) Nature de la série $\sum n^\alpha \sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2$.

Exercice 1111 – *TPE-EIVP MP 2015* 3

1 Montrer que la série double de terme général $u_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q)^2}$, avec $(p,q)\in\mathbb{N}^*$, diverge.

2 Étudier la série double de terme général $v_{p,q} = \dfrac{1}{p^2+q^2}$, avec $(p,q)\in\mathbb{N}^*$

Exercice 1112 – *Mines MP 2015* 3

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Les familles $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ et $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ sont-elles sommables ?

Exercice 1113 – *Somme d'une série grâce à un produit de Cauchy* 0

Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Calculer à l'aide d'un produit de Cauchy (et en cas d'existence) de $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\alpha^n$.

Exercice 1114 – *Exponentielle d'une somme de matrices* 1 et 5 ?

Soit $A, B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1 On suppose que A et B commutent. Montrer qu'alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

2 Montrer que ce résultat tombe en défaut si on ne suppose plus que A et B commutent.

Exercice 1115 – *Le produit de Cauchy de deux séries convergentes dont l'une est ACV est-il convergent ? (Théorème de Mertens)* 4D

Montrer que si les deux séries de nombres complexes $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et une au moins converge absolument, alors leur produit de Cauchy converge, et que sa somme est le produit des sommes.

Exercice 1116 – *Produit de Cauchy de séries divergentes* 3

Le produit de Cauchy de deux séries divergentes est-il nécessairement divergent ? Que dire si les deux séries sont en outre de termes généraux strictement positifs ?

Exercice 1117 – *Étude difficile de famille sommable* 3D

(X MP 97) Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}_+$.

1 On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge.
Montrer que $\sum k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}$ converge, et comparer sa valeur à $\sum a_n$.

2 On suppose que $\sum\sqrt{n}a_n$ converge, et on pose $w_n = \sum_{p=n}^{\infty}a_p^2$. Montrer l'existence de w_n et la convergence de la série de terme général $\sqrt{\frac{w_n}{n}}$.

4. Espaces probabilisés, événements

Notion de tribu engendrée (hors programme)

On pourrait définir la notion de *tribu engendrée* par une famille de parties de Ω, ou par un ensemble de parties de Ω, comme la plus petite tribu, au sens de l'inclusion, possédant les termes de la famille ou contenant cet ensemble.
On montre son existence en observant qu'une intersection de tribus est une tribu.
Par exemple, si A est une partie de Ω, la tribu engendré par A est $\{\emptyset, \Omega, A, \Omega \setminus A\}$.
On peut remarquer que la tribu sur Ω engendrée par les singletons n'est pas toujours $\mathcal{P}(\Omega)$: en effet, cette tribu est constituée des parties de Ω qui sont au plus dénombrables, ou dont le complémentaire dans Ω est au plus dénombrable : ce n'est pas $\mathcal{P}(\Omega)$ si Ω est infini non dénombrable. 87

Exercice 1118 – *Banque CCP 2016 101* 2

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1
i Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
ii Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
i Justifier, sans calculs, que la matrice A est diagonalisable.
ii Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
iii Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
Remarque : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

3 Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 1119 – *Banque CCP 2016 105* 2

1 Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2 On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
i On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
ii Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
iii Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 1120 – *Banque CCP 2016 107* 2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1 Calculer p_1.

2 Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.

3 En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 1121 – *Calcul de sommes de probabilités (Mines MP 2015)* 2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1 Soient A_1 et A_2 dans $\mathcal{T}$. Calculer $P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cup \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})$.

2 Soient $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathcal{T}$. On pose $\Gamma \overset{def}{=} \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$. Calculer $\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma} P(B_1 \cup \cdots \cup B_n)$.

Exercice 1122 – *De combien $P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$ peuvent-ils différer (ENS Cachan Rennes MP 2015) ?* 4

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que $|P(A\cap B) - P(A)P(B)| \leqslant 1/4$. Caractériser l'égalité.

Exercice 1123 – *Probabilité et danse par couples (Mines MP 2015)* 3

Soit n couples (homme/femme) de danseurs. Lorsque la musique change, les membres des couples doivent trouver un nouveau partenaire du sexe opposé. Déterminer la probabilité que tous les couples nouvellement formés soient différents des couples initiaux. Limite quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 1124 – *Probabilité d'appartenir à k termes d'une famille d'événements (ENS Paris MP 2015)* 3D

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note C_k l'événement « appartenir à A_i pour au moins k valeurs de l'indice i ». Montrer que $\prod_{k=1}^n P(C_k) \leqslant \prod_{k=1}^n P(A_k)$.

Exercice 1125 – *Propagation d'une rumeur* 2

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1 - p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1 Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

2 En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

3 En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 1126 – *Dérangements à Noël* 3

Les n invités d'un repas de Noël déposent un cadeau au pied du sapin. L'hôte prend l'initiative de distribuer au hasard un cadeau à chacun de ses invités. Quelle est la probabilité que personne ne reçoive le cadeau qu'il a amené ?

Exercice 1127 – *Cible* 3

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel.

On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1 Déterminer la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.

2 Montrer que Z suit une loi binomiale, et donner ses paramètres. Donner son espérance et sa variance. On note $Y = Z - X$.

3 Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.

4 Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1128 – *Lemme de Borel-Cantelli et loi du zero-un de Borel* 1

Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $pn = P(An)$ On note B l'événement

$$B \overset{def}{=} \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$

c'est-à-dire

$$B = \{\omega \in \Omega, \mathrm{Card}(n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n) = \infty\}$$

1 On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
C'est le *lemme de Borel-Cantelli.*

2 On suppose que les événements A_n sont indépendants et que la série $\sum P(A_n)$ diverge.

i Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à

$$\bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}$$

ii Exprimer $P(\cap_{k=n}^{m} \overline{A_k})$ en fonction des p_k.

iii Montrer que la série $\sum \ln(1 - p_k)$ est divergente.

iv En déduire que $P(B) = 1$.

Ainsi, si $\sum P(A_n)$ diverge (resp. converge), alors $P(B) = 1$ (resp. $P(B) = 0$) : c'est la *loi du zero-un de Borel* (également appelée *second lemme de Borel-Cantelli*).

3 Soit α un réel strictement positif et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, X_n suive la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$.

i Montrer que $E(X_n) \to_n 0$.

ii On suppose que $\alpha \in]0, 1[$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n, X_n = 1\}$ est infini.

iii On suppose que $\alpha > 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n, X_n = 1\}$ est fini.

5. Conditionnement et indépendance

Exercice 1129 – *Test sanguin* 0

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte la présence de cette maladie chez 99% des malades. Mais le test donne un résultat faussement positif chez 0,2% des personnes saines testées.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 1130 – *Indépendances et dés* 0

On lance deux dés équilibrés et on considère les évènements A « le premier dé donne un nombre pair », B « le second dé donne un nombre pair » et C « les deux dés donnent des nombres de même parité ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? Même question avec A et C, avec A et $B \cap C$ et avec $B \cup C$.

Exercice 1131 – *Indépendance et boules* 0

1 Une urne contient 20 boules blanches et 30 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que la première soit noire, la deuxième blanche, et la troisième noire ?

2 Deux urnes U_1 et U_2 contiennent au départ chacune 12 boules blanches et 13 boules noires. On tire une boule de U_1, on note sa couleur, et on la met dans U_2. On tire alors dans U_2. Quelle est la probabilité de tirer deux fois une boule noire ?

3 L'urne 1 contient 10 boules blanches et 2 boules noires. L'urne 2 contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On choisit, au hasard, l'une de ces 2 urnes indiscernables et on pioche 2 boules dans cette urne.

i Quelle est la probabilité que les 2 boules tirées soient blanches ?

ii L'expérience est réalisée, et les 2 boules tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit la 1 ?

Exercice 1132 – *Indépendance et lancers d'une pièce* 0

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement « obtenir Pile au k-ème lancer » et $A_k = P_k \cap \overline{P_{k+1}}$. La famille $(A_k)_k$ est-elle une famille d'événements mutuellement indépendants ? d'événements indépendants deux à deux ?

Exercice 1133 – *Jeu télévisé* 0

Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir une question de repêchage, en tirant un papier au hasard parmi trois papiers.

Il a une question facile (3 chances sur 4 de donner la réponse exacte), une question moyenne (2 chances sur 5), et une question difficile (1 chance sur 5).

Sachant que le candidat a donné la réponse exacte à la question qu'il a tirée, quelle est la probabilité conditionnelle que la question tirée ait été la question facile ?

Exercice 1134 – *De l'arithmétique à l'aide de probas* 2

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout entier $m \leqslant n$, on note A_m l'événement "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \ldots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1 Exprimer B en fonction des A_{p_k}.

2 Pour tout $m \leqslant n$ qui divise n, calculer la probabilité de A_m.

3 Montrer que les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

4 En déduire la probabilité de B.

5 Application : on note $\phi(n)$ le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Exercice 1135 – *Sauterelles à foison* 3

On considère une sauterelle se déplaçant par sauts successifs sur les trois sommets A, B et C d'un triangle. Au début de l'expérience, on la place sur le sommet A et ensuite elle se déplace de la manière suivante :

– si elle se trouve en A, elle saute sur l'un des trois sommets de façon équiprobable,
– si elle se trouve en B, alors elle fait un saut sur place,
– si elle se trouve en C, alors elle fait un saut sur place une fois sur trois, et elle saute en B sept fois plus souvent qu'en A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'évènement : « au n-ème saut la sauterelle choisit le sommet A (resp. B et C) » et on note a_n, b_n et c_n leur probabilité respective.

1 Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1}.

2 Exprimer c_{n+2} en fonction de c_n et c_{n+1}.

3 En déduire une expression de c_n en fonction de n.

4 Étudier la convergence des suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ et $(c_n)_n$.

Exercice 1136 – *Prisonniers* 3

Trois prisonniers sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux va voir le gardien et lui demande : « Je sais bien que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté ». Le gardien réfléchit, se dit que de toutes manières au moins l'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute. Le prisonnier lui répond alors : « Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux. » A-t-il raison de croire que sa probabilité d'être exécuté a varié ?

Exercice 1137 – *Lancers de pièces* 3

On dispose de deux pièces d'apparence identique, la pièce A donnant Pile avec la probabilité $a \in]0,1[$, et la pièce B donnant Pile avec la probabilité $b \in]0,1[$.

Pour le premier lancer, on choisit une pièce au hasard, et pour les lancers suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, et si on obtient Face, on change de pièce pour le lancer suivant.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement « le k-ème lancer se fait avec la pièce A » et E_k l'évènement « le k-ème lancer donne Pile ».

1 Déterminer une relation entre $P(E_k)$ et $P(A_k)$.

2 Déterminer une relation entre $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.

3 En déduire $P(A_k)$ puis $P(E_k)$.

Exercice 1138 – *Banque CCP 2016 110* 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1 Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
On note R_X son rayon de convergence.

i Prouver que $R_X \geqslant 1$.
On pose alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.
Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

ii Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2

i On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

ii Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice 1139 – *Divisibilité et probabilités (Mines MP 2015)* 3I

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X = n) = \dfrac{1}{\zeta(a) n^a}$, où a est un réel strictement plus grand que 1.

1 Justifier la cohérence de la définition de la loi de probabilité.

2 À quelle condition X admet-elle une espérance ? La calculer et en donner un équivalent quand a tend vers $+\infty$.

3 Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $A_i = \{n \in \mathbb{N}^*,\ i \text{ divise } n\}$. Calculer $P(X \in A_i)$. À quelle condition les A_i sont-ils indépendants ?

4 Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers (distincts ?) et $C_r = \{n,\ \forall i \in [\![1, r]\!],\ p_i \text{ ne divise pas } n\}$. Calculer $P(X \in C_r)$. Que dire quand r tend vers $+\infty$?

6. Espérance, variance, moments

Exercice 1140 – *Voulez-vous jouer ?* 0

On vous propose de jouer, autant de fois que vous le voulez, à un jeu. Selon la situation, acceptez-vous de jouer ?

1 Vous lancez un dé : si vous obtenez 6, vous gagnez 6 euros, et perdez 1 euro sinon.

2 Vous lancez deux dés, et vous gagnez 5 euros si vous sortez 7, et perdez 1 euro sinon.

3 Vous lancez deux dés : si vous obtenez un double i, vous gagnez i euros. Sinon, vous perdez 1 euro.

Exercice 1141 – *Un professeur sévère* 0

Un professeur a la réputation d'avoir un écart-type supérieur à sa moyenne. Cela est-il possible ? (le professeur ne donne pas de notes strictement négatives)

Exercice 1142 – *Dé truqué* 0

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1 Déterminer la loi de X, calculer son espérance.

2 On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 1143 – *Comparatif de deux indicateurs de dispersion* 2

Soit σ_X l'écart type d'une variable aléatoire X, et l'écart moyen $\sigma = E(|X - E(X)|)$.
Comparer σ et σ_X et traiter le cas d'égalité.

Exercice 1144 – *Calculs d'espérance et de variance* 0

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit X une v.a. à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{\beta}{k+1}.$$

Déterminer β, $E(X)$, et $V(X)$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On définit la v.a. Y de la façon suivante :
– Si $X = k$ avec $k > 0$, alors $Y = k$.
– Si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque avec équiprobabilité dans $\{1, ..., n\}$.
Déterminer la loi et l'espérance de Y.

3 On tire n boules dans une urne de N boules, numérotées de 1 à N. X est le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 1145 – *Vaches laitières* 2

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec le probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :
– **Première méthode** On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
– **Seconde méthode** On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on fait une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (*i.e.* celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyses). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1 Déterminer la loi et l'espérance de Y_n.

2 En déduire la réponse à la question posée (dépendant de n).

Exercice 1146 – *Première obtention de deux piles consécutifs* 2

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et donc celle d'obtenir face est 1/3. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1 Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.

2 Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}$, $n \geqslant 4$.

3 En déduire l'expression de p_n pour tout n.

4 Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} n q^n$, et calculer alors $E(X)$.

Exercice 1147 – *Deuxième obtention d'un pile* 2

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1 Déterminer la loi de X.

2 Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

3 On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.

4 On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 1148 – *Entropie d'une v.a. finie* 2

Soit X une variable aléatoire discrète prenant la valeur x_i avec probabilité p_i, pour $i = 1, \dots, n$. On définit l'*entropie* de X par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i).$$

1 Calculer $H(X)$ si X est constante.

2 Calculer $H(X)$ si X est équidistribuée.

3 Trouver la valeur maximale de $H(X)$ pour X parcourant l'ensemble des variables aléatoires discrètes prenant au plus n valeurs.

Exercice 1149 – *De jolies inégalités* 2

Soit X une variable aléatoire réelle.

1 Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, strictement croissante, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

2 On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Montrer, pour tous $\varepsilon, \lambda > 0$:

$$P(X - np > n\varepsilon) \leqslant E(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon)))$$

Exercice 1150 – *Inégalité de Cantelli* 2

On se propose de démontrer l'inégalité de Cantelli : si X est une v.a. ayant une espérance m et un écart type σ, on a :

$$\forall t > 0, \quad P(X - m \geqslant t) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$$

1 Vérifier que l'on peut se ramener au cas $m = 0$ (ce que l'on fait désormais).

2 Montrer que pour tout $u \geqslant 0$:

$$P(X \geqslant t) \leqslant P((X+u)^2 \geqslant (t+u)^2) \leqslant \frac{\sigma^2 + u^2}{(t+u)^2}$$

3 Conclure en choisissant une valeur adéquate de u.

Exercice 1151 – *La linéarité de l'espérance via la formule de transfert* 3I

Soit $X, Y \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de transfert à $f : (x,y) \mapsto \lambda x + \mu y$ et $Z = (X,Y)$, retrouver le fait que

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

.

Exercice 1152 – *Une formule pour $E(X)$ dans un cas particulier* 3

1 Soit $N \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire de support inclus dans $[\![0, N]\!]$.
Montrer que : $E(X) = \sum_{k=0}^{N} P(X > k)$.

2 On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N. On effectue un tirage simultané de n boules, et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $E(X)$.

Exercice 1153 – *Calculs d'espérance et variance* 3

1 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$.

2 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$P(X=k) = a\binom{n}{k}$$

Calculer espérance et variance de X.

Exercice 1154 – *Banque CCP 2016 96* 2

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k\geqslant q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in\,]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in\,]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t=1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1 Déterminer la loi de X.

2 Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 1155 – *Calcul d'espérance (ENSEA MP 2015)* 2

1 Soit N dans $\mathbb{N}^*$ et x un réel tel que $|x|<1$. Déterminer le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^{N+1}}$.

2 Soit X une variable aléatoire réelle de loi de probabilité donnée par $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,...,N-1\} = \{k \in \mathbb{N}, k \geq N\}$, $P(X=k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ N-1 \end{pmatrix} p^N(1-p)^{k-N}$. Déterminer $E(X)$.

Exercice 1156 – *Banque CCP 2016 98* 2

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in\,]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1 Donner la loi de X. Justifier.

2 La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

i Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.

ii Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre. **Indication :** on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

iii Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 1157 – *Appels téléphoniques (Mines MP 2015)* 2

Quelqu'un réalise des appels téléphoniques vers r destinataires. La probabilité que le destinataire décroche est $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'appels nécessaires pour contacter les r destinataires. Calculer G_X, $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 1158 – *Banque CCP 2016 100* 2

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1 Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

2 Calculer λ.

3 Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.

4 X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice 1159 – *Banque CCP 2016 102* 2

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1 Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.

2 On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$.
c'est à dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».

i Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.

ii Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Exercice 1160 – *Banque CCP 2016 104* 2

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules .
Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1 Préciser les valeurs prises par X.

2

i Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.

ii Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3

i Calculer $E(X)$.

ii Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 1161 – *Banque CCP 2016 109* 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1 Déterminer la loi de X.

2 Déterminer la loi de Y.

Exercice 1162 – *Péage (Petites Mines MP 2015)* 2

On considère un péage composé de m guichets. On note N la variable aléatoire égale au nombre de voitures utilisant le péage en 1 h. La vad N suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Le choix du guichet se fait de manière aléatoire et indépendamment des autres voitures.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures ayant pris le guichet n° 1.

1 Calculer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(X = k | N = n)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

2 Montrer que $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{m}\right)^k \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)^n \dfrac{1}{n!}$.

3 Donner la loi de X.

4 Espérance et variance de X ?

Exercice 1163 – *Réécriture de l'espérance dans un cas particulier (Centrale MP 2015)* 1

Soit Y une variable aléatoire discrète sur (Ω, Γ, P) telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Montrer que Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} P(Y \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas, $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y \geqslant k)$

Exercice 1164 – *Étude asymptotique probabiliste (Centrale MP 2015)* 3

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, Γ, P) admettant une variance et telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X < k)$. Montrer que $S_n \sim n$ et préciser cette propriété asymptotique.

Exercice 1165 – *Loi, espérance, variance (Mines MP 2015)* 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On note Y la var définie par : $Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{Si } X \text{ est paire} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$ Loi, espérance et variance de Y ?

Exercice 1166 – *Moyenne de VAIID (Mines MP 2015)* 2

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p dans $]0,1[$. On pose $(Y_k) = X_k + X_{k+1}$. Donner la loi de Y_k. Calculer l'espérance et la variance de Y_k, ainsi que la covariance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$.

On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Calculer l'espérance et la variance de T_n.

Exercice 1167 – *Fonction génératrice, espérance et variance (Mines MP 2015)* 2

On tire selon l'usage et avec remise une boule parmi 100, dont 20 sont blanches et 80 sont noires. On note X l'instant d'apparition de la troisième boule blanche. Déterminer la fonction génératrice de X, son espérance et sa variance éventuelles.

Exercice 1168 – *Probabilités et intégrales* 3

Soient $\lambda > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre λ/n (à valeurs dans $\mathbb{N}$).

1 Pour $x > 0$, calculer $F(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right)$.

2 Donner une fonction f telle que, pour tout $x \geqslant 0$, $\int_0^x f = F(x)$. Comparer $\lim \frac{E(X_n)}{n}$ et $\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$, puis $\lim \frac{E(X_n)}{n^2}$ et $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$.

3 Soit Y une variable aléatoire telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = F(k+1) - F(k)$. Calculer $E(Y)$ et $E(Y^2)$.

Exercice 1169 – *Inégalité de type Markov (ENS Cachan Rennes MP 2015)* 3

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-1, 1]$, centrée et de variance σ^2, avec $\sigma > 0$.

1 Pour μ dans $\mathbb{R}_+$, justifier $e^{t\mu}P(X \geqslant \mu) \leqslant E(e^{tX})$.

2 Montrer, si $t \in [0,1]$, $E(e^{tX}) \leqslant 1 + \sigma^2 t^2$.

3 Montrer, pour λ dans $[0, 2\sigma]$, $P(X \geqslant \lambda\sigma) \leqslant \exp(-\lambda^2/4)$.

7. Loi d'une variable aléatoire

Exercice 1170 – *Banque CCP 2016 95* 2

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1 Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

i Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

ii Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2 Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

i Déterminer la loi de X.

ii Déterminer la loi de Y.

Exercice 1171 – *Banque CCP 2016 103* 2

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1

i Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

ii En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2 Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X.

Exercice 1172 – *Détermination de lois* 0

Déterminer la loi de la variable aléatoire X, dans les situations suivantes.

1 On range au hasard 10 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.

2 Un fermier a cinq poules, quatre lapins et trois moutons : X est le nombre de pattes de l'animal choisi (au hasard) pour le déjeuner.

3 Un dé cubique équilibré porte un nombre sur chacune de ses faces : -2 sur 3 faces, 1 sur 2 faces, et 4 sur une face. On lance le dé deux fois de suite. X est la somme des points obtenus.

4 Lors d'un vide-grenier, quinze ordinateurs sont mis en vente, dont six sont en panne. Une personne en achète trois au hasard. X est le nombre d'ordinateurs en état de marche achetés par cette personne.

5 Une cible circulaire est composée de 3 zones qui rapportent respectivement $1, 2$ ou 3 points. Elles sont touchées respectivement avec les probabilités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$. Un joueur tire deux fois dans la cible, et l'on suppose que ses deux tirs sont indépendants. X est la somme des points obtenus.

Exercice 1173 – *Nul n'est censé ignorer la loi* 2

Dans chacune des situations ci-dessous reconnaître la loi de X parmi les lois usuelles et préciser son ou ses paramètres.

1 On lance un dé équilibré. On note X le nombre obtenu.

2 On lance un dé équilibré 10 fois de suite. On note X le nombre de 6 obtenus.

3 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On en pioche successivement 3 sans remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

4 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche. On note X le nombre de tirages nécessaire.

5 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue 9 tirages successifs avec remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

Exercice 1174 – *Construction d'une loi* 2

Soit α et β deux réels et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a\frac{\alpha^k+\beta^k}{k!}$.

1 Suivant les valeurs de α et β, discuter l'existence de a pour que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisse définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le cas échéant, déterminer a.

2 Peut-il arriver que X suive une loi de Poisson ?

Exercice 1175 – *Loi de Pascal* 2

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaire pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 1176 – *Variables aléatoires et urnes* 0

On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 3 boules noires et 2 boules blanches et l'urne V contient 4 boules noires et 1 boule blanche.

1 On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, avec remise à chaque fois de la boule tirée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(X = 0)$.

2 On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, sans remise de la boule tirée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(Y = 3)$.

Exercice 1177 – *Quel avion choisir ?* 2

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 1178 – *Sauts (Mines MP 2015)* 2

Une personne effectue une série de sauts numérotés à partir de 1. La probabilité de réussir le i-ème saut est $1/i$, et on s'arrête au premier échec. On note X le nombre de sauts effectués.

1 Montrer que X est presque sûrement finie et déterminer sa loi.

2 Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 1179 – *Quotient de variables aléatoires suivant une loi géométrique (Centrale MP 2015)* 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de X/Y.

Exercice 1180 – *Minimum de deux v.a.i. suivant $\mathcal{G}(p)$* 0

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $Z = \min\{X, Y\}$. Montrer que Z suit une loi géométrique.

Exercice 1181 – *Les moments d'une variable aléatoire déterminent-ils sa loi ?* 4

1 (ENS MP 2015)

i Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que la loi de X est déterminée par les $E(X^k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

ii Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe un réel $a \in]0, 1[$ tel que $P(Y = k) = o(a^k)$ lorsque $k \to +\infty$. Montrer que $E(Y^n)$ existe, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les $E(Y^n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, déterminent la loi de Y.

2 (X PC 2015)Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans une partie dénombrable de $[0, 1]$. Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = E(Y^n)$.

Exercice 1182 – *Caractérisation des lois de Poisson par relations entre espérances* 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.
Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1

i Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$\mathrm{E}(Ng(N)) = \lambda\,\mathrm{E}(g(N+1))$$

ii Calculer $\mathrm{E}\left(\frac{1}{N+1}\right)$.

2 Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent :

$$\mathrm{E}(Tg(T)) = \lambda\,\mathrm{E}(g(T+1))$$

La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?

3 Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On définit une variable aléatoire S par

$$S \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

(où N est la loi introduite dans l'énoncé).

Montrer que, pour toute fonction g telle que les espérances existent, on a :

$$\mathrm{E}(Sg(S)) = \lambda\,\mathrm{E}(X_0 g(S+X_0))$$

Exercice 1183 – *Tirages dans une urne* 0

Dans la suite du problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1 Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

2 Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

i Montrer que X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

ii Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i + X_j$.

8. Couples de variables aléatoires

Exercice 1184 – *Loi d'un couple* 2

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Déterminer la loi de $X - Y$.

2 Soit n et m deux entiers naturels non nuls, et $p \in]0,1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$.

i Déterminer la loi conjointe de X et Y.

ii Déterminer la loi de $X + Y$.

3 La loi d'un couple de variables aléatoires (X,Y) est donnée par le tableau suivant que l'on complètera :

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0	0,4	0
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0	...

i Déterminer les lois marginales de (X,Y).

ii Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

iii Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Soit $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

iv Écrire la table de la loi conjointe de U et V, puis en déduire les lois de U et de V.

v Déterminer directement la loi de V.

4 Soit, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{i,j} = \lambda ij$.

i Déterminer λ pour que ceci définisse une loi conjointe.

Pour cette valeur de λ, soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles admettant cette loi conjointe.

ii Déterminer les lois marginales de (X,Y).

iii X et Y sont-elles indépendantes ?

iv Donner la valeur de $\mathrm{Cov}(X,Y)$, et en déduire la valeur de $E(XY)$.

Exercice 1185 – *Indépendance dans un couple* 2

Soit $p \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant que l'on complétera :

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}-p$	$p-\frac{1}{6}$
1	p	

1 Montrer que $\frac{1}{6} \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}$.

2 Déterminer les lois marginales du couple, puis déterminer l'espérance et la variance de X et Y.

3 Pour quelle valeur de p les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1186 – *Loi conjointe de v.a.d.* 2

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que :

$$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \frac{a}{2^{i+j}},$$

pour tous i, j de $\mathbb{N}^*$.

1 Calculer a.

2 Déterminer les lois marginales de X et Y.

3 X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1187 – *Minimum, maximum* 3

1 On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand. Donner la loi marginale du couple.

2 On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

i Donner loi et espérance de X.

ii Exprimer $X+Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.

iii Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 1188 – *Inégalité de Cauchy-Schwarz probabiliste (TPE-EIVP MP 2015)* 3I

Soit X, Y deux variables aléatoires admettant une variance. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathrm{V}(X)\,\mathrm{V}(Y)$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 1189 – *Banque CCP 2016 97* 2

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :
$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P((X,Y)=(j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.

1 Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2 Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 1190 – *Banque CCP 2016 106* 2

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.

1 Déterminer la loi du couple (U,V).

2 Déterminer la loi marginale de U.
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}, P(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.

3 Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique.
En déduire l'espérance de V.

4 U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 1191 – *Banque CCP 2016 108* 2

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$

1 Déterminer les lois de X et de Y.

2

i Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

ii Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3 Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4 Calculer $P(X=Y)$.

Exercice 1192 – *Banque CCP 2016 111* 2

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in\,]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in\,]-1,1[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par :

$$P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1 Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2

i Déterminer la loi de Y.

ii Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.

iii Déterminer l'espérance de Y.

3 Déterminer la loi de X.

Exercice 1193 – *Covariance et indépendance (Centrale MP 2015)* 2

Soit (U,V) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2,1/2)$.

1 Montrer que la somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2 On pose $S=(U-1)^2+(V-1)^2$. Déterminer la loi de S et calculer l'écart-type de S^2.

3 On pose $T=(U-1)(V-1)+1$. Calculer $E(S(T-1))$. Déterminer la loi de T. Calculer la covariance de (S,T). Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 1194 – *Fonction génératrice d'un couple de variables aléatoires* 3

1 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

i Dire pourquoi pour tout $(x,y) \in [-1,1]^2$, la famille

$$(P(X=n\cap Y=m)x^n y^m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable. On note $G_{(X,Y)}(x,y)$ sa somme.

ii Montrer que $G_{(X,Y)}(x,y) = E(x^X y^Y)$.

On suppose désormais que, pour tout $(x,y) \in [-1,1]^2$:

$$G_{(X,Y)}(x,y) = \frac{py}{\ln(1-p)}\frac{\ln(1-pxy)}{1-(1-p)y}$$

où $p \in]0,1[$.

2

i Déterminer $G_X(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
ii Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\ln(1 - px) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!} x^n$.
iii En déduire la loi marginale de X.

3

i Montrer que les variables aléatoires X et $Y - X$ vérifient, pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$:

$$G_{(X,Y-X)}(x, y) = G_X(x)G_{Y-X}(y)$$

ii Déterminer la loi de $Y - X$.

9. Variables aléatoires indépendantes identiquement distibuées

Exercice 1195 – *Épreuves consécutives à plusieurs résultats possibles* 2

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles $r_1, \dots, r_k$. On note p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée.

Pour $i \in [\![1, k]\!]$, notons X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1 Expliquer pourquoi $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$.

2 Quelle est la loi de X_i ? Que vaut sa variance ?

3 Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

4 En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

5 Contrôler ce résultat en développant $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_k)$ et en utilisant la première question.

Exercice 1196 – *Produit consécutif de Bernoulli* 3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_nX_{n+1}$.

1 Déterminer la loi de Y_n.

2 Discuter, selon les valeurs de i et j, l'indépendance de Y_i et Y_j.

3 Pour tout $n \geqslant 2$, donner la matrice des variances-covariances du vecteur $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$.

4 En déduire la variance de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

5 Reprendre ces questions, en supposant que les (X_n) soient mutuellement indépendantes, et que X_n suive $\mathcal{B}(p^n)$ pour tout n.

Exercice 1197 – *Banque CCP 2016 99* 0

1 Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.

2 Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

3 Application :

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

Exercice 1198 – *Une étude asymptotique probabiliste (X PC 2015)* 3

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, j \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 2^j) = 1/2^j$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer, si $\varepsilon > 0$, que $P\left(\left|\frac{\ln(2)S_n}{n\ln(n)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \to_{n\to+\infty} 0$.

Exercice 1199 – *Identité de Wald* 2

Soit N et $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \dots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose

$$S \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

1 Établir que $G_S(t) = G_N(G_X(t))$ pour tout $t \in]-1, 1[$

2 On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald :

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(X_1)$$

Exercice 1200 – *Probabilité d'égalités de variables aléatoires* 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, avec $\lambda > 0$.

1 Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

2 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 1 - (1 - x)e^x$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

3 Pour tout entier $n > \lambda$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note U_i une variable aléatoire indépendante de Y_i et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $f\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire définie par $X_i = 0$ si $Y_i = U_i = 0$, 1 sinon.
Déterminer la loi de X_i.

4 Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $P(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}$.

5 En déduire $\lim\limits_{n\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = Y_i)\right)$.

Exercice 1201 – *Probabilité de convergence d'une série* 3

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, où $p \in]0, 1[$.
On pose $q = 1 - p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1.
On va chercher à calculer la probabilité de l'événement

$$A \overset{def}{=} \{\omega \in \Omega, \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\}$$

1 Calculer la probabilité de A lorsque $\alpha > 1$.
On suppose désormais $\alpha \in]0, 1[$. On pose $\beta = 1 - \alpha$.

2

i Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n > n^\beta)\right) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta - 1}$$

ii Étudier la convergence de la série de terme général $q^{n^\beta - 1}$.

iii En déduire

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n > n^\beta)\right)$$

iv En déduire que

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n > n^\beta)\right)\right) = 0$$

Dans la suite de l'exercice, on note

$$A_\beta \overset{def}{=} \{\omega \in \Omega, X_n(\omega) > n^\beta \text{ pour un nombre fini de valeurs de} n \text{ uniquement}\}$$

3

i Montrer que

$$A_\beta = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}(X_n \leqslant n^\beta)\right)$$

ii Montrer que $P(A_\beta) = 1$.

4

i Montrer que pour tout $\omega \in A_\beta$, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge.

ii En déduire la probabilité de l'événement A.

CHAPITRE XXXI

Séries entières (TD)

Sommaire

1. Rayon de convergence d'une série entière, domaine de convergence

Exercice 1202 – *Série entière et rayon de convergence* 2

1 Montrer que les séries entières $\sum z^n$, $\sum nz^n$ et $\sum \frac{z^n}{n}$ ont pour rayon de convergence 1.

2 Montrer que $\sum a_{n+1}z^n$, $\sum |a_n|z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

3 Soit (α_n) une suite bornée. Montrer que le rayon de convergence de $\sum \alpha_n z^n$ vaut au moins 1.

On suppose en outre que α_n ne tend pas vers 0. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n z^n$ vaut 1.

En déduire le rayon de convergence de $\sum \sin(n) z^n$.

4 Soit $M \in \mathbb{C}^*$. Donner le rayon de convergence de $\sum a_n \left(\frac{z}{M}\right)^n$ en fonction de R (le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$).

Lorsque la règle de d'Alembert ne s'appplique pas

La règle de d'Alembert pour les séries entières ne peut pas toujours s'appliquer. Supposons par exemple que la série entière soit *lacunaire*, *i.e.* $a_n = 0$ pour une infinité de valeurs de n.
Bien sûr, si (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, alors la somme est une fonction polynomiale, et le rayon de convergence est infini. 88

Exemple

Pour la série entière $\sum \frac{z^{2n}}{n(3^n+1)}$, la règle de d'Alembert pour les séries entières ne s'applique pas : comment déterminer R ? Il suffit d'appliquer, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$, la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum \frac{z_0^{2n}}{n(3^n+1)}$:

On notera néanmoins que le fait de revenir à la définition du rayon de convergence est au moins aussi rapide.

◇ ◇ ◇

Exercice 1203 – *Détermination du rayon de convergence d'une série entière* 0

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, où $a_n = 3^n$ si n est pair, et $a_n = \frac{1}{4^n}$ si n est impair.

Exercice 1204 – *Banque CCP 2016 20* 2

1 Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

2 Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

i $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

ii $\sum n^{(-1)^n} z^n$

iii $\sum \cos(n) z^n$

Exercice 1205 – *Banque CCP 2016 21* 2

1 Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

i Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.

ii Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice 1206 – *Détermination de rayon de convergence (ENSEA MP 2015)* 2

Montrer que la série de terme général $\frac{1}{1+n^2}$ converge. On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$. Montrer que $\sum R_n x^n$ converge sur $]-1,1[$ puis déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 1207 – *Banque CCP 2016 22 (Rayon de convergence d'une somme)* 2

1 Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

2 Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$ .La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?.

Exercice 1208 – *Banque CCP 2016 23 (Rayon de convergence de la série entière dérivée)* 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1 Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.

2 Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.

Exercice 1209 – *Détermination de rayon de convergence* 0

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1 $\sum \frac{n!}{(2n)!} x^n$; $\sum \ln n x^n$; $\sum \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^n+1}$.

2 $\sum \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$; $\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)} z^n$.

3 $\sum a^{\sqrt{n}} z^n$; $\sum z^{n^n}$; $\sum (\exp(1/n)-1) z^n$; $\sum \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) z^n$.

4 $\sum d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

5 (Mines) Soit $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le RCV de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} x^n$.

Exercice 1210 – *Rayon de convergence d'une série entière modifiée* 2

1 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n^\alpha x^n$?

2 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

3 Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n \ ; \quad \sum a_n z^{2n} \ ; \quad \sum a_n z^{n^2}$$

Exercice 1211 – *Détermination délicate de rayon de convergence* 3

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $F\ : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

1 Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2 Montrer que F admet une limite en $+\infty$.

3 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 1212 – *Minoration d'un rayon de convergence (Mines-Ponts PSI 10)* 3

1 Montrer que la série de terme général $1/(1+k^2)$ converge.

2 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$. Montrer que le rayon de la série entière de terme général $a_n x^n$ est $\geqslant 1$.

Exercice 1213 – *Équation fonctionnelle et série entière (CCP MP 13)* 3

Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

1 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2 Exprimer $f^{(n)}$ en fonction de f. En déduire $f^{(n)}(0)$.

3 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{1}{n!} a^{(n-1)n/2} x^n$.

4 On suppose $a \in]0,1[$.

i Soit $g : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{a^{(n-1)n/2}}{n!} x^n$. Montrer que g est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.

ii Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$. Montrer que f est nulle.

iii Déterminer l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

Exercice 1214 – *Détermination d'un rayon de convergence (Mines d'Alès)* 3

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \mathrm{d}x$.

1 Montrer que (I_n) converge vers une limite à préciser.

2 Nature des séries $\sum (-1)^n I_n, \sum I_n^\alpha$ où $\alpha > 0$.

3 Rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.

Exercice 1215 – *Encore un rayon de convergence (CCP MP 13)* 3

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1 Déterminer la limite de (a_n).

2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 1216 – *Minoration du rayon de convergence d'une série entière (Télécom Sud Paris)* 3

1 Montrer que $\tan^{(n)}$ est un polynôme à coefficients entiers en tan.

2 Montrer que la série entière de terme général $\frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 1217 – $\sum a_n t^n$ *où* $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n dt$ *(Mines MP)* 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n \mathrm{d}t$.
On étudie la série entière $\sum a_n z^n$.

1 Donner le rayon de convergence de cette série entière.

2 Y a-t-il convergence en 1 ? en -1 ?

2. Calcul de somme d'une série entière

Exercice 1218 – *Banque CCP 2016 47* 2

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur le disque ouvert de convergence :

1 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

2 $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} &= 4^n \\ a_{2n+1} &= 5^{n+1} \end{cases}$.

Exercice 1219 – *Banque CCP 2016 51* 2

1 Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.On se propose de calculer la somme de cette série.

2 Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3 En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.

4 En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Exercice 1220 – *Équation différentielle et série entière (CCP MP 2015)* 2

Soit l'équation différentielle $(E) \quad x(x+2)y'(x) + (x+1)y(x) = 1$.

1 Rappeler la dérivée de $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Résoudre (E) pour $x > 0$.

2 Montrer que (E) admet une solution f développable en série entière sur $]-2,2[$. Donner ce développement.

3 En déduire à l'aide des questions précédentes une expression de $f(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Exercice 1221 – *Calcul d'une suite implicite à l'aide d'une série entière (Mines MP 2015)* 3

Soit u_n la suite définie par $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{(n-k)!} = 1$.

1 En considérant la série entière $\sum u_n x^n$, calculer u_n.

2 Convergence de u_n ? **Indication :** Penser au produit de Cauchy.

Exercice 1222 – *Somme d'une série entière à coefficients binomiaux* 3

Soit s un entier naturel (non nul). On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant s} \binom{n}{s} x^n$. Déterminer son rayon de convergence. Calculer sa somme $S(x)$.

Exercice 1223 – *Calculs de sommes élémentaires* 0

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1 $\sum \frac{n+2}{n+1} x^n$.

2 $\sum \frac{n^3}{n!} x^n$.

3 $\sum (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$.

Exercice 1224 – *Série exponentielle tronquée* 0

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$ lorsque z est complexe.

Exercice 1225 – *Série entière et série harmonique* 1

Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum H_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1 Montrer que $R = 1$.

2 On pose, pour $x \in]-1,1[$, $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$.

i Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$(1-x)F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

ii En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$.

3 On pose, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln(n) x^n$$

Montrer que $G(x) \sim_{x \to 1^-} F(x)$.

Exercice 1226 – *Somme d'une série entière par la méthode de l'équation différentielle* 1

On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_{n+1} = \frac{2n+3}{n+2} a_n$.

1 Donner le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On note f sa somme.

2 Trouver une équation différentielle linéaire dont f est solution sur $]-R, R[$, puis déterminer f.

Exercice 1227 – *Rayon de convergence et somme d'une série entière* 2

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \mathrm{d}t$.

Exercice 1228 – *Série entière dont le terme général est défini par une intégrale* 2

$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n \mathrm{d}t$.
On étudie la série entière $\sum a_n z^n$.

1 Donner le rayon de convergence R de cette série entière.

2 Y a-t-il convergence en 1 ? en -1 ?

3 Calculer $f(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 1229 – *DSE et application au calcul de la somme d'une série (TPE 13)* 3

Pour x dans $]-1,1[$, soit $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1 Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est solution. En déduire le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

2 Calculer $1 + \frac{2.4}{2^2.1.3} + \frac{2.4.6}{2^3.1.3.5} + \ldots$.

Exercice 1230 – *Série entière et suite de Fibonacci (CCP MP 13)* 3

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1 Exprimer u_n en fonction de n.

2 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $u_n z^n$.

Exercice 1231 – *Somme d'une série entière* 3

Rayon de convergence et somme de $\sum 2^{(-1)^n n} x^n$.

Exercice 1232 – *Somme d'une série entière (ENSEA)* 3

Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$.

1 Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a_n \leqslant (n+1)^2$.

2 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Déterminer le domaine de définition de f. Donner une équation différentielle vérifiée par f et en déduire une expression simple de f.

Exercice 1233 – *Somme d'une série entière par la méthode de l'équation différentielle* 2

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n,$$

la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et on note R son rayon de convergence, S sa somme.

1 Déterminer R.

2 Former une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par S, et en déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 1234 – *Combinatoire et séries entières (CCP MP 13)* 3

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $d_0 = 1, d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

1 Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $n!/3 \leqslant d_n \leqslant n!$. En déduire le rayon de convergence de $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.

2 Montrer que S est solution de l'équation différentielle $(1-x)y' - xy = 0$.

3 Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles. Exprimer d_n en fonction de n.

Exercice 1235 – *Série entière dont le coefficient général suit une relation de récurrence* 2

Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$. Donner le domaine de définition et effectuer le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ pour les valeurs de x qui rendent la série entière convergente.

3. Développement en série entière

Exercice 1236 – *Développement en série entière d'une fonction rationnelle* 3I

Montrer qu'une fonction rationnelle F n'admettant pas 0 pour pôle est développable en série entière au voisinage de 0, et que le rayon de convergence de la série entière correspondant est alors le plus petit des modules des pôles de F ($+\infty$ si F est polynomiale).

Exercice 1237 – *Développements élémentaires en série entière* 0

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1 $x \mapsto \ln(1+2x^2)$.

2 $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ (où $a \in \mathbb{C}^*$).

3 $x \mapsto \ln(a+x)$ (où $a > 0$).

4 $x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$.

5 $x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$.

6 $x \mapsto \ln(1+x+2x^2)$.

7 $x \mapsto (4+x^2)^{-3/2}$.

8 $x \mapsto \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$.

Exercice 1238 – *Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est-elle toujours développable en série entière ?* 4

On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array},$$

que l'on prolonge par continuité en 0, en une application f.

1 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout entier n : $f^{(n)}(0) = 0$.

2 En déduire que f n'est pas développable en série entière.

Exercice 1239 – *Les fonctions à dérivées uniformément bornées admettent un DSE* 3I

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-r,r[$ dans $\mathbb{C}$, où $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}\times]-r,r[$:

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant M$$

Montrer qu'alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$.

Exercice 1240 – *Étude au bord pour des séries entières classiques* 3I

1 Établissez les résultats de DSE pour arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1,1[$.

2 (Plus difficile) Tenter d'établir que $\arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1}$:

i Par un argument de convergence uniforme.

ii Par un argument de convergence dominée ou d'intégration terme à terme.

iii Par une formule de Taylor.

iv Par des arguments pré bac.

3 Faire de même pour $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1^n}{n}$.

Exercice 1241 – *DSE explicite de la fonction arcsinus, application au calcul de $\zeta(2)$* 3

1 En appliquant la formule donnant le DSE de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ dans le cas où $\alpha = -1/2$, vérifier que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} (-1)^n x^n$$

2

i En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)4^n (n!)^2} x^{2n+1}$$

ii Vérifier que cette formule reste valable en -1 et 1.

3 En calculant de deux façons $\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \arcsin(\sin(t))\mathrm{d}t$, et en utilisant les intégrales de Wallis, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis $\zeta(2)$.

Exercice 1242 – *DSE par la méthode de l'équation différentielle* 3

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1 Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.

2 Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

3 En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Exercice 1243 – *Fonction développable en série entière nulle sur le cercle unité* 2

Soit f une fonction complexe, continue sur disque unité fermé D' et nulle sur le cercle unité. On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 1244 – *Relation intégrale entre deux fonctions développables en séries entières* 2

On considère une suite réelle bornée $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Montrer que pour tout $x > 1$:

$$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 1245 – *Développement en série entière d'une fonction par intégration* 2

1 Développer $f\ : t \mapsto \arctan(1+t)$ en série entière au voisinage de 0.

2 Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $F\ : t \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+t^2+1}$.

Exercice 1246 – *Fonction définie par radicaux développable en série entière* 3

1 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ est développable en série entière en 0, et calculer le rayon de convergence et les coefficients de cette série entière.

2 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ est développable en série entière en 0, et déterminer le rayon de convergence.

Exercice 1247 – *Développement en série entière d'une exponentielle d'une série entière* 4

(Mines-Ponts PSI 10) On note, pour $x \in \mathbb{R}$, et sous réserve d'existence :

$$f(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\right).$$

1 Quel est l'ensemble de définition D de f ?

2 Montrer que f est continue sur D.

3 Montrer que f est développable en série entière en 0 et déterminer le rayon de ce DSE en 0.

Exercice 1248 – *Un DSE avec du logarithme (CCP MP 13)* 3

Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$.

1 Déterminer le domaine de définition de f.

2 Développer f en série entière au voisinage de 0 en précisant l'intervalle maximal de convergence.

Exercice 1249 – *Développements en série entière* 3

1 (CCP) Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

i Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

ii Si $x \in \mathbb{R}$, calculer $x\,f''(x) + f'(x) + x\,f(x)$.

iii La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

2 (CCP) Soit $f : x \mapsto e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$.

i Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

ii Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter son développement.

3 (ENSAM) Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Développer F en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence.

Exercice 1250 – *Développement en série entière et calcul des coefficients* 5

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.
Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n z)$$

est définie sur $\mathbb{C}$, développable en série entière en 0, et déterminer le rayon et les coefficients de ce DSE en 0.

Exercice 1251 – *Un développement en série entière (CCP PSI 08)* 3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \ln\left(1 - 2x\cos(\theta) + x^2\right)$. Développer f en série entière en 0 et donner le rayon de convergence de cette série.

Exercice 1252 – *Banque CCP 2016 2 (DSE d'une fonction rationnelle)* 2

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1 Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

2 En déduire que f est développable en série entière en 0 sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

3

i Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

ii En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 1253 – *Un DSE en utilisant celui d'une fonction rationnelle (Mines MP 2015)* 3

Développer en série entière en 0 la fonction $t \mapsto \arctan(1+t)$. **Indication :** considérer la dérivée, et passer dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1254 – *Banque CCP 2016 19* 2

1 Prouver que, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : t \longmapsto t^n \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t dt$.

2 Prouver que la fonction $f : t \longmapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que

$$\int_0^1 e^t \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}.$$

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Exercice 1255 – *Banque CCP 2016 24* 2I

1 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ .On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2 Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et précisez le rayon de convergence.

3

i Déterminer $S(x)$.

ii On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ pour } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ pour } x < 0 .$$

Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1256 – *DSE de la somme d'une série de fonctions (Centrale MP 2015)* 3

Soit f la fonction qui à x associe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1 Préciser le domaine de définition de f.

2 Calculer $f(0)$.

3 Développer f en série entière au voisinage de zéro.

Exercice 1257 – *DSE d'une intégrale à paramètre (Centrale MP 2015)* 3

Soit $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt} \,\mathrm{d}t$

1 Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

2 Calculer les coefficients a_n de la série de Taylor de f. La fonction f est-elle développable en série entière sur un voisinage de zéro ?

3 Soit $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n x^n| = a_N x^N$.

Exercice 1258 – *Utilisation d'un DSE (Mines MP 2015)* 3

Soit P la fonction de $]-1,1[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $P(r,t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$.

1 Soit t appartenant à $\mathbb{R}$ fixé, montrer que la fonction qui à r associe $P(r,t)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. Calculer ce développement.

2 Soit r appartenant à $]0,1[$ fixé.

i Justifier que la fonction qui à t associe $P(r,t)$ est continue, positive, paire et 2π-périodique.

ii Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\,\mathrm{d}t = 1$.

3 Soit a appartenant à $[0, pi]$, montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} P(r,t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 1 quand r tend vers 1^-.

4 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P(r,t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $f(x)$ lorsque r tend vers 1^-.

Exercice 1259 – *Intégration d'une série entière pour déterminer la somme d'une série* 2

(CCP)

1 Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n/(3n+1)$.

2 Développer en série entière $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ au voisinage de 0.

3 Calculer de deux façons $\int_0^1 f$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 1260 – *Identification de la somme d'une série entière (Petites Mines MP 2015)* 2

Soit f la fonction réelle de la variable réelle telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$.

1 Étudier f : domaine de définition, continuité, dérivabilité.

2 Reconnaître f.

Exercice 1261 – *DSE d'une intégrale à paramètre (Mines MP 2015)* 3

Soit $f(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{sh}(x\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

1 Donner l'ensemble de définition de f.

2 Donner un développement en série entière de f.

3 Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 1262 – *Une fonction absolument monotone admet un DSE (Mines MP 2015)* 5I

Soient $a < 0 < b$ et F l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b[$, dont toutes les dérivées sont positives sur $]a,b[$.

1 Montrer que F est stable par somme et produit.

2 Soit $R_n(x)$ le reste de Taylor d'ordre n entre 0 et x. Montrer que R_n est une fonction croissante sur $]0,b[$.

3 Montrer que f est développable en série entière autour de 0 sur $]a,b[$.

4. Étude locale

Exercice 1263 – *Équivalent de la somme d'une série entière (CCP MP 2015)* 3

On considère la série entière $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n$

1 Rayon de convergence R ?

2 Étudier la série en $-R$ et R.

3 Étudier la continuité de $S(x)$.

4 Montrer que $(1-x)S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell \in \mathbb{R}$ et déterminer ℓ.

Exercice 1264 – *Domaine de convergence d'une série entière* 2

1 Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$.

2 Donner un équivalent de la somme en $1-$.

Exercice 1265 – *Étude au bord d'une série entière (CCP MP 13)* 3

Soit $S : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} x^n \sin(1/\sqrt{n})$.

1 Déterminer le rayon de convergence de S.

2 Déterminer le comportement de S au bord de l'intervalle de convergence.

3 Montrer que la somme est continue sur $[-1,1[$.

4 Montrer que $x \mapsto \sum_{n\geqslant 2} \left(\sin(1/\sqrt{n}) - \sin(1/\sqrt{n-1})\right) x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$. En déduire la limite de $(1-x)\,S(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 1266 – *Étude au bord de la somme d'une série entière*	3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)\mathrm{d}x$.

1 Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.

2 Comportement en R ?

Exercice 1267 – *Équivalent en 1 de la somme d'une série entière (TPE MP 13)*	3

1 Donner l'ensemble de définition de $\Phi\ : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

2 Donner un équivalent de $\Phi(x)$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 1268 – *Principe des zéros isolés*	5

1 Montrer que si $R > 0$, si (a_n) n'est pas la suite nulle, et si $S(0) = 0$, alors il existe un voisinage de 0 dans D sur lequel S ne s'annule qu'en 0.

2 On suppose qu'il existe une suite (x_p) de points non nuls de D, convergeant vers 0, telle que les fonctions $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident en chaque x_p. Montrer qu'alors pour tout n, $a_n = b_n$.

CHAPITRE XXXII

Espaces préhilbertiens réels (TD)

Sommaire

1. Structure préhilbertienne

Exercice 1269 – *Produit scalaire orthonormalisant une base* 2I

Montrer que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et si on pose

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

pour tous vecteurs $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ de E, alors on obtient un produit scalaire sur E, pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormale.

Ainsi, pour toute base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, il existe un unique produit scalaire rendant cette base orthonormée.

Exercice 1270 – *Interprétation matricielle du procédé d'orthonormalisation de Schmidt* 3I

Interpréter matriciellement le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Exercice 1271 – *Banque CCP 2016 76* 0

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1

i Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ii Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2 Soit $E = \{f \in \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice 1272 – *Banque CCP 2016 79* 0

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1 Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

2 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, $\forall\,(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3 Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1273 – *Les couples libres de vecteurs forment un ouvert (Mines MP 2015)* 3

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que $\Omega \overset{def}{=} \{(x, y) \in E^2|(x, y) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2.

Exercice 1274 – *Détermination de supplémentaire orthogonal en dimension infinie (Télécom Sud Paris MP 2015)* 2

On considère l'espace vectoriel E les fonctions $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.

1 Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b (fg + f'g')$ est un produit scalaire sur E.

2 Montrer que $F = \{f \in E, |f = f"\}$ est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension et une base.

3 Montrer que $G = \{g \in E,\ g(a) = g(b) = 0\}$ est le supplémentaire orthogonal de F dans E.

Exercice 1275 – *Produit scalaire canonique matriciel* 1

Pour tous éléments A, B de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1 Vérifier que c'est un produit scalaire. Pourquoi l'appelle-t-on produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
Remarque : la même formule définit plus généralement un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dit *canonique*.

2 Déterminer l'orthogonal de l'espace des matrices scalaires, des matrices symétriques.

3 Soit $P \in O(n)$. Montrer que les applications

$$\phi_P : A \longmapsto AP \text{ et } \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP$$

sont orthogonales.

4 Réciproquement, si ϕ_P ou $\psi_P \in O(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in O(n)$? (réponses différentes pour ϕ et ψ).

Exercice 1276 – *Sous-espace sans supplémentaire orthogonal* 2

Donner un exemple de sous-espace d'un espace préhilbertien réel, n'admettant pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 1277 – *Deux sous-espaces orthogonaux dans un espace de fonctions* 3

(CCP MP 13) Soit $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E en posant : $\forall(f, g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 (f(t)\,g(t) + f'(t)\,g'(t))\,\mathrm{d}t$; on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. On pose : $\mathcal{V} = \{f \in E,\ f'' = f\}$, $\mathcal{W} = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et
$H = \{f \in E,\ f(0) = \mathrm{ch}\,1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1\}$.

1 Montrer que $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2 Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in E$, montrer : $\langle f, g\rangle = f'(1)\,g(1) - f'(0)\,g(0)$. Calculer $\langle \mathrm{sh}, \mathrm{ch}\rangle$, $\|\,\mathrm{sh}\,\|^2$ et $\|\,\mathrm{ch}\,\|^2$.

3 Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{W}$, montrer que $\langle f, g\rangle = 0$.

4 Soit $f \in H$. Calculer $\langle f, \mathrm{sh}\rangle$ et $\langle f, \mathrm{ch}\rangle$. En déduire les coordonnées dans la base $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ de la projection orthogonale $\pi_{\mathcal{V}}(f)$ de f sur $\mathcal{V}$.

5 Déterminer $\inf \left\{\int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t,\ f \in H\right\}$.

6 Montrer que $\mathcal{W}$ est l'orthogonal de $\mathcal{V}$.

Exercice 1278 – *Étude des parties mid-convexes dans l^2 (X MP 10)* 4

Soit l^2 l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable, muni de la norme $u \mapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$. Soit F un fermé non vide de l^2 vérifiant la propriété : $\forall(x, y) \in F^2$, $\frac{x+y}{2} \in F$. On note d l'infimum des normes des éléments de F. Montrer qu'il existe un unique élément de F de norme d.

2. Structure euclidienne

Exercice 1279 – *Banque CCP 2016 77* 0

Soit E un espace euclidien.

1 Soit A un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.

2 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
i Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
ii Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 1280 – *Banque CCP 2016 92* 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1 Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

2 On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques de E.
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
i Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
ii Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.

3 Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^{\perp}$.

Exercice 1281 – *Quels sont les endomorphismes préservant l'orthogonalité ?* 4

Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes f de E tels que si $< x, y >= 0$, alors $< f(x), f(y) >= 0$.

Exercice 1282 – *Endomorphisme de trace nulle dans un espace euclidien* 2

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E, de trace nulle. Montrer l'existence d'une base orthonormée dans laquelle u a une matrice de diagonale nulle.

Exercice 1283 – *Perturbation d'une base orthonormée préservant la liberté* 3

(Mines-Ponts PSI 10) Soit E euclidien, de base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, $v_1, \dots, v_n$ tels que $\|v_1\| + \cdots + \|v_n\| < 1$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $w_i = e_i + v_i$. montrer que $(w_1, \dots, w_n)$ est une base de E.

Exercice 1284 – *Condition suffisante pour qu'une famille soit génératrice* 3

Soit E euclidien de dimension n, $u_1, \dots, u_{n+1} \in E$ tels que pour tous $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts, $< u_i, u_j >< 0$.

1 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des scalaires non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0$.
Montrer que les λ_i non nuls sont tous de même signe, puis que les λ_i sont tous non nuls.

2 Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E.

Exercice 1285 – *Vecteurs de la sphère unité et produit scalaire contraint* (X MP 09) 4

Soit $\lambda < 1$ et A une partie de la sphère unité de E euclidien telle que pour tout couple (a, a') d'éléments distincts de A, on ait : $< a, a' >\leqslant \lambda$. Montrer que A est finie.

Exercice 1286 – *Familles obtusangles (CCP MP 2015)* 3C

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(.|.)$, et p un entier naturel, avec $p \geqslant 2$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ p vecteurs de E tels que, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant p$, si $i \neq j$, alors $(e_i|e_j) < 0$.

1 Pour $0 \leqslant i, j \leqslant p$, comparer $\lambda_i\lambda_j(e_i|e_j)$ et $|\lambda_i| \cdot |\lambda_j|(e_i|e_j)$.

2 Comparer $\left\|\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k\right\|^2$ et $\left\|\sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k\right\|^2$. Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k = 0_E \Rightarrow \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k = 0_E$.

3 Montrer que toute sous-famille de $p-1$ vecteurs extraite de (e_i) est libre.

3. Bases orthonormées

Exercice 1287 – *Une caractérisation des bases orthonormées dans un espace euclidien (Mines MP 2015)* 3

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre dans $(E, < \cdot, \cdot >)$, un espace préhilbertien. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} | < x, e_i > |^2$.

1 Montrer que $\|e_n\|^2 \leqslant 1$.

2 Montrer que $\|e_n\|^2 = 1$.

3 Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 1288 – *Base orthonormée* 0 et 4

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E tels que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 .$$

1 On suppose les vecteurs de $\mathcal{F}$ unitaires. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

2 Montrer, sans supposer les vecteurs de $\mathcal{F}$ unitaires, que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 1289 – *Inégalité d'Hadamard (Navale MP 13)* 1

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1 En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, montrer que A s'écrit OT où O est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et où T est triangulaire supérieure à termes diagonaux > 0.

2 En déduire $\det A^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 \right)$.

Exercice 1290 – *Matrice orthogonale définie par blocs à partir d'une autre* 2

(CCP MP 13) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|c} A & -A \\ \hline A & A \end{array} \right)$.

1 Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\Phi(A)$ appartient à $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$.

2 On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Caractériser A. Les matrices A et $\Phi(A)$ sont-elles diagonalisables ?

Exercice 1291 – *Majoration du déterminant* 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mu = \max |a_{i,j}|$. Montrer :

$$|\det(A)| \leqslant n^{n/2} \mu^n.$$

4. Automorphismes orthogonaux

Exercice 1292 – *Banque CCP 2016 78* 0

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1 Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

i Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2$ $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.

ii Démontrer que u est bijectif.

2 Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 1293 – *Expression d'une réflexion* 2

Soit H un hyperplan de E, d'orthogonal dirigé par un vecteur a.

1 On suppose a unitaire. Exprimer $r(u)$ en fonction de u et de a, où $u \in E$ et r est la réflexion par rapport à H.

2 Donner une formule lorsque a n'est plus supposé unitaire.

3 Exemple : donner l'expression analytique de la réflexion du plan euclidien usuel par rapport à la droite d'équation $3x + 4y = 0$.

Exercice 1294 – *Réflexion échangeant deux vecteurs distincts de même norme* 3

Soit $a, b \in E$, $a \neq b$, $\|a\| = \|b\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant a et b.

Exercice 1295 – *Par quelles opérations l'ensemble des matrices orthogonales est-il stable ?* 4

(Petites Mines MP 2015) On note $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n.

1 Soit A et B deux matrices orthogonales, a-t-on :
i $A + B$ orthogonale ?
ii $A \cdot B$ orthogonale ?
iii $\text{com}(A)$ orthogonale ?

2 L'ensemble des matrices orthogonales est-il convexe ?

3 Démontrer que, si $\forall (A, B) \in O(n)^2 : \frac{1}{2}(A + B) \in O(n)$, alors $O(n)$ est convexe.

Exercice 1296 – *$O(E)$ est engendré par les réflexions* 1

Montrer que tout produit de deux réflexions est une rotation, et que, réciproquement, toute rotation s'écrit comme produit de deux réflexions.
En particulier, le groupe $O(E)$ est engendré par ses réflexions.
En fait, ce résultat est plus général.

Exercice 1297 – *Connexité par arcs du groupe spécial orthogonal* 3I

Montrer que $SO(n)$ est connexe par arcs.

Exercice 1298 – *Éléments caractéristiques d'une rotation (Banque CCP MP 15)* 2

Soit

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A \in \mathrm{SO}(3)$, et déterminer les éléments caractéristiques de l'endomorphisme r de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté associé.

Exercice 1299 – *Une propriété des sous-groupes distingués de* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *(Centrale MP 2015)* 3

1 Soit H un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ tel que $H \neq \{I_3\}$ et $\forall P \in SO_3(\mathbb{R}), \forall M \in H, PMP^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$. Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe, et qu'il vérifie ces propriétés.

2 On rappelle que $SO_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des rotations de l'espace. Soit $M \in H$, une rotation d'axe dirigé par le vecteur e et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que dans ce cas toutes les rotations d'angles θ et $-\theta$ sont dans H.
Indication : Montrer que si deux matrices sont ortho-semblables alors la matrice de changement de base peut-être choisie dans $SO_3(\mathbb{R})$

Exercice 1300 – *Conjugaison d'une rotation par une symétrie orthogonale en dimension 3 (Mines MP 2015)* 3

On se place dans un espace euclidien orienté de dimension probablement égale à 3. Caractériser $f = s \circ r \circ s$ avec r rotation, s symétrie orthogonale.

Exercice 1301 – *Matrice antisymétrique construite à partir d'une matrice orthogonale* 0

(CCP PSI 08) Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + M$ soit inversible, et $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 1302 – *Inégalité entre coefficients pour une matrice orthogonale* 0

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2},$$

et discuter des cas d'égalité.

Exercice 1303 – *Simplification d'une expression liée à un élément de* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *(Mines-Ponts PSI 08)* 3

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Simplifier

$$(1 - \mathrm{tr}(A))^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

Exercice 1304 – *Matrices orthogonales à coefficients entiers* 0

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il fini ? Le cas échéant, donner son cardinal.

Exercice 1305 – *Matrice d'une symétrie orthogonale* 0

Donner la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$ donnée par le système :

$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 1306 – *Expressions analytiques d'isométries de l'espace* 0

Donner l'expression analytique (dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté) de

1 La rotation d'axe orienté par $(1, 0, -1)$, d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

2 La rotation d'axe orienté par $(1, 1, 1)$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

3 La réflexion par rapport au plan d'équation $2x + 2y + z = 0$.

Exercice 1307 – *Transformations de l'espace* 0

Reconnaître les transformations géométriques linéaires dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1308 – *Équivalences de propriétés d'un automorphisme orthogonal* 2

(CCP MP 13) Soit $f \in O(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

(1) $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.

(2) $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$.

(3) $\forall x, y \in E, (f(x)|y) = -(x|f(y))$.

Exercice 1309 – *Matrice circulaire de rotation* — 3

1 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + \lambda$ avec $\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

2 Soit G l'ensemble des éléments de SO(3) dont les éléments sont de la forme $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$. G est-il un sous-groupe de $SO(3)$? Est-il fini ?

Exercice 1310 – *Matrices orthogonales préservant $\mathbb{R}_+^n$ (ENS MP 10)* — 3

Quelles sont les $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M(\mathbb{R}_+^n) \subset \mathbb{R}_+^n$.

Exercice 1311 – *Chemin dérivable dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$* — 3

Soit n impair, $\Phi\ : t \in \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1312 – *Matrices égales à leur comatrices* — 4

Quelles sont les matrices (carrées réelles) égales à leur comatrice ?

Exercice 1313 – *Polynôme d'une rotation (Mines MP 2015)* — 3

Soit r une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathbb{R}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) = 1$ et $P(e^{i\theta}) = e^{i\phi}$. Montrer que $P(r)$ est un automorphisme orthogonal et le caractériser.

Exemple. Caractériser $P(A)$ où $P = \frac{1}{3}(2X^2 - X + 2)$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1314 – *Étude d'orthogonalité d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (Mines MP 2015)* — 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi_A\ : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM^tA$.

1 Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que ϕ_A soit inversible.

2 Calculer $\det \phi_A$ lorsque $A = \lambda I_n$.

3 Calculer $\det \phi_A$ lorsque A est diagonale.

4 Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que ϕ_A soit un automorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique.

5 On suppose $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(\phi_A)$.

5. Projecteurs orthogonaux, distance à un sous-espace

5.1. Projecteurs orthogonaux

Exercice 1315 – *Une autre caractérisation des projecteurs orthogonaux* — 1

Soit E un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(1) p est un projecteur orthogonal.

(2) $\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 1316 – *Banque CCP 2016 80* — 2

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1 Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$ définit un produit scalaire sur E.

2 Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 1317 – *Expression matricielle d'un projecteur orthogonal* 2I

1 Soit $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ une base orthonormée de E euclidien, F un sous-espace vectoriel de E dont $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthogonale.

On note $(X_1, \ldots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$.

Montrer que la matrice P de p_F dans $\mathcal{C}$ est donnée par

$$P = \sum_{i=1}^{p} \frac{X_i({}^t X_i)}{({}^t X_i)X_i}.$$

Indication : Utiliser la formule de projection orthogonale en base orthonormée, et s'inspirer de la preuve matricielle du fait que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ lorsque A est de rang 1.

2 Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère le plan H d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

i Vérifier que $\vec{n}(1, 2, 3)$ est un vecteur normal non nul à H.

ii Donner les matrices dans la base canonique du projecteur orthogonal p_H sur H et de la réflexion r_H par rapport à H.

Exercice 1318 – *Image d'un vecteur par un projecteur ou une symétrie* 0

Soit $\vec{u}(3, 1)$ et $\vec{w}(1, 2)$. Donner l'image de $\vec{w}$ par les projecteurs orthogonaux sur $D = \mathbb{R}\vec{u}$ et $D^\perp$ respectivement, les symétries orthogonales par rapport à D et $D^\perp$ respectivement.

Exercice 1319 – *Détermination de projeté orthogonal (ENSEA MP 2015)* 2

On travaille dans l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^∞ sur $[0, \pi]$, muni du produit scalaire défini par $(f|g) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)dt$. Soit $G = \{f \in E,\ f'' + f = 0\}$, déterminer le projeté orthogonal de Id sur G.

Exercice 1320 – *Projeté orthogonal sur un plan* 0

(CCP MP 13) Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 x\, f(x)\, g(x)\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur E. Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto 1$ sur $\mathrm{Vect}\big(x \mapsto x, x \mapsto x^2\big)$.

Exercice 1321 – *Matrice d'une projection orthogonale* 0

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (1, 1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 0, -1)$ et $H = \mathrm{Vect}(u, v)$.

1 Déterminer une base orthonormale de H.

2 Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 1322 – *Encore une matrice d'une projection orthogonale* 0

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équations : $x + 2y + z + 2t = 0$, $x - y + z - t = 0$.

Exercice 1323 – *Une expression du rang d'un projecteur orthogonal (ENSAM PSI 08)* 2

Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.

1 Montrer que $\|p(x)\|^2 =< p(x), x >$ pour tout $x \in E$.

2 Montrer que, pour toute base orthonormée (e_i) de E :

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}(p).$$

Exercice 1324 – *Étude d'invariants d'un endomorphisme en bases orthonormées (Mines MP 2015)* 3

Soit E un espace euclidien de dimension n, et v un endomorphisme de E.

1 Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(v(e_i)|e_i)$ ne dépend de la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E choisie.

2 Montrer que la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(v(e_i)|f_j)^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ de E choisies. Calculer sa valeur lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r.

Exercice 1325 – *Quand la composée de deux projecteurs orthogonaux est un projecteur ?* 4

Soit E un espace euclidien.
Soit p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que p et q commutent si et seulement si $p\circ q$ est un projecteur.

5.2. Distance à un sous-espace

Calcul pratique de distance

Comment, en pratique, calculer la distance d'un vecteur u à un sous-espace F ? Déjà, si on travaille en dimension finie, comme $d(u,F)=\|p_{F^\perp}(u)\|$, il est parfois avantageux de s'intéresser à $F^\perp$ (si par exemple F est un hyperplan et qu'il est facile de trouver un vecteur non nul de $F^\perp$).
Ensuite, on peut tenter de trouver une base orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ de F, afin d'exprimer $p_F(u)$. On a même un raccourci dans ce cas, car le théorème de Pythagore permet de donner la formule :

$$d(u,F)^2=\|u\|^2-\sum_{i=1}^{p}(u|e_i)^2.$$

89

Une autre approche consiste à déterminer $p_F(u)$ sans chercher une base orthonormée de F, mais en le caractérisant comme unique vecteur v de F tel que $u-v$ soit orthogonal à tout vecteur de F : on prend alors une base (non orthonormée) $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ de F, on décompose v dans $\mathcal{B}$: $v=\sum_{i=1}^{p}\lambda_ie_i$, et on résout le système d'inconnues $\lambda_1,\dots,\lambda_p$, d'équations $(v|e_j)=(u|e_j)$ (j parcourant $[\![1,p]\!]$). Une fois v déterminé, on calcule $d(u,F)=\|u-v\|$.

Exercice 1326 – *Un calcul de distance* 2

1 Pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculer la distance de $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ à $F=\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, puis à $G=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$.

Réponse : $1/\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ respectivement.

2 Pour le produit scalaire $(f,g)\mapsto\int_{[-1,1]}fg$ sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$, calculer la distance de $g\;:t\mapsto t^3$ et sin à $\operatorname{Vect}(f_0,f_1,f_2)$, où $f_k\,(t)=t^k$ pour tout $(k,t)\in[\![0,2]\!]\times[-1,1]$.

Exercice 1327 – *Banque CCP 2016 81* 2

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A,A')=\operatorname{tr}({}^tAA')$, où $\operatorname{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On note $\mathcal{F}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1 Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3 Déterminer la projection orthogonale de $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

4 Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 1328 – *Banque CCP 2016 82* 2

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n>0$.On admet que pour tout $x\in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x-y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x

à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1 Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 1329 – *Distance au sous-espace des fonctions polynomiales (Petites Mines MP 2015)* 2I

On définit sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ le produit scalaire suivant : $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit F l'espace des fonctions polynomiales.

1 Déterminer l'orthogonal de F.

2 Soit f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = e^x$. Calculer $\mathrm{d}(f, F)$.

Exercice 1330 – *Distance à un hyperplan (Petites Mines MP 2015)* 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, ..., a_n$ des réels. On pose $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n}(P(a_k)Q(a_k))$.

1 Quelles sont les conditions pour que $(\cdot|\cdot)$ soit un produit scalaire ?

2 On suppose ces conditions remplies. Trouvez une base orthogonale pour ce produit scalaire.

3 Soit $A = \left\{P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$. Que dire de A ? Caractériser l'orthogonal de A. Calculer $d(X^n, A)$.

Exercice 1331 – *Calcul de distance à un hyperplan (TPE-EIVP MP 2015)* 2

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et on admet que, pour $P(X) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k$, $(P, Q) \mapsto < P, Q >= \sum_{k=0}^{2n} a_k b_k$ est un produit scalaire sur E.

1 Montrer que $H = \{P \in E, \int_1^2 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel, et trouver sa dimension.

2 Déterminer $H^\perp$ et $\mathrm{d}(1, H)$

Exercice 1332 – *Calculs de distances* 0

1 *(X PC 09)*On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P|Q) = \sum_i a_i b_i$.
Soit $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

i Trouver une base orthonormale de H.

ii Calculer $d(X, H)$.

2 Soit $\alpha = \inf\{\int_{-1}^1 \left(ax^2 + bx + c - |x|\right)^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

i Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, (\cdot,\cdot))$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = d(v, F)^2$.

ii Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, p)^2$ et calculer α.

Réponse : $\alpha = \frac{1}{96}$.

3 *(Mines MP 09)* Déterminer min $\left\{\int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{d}t, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Réponse : $\frac{128}{11025}$.

4 *(Mines MP 09)* Soit $f\ : t \in]0,1] \mapsto t\ln(t)$, prolongée par continuité en 0. Calculer $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (f(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$ et déterminer les couples (a, b) qui réalisent ce minimum.

Réponse : le minimum cherché vaut $\frac{1}{108}$.

Exercice 1333 – *Calcul de distance (Mines MP 2015)* 1

Soit $\Delta = \inf\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 (1 + x_1 t + x_2 t^2 + \ldots + x_n t^n)^2 dt\right)$.

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \displaystyle\int_0^1 A(t)B(t)dt$.

On note Q la projection de 1 sur $\mathrm{Vect}(X, \dots, X^n)$.

1 Existence et unicité de $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, Q = -\displaystyle\sum_{l=1}^{n} a_l X^l$ et montrer que $\Delta = \displaystyle\int_0^1 (1+a_1t+\ldots+a_nt^n)^2 dt$.

2 On pose $F(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{a_1}{X+1} + \ldots + \dfrac{a_n}{X+n+1}$.

i Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, F(k) = 0$. Indication. Calculer $< 1 - Q, X^k >$.

ii En déduire que $F(0) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3 Calculer Δ et $(a_1, \dots, a_n)$.

6. Endomorphismes symétriques

Exercice 1334 – *Éléments propres d'un endomorhisme symétrique (Mines MP 2015)* 3

Soit E un espace euclidien muni de son produit scalaire et f un endomorphisme défini par $f : x \mapsto \langle b|x\rangle a + \langle a|x\rangle b$, avec (a, b) une famille libre.

1 Montrer que f est un endomorphisme symétrique et déterminer ses éléments propres.

2 Calculer $\sup\{|\langle a|x\rangle \cdot \langle b|x\rangle|, \|x\| = 1\}$.

Exercice 1335 – *Inégalité entre traces (Télécom Sud Paris)* 3

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 1336 – *Image et noyau d'un endomorphisme symétrique* 2I

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 1337 – *Quand un endomorphisme est-il à la fois orthogonal et symétrique ?* 4

Montrer de plusieurs façons que $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique et orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Exercice 1338 – *Existence d'un vecteur propre positif associé à une valeur propre positive pour une matrice symétrique à coefficients positifs* 3I

(Centrale MP 2015) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, m_{i,j} \geqslant 0$. On veut montrer que M admet un vecteur propre à coordonnées toutes positives, associé à une valeur propre positive.

1 Trouver les valeurs propres de $\begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}$.

2 Montrer que, si $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que ses valeurs propres sont positives, alors on n'a pas forcément que les coefficients de S tous positifs.

3 Montrer que $\alpha = \sup\{\langle X, MX\rangle, X \in M_n(\mathbb{R}), \|X\| = 1\}$ existe et est valeur propre de M.

4 Conclure. **Indication :** on pourra considérer la valeur absolue d'un vecteur X (à définir).

5 Cette propriété reste-elle vraie si M n'est pas symétrique ?

Exercice 1339 – *Une application combinatoire du théorème spectral (Centrale MP 2015)* 3

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tA\,A$ est diagonalisable, à valeurs propres réelles positives ou nulles.

Soit $A_1, \dots, A_n$ des parties de $[\![1, m]\!]$, deux à deux distinctes, de même cardinal a. On suppose de plus que les intersections $A_i \cap A_j$, avec $i \neq j$, sont toutes de même cardinal b. On veut montrer que $n \leqslant m$.

Soit B la matrice de coefficient générique $b_{i,j} = 1$ si $j \in A_i$, 0 sinon, et $M = B\,{}^tB$.

2 Calculer M et son spectre.

3 Conclure.

Exercice 1340 – *La composée de deux projecteurs orthogonaux est diagonalisable (Centrale MP 2015)* 3I

On considère un espace euclidien E de dimension $n > 0$.

1 Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

On s'intéresse maintenant à f et g, deux projecteurs orthogonaux de E. La suite de l'exercice vise à montrer que la composée $f \circ g$ est diagonalisable.

2 Montrer la propriété est vraie pour $\dim(E) = 2$.

3 Établir le résultat en dimension n quelconque.

Exercice 1341 – *Étude d'un endomorphisme symétrique sur $\mathbb{R}_n[X]$ (Mines MP 2015)* 3

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par $u(P) = -P'' + 2XP'$. Donner ses valeurs propres. On pose $\phi(P,Q) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Vérifier que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et que u est symétrique pour ce produit scalaire. Si (P_k) est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique, que vaut $u(P_k)$?

Exercice 1342 – *Un théorème de la limite monotone pour les suites de matrices symétriques (Mines MP 2015)* 3I

On définit une relation $\leqslant$ sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ de sorte que, pour toutes matrices A et B dans $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, on a $A \leqslant B$ lorsque le spectre de $B - A$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

1 Soit $B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $0 \leqslant B$ si, et seulement si, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXBX \geqslant 0$.

2 On considère une suite croissante et bornée de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ au sens de la relation définie ci-dessus. Déduire de la question précédente qu'une telle suite converge dans $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1343 – *Étude d'une matrice symétrique réelle définie positive (Mines MP 2015)* 3I

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques définies positives à coefficients réels) et on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. D'autre part, pour $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle X, Y\rangle ={}^t XY$.

1 Montrer qu'il existe une unique $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

2 En déduire que, pour tout $X \in$, $\langle X, AX\rangle\langle X, A^{-1}X\rangle \leqslant \|X\|^4$. Quand y a-t-il égalité ?

3 Pour $t \in [0,1]$, on note $f(t) = \langle X, AX\rangle t^2 - (\lambda_1+\lambda_n)\|X\|^2 t + \langle X, A^{-1}X\rangle\lambda_1\lambda_n$. Montrer que f s'annule sur $[0,1]$. En déduire $\langle X, AX\rangle\langle X, A^{-1}X\rangle \leqslant \dfrac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|X\|^4$.

4 Que dire de X s'il y a égalité ? Que se passe-t-il si A a n valeurs propres distinctes ?

Exercice 1344 – *Équation d'inconnue matricielle* 0

Quels sont les éléments A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{tr}(A)^2 = n\,\mathrm{tr}(A^2)$.

Exercice 1345 – *Détermination du spectre d'un endomorphisme symétrique* 0

(CCP MP 13) Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls et $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1 Montrer que A est diagonalisable.

2 Quel est le rang de A ? Qu'en déduit-on sur son spectre ?

3 Calculer A^2 et en déduire le polynôme caractéristique de A et son spectre.

Exercice 1346 – *Réduction d'un endomorphisme symétrique* 0

(CCP MP 13) Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, (a,b) une famille libre de vecteurs unitaires de E et $f : x \in E \mapsto \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.

1 Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

2 Déterminer ses éléments propres.

Exercice 1347 – *Spectre d'une matrice symétrique* 2

(CCP MP 13) Soient $n \geqslant 2$, $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$ non identiquement nulle et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \int_0^1 f(t)\, t^{i+j-2} \mathrm{d}t.$$

1 Montrer : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t\, XAX \geqslant 0$.

2 Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t\, XAX = 0$. Montrer : $X = 0$.

3 Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 1348 – *Matrice symétrique à coefficients positifs* 2

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout (i,j) pour lequel $i \neq j$, $a_{i,j} \geqslant 0$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $\tilde{X} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$.

1 Montrer : $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \leqslant^t \tilde{X}A\tilde{X}$.

2 Notons λ_0 la plus grande valeur propre de A. Établir

$$\forall\, X \in \ker(A - \lambda_0 I_n), \quad \tilde{X} \in \ker(A - \lambda_0 I_n).$$

Exercice 1349 – *Matrice réelle commutant avec sa transposée (ENSAM PSI 08)* 0

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que N est nilpotente et commute avec sa transposée. Montrer que N est nulle.

Exercice 1350 – *Réduction d'un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$* 0

(Mines Alès) Montrer que $P \mapsto (1-X^2)P'' - 2XP'$ définit un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)\, Q(t) \mathrm{d}t$. Déterminer ses valeurs propres.

Exercice 1351 – *Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique* 0

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée. Soient u un vecteur unitaire et $D = \mathrm{Vect}(u)$.

Si $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : x \mapsto x - a\,\langle x, u \rangle\, u$.

1 Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2 Montrer qu'il existe un unique réel non nul a_0 tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\|f_{a_0}(x)\| = \|x\|$.

3 Montrer que $\ker(f_{a_0} + \mathrm{Id})$ et $\ker(f_{a_0} - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4 Déterminer les éléments propres de f_a lorsque $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 1352 – *Réduction d'un endomorphisme symétrique obtenu à partir de colonnes* 0

(CCP MP 13) Soient A et B deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants, $M = B^tA + A^tB$.

1 Montrer que M est diagonalisable.

2 Déterminer le noyau de M, puis les valeurs propres de M.

Exercice 1353 – *Réflexion envoyant un vecteur sur un autre* 0

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (1,1,0,-1)$ et $v = (0,1,-1,1)$. Donner la matrice dans la base canonique de la réflexion envoyant u sur v.

Exercice 1354 – *Résolution d'une équation matricielle avec trace et transposition* 0

(CCP MP 13) Pour $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $(E) : X + {}^tX = \mathrm{tr}(X)A$.

1 Résoudre (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quand A n'est pas symétrique.

2 Lorsque A est symétrique, résoudre (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\mathrm{tr}(A) = 2$ et pour $\mathrm{tr}(A) \neq 2$.

Exercice 1355 – *Matrices symétriques admettant un certain polynôme annulateur* 0

(ENSEA) Déterminer les $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

Exercice 1356 – *Trace du produit d'éléments respectifs de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$* 2

(Télécom Sud Paris) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 1357 – $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \max(\mathrm{Sp}(A))$ *est convexe (ENS MP 10)* 4

Soit $\Phi\ : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe sa plus grande valeur propre. Montrer que Φ est convexe.

Exercice 1358 – *Étude du spectre de la composée de deux projecteurs orthogonaux* 5

(X MP 10) Soit E un espace euclidien, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux. Montrer que les valeurs propres de $q \circ p$ sont réelles et appartiennent à $[0, 1]$.

Exercice 1359 – *Décomposition polaire (Centrale MP 2015)* 1

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques dont les valeurs propres sont strictement positives.

1 Rappeler la structure de $O_n(\mathbb{R})$ et le démontrer. Montrer que cet ensemble est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$ non connexe par arcs.

2 Si M est dans $GL_n(\mathbb{R})$, montrer l'existence d'un couple (Ω, Σ) de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = \Omega\Sigma$.

3 Montrer l'unicité de ce couple.

Exercice 1360 – *Image d'une matrice et de sa transposée (Petites Mines MP 2015)* 3

Sur $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire défini par $\langle (x1, ...xn); (y1, ..., yn) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker(A) \oplus \mathrm{Im}(^tA)$.

2 On suppose $A^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(A +^t A) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(^tA)$.

Exercice 1361 – *Une équation matricielle avec transposition (X MP 2015)* 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 =^t A$. Que dire de A ?

Exercice 1362 – *Équation matricielle avec la transposée* 0

(CCP MP 13) Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^tMM = I_n$.

Exercice 1363 – *Matrice de taille 2 dont le carré est la transposée* 0

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_2$ et $A^2 =^t\ A$.

1 Trouver un polynôme annulateur de A.

2 Déterminer le spectre de A puis son déterminant.

3 Montrer que A est orthogonale puis donner les valeurs possibles de A.

Exercice 1364 – *Matrice commutant avec sa transconjuguée (Centrale MP 2015)* 3HP

Soient n, m deux entiers naturels non nuls. Pour une matrice carrée A d'ordre n complexe, on pose $A^* =^t \bar{A}$ (où $\bar{A}$ est la matrice conjuguée de A).

On dit que A vérifie (P) si, et seulement si, $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (A^*)^k A^{m-k} = 0$.

1 Montrer que, si A est nilpotente d'indice p tel que $2p \leqslant m + 1$, alors A vérifie (P).

2 Déterminer les matrices réelles A vérifiant (P) telles que $A\,A^* = A^*\,A$.

3 Pour X, Y appartenant à $\mathbb{C}^n$ on pose $(X|Y) =^t \bar{X}\, Y$. Soient X, Y appartenant à $\mathbb{C}^n$. En s'aidant de la fonction définie par $\phi(t) = (\mathrm{e}^{tA}X|\mathrm{e}^{tA}Y)$ pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{tA^*}\mathrm{e}^{tA}$ est à coefficients polynomiaux.

Exercice 1365 – *Étude du groupe unitaire complexe (Centrale MP 2015)* 3HP

On considère l'ensemble $U_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{M}\, M = I_n\}$.

1 Soient u et v deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$, montrer que tout espace propre de l'un est stable par l'autre.

2 Soit M dans $U_n(\mathbb{C})$ tel que ${}^tM = M$. Montrer qu'il existe U et V symétriques réelles telles que :

(1) $M = U + iV$,

(2) $UV = VU$,

(3) $U^2 + V^2 = \mathrm{I}_n$.

3 Montrer qu'il existe une matrice S symétrique réelle telle que $M = \exp(iS)$.

4 Montrer que M est dans $U_n(\mathbb{C})$ si et seulement s'il existe P orthogonale (réelle), S symétrique réelle telle que $M = P\exp(iS)$.

Exercice 1366 – *Sur les matrices réelles commutant avec leur transposée (Mines MP 2015)* 3

1 Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^tA =^t AA$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^tA =^t AA$. Montrer que ${}^tA$ appartient à $\mathbb{R}[A]$.

3 Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $A^2 - A + I_2 = 0$ et ${}^tAA = A^tA$.

Exercice 1367 – *Sur l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien* 3HP

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien.

1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique élément de $\mathcal{L}(E)$, que l'on notera f^*, tel que : $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y > = < x, f^*(y) >$.

2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f^* = f$ si et seulement si $f^* \circ f = f \circ f$.

3 Déterminer les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que f est nilpotent et $f^* \circ f = f \circ f^*$.

CHAPITRE XXXIII

Équations différentielles linéaires (TD)

Sommaire

Dans tous les exercices, sauf mention contraire, on demande de trouver des solutions réelles.

1. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Exercice 1368 – *Ordre un sans problème de raccord* 0

Résoudre :

1 $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}$.

2 $y' + y\ \text{cotan}(x) = \sin x$.

3 $y' + y = xe^{3x}\cos(x) + (x-1)e^{-x}$.

4 $y' - 2y = (x^2+1)e^{4x} + (x^3 - x^2 + x + 1)e^{2x}$.

5 $y' + y = \cos x + \sin x$

Exercice 1369 – *Ordre un avec des coefficients non constants* 0

1 $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$

2 $y' + y\sin x = \sin 2x$.

3 $y' - \frac{x}{x^2-1}y = 2x$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 1370 – *Équation différentielle et DSE (CCP MP 2015)* 2

Soit (E) : $2ty' + y = 3t\cos(t^{3/2})$.

1 Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ développable en série entière.

2 Résoudre (E) dans le cas général et en déduire une simplification de v.

Exercice 1371 – *Équations différentielles de MPSI* 0

1 (CCP MP 13) Résoudre : $(x^2+1)y' - 2xy = x\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.

2 (Mines Alès) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(\operatorname{sh} x)y' - e^x y = \operatorname{sh}^2 x$.

3 (CCP MP 10) Résoudre $y' - (\tan x)y = -\cos^2(x)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 1372 – *Une équation différentielle de MPSI et ses solutions bornées* 0

(TPE) On note (E) l'équation différentielle $(1+x^2)y' = 1 + 3xy$.

1 Trouver une solution polynomiale de (E), puis résoudre (E).

2 Déterminer les solutions de E bornées en $+\infty$.

Exercice 1373 – *Aspects structurels d'ensembles de solutions d'une EDL* 0

(Centrale PSI 10)
Pour $a \in \mathbb{R}$, soit S_a l'ensemble des solutions de $(1+x^2)y' - 2y = a$ sur $]-1,1[$.

1 Déterminer S_a, pour $a \in \mathbb{R}$. Est-ce un espace vectoriel ?

2 Soit $S = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} S_a$. Est-ce un espace vectoriel ?

3 Montrer que l'application Φ qui à $f \in S$ associe le a tel que $f \in S_a$, est linéaire. Déterminer le noyau de Φ.

4 Déterminer la dimension de S. En donner une base.

Exercice 1374 – *Résolution d'un problème de Cauchy et étude asymptotique* 2

Déterminer l'unique $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - e^{-x}f(x) = 1$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f(x) \sim x$ quand $x \to +\infty$.

2. EDL scalaires d'ordre 2

2.1. EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 1375 – *Banque CCP 2016 31* 2

1 Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.

2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Exercice 1376 – *Ordre deux à coefficients constants* 0

Résoudre

1 $y'' - 2y' + y = \cos(mx)e^x$, où $m \in \mathbb{R}$.

2 $y'' - 2y' + y = x^3e^x + 2x\cos(x) + x^3 + 3$.

3 $y'' + y = x\cos(x)^3$.

Exercice 1377 – *Exemple de problème de Cauchy pour l'ordre deux* 2

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution f de l'équation :

$$y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos(mx)$$

qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 1378 – *$f(x) + f(x+\pi/2) \geqslant 0$ guidé* 3

(CCP MP 13)

1 Résoudre l'équation $y'' + 4y = 0$.

2 Soient $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $h : x \mapsto \frac{1}{2}\int_0^x g(t)\sin(2x-2t)\mathrm{d}t$. Montrer que h est solution de $y'' + 4y = g$. Résoudre : $y'' + 4y = g$.

3 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f'' + 4f \geqslant 0$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi/2) \geqslant 0$.

Exercice 1379 – *Wronskien inhomogène surdimensionné* 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$, $f\ : I \to \mathbb{C}$ une application continue, $y_1, y_2, y_3\ : I \to \mathbb{C}$ trois solutions de $ay'' + by' + cy = f$ sur I.

On note $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & 1 \\ y_2 & y_2' & 1 \\ y_3 & y_3' & 1 \end{vmatrix}$ et $D = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix}$.

Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $x \in I$:

$$\Delta(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x} \quad \text{et} \quad D(x) = \frac{A}{a}f(x)e^{-\frac{b}{a}x}.$$

Exercice 1380 – *Autour de l'équation $y''+y=f(t)$* 1

1 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, monotone, ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que les solutions de $y''+y=f$ sont bornées.

2 Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π-périodique, telle que $y''+y=f$?

3 Soit h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h''+h \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel x, $h(x)+h(x+\pi) \geqslant 0$.

4 (Centrale MP 08) Résoudre l'équation différentielle $y''+y=\sin(t)$, puis l'équation différentielle $y''+y=|\sin(t)|$.

Exercice 1381 – *Autour de l'équation $y''-\omega^2 y=g$* 1

1 Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue et bornée. Montrer que l'équation différentielle $y''-\omega^2 y=f$, d'inconnue $y : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable, admet une solution et une seule qui soit bornée sur $\mathbb{R}$.

2 Soit $\omega, c \in \mathbb{R}_+^*$, $E=\mathcal{C}([0,c],\mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

i Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe $y \in E$, de classe $\mathcal{C}^2$, unique, telle que :

$$\begin{cases} y''-\omega^2 y = f \\ \omega y(0)=y'(0) \\ \omega y(c) = -y'(c) \end{cases}$$

et exprimer y en fonction de f, à l'aide d'intégrales.

ii On note $T : E\to E$, $f\mapsto y$ l'application construite ci-dessus. Montrer que $T \in \mathcal{L}C(E)$.

3 Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $g_1, g_2 : \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continues telles que $g_1 \leqslant g_2$, $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$\begin{cases} f_1''-\omega^2 f_1 = g_1 \\ f_2''-\omega^2 f_2 = g_2 \\ f_1(0)=f_2(0) \\ f_1'(0)=f_2'(0) \end{cases}$$

Montrer $f_1 \leqslant f_2$.

Exercice 1382 – *Variation de la constante (Mines MP 06)* 0

Résoudre sur $]0,\pi[$: $y''+y=\operatorname{cotan} x$.

Exercice 1383 – *Encore $y''+y=g$ (Centrale PSI 10)* 2

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=\frac{1}{e^x-1}$ ayant une limite en $+\infty$.

2.2. EDL scalaire d'ordre 2 à coefficients non constants

Exercice 1384 – *EDL scalaire d'ordre 2 (CCP MP 13)* 3

Soit (E) : $x^2y''+4xy'+2y=\ln x$. Chercher des solutions de l'équation homogène de la forme $x\mapsto x^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$, puis résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1385 – *EDL scalaire d'ordre 2 non résolue* 3

On étudie l'équation différentielle

$$\mathcal{H} \ : \quad ty''+2y'+ty=0$$

1 Déterminer les solutions de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}$ développables en séries entières.

Réponse : ce sont les multiples de $f_1 : t\mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.

2 On cherche désormais à déterminer les solutions de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

i Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des solutions de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

ii Montrer qu'on peut chercher les solutions de $\mathcal{H}$ sur $]0,\pi[$ de la forme $f_2 : t\mapsto \lambda(t)f_1(t)$, où λ est une fonction deux fois dérivable.

Déterminer alors les solutions de $\mathcal{H}$ sur $]0,\pi[$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$.

Réponse : ce sont les combinaisons linéaires de f_1 et de $f_2 : t\mapsto \frac{\cos(t)}{t}$.

3 Autre méthode : soit f_2 une solution de $\mathcal{H}$ sur $]0,\pi[$, non colinéaire à f_1. On note W le wronskien de (f_1,f_2).

i Montrer que
$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)' = \frac{W}{f_1^2}$$
ii Trouver une EDL d'ordre 1 dont W est solution, puis déterminer W.
iii En déduire une fonction f_2 convenable.

4 Reprendre ce qui précède pour l'équation
$$\mathcal{H}_2 \ : \quad 4ty'' + 2y' - y = 0$$

Exercice 1386 – *Une EDL scalaire d'ordre 2 à coefficients non constants* 2

Résoudre $(t^2+1)y'' - 2y = t$.
Indication : on pourra chercher des solutions polynomiales.

Exercice 1387 – *Centrale MP 07* 2

1 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation
$$(\mathcal{E}) \quad y'' + \frac{1}{x^2}y = 0.$$
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $t = \ln(x)$.

2 L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ possède-t-elle des solutions non bornées ? Déterminer les solutions bornées de $(\mathcal{E})$.

Exercice 1388 – *Problème de raccord et DSE* 0

(CCP) Soient $(*)$: $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, E^+ (resp. E^-) l'ensemble des solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (resp. $\mathbb{R}^{-*}$) et E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}$.

1 Montrer que E, E^+, E^- sont des espaces vectoriels. Que peut-on dire des dimensions de E^- et de E^+ ?

2 Déterminer les $f \in E$ développables en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1389 – *EDL homogène à coefficients non constants* 0

(CCP) Résoudre sur $]-1,1[$: $(x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Exercice 1390 – *Une EDL d'ordre 2 à paramètre* 0

(CCP) Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$: $y''(x) - my'(x) + 2y(x) = 1 + x^2 + e^x$.

Exercice 1391 – *EDL d'ordre 2 à coefficients non constants (Mines MP 2015)* 3

Résoudre l'équation différentielle d'inconnue y : $x(x^2+1)y'' - 2(x^2+1)y' + 2xy = 0$.

Exercice 1392 – *Équations d'ordre 2* 0

1 Résoudre $t^2y'' + ty' - y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Résoudre $(t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0$.

Exercice 1393 – *Équation différentielle et série entière* 0

(CCP MP 14) Si $\lambda \in]-1/2,+\infty[$, soit (E_λ) l'équation différentielle :
$$x(x+1)y'' + (2x+1)y' - \lambda(\lambda+1)y = 0$$

1 Montrer qu'il existe une unique solution P_1 de (E_1) polynomiale de degré 1 et telle que $P_1(0) = 1$.

2 Soient $\varphi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)}$ et $\psi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}$. Montrer qu'il existe $(a,b,c,a',b',c',d') \in \mathbb{R}^7$ que l'on déterminera tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$ et $\psi(x) = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{2x+1} + \frac{d'}{(2x+1)^2}$. En déduire une primitive de φ et une primitive de ψ.

3 Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4 Soit $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif. Trouver une relation sur les (a_n) pour que y soit solution de (E_λ).

5 Donner une condition sur λ pour qu'il existe une solution de (E_λ) polynomiale non nulle.

Exercice 1394 – *Banque CCP 2016 32* — 2

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1 Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine. Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2 Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0;1[$ sont développables en série entière à l'origine ?

Exercice 1395 – *Une EDL d'ordre 2 à coeff non constants* — 0

(CCP MP 13) Résoudre $(1-x^2)y''-3xy-y=\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

Indication : remarquer que $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ est solution de l'équation sans second membre.

3. EDL vectorielles, systèmes différentiels

Exercice 1396 – *Système différentiel* — 0

(CCP MP 13) Résoudre $X'=AX$ avec $A=\begin{pmatrix}-3/2 & 2 & -1/2\\ -1 & 0 & 1\\ 3/2 & -6 & 9/2\end{pmatrix}$.

Exercice 1397 – *Expression du wronskien* — 1

1 Vérifier que dans le contexte de la définition XVII.vi, le wronskien W est solution de l'équation différentielle

$$y'=\operatorname{tr}(a(t))y$$

2 En déduire une expression du wronskien, en supposant sa valeur en un instant t_0 connue.

Exercice 1398 – *Équation différentielle linéaire d'ordre trois* — 0

Résoudre l'équation $y'''=y$.

Exercice 1399 – *Une EDL d'ordre 3* — 0

(TPE) Résoudre $y'''-2y''-y'+2y=e^x$.

Exercice 1400 – *Résolution d'un système différentiel* — 0

(CCP) Résoudre le système différentiel : $(x'=3x+y,\ y'=2x-y,\ z'=-4x-8y+2z)$.

Exercice 1401 – *Conservation de la positivité des composantes* — 3

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients non diagonaux positifs.
Soit $X:\mathbb{R}_+\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X'=AX$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $x_i(0)\geqslant 0$.
Montrer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, tout $t\in\mathbb{R}_+$, $x_i(t)\geqslant 0$.

Exercice 1402 – *Sous-groupe à un paramètre de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ — 3

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0)=I_n$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f'(t)=f'(0)f(t).$$

Montrer :

$$\forall(s,t)\in\mathbb{R}^2,\quad f(s+t)=f(s)f(t).$$

Exercice 1403 – *Une équation différentielle matricielle (Centrale MP 2015)* — 3

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice dont les coefficients sont des fonctions de $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

1 Donner l'écriture de $\exp(M)$ et justifier sa définition.

2 Résoudre $M'(t) = t\,M(t)\cdot C$ où $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

Exercice 1404 – *Systèmes différentiels linéaires* 2

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t}. \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + t \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) - 3x_2(t). \end{cases}$$

On donnera les solutions réelles.

Exercice 1405 – *Banque CCP 2016 74* 2

1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

ii Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2 On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice 1406 – *Système différentiel (CCP MP 2015)* 2

Résoudre le système différentiel suivant par réduction matricielle : $x' = 3x - 4y - e^{-t}$; $y' = x - 2y$.

Exercice 1407 – *Système différentiel et symétrie (CCP MP 2015)* 2

1 Soit E un espace euclidien et s une symétrie. Montrer que $E = \ker(s + \operatorname{Id} E) \oplus \ker(s - \operatorname{Id} E)$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_2$, avec A différente de $\pm I_2$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Résoudre le système $x' = y$ et $y' = x$ de 2 manières différentes : (1) en réduisant le système, (2) en utilisant la question précédente.

Exercice 1408 – *Banque CCP 2016 75* 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1 Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

2 On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.

3 En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

4. Étude qualitative

Exercice 1409 – *Comportement asymptotique d'un système fondamental de solutions* 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + f(t)y = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable.

1 Soit y une solution de (E). Montrer que, si y est bornée, alors y' tend vers 0 en $+\infty$.

2 En déduire que, pour toute base (y_1, y_2) des solutions de (E), au moins une des applications y_1 et y_2 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1410 – *Lieu d'annulation d'une solution d'une EDL (Mines MP 15)* 3

Soit $q \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et ϕ une solution non nulle de l'équation différentielle $\phi'' + q(x)\phi = 0$. Montrer que ϕ ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans $[0,1]$.

Exercice 1411 – *Zéros d'une solution de $y'' - qy = 0$ (Mines MP 10)* 3

Soit q une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, f une solution non identiquement nulle de $y'' - qy = 0$. Montrer que f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1412 – *Étude d'intégrabilité d'une solution d'une EDL (Mines MP 2015)* 3

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ et x une solution strictement positive de l'équation différentielle $x'' + q(t)x = 0$. On pose $f = x'/x$.

1 Donner une équation différentielle satisfaite par f.

2 Montrer que f est décroissante positive.

3 Que peut-on dire de l'intégrabilité de q ?

Exercice 1413 – *Unicité d'une solution d'une EDL avec annulations imposées (Mines MP 2015)* 3

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ avec $f \leqslant 0$.

1 Soit $z \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $z'' + fz = 0$. Étudier la convexité de z^2.

2 Montrer que le problème $y'' + fy = g, y(a) = y(b) = 0$ possède une et une seule solution.

Exercice 1414 – *Solutions $y'' + qy = 0$ où q est périodique (ENS MP 10)* 4

Soit q une application continue périodique et non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, y une solution de $y'' + qy = 0$. Montrer que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1415 – *Zéros d'une solution de $y'' + e^t y = 0$ (X MP 10)* 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle $(E) : y'' + e^t y = 0$. Montrer que f admet une infinité dénombrable de zéros.

Exercice 1416 – *Solution d'une EDL particulière s'annulant au moins deux fois* 2

1 On considère l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$.

Montrer que si une solution sur $\mathbb{R}$ s'annule deux fois, alors c'est la fonction identiquement nulle.

2 On considère l'équation différentielle

$$y'' - py' - qy = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $p^2 \leqslant 4q$. Montrer que si y est une solution s'annulant deux fois, alors c'est la fonction nulle.

5. EDL scalaires non résolues

Exercice 1417 – *Problèmes de raccord* 0

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1 $xy' + y = x^3$.

2 $xy' - y = 0$.

3 $x^2y' + y = 0$.

4 $xy' - 2y = 0$.

5 $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$.

6 $xy' - 2y = x^4$.
7 $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

Exercice 1418 – *Banque CCP 2016 42* 2

On considère les deux équations suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1 Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2 Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3 L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercice 1419 – *EDL avec problème de raccord (Télécom Sud Paris MP 2015)* 3

Résoudre $xy' + y = \tan(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1420 – *Problème de raccord d'ordre* 1 0

1 (Mines-Ponts PSI 10) Résoudre l'équation différentielle $xy' + y - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$.
2 (Centrale PC 10) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^4$.

Exercice 1421 – *EDL d'ordre 2 et intégrale à paramètre (ENSAM 2015)* 3

On définit une fonction f de variable réelle par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t))\,\mathrm{d}t$.

1 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2 Montrer que f vérifie l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$ grâce à une intégration par parties.
3 Appliquer la méthode de la variation de la constante sur f.
4 Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

6. Équations fonctionnelles et équations différentielles, divers

Exercice 1422 – *Équations pseudo différentielles* 2

1 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f'(x) + f(-x) = e^x,$$

pour tout réel x.

2 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f''(x) + f(-x) = 0,$$

pour tout réel x.

Exercice 1423 – *Équation fonctionnelle avec deux variables* 2

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

pour tous réels x et y.

Exercice 1424 – *Équation fonctionnelle avec intégrale* 2

1 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

2 Résoudre $f(x) - 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 1425 – *Endomorphisme et EDL* 3

Soit E l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. À toute fonction f de E, on associe la fonction g = L(f) par :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que L est un endomorphisme de E. Quels sont ses éléments propres ?

Exercice 1426 – *Endomorphisme sans sous-espace stable de dimension finie non nulle* 3

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f) \ : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que Φ est un endomorphisme de E ne stabilisant aucun sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Exercice 1427 – *EDL et équation fonctionnelle (Centrale MP 10)* 3

Trouver les $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1-x)$.

CHAPITRE XXXIV

Calcul différentiel (TD)

Sommaire

1. Limite, régularité

Exercice 1428 – *Banque CCP 2016 33* 2

On pose $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1 Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

3 f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 1429 – *Banque CCP 2016 52* 2

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f :$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

1 Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

2

i Quel est le domaine de définition de f ?

ii Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

3 Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.

i Justifier l'existence et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

ii Justifier l'existence et donner la valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

iii f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1430 – *Banque CCP 2016 57* 2

1 Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

i Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.

ii Donner la définition de "f différentiable en $(0,0)$".

2 On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

i Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1431 – *Continuité des fonctions de deux variables* 2

1 Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy > -1\}$.
i Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
ii Étudier la continuité de la fonction f définie sur U par

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

2 On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique.

Exercice 1432 – *Limite d'un taux d'accroissement à deux bornes mobiles (Centrale PC 10)* 1I

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Exercice 1433 – *Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$* 2

Soit

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2-y^2)\ln(x^2+y^2) \text{ si } (x,y) \neq (0,0), 0 \text{ sinon} \end{array}$$

Étudier la régularité de f.

Exercice 1434 – *Régularité jusqu'à la classe $\mathcal{C}^1$* 2

1 On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \end{array}$$

prolongée par la valeur 0 en l'origine.

Ce prolongement est-il continu ? admet-il des dérivées partielles (et des dérivées selon tout vecteur non nul) en tout point ? Est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

2 Mêmes questions avec

$$g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

3 Mêmes questions avec

$$h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{xy^2}{x^2+y^4} \end{array}$$

Exercice 1435 – *Limite en l'origine à paramètres* 3

Déterminer les familles $(a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant 3}$ de réels pour lesquelles

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\sum_{0\leqslant i,j\leqslant 3} a_{i,j}x^iy^j}{x^2+y^2} \end{array}$$

admet une limite finie en l'origine.

Exercice 1436 – *Fonction de classe $\mathcal{C}^1$* 3

(Mines MP 08) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1437 – *Existence d'une dérivée partielle seconde croisée (Centrale PC 10)* 2

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\sin(x^3y)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1 La fonction f admet-elle des dérivées partielles du premier ordre en tout point de $\mathbb{R}^2$?

2 Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Exercice 1438 – *Étude de régularité (Centrale PC 10)* 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Exercice 1439 – *Prolongement par continuité et régularité* 0

(CCP MP 13) Soit $f : (x,y) \mapsto xy^3/(x^2+y^2)$. Montrer que f peut être prolongée par continuité en l'origine. Ainsi prolongée, f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 1440 – *Étude d'une fonction de deux variables définie comme somme d'une série* 3

(CCP MP 13) Soit $f : (x,y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$.

1 Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2 Pour $a \in [0,1[$, soit $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < a\max\{1,y^2\}\right\}$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur D_a pour tout a. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe-t-elle sur D ?

Exercice 1441 – *Dérivées partielles secondes croisées* 2

Soit $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1 Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.

2 Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

3 Qu'en déduire sur la régularité de f ?

Exercice 1442 – *Fonctions de deux variables de classe* $\mathcal{C}^2$ (Mines MP 08) 3

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$. La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

2. Différentiabilité

Exercice 1443 – *Banque CCP 2016 58* 2

1 Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
Donner la définition de "f différentiable en a".

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

On pose : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$. On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.
Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

i Prouver que $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ / \forall\,(x,y) \in E \times E,\ |B(x,y)| \leqslant C\|x\|_\infty\|y\|_\infty$.
ii Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Exercice 1444 – *Différentiabilité d'une fonction de deux variables* 2

(CCP MP 13) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1445 – *De la topologie matricielle par une différentielle (Mines MP 2015)* 3DI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \ldots, \mathrm{tr}(M^n))$.

1 Montrer que f est différentiable et calculer $\mathrm{d}f(M)$.

2 Comparer le rang de $\mathrm{d}f(M)$ au degré du polynôme minimal μ_M de M.

3 Montrer que l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \chi_M = \mu_M\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1446 – {*Etude de différentiabilité (Mines-Ponts PSI 10)* 2

Soit $f\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ prolongée par continuité en $(0,0)$.

Étudier la différentiabilité en $(0,0)$ de f.

Exercice 1447 – *Différentielle du déterminant* 1D

Montrer que le déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $D(\det)(I_n) = \mathrm{tr}$, et que

$$D\det(X)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(X)H).$$

Exercice 1448 – *Différentielle, gradient* 2

On fixe deux points distincts A et B du plan. Calculer la différentielle et le gradient en tout point où cela est possible, dessiner des lignes de niveau et des lignes de courant pour :

1 $M \mapsto AM$.

2 $M \mapsto AM^2$.

3 $M \mapsto AM^2 + BM^2$.

4 $M \mapsto AM + BM$.

5 $M \mapsto AM \cdot BM$.

Exercice 1449 – *Différentielle de l'inverse matriciel* 1

Soit $U = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que U est un ouvert, et montrer que l'application inverse φ de U dans U est différentiable, et calculer sa différentielle en tout point.

3. Extrema

Exercice 1450 – *Étude de minimum dans un cadre euclidien (CCP MP 2015)* 3

Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives. On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

1 Soit h vecteur non nul. Montrer que $\langle f(h), h\rangle > 0$.

2 Soit $u = (u_1, \ldots, u_n)$ vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$. Soit $g(x) = \dfrac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$.

i Existence et expression des dérivées partielles de g.

ii Montrer qu'il existe un unique point critique z.

iii Montrer que g admet un minimum en z.

Exercice 1451 – *Recherche d'extrema (ENSEA MP 2015)* 2T

Recherche des éventuels extremum de la fonction $f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$

Exercice 1452 – *Extrema d'une fonction de deux variables* 0

1 Chercher les extrema de $f\ : (x,y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$.

2 *(Mines MP 08)* Chercher les extrema de $g\ : (x,y) \mapsto -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

3 *(Mines PC 08)* Déterminer les extrema de $h\ : (x,y) \mapsto (3x+4y)e^{-x^2-y^2}$.

4 *(X PC 09)* Soit $f\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2-y^2)\exp(-(x^2+y^2))$. Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Exercice 1453 – *Extrema* 0

Donner les extrema locaux et globaux de $f\ : (x,y) \mapsto y(x^2 + (\ln(y))^2)$.

Exercice 1454 – *Points critiques et extrema locaux* 2

1 (CCP) Points critiques et extrema locaux de $f : (x, y) \mapsto x^4 y + \ln(4 + y^2)$?

2 (CCP) Extrema locaux de $f : (x, y) \mapsto xy + 4/x + 2/y$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 1455 – *Extrema d'une fonction* 0

Étudier les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ et donner leur nature.

Exercice 1456 – *Détermination de maximum du produit de coordonnées dans un hyperplan* 3

(TPE MP 13) Soit $A > 0$. Quel est le maximum de xyz pour x, y, z dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $x + y + z = A$? tels que $x + 2y + 3z = A$?

Exercice 1457 – *Les moindres carrés* 1

Soit n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, les x_i étant non tous égaux. Montrer qu'il existe un unique couple (λ, μ) de réels rendant minimum la quantité $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.

Exercice 1458 – *Points critiques d'une fonction convexe* 2

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ convexe différentiable. Montrer que tout point critique est un minimum global.

Exercice 1459 – *Extrema d'une certaine fonction sur un espace euclidien* 0

Soit f une forme linéaire sur E espace euclidien et $g(x) = f(x)e^{-\|x\|^2}$. Montrer que g admet un minimum et un maximum.

Exercice 1460 – *Aire maximale d'un triangle inscit dans un cercle* 4

Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r.

Exercice 1461 – *Minimum de la somme des distances à trois points* 5

Soit A, B, C trois points du plan non alignés tels que les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ soient $< 2\pi/3$. Donner le mimimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f(M) = MA + MB + MC$.

Exercice 1462 – *Prolongement par continuité, extrema (Mines-Ponts PSI 10)* 0

Soit $f : (x, y) \mapsto xy \ln(x^2 + y^2)$.

1 Peut-on prolonger f par continuité en $(0, 0)$?

2 Déterminer les extrema de f.

4. EDP

Exercice 1463 – *EDP* 3

Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$.
Indication : poser $f(x, y) = e^{-y} g(x, y)$.

Exercice 1464 – *Famille d'opérateurs de dérivées partielles (Centrale MP 2015)* 3

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et F le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $(f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ où $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_{i,j}(x, y) = x^i y^j$. On pose $\Delta : f \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\Phi : f \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sur F.

1 Montrer que la famille des $(f_{i,j})_{i,j}$ est libre et que Δ et Φ sont des endomorphismes de F.

2 Déterminer le noyau de Φ et montrer que c'est un supplémentaire de xyF dans F.

3 Soit $w : (u, v) \longmapsto (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$ et $L : f \longmapsto f \circ w$. Montrer que $L(Ker\Delta) = Ker\Phi$.

Exercice 1465 – *EDP d'ordre 1* 0

1 Trouver les fonctions polynomiales $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=4f$.

2 Déterminer les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=a$, où a est une constante réelle donnée. On utilisera le changement de variable : $u=x+y$, $v=x-y$.

3 Même question avec $3\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=xe^y$.

Exercice 1466 – *Une équation aux dérivées partielles* 3

Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f$.
Indication : poser $f(x,y)=e^{-y}g(x,y)$.

Exercice 1467 – *Passage en polaires* 2

Résoudre les EDP suivantes au moyen d'un passage en polaires :

1 $x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ d'inconnue $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2 $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ d'inconnue $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3 $x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f(x,y)$ d'inconnue $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 1468 – *EDP d'ordre 2 avec changement linéaire* 0

1 *(Mines MP 09)* Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.
Indication : on pourra utiliser un changement de variables linéaire du type $u=ax+by$, $v=cx+dy$.

2 *(Mines MP 09)* Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Indication : on pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $\varphi(x,y)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)$.

Exercice 1469 – *EDP d'ordre 2 avec changement de variables non linéaire* 2

1 *(X PC 09)* Résoudre $x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=x^2y^3$
Indication : poser $u=x$, $v=xy$.

2 Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U=\{(x,y),x>0,\ y>0\}$. Trouver les applications $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2$.
Indication : on utilisera le changement de variable : $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$.

5. Divers

Exercice 1470 – *Règle de la chaîne* 0

Soit $f\ :(x,y)\mapsto(x^3+y^2,3x+xy,xy^2)$ et $g\ :(u,v,w)\mapsto u^2ve^w$. Calculer les dérivées partielles premières de $g\circ f$ avec la règle de la chaîne.

Exercice 1471 – *Plan tangent horizontal* 2

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation : $z=x\,e^x+y\,e^y$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent à $\mathcal{S}$ est horizontal i.e. possède une équation de la forme $z=c$.

Exercice 1472 – *Gradient en polaires* 1

Exprimer le gradient en polaires.
Réponse : $\overrightarrow{grad}\,f=\frac{\partial g}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}e_\theta$

Exercice 1473 – *Une méthode de Newton matricielle pour le calcul d'inverse* 5I

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre, on considère $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $F\ :X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto 2X-XAX$.

1 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, calculer $F(A^{-1})$, $DF(A^{-1})$.

2 Montrer que pour X_0 suffisamment proche de A^{-1}, (X_p) d'itératrice F converge vers A^{-1}.

3 Faire le lien avec la méthode de Newton.

Exercice 1474 – *Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique par le calcul différentiel* 2I

(CCP MP 13) Soient $U =]0,+\infty[^n$ et pour $x = (x_1,\dots,x_n) \in U$, $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)$.

1 Déterminer les points critiques de f.

2 Montrer que f est minorée par n^2. Trouver un cas d'égalité.

3 Comparer $A(x) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$ et $H(x) = n\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$.

4 La fonction f est-elle majorée ?

Partie 3

Solutions

CHAPITRE XXXV

Début d'année (corrections)

1. Logique

1.1. Valeur de vérité, tables de vérité

Correction de l'exercice 1 – *Valeur de vérité*	0

(1) F
(2) V
(3) V
(4) F
(5) V
(6) V
(7) V
(8) F
(9) F
(10) F

Correction de l'exercice 2 – *Quelques tautologies célèbres (et utiles)*	0

Faire les tables de vérité, ou utiliser les tautologies déjà prouvées.

1.2. Utilisation du registre formel

Correction de l'exercice 3 – *Valeur de vérité et négation*	0

Correction de l'exercice 4 – *Reformulations formelles et négations*	2

(1) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x\leqslant y)\Rightarrow(f(x)\leqslant f(y))$.
Remarque : dans le cas où f est dérivable, on peut proposer $f'\geqslant 0$ (*i.e.* $f'(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$).
Contraire : $\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x\leqslant y)\wedge(f(y)<f(x))$.

(2) $\big(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x<y)\Rightarrow(f(x)<f(y))\big)\vee\big(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x<y)\Rightarrow(f(y)<f(x))\big)$.
Remarque : ne surtout pas proposer
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x<y)\Rightarrow((f(x)<f(y))\vee(f(y)<f(x))),$$
qui revient à l'injectivité de f.
Remarque : dans le cas où f est dérivable, on peut proposer
$$((f'\geqslant 0)\vee(f'\leqslant 0))\wedge\big(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (f'(x)=f'(y)=0\wedge x<y)\Rightarrow(\exists z\in]x,y[, f'(z))\neq 0\big)$$
Contraire :
$$\exists (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, (x<y)\wedge(z<t)\wedge(f(x)<f(y))\wedge(f(t)<f(z)).$$

(3) $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 0$.

(4) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (f(x)=f(y)=0)\Rightarrow(x\neq y)$.

(5) $\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)\neq f(y)$.

(6) $\forall m\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, m>f(x)$.

(7) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, ((t \geqslant t_0) \Rightarrow (f(t) \geqslant M))$.
Contraire : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R}, ((t \geqslant t_0) \wedge (f(t) < M))$.

Correction de l'exercice 5 – *Tous non nuls et non tous nuls* 2

1
i $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i \neq 0$, et $\exists i \in [\![1,n]\!], x_i \neq 0$.
ii $x_1^2 + x_2^2 > 0$, $x_1 x_2 \neq 0$.

2 $|x_1| + |x_2| > 0$, $x_1 x_2 \neq 0$.

1.3. Principes de démonstration

Correction de l'exercice 6 – *Raisonnement par analyse-synthèse* 2

1 Soit $x \in E$. Supposons disposer de $(y,z) \in \ker(f) \times \operatorname{Im}(f)$ tel que $x = y + z$.
On a donc $f(y) = 0$, et donc $f(x) = f(z)$, et il existe $\alpha \in E$ tel que $z = f(\alpha)$.
Comme $f^3 = f^2 + f$, on obtient, en évaluant en α :

$$f^3(\alpha) = f^2(\alpha) + f(\alpha),$$

soit

$$f^2(x) = f(x) + z$$

donc nécessairement, $z = f^2(x) - f(x)$, et $y = x - z = x + f(x) - f^2(x)$.
Cela prouve l'unicité du couple (y,z) susceptible de convenir.
Réciproquement, on vérifie aisément que ces choix de y et de z conviennent bien.

2
i Soit $f \in \mathbb{R}^I$, et soit f_p et f_i des fonctions respectivement paire et impaire telles que $f = f_p + f_i$. On a donc pour tout $x \in I$

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x)$$

mais aussi

$$f(-x) = f_p(-x) + f_i(-x) = f_p(x) - f_i(x)$$

On a donc nécessairement

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Réciproquement, ces formules définissent bien des fonctions respectivement paire et impaire, de somme f.
ii Ces applications sont de somme l'identité (sur $\mathbb{R}^I$), et sont idempotentes (*i.e.* égales à leur composée deux fois). Ce sont des projecteurs vectoriels.

Correction de l'exercice 7 – *Irrationalité de* $\sqrt{2}$ 1

Supposons avoir $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers premiers entre eux. On a alors $2q^2 = p^2$, donc p est pair, puis s'écrit $2p'$ pour un certain entier p'. Ainsi, $q^2 = 2(p')^2$, donc q est pair, ce qui contredit le fait que p et q soient premiers entre eux.

Correction de l'exercice 8 – *Exemple astucieux de disjonction des cas* 2

Dans le cas où $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, le choix $x = \sqrt{2}$ convient.
Dans le cas contraire, le choix $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ convient, puisqu'alors $x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.

2. Applications

Les lettres E, F, G désignent des ensembles.

2.1. Composition, injectivité, surjectivité, bijectivité

Correction de l'exercice 9 – *Compatibilité entre injectivité et surjectivité* 0

Correction de l'exercice 10 – *Composition, injectivité, surjectivité* 0

1

2

3 Supposons $g \circ f$ injective et f surjective. Soit $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. Comme f est surjective, il existe $x, x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, de sorte que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, puis $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$. Dès lors, $y = y'$ en appliquant f : g est injective.

4 Supposons $g \circ f$ surjective et g injective. Comme $g \circ f$ est surjective, g l'est également (cf. le cours). g est donc bijective, puis, comme $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, f est surjective comme composée de telles fonctions.

Correction de l'exercice 11 – *Inverse à droite, inverse à gauche* 1

1 Dans un tel cas, on a en effet d'une part

$$g \circ f \circ h = (g \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_E \circ h = h,$$

et, d'autre part,

$$g \circ f \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ \mathrm{Id}_F = g,$$

donc $g = h$.

2 Si f est bijective, alors f^{-1} (qui existe bien), est inverse à gauche et à droite de f.

Réciproquement, si f est inversible à gauche et à droite, d'inverse g, alors $g \circ f$ est injective (c'est Id_E), donc f l'est aussi, et $f \circ g$ est surjective (c'est Id_F), donc f l'est également. En conclusion, f est bijective.

3 Dans un tel cas, f s'admet elle-même pour inverse, donc f^{-1} existe et vaut f.

4 Dans un tel cas, f admet f^{n-1} pour inverse, donc f^{-1} existe et vaut f^{n-1}.

5 À trouver soi-même.

2.2. Image directe, préimage

Correction de l'exercice 12 – *Sous-espaces stables* 0

On trouve $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}(1,0)$ et $\mathbb{R}(1,1)$.

Correction de l'exercice 13 – *Caractérisations de la surjectivité* 3

Montrons ces équivalences par implications cycliques :

De 1. vers 2. Supposons f surjective, soit $y \in F$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, *i.e.* tel que $x \in f^{-1}(\{y\})$: on a $\{x\} \subset f^{-1}(\{y\})$, d'où, en prenant les images directes par f : $\{y\} = f(\{x\}) \subset f(f^{-1}(\{y\}))$.

L'inclusion réciproque étant évidente, et non liée à la surjectivité (en effet : soit $z \in f(f^{-1}(\{y\}))$. Il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $z = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(\{y\})$ signifie $f(x) = y$, donc $z = y$.), on a bien l'égalité ensembliste.

De 2. vers 3. Supposons 2., et exploitons le bon comportement de la réunion avec images directes et réciproques : soit Y une partie de F. Écrivons $Y = \cup_{y \in Y}\{y\}$ (par convention, une union indexée par l'ensemble vide est vide). On a

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(Y)) &= f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{y\in Y}\{y\}\right)\right) \\ &= f\left(\bigcup_{y\in Y} f^{-1}(\{y\})\right) \\ &= \bigcup_{y\in Y} f(f^{-1}(\{y\})) \\ &= \bigcup_{y\in Y}\{y\} \text{ (par hypothèse 2.)} \\ &= Y. \end{aligned}$$

d'où l'implication de 2. vers 3..

De 3. vers 4. Supposons 3., et soit Y une partie de F telle que $f^{-1}(Y) = \emptyset$. En prenant les images directes par f, il vient $f(f^{-1}(Y)) = f(\emptyset) = \emptyset$, d'où $Y = \emptyset$ par hypothèse 3. : 4. est vérifiée.

De 4. vers 1. Supposons 4., et soit $y \in F$. Comme $\{y\}$ n'est pas vide, 4. permet d'affirmer que $f^{-1}(\{y\})$ ne l'est pas non plus, donc y admet au moins un antécédent par f. Ceci valant pour tout $y \in F$, f est bien surjective.

$\boxed{\text{L'équivalence de ces assertions est donc prouvée.}}$

3. Relations binaires

3.1. Relations d'ordre

Correction de l'exercice 14 – *Une relation d'ordre sur un ensemble de fonctions* 2

1 Facile (provient des mêmes propriétés pour l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

2 Pour $E = \mathbb{R}$, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, la première propriété est vérifiée (elle l'est pout toute fonction $f \in F$), la seconde ne l'est pas.

Remarque : si E est fini, les deux assertions sont équivalentes, puisqu'elles sont vraies.

3 f et g ne sont pas nécessairement comparables (considérer des fonctions caractéristiques d'ensembles non comparables pour l'inclusion), donc $\{f, g\}$ n'a pas toujours de plus grand élément. En revanche, $\{f, g\}$ admet $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ pour borne supérieure.

4 Cela résulte essentiellement de la même propriété pour $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 15 – *Pourquoi ne définit-on pas d'ordre sur le corps des nombres complexes ?* 3

1 On peut par exemple proposer l'ordre lexicographique (en ayant identifié $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).

2 Supposons disposer d'un tel ordre. Le produit de deux nombres positifs serait positif, donc tout carré z^2 serait positif (car $z \geqslant 0$ ou $-z \geqslant 0$), puis tout complexe serait positif. En particulier, $0 \leqslant -1$, donc $1 \leqslant 0$ en ajoutant 1, et, par ailleurs, $0 \leqslant 1$, d'où l'absurdité $0 = 1$.

3 On peut proposer l'ordre produit sur $\mathbb{C}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$), ou l'égalité.

3.2. Monotonie

Correction de l'exercice 16 – *Sur la monotonie* 2

1 $\Delta(f)$ est la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante : elle est décroissante.

2 On vérifie aisément que Δ est croissante, et même strictement croissante.

Correction de l'exercice 17 – *Stricte monotonie* 4

1

i On suppose E totalement ordonné. Supposons par exemple f strictement croissante. soit $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Comme E est totalement ordonné, on a $x < y$ ou $y < x$, donc $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$, et donc $f(x) \neq f(y)$ dans les deux cas : f est injective.

ii Cette application est strictement croissante, mais non injective.

2 Il suffit de prendre l'ordre d'égalité au départ.

3

i Supposons E totalement ordonné, et par exemple f strictement croissante. Soit $x', y' \in F$ tels que $x' < y'$. On souhaite montrer que $f^{-1}(x') < f^{-1}(y')$. Si tel n'était pas le cas, alors, E étant totalement ordonné, on aurait $f^{-1}(y') \leqslant f^{-1}(x')$, puis, par croissance de f, $y' \leqslant x'$, d'où une absurdité.

ii Considérons trois éléments distincts a, b et c de E. Soit $E' = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, I_3, \ldots, I_n\}$, où I_k est une partie de X de cardinal k, pour tout $k \in [\![3, n]\!]$. La restriction h de g à E' est une bijection strictement croissante, mais bien que $1 < 2$, $h^{-1}(1)$ et $h^{-1}(2)$ ne sont pas comparables, et h ne peut donc être strictement monotone.

3.3. Relations d'équivalence

Correction de l'exercice 18 – *Relation d'équivalence ?* 0

Non, cette relation n'est pas transitive, puisque si $f = \mathrm{Id}_{\{0,1\}}$, g et h sont constantes de valeurs respectives 0 et 1, on a $g\mathcal{R}f$ et $f\mathcal{R}h$, mais pas $g\mathcal{R}h$.

4. Entiers naturels, récurrence, symboles de somme et de produit

4.1. Principe de récurrence

Correction de l'exercice 19 – *Principe de récurrence* 0

1 L'amorçage pour $p = 0$ est évident, et, si on suppose l'inégalité vraie à un rang p fixé, alors

$$2^{p+1} = 2\,2^p \geqslant 2\,(p+1) = 2p+2 \geqslant p+2$$

d'où l'hérédité puis le résultat.

2 L'existence dans le théorème de décomposition primaire.

3

i Récurrence simple.

ii f définie par $f(0) = 42$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(n) = n$.

Correction de l'exercice 20 – *Structure des endomorphismes du groupe additif des rationnels* 1

Soit f un tel endomorphisme, *i.e.*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)(\text{ et } f(0) = 0)$$

En particulier, f est impaire :

$$\forall\, x \in \mathbb{Q}, f(-x) = -f(x)$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on montre par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$$

On souhaite montrer l'existence de $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \alpha\, x$. Il faut que $\alpha = f(1)$.

Posons donc $\alpha = f(1)$ et soit $x = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel ($(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$). On veut vérifier que

$$f(p/q) = \frac{p}{q}\, f(1)$$

or

$$qf(x) = f(qx) = f(p) = pf(1) = \alpha\, p$$

d'où le résultat.

Correction de l'exercice 21 – *Inégalités entre sinus* 3

Première méthode On peut, pour t fixé, procéder par récurrence sur n : l'amorçage au rang 0 est évident, et, si l'inégalité est vraie à un rang n fixé, alors

$$|\sin((n+1)t)| = |\sin(nt)\cos(t) + \sin(t)\cos(nt)| \leqslant |\sin(nt)| + |\sin(t)| \leqslant (n+1)|\sin(t)|$$

par hypothèse, d'où l'hérédité puis le résultat.

Seconde méthode On écarte le cas évident où $n = 0$. On a

$$\sin(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} = \frac{(e^{it})^n - (e^{-it})^n}{2i} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{it})^k (e^{-it})^{n-k-1}\right)$$

or

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} (e^{it})^k (e^{-it})^{n-k-1}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|(e^{it})^k (e^{-it})^{n-k-1}\right| = n$$

d'où le résultat.

4.2. Montrer qu'une suite récurrente est bien définie

Correction de l'exercice 22 – *Suite récurrente bien définie* 0

1 On peut choisir $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ (plus grande partie stable convenable), ou $\{1,-1/2,-2\}$ (plus petite partie stable convenable).

2 Prendre par exemple l'intervalle $[1,+\infty[$.

3 L'intervalle $[0,2]$ comprend $w_0(=0)$ et est stable par la fonction de récurrence $x \mapsto \sqrt{2-x}$: il existe donc bien une unique telle suite (w_n).

Correction de l'exercice 23 – *Suite récurrente mal définie* 2

Si (u_n) est d'itératrice f et de terme initial $\alpha = \frac{1}{2}$, alors u_0, u_1 et u_2 sont bien définis, mais pas u_3.

4.3. Symboles de somme et de produit

4.3.1. Calculs divers

Correction de l'exercice 24 – *Symboles de somme et de produit* 0

1 Pour tout $k \in [\![2,n]\!]$,

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)},$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

2 $1\ 1! + 2\ 2! + \cdots + n\ n! = \sum_{k=1}^{n} k(k!) = \sum_{k=1}^{n}((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$.

3 On peut sommer par tranches verticales (ou horizontales), mais aussi par tranches diagonales (à $p+q$ constant) :

$$S_n = \sum_{s=0}^{n}(s+1)s = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4 $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right) = \prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$.

5 $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n}\frac{(i-1)(i+1)}{i^2} = \prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i}\prod_{i=2}^{n}\frac{i+1}{i} = \frac{n+1}{2n}$.

6 $\displaystyle\sum_{i+j=n}\min(\{i,j\})$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\min(\{i,j\})$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\min(\{i,j\}) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{2n+1}{2}i - \frac{i^2}{2} \\
&= \frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

Remarque : on trouve donc $\sum_{k=1}^{n} k^2$, ce qui n'est pas un hasard (essayez de voir cette somme comme un calcul de nombre de briques d'une pyramide !)

7 $\sum_{i+j=n} ij = \sum_{i=0}^{n} i(n-i) = n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$.

Correction de l'exercice 25 – *Sommes de puissances* 1

1 On peut le faire par récurrence (puisque la formule nous est donnée). On peut aussi exploiter un chanement d'indice

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k)\right) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

On peut aussi utiliser la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^2 - k^2)$.

2 On peut le faire par récurrence, ou en considérant la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^3 - k^3)$.

3 On trouve $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Correction de l'exercice 26 – *Somme de carrés de nombres de même parité* 3

On peut le faire par récurrence, ou en factorisant par 4.
La seconde formule résulte de la première.

Correction de l'exercice 27 – *Utilisation de la factorielle et symbole de produit* 2I

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}$$

Or

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = \left(\prod_{k=1}^{n} 2\right)\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = 2^n\, n!$$

Le dénominateur ne s'exprime pas si facilement, aussi écrit-on

$$u_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2^n\, n!)^2}{(2n+1)!}$$

Correction de l'exercice 28 – *Encadrement de Gauss de la factorielle* 2

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{ij} &= \left(\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{i}\right)\left(\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{j}\right)\\
&= \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} i \quad \text{(l'indice j est muet)}\\
&= \prod_{i=1}^{n} i \quad \text{(j est déterminé par la valeur de i)}\\
&= n!
\end{aligned}$$

2 Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part

$$ij - (i+j-1) = ij - i - j + 1 = (i-1)(j-1) \geqslant 0,$$

et, d'autre part

$$\left(\frac{i+j}{2}\right)^2 - ij = \frac{1}{4}(i^2 + 2ij + j^2 - 4ij) = \left(\frac{i-j}{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

d'où le résultat demandé.

3 En combinant les deux premières questions, il vient

$$\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{i+j-1} \leqslant n! \leqslant \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{\left(\frac{i+j}{2}\right)^2},$$

soit

$$\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{n} \leqslant n! \leqslant \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \left(\frac{n+1}{2}\right),$$

soit enfin, puisque chaque produit comporte n termes, l'encadrement demandé :

$$n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Correction de l'exercice 29 – *Un encadrement de* $\binom{2n}{n}$ 2

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k &= \prod_{i=1}^{n} (2i) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} 2\right)\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) \\ &= 2^n\, n! \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\left(\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k\right)\left(\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k\right) = \prod_{k=1}^{2n} k = (2n)!,$$

d'où

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Comme $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, on a bien également

$$\frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que

$$\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k = \prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k,$$

et que ce dernier produit comporte $(n-1)$ termes.

Par ailleurs, le produit $\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k$ comporte n termes. L'idée est d'observer l'entrelacement des termes de ces deux produits : on a

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{4\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{2i+1}{2i+2} \leqslant \frac{1}{2},$$

et, de même,

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2n}\,\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{2\leqslant k\leqslant 2(n-1),\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2n}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{2i+1}{2i} \geqslant \frac{1}{2n},$$

d'où, grâce à la première question,

$$\frac{1}{2n} \leqslant \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \leqslant \frac{1}{2},$$

puis l'encadrement voulu.

5. Trigonométrie et nombres complexes

5.1. Trigonométrie

Correction de l'exercice 30 – *Exemples de linéarisation*	0

Utiliser les formules d'Euler.

Correction de l'exercice 31 – *Polynôme de la fonction cosinus*	0

Soit $x \in \mathbb{R}$. Après calculs,

$$\begin{aligned} \sin(6x) &= \operatorname{Im}((e^{ix})^6) \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))^6 \\ &= 2\cos(x)(-1 + 2\cos(2x))(1 + 2\cos(2x))sin(x) \end{aligned}$$

de sorte que le choix

$$f(x) = 2\cos(x)(-1 + 2\cos(2x))(1 + 2\cos(2x)),$$

convienne si $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

On observe que ce choix convient aussi dans le cas où $x \in \pi\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 32 – *Changement d'écriture d'une combinaison de cosinus et sinus*	1

Soit $A, \theta_0 \in \mathbb{R}$.

On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$A\cos(\theta - \theta_0) = (A\cos(\theta_0))\cos(\theta) + (A\sin(\theta_0))\sin(\theta).$$

Il suffit donc de trouver $(A, \theta_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} A\cos(\theta_0) &= a \\ A\sin(\theta_0) &= b \end{cases}$$

i.e. $Ae^{i\theta_0} = a + ib$: la forme exponentielle de $a + ib$ nous donne donc le résultat : $A = \sqrt{a^2 + b^2} (= |a + ib|)$ et θ_0 est l'un des arguments de $a + ib$.

Remarque : en pratique, retenir qu'il faut factoriser par $\sqrt{a^2 + b^2}$. On peut d'ailleurs le retrouver en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : le couple (u, v) tel que $u^2 + v^2 = 1$ maximisant le produit scalaire $au + bv$ est le normalisé du vecteur (a, b).

Correction de l'exercice 33 – *Calculs de sommes trigonométrique*	1

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Dans le cas où $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a bien sûr $C_n(x) = n + 1$ et $S_n(x) = 0$.

Dans le cas où $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} C_n(x) + iS_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k \\ &= \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

En prenant les parties réelles, on trouve donc

$$C_n(x) = \cos(nx/2) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)}$$

et, en prenant les parties imaginaires :

$$S_n(x) = \sin(nx/2)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)}$$

Correction de l'exercice 34 – *Sommes trigonométriques à coefficients binomiaux* 2

$$\begin{aligned} A_n + iB_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k \\ &= (1+e^{ix})^n \\ &= \left(e^{ix/2}(2\cos(x/2))\right)^n \\ &= 2^n \cos(x/2)^n e^{inx/2} \end{aligned}$$

En prenant les parties réelles, on trouve donc

$$A_n = 2^n \cos(x/2)\cos(nx/2)$$

et, en prenant les parties imaginaires :

$$B_n(x) = 2^n \cos(x/2)\sin(nx/2)$$

5.2. Nombres complexes

Correction de l'exercice 35 – *Ensemble d'entiers déterminé par une condition complexe* 0

La forme trigonométrique s'impose clairement pour traiter ce type d'exercice. On a

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3} \quad \text{et} \quad 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4},$$

donc,

$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3} = \frac{2^5 e^{-5i\pi/3}}{\sqrt{2}^3 e^{-3i\pi/4}} = \sqrt{2}^7 e^{-11i\pi/12}$$

Ainsi,

$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3} = 8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12},$$

donc

$$\arg\left(\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3}\right)^n \equiv -\frac{11n\pi}{12}\ [2\pi],$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons qu'un nombre complexe z est réel strictement positif si et seulement si $\arg z \equiv 0\ [2\pi]$.

L'ensemble cherché est donc $\boxed{24\,\mathbb{N} = \{24k,\ k \in \mathbb{N}\}.}$

Correction de l'exercice 36 – *Calculs de racines cubiques* 0

Comme $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$, ses racines cubiques sont $2^{1/3}e^{-i\pi/18}$, $2^{1/3}e^{-i\pi/18}e^{2i\pi/3} = 2^{1/3}e^{11i\pi/18}$ et $2^{1/3}e^{-i\pi/18}e^{-2i\pi/3} = 2^{1/3}e^{-13i\pi/18}$.

Correction de l'exercice 37 – *Équations algébriques complexes* 0

1

2 Remarquons d'abord que

$$\frac{-4i}{1+i} = -2-2i \quad \text{et} \quad \frac{26-2i}{1+i} = 12-14i.$$

Nous cherchons donc les racines du polynôme $X^2 - (2+2i)X + 12 - 14i$.

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = (-(2+2i))^2 - 4(12-14i) = 16(-3+4i) = (4(1+2i))^2,$$

donc ses racines sont

$$\frac{2+2i+4(1+2i)}{2} = 3+5i \quad \text{et} \quad \frac{2+2i-4(1+2i)}{2} = -1-3i$$

Les solutions de l'équation donnée sont $\boxed{3+5i \text{ et } -1-3i.}$

Correction de l'exercice 38 – *Équations algébriques complexes plus compliquées* 2

1

2 Un nombre imaginaire pur ib ($b \in \mathbb{R}$) est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si :

$$-ib^3 + (5+3i)b^2 + i(7+16i)b + 3 - 21i = 0,$$

soit :

$$\begin{cases} 5b^2 - 16b + 3 = 0 \\ -b^3 + 3b^2 + 7b - 21 = 0 \end{cases}.$$

Le polynôme $5X^2 - 16X + 3$ admet 3 et $1/5$ pour racines. On vérifie aisément que 3 est également racine de $-X^3 + 3X^2 + 7X - 21$. Ainsi, $3i$ est solution de $\mathcal{E}$.

Il existe donc des nombres complexes a, b, c tels que :

$$X^3 - (5+3i)X^2 + (7+16i)X + 3 - 21i = (X-3i)(aX^2 + bX + c)$$

Après identification, on trouve $a = 1$, $c = 7+i$, puis $b = -5$. Les deux autres solutions de $\mathcal{E}$ sont les racines de :

$$X^2 - 5X + 7 + i$$

Le discriminant de ce polynôme est : $\Delta = (-5)^2 - 4(7+i) = -3 - 4i$.

On cherche une racine carrée $\delta = x + iy$ de Δ ($x, y \in \mathbb{R}$). En suivant la méthode vue en première année, on obtient d'abord $x^2 - y^2 = -3$, puis $x^2 + y^2 = 5$. Ainsi, $x = \pm 1$, $y = \pm 2$. Comme $2xy = -4 < 0$, on peut prendre $\delta = 1 - 2i$.

Finalement, les deux autres solutions de $\mathcal{E}$ sont $\frac{5-(1-2i)}{2} = 2+i$ et $\frac{5+(1-2i)}{2} = 3-i$.

$\boxed{\text{Les solutions de } \mathcal{E} \text{ sont } 3i,\ 2+i \text{ et } 3-i.}$

3 On change d'abord d'indéterminée, en posant $y = z^3$.

On cherche donc dans un premier temps les racines du polynôme

$$X^2 + (2i-1)X - 1 - i.$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (2i-1)^2 + 4(1+i) = 1$, donc ses racines sont $-i$ et $1-i$.

Il nous reste à déterminer les racines cubiques de $-i$ et $1-i$ qui, par « chance », s'expriment facilement sous forme trigonométrique : $-i = e^{-i\pi/2}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Pour obtenir les racines cubiques de ces nombres complexes, on en trouve une, et on la multiplie par les différentes racines cubiques de l'unité $1, j, j^2$ (où $j = e^{2i\pi/3}$).

Les solutions de l'équation considérée sont

$$e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, je^{-i\pi/6} = e^{i\pi/2} = i, j^2e^{-i\pi/6} = e^{-5i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

et

$$2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{7i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{-3i\frac{\pi}{4}}.$$

En remarquant que $-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ et que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, on peut donner les solutions de $\mathcal{E}$ sous forme algébrique :

$$\boxed{i, \frac{\sqrt{3}-i}{2}, -\frac{\sqrt{3}+i}{2}, -2^{-\frac{1}{3}}(1+i),}$$

et

$$\boxed{\frac{2^{1/6}}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{2}-\sqrt{6})\right), \frac{2^{1/6}}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)}$$

Correction de l'exercice 39 – *Banque CCP 2016 84* 2

Correction de l'exercice 40 – *Banque CCP 2016 89* 2

6. Calculus

6.1. Calculs de dérivées

Correction de l'exercice 41 – *Calculs de dérivées* 0

1 $f'(x) = \frac{-\sin(x)(1+\cos(x)^2)-(-2\sin(x)\cos(x))\cos(x)}{(1+\cos(x)^2)^2} = \frac{-\sin(x)+\sin(x)\cos(x)^2}{(1+\cos(x)^2)^2}$.

2 $f'(x) = \cos(x)\, e^{\sin(x)}$.

3 $f'(x) = \frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$.

4 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x^3-2)} + \sqrt{x}\,\frac{-3x^2}{(x^3-2)^2}$.

5 $f'(x) = \frac{-7\times 7\times 6}{(7x-3)^7}$.

6 $f'(x) = \frac{x(2+(1-x)^3)+3x(1-x)^2}{(2+(1-x)^3)^2}$.

7 $f'(x) = 3\sqrt{5x+2} + (3x+4)\,\frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$.

8 Notons $g\ : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{\sin(t)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$, et soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$ (existe par continuité de g).
On a, pour tout réel x :

$$f(x) = G(\sin(x)) - G(x^2)$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x :

$$f'(x) = \cos(x)\, g(\sin(x)) - 2xg(x^2) = \frac{\cos(x)e^{\sin(\sin(x))}}{1+\sin(x)^2} - \frac{2xe^{\sin(x^2)}}{1+x^4}$$

Correction de l'exercice 42 – *Dérivation d'une fonction s'écrivant comme puissance* 0

$u^v = \exp(v\ln(u))$, donc

$$(u^v)' = \left(v'\ln(u) + \frac{u'v}{u}\right) u^v$$

Correction de l'exercice 43 – *Utilisation de la dérivation pour une somme* 2

On introduit, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{R}\setminus\{1\})$:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k,$$

de sorte que $g_n'(x) = f_n(x)$. Or, puisque $x \neq 1$:

$$g_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

puis

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$$

Correction de l'exercice 44 – *Dérivées successives* 0

1 Formule de Leibniz.

2 Linéarisation.

3 Décomposition en éléments simples.

6.2. L'intégration par parties

Correction de l'exercice 45 – *Primitive du logarithme* 0

$x \mapsto x\ln(x) - x$.

Correction de l'exercice 46 – *Calcul d'intégrale* 0

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 \arctan(t)\mathrm{d}t = [t\arctan(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Correction de l'exercice 47 – *Suites de rationnels convergeant vers* e^2 3

1 Intégration par parties.

2 Récurrence sur n (on pour deviner la formule, utilisation d'une somme télescopique).

3 Il s'agit de montrer que (I_n) converge vers 0. Or

$$|I_n| \leqslant \int_0^2 \frac{2^n\, e^2}{n!} = \frac{2^{n+1}\, e^2}{n!}$$

donc (I_n) tend vers 0 (par croissances comparées).

Correction de l'exercice 48 – *Une suite bornée* 1

Première tentative

$$|u_n| \leqslant \int_1^n \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(n)$$

mais $\ln(n)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini...

Seconde tentative En faisant une intégration par parties, en intégrant sin et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{t}$, le numérateur reste borné, mais le dénominateur tend beaucoup plus vite vers l'infini. Plus précisément,

$$u_n = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^n - \int_1^n \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

Or $\left(\left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est évidemment bornée, et

$$\left|\int_1^n \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_1^n \frac{|\cos(t)|}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1,$$

donc (u_n) est bien bornée.

6.3. La formule de changement de variables

Correction de l'exercice 49 – *Changements de variables* 2

1 $\int_0^\pi \cos(x)^3\sin(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x)^4}{4}\right]_0^\pi = 0.$

2 $\pi/4$

3 $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x = \left[\ln(x^2+x+2)\right]_0^1 = \ln(2).$

4 Les bornes deviennent $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et 1, $\mathrm{d}x$ devient $\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, et $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ de sorte que l'intégrale cherchée est égale à

$$\int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_{1/\sqrt{3}}^1 = \frac{\ln(3)}{2}$$

5 On peut se ramener à l'intégrale précédente en effectuant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$.

6 Les bornes deviennent $\pi/4$ et $\pi/3$, $\mathrm{d}t$ devient $2\sin(u)\cos(u)\mathrm{d}u$, de sorte que l'intégrale cherchée est égale à

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} 2\mathrm{d}u = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Remarque : le changement de variable $t = \sin(u)^2$ n'en est pas vraiment un, puisque la variable initiale est t, et que cette relation ne permet pas d'écrire u en fonction de t. Il faut donc effectuer un changement de variable précis, comme $u = \arcsin(\sqrt{t})$ (afin de bien avoir $t = \sin(u)^2$), ou « remonter » les calculs (afin que la variable initiale soit bien u).

Remarque : certains se sont embrouillés car ils ont remarqué que $\sin(u)^2 = \frac{1}{2}$ était vrai lorsque $u = -\pi/4$ par exemple, et ne savaient pas très bien comment changer les bornes (ceci doit se comprendre à la lumière de la remarque précédente).

7 Les bornes devient 1 et e, dx devient $\frac{\mathrm{d}u}{u}$, de sorte que l'intégrale est égale à

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$$

Les bornes deviennent $\sqrt{2}$ et $\sqrt{1+e^2}$, $t^2 = 1+u^2$ donc $2t\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$, puis $\mathrm{d}u = \frac{t\mathrm{d}t}{u}$, de sorte que l'intégrale cherchée est égale à

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}},$$

soit enfin

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

6.4. Suite d'intégrales

Correction de l'exercice 50 – *Étude de suite intégrale* 3

1

i Provient de $\tan' = 1+\tan^2$.

ii On montre que (I_n) est décroissante car pout tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \pi/4]$,

$$\tan(t)^{n+1} \leqslant \tan(t)^n$$

Bien sûr, (I_n) est positive, de sorte que

$$0 \leqslant I_{n+2} \leqslant I_n$$

, puis

$$I_n \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n$$

d'où l'encadrement voulu.

iii Par encadrement, (I_n) tend vers 0. **Remarque :** l'encadrement plus facile à obtenir $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ permettait de conclure.

iv $I_{n+4} - I_n = I_{n+4} + I_{n+2} - (I_{n+2} + I_n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$.

v Supposons n impair, $n = 2p+1$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{4i+1} - \frac{1}{4i+3} = \sum_{i=0}^{p} I_{4i} - I_{4(i+1)} = I_0 - I_{4(p+1)}$$

donc $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers $I_0 = \frac{\pi}{4}$. Comme $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0, on en déduit que (u_n) tend vers $\pi/4$.

6.5. Calcul asymptotique

Correction de l'exercice 51 – *Calculs de limites* 0

Correction de l'exercice 52 – *Équivalents de fonctions* 2T

1 On effectue un développement limité à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} &= 2(1+x+x^2/2+x^3/6+\mathrm{o}(x^3)) - (1+2x-2x^2+4x^3+\mathrm{o}(x^3)) - (1+3x^2+\mathrm{o}(x^3)) \\ &= -\frac{11}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

donc si on appelle f la fonction étudiée,

$$f(x) \sim_{x\to 0} -\frac{11}{3}x^3$$

2 Comme on préfère avoir des produits que des différences pour les équivalents, on écrit

$$g(x) \overset{def}{=} (\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x} = \cos(x)^{\tan(x)}\left(\cos(x)^{\sin(x)-\tan(x)} - 1\right)$$

Or $\cos(x)^{\tan(x)} \sim_{x\to 0} 1$, et

$$\cos(x)^{\sin(x)-\tan(x)} = \exp((\sin(x)-\tan(x))\ln(\cos(x)))$$

De plus, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$ et $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$, donc

$$\sin(x) - \tan(x) \sim_{x \to 0} -\frac{1}{2}x^3$$

et $\ln(\cos(x)) \sim_{x \to 0} -\frac{x^2}{2}$, donc

$$\cos(x)^{\sin(x)-\tan(x)} - 1 = \exp(x^5/4 + \mathrm{o}(x^5)) - 1 \sim_{x \to 0} x^5/4$$

Ainsi,

$$g(x) \sim_{x \to 0} \frac{x^5}{4}$$

3 Pour tout $x > 0$

$$\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+1/x^2} = x\left(1 + \frac{1}{2x^2} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + \frac{1}{2x} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

De même,

$$\sqrt[3]{x^3+x} = x + \frac{1}{3x} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\sqrt[4]{x^4+x^2} = x + \frac{1}{4x} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} \sim_{x \to +\infty} \frac{1}{12x}$$

Correction de l'exercice 53 – *Calcul de limites* 2T

1 $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$, donc

$$\arctan(x) - \sin(x) \sim_{x \to 0} -\frac{x^3}{6}$$

$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$ et $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$, donc

$$\tan(x) - \arcsin(x) \sim_{x \to 0} \frac{x^3}{6}$$

La limite cherchée vaut donc -1.

2 $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$ et $\mathrm{sh}(2x) = x + \frac{8x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$, donc

$$2\tan(x) - \mathrm{sh}(2x) \sim_{x \to 0} -\frac{2}{3}x^3$$

De plus, $\arctan(x) \sim_{x \to 0} x$, et $(1 - \cos(3x)) \sim_{x \to 0} \frac{9x^2}{2}$, de sorte que la limite cherchée est $-4/27$.

3 On étudie d'abord $(1+1/x)^x$ en $+\infty$ à la précision $1/x^2$:

$(1+1/x)^x = \exp(x\ln(1+1/x)) = \exp(x(1/x - 1/(2x^2) + 1/(3x^3) + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(1/x^3))) = \exp(1 - 1/(2x) + 1/(3x^2) + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(1/x^2))$
donc

$$\begin{aligned}(1+1/x)^x &= e\,\exp(-1/(2x))\exp(1/(3x^2))\left(1 + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(1/x^2)\right)\\ &= e\left((1 - 1/(2x) + 1/(8x^2))(1 + 1/(3x^2)) + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(1/x^2)\right)\\ &= e\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\end{aligned}$$

En substituant $2x$ à x puis $3x$ à x, on obtient

$$\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} = e\left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{11}{4 \times 24x^2} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

et

$$\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} = e\left(1 - \frac{1}{6x} + \frac{11}{9 \times 24x^2} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

et donc

$$x^2\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x}\right) \sim_{x \to +\infty} \frac{11\,e}{72}$$

la limite cherchée est $\frac{11\,e}{72}$.

Correction de l'exercice 54 – *Développements asymptotiques de fonctions* 2

6.6. Décomposition en éléments simples et primitives de fonctions rationnelles

Correction de l'exercice 55 – *Décompositions élémentaires en éléments simples* 0

1 $(F = X + 4 + \frac{10}{X-1} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{5}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^4})$

2

3

4 $F = -\frac{1}{X^3} - \frac{1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)}$.

5 $X + 1 - \frac{1}{X^2} + \frac{4}{X} - \frac{2}{X-\frac{1}{2}}$.

6 $2 + \frac{1}{X^3} - \frac{2}{X^2} + \frac{3}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1}$.

Correction de l'exercice 56 – *Fractions rationnelles* 0

6.7. Calculs de primitives

Correction de l'exercice 57 – *Fonctions trigonométriques circulaires* 0

1 $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \mathrm{d}x$, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

2 $\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

3 $\int \cos^2 x \sin^3 x \mathrm{d}x$.

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x} \mathrm{d}x$.

5 $\int_{\sqrt{2}}^{\pi+\sqrt{2}} \frac{(\cos(2t))^3}{2+\sin^2 t \cos^2 t} \mathrm{d}t$.

6 $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}$.

7 (en posant $u = \tan(x)$) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{-1+2\tan x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{6} \ln\left(\tan^2 x - \tan x + 1\right) - \frac{1}{3} \ln|1 + \tan x| + C$.

8 (en posant $u = \tan(x/2)$) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$.

9 $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)} \mathrm{d}x$.

Correction de l'exercice 58 – *Fonctions trigonométriques hyperboliques* 0

1 $x \mapsto \frac{1}{2} \ln|1 + \operatorname{sh} x| - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh} x) + C$.

2 $x \mapsto -\frac{1}{2(2e^x+1)} + C$.

Correction de l'exercice 59 – *Primitives diverses* 0

1

$$\begin{aligned}
\int x \arctan(x)^2 \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} \arctan(x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan(x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan(x)^2 - \int \arctan(x) \mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2} \arctan(x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan(x)^2 - \left(x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2} \arctan(x)^2 \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan(x)^2 - x \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctan(x)^2 + C
\end{aligned}$$

2 $\int \frac{1}{x+x\ln(x)^2} = \int \frac{1}{x} \frac{1}{1+\ln(x)^2} \mathrm{d}x = \arctan(\ln(x)) + C$.

3 Si on connaît les primitives de ln :

$$\int \frac{1}{x} \ln(\ln(x)) \mathrm{d}x = [u \ln(u) - u]_{u=\ln(x)} = \ln(x) \ln(\ln(x)) - \ln(x) + C.$$

Autre méthode (en faisant une IPP) :

$$\int \frac{1}{x}\ln(\ln(x))\mathrm{d}x = \ln(x)\ln(\ln(x)) - \int \ln(x)\frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \ln(\ln(x)) - \ln(x) + C.$$

4 $x \mapsto \arctan\sqrt{1-x^2}$.

Correction de l'exercice 60 – *Primitives et racines* 3

CHAPITRE XXXVI

Algèbre linéaire (corrections)

1. Matrices

1.1. Calcul matriciel

Correction de l'exercice 61 – *Calcul d'inverse d'une matrice* 0

Correction de l'exercice 62 – *Puissances de matrices* 0

1 B est nilpotente. Comme B et I_3 commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

2 $A(\theta)^n = A(n\,\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3 C'est une matrice diagonale par blocs : cela nous ramène à trouver les puissances des blocs diagonaux, on procède comme à la première question. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & n\,(-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 63 – *Puissances d'une matrice* 2

1 On trouve que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$, et donc que le polynôme $P = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ est annulateur de A.

Pour déterminer, A^n, on calcule le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P :

$$X^n = PQ_n + R_n$$

où Q_n et R_n sont des polynômes, $\deg(R_n) \leqslant 1$. En évaluant cette relation en 1 puis en 2 (les racines de P), il vient

$$1 = 1^n = R_n(1) \quad \text{et} \quad 2^n = R_n(2)$$

On en déduit R_n (par exemple par interpolation de Lagrange. On trouve

$$R_n = (2^n - 1)X + (2 - 2^n)$$

Or

$$A^n = P(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A),$$

donc

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$$

2 Même démarche qu'à la première question (on trouve $X^2 - X - 1$ comme polynôme annulateur).

3 Une façon de procéder consiste à remarque que $M + I_3$ est de rang 1, et donc que

$$(M + I_3)^2 = \operatorname{tr}(M + I_3)\,(M + I_3)$$

Par conséquent, $X^2 - X - 2$ annule M, et on procède comme aux questions précédentes.
Remarque : on peut aussi diagonaliser M.

Correction de l'exercice 64 – *(Centrale MP 10)* 2

Correction de l'exercice 65 – *Matrices triangulaires supérieures* 1

Correction de l'exercice 66 – *Une matrice a-t-elle toujours une racine cubique ? (Centrale MP 06)* 3

Pas toujours, comme en témoigne le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si une telle matrice X existait, alors elle ne serait pas inversible ($X^6 = A^2 = 0$). Elle serait semblable à une matrice M de première colonne nulle. De même, le coefficient en position $(2,2)$ de M devrait être nul. On aurait alors $M^2 = 0$, puis $X^2 = 0$, puis $A = 0$, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 67 – *L'identité est-elle un crochet de Lie ?* 3

Non car $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$.

1.2. Inverse d'une matrice

Correction de l'exercice 68 – *Inverse d'une matrice (X PC 10, Mines MP 2015)* 2

Notons que A est inversible, car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss pour le calcul d'inverse, en travaillant sur les lignes :

$$(A|I_n)$$

On applique $L1 \leftarrow L_1 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, …, $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, obtenant :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Puis on applique la même suite d'opérations, obtenant I_n à gauche et l'inverse de A à droite :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 69 – *Matrice inversible et racines de l'unité (Mines MP 2015)* 3

1.3. Matrices élémentaires

Correction de l'exercice 70 – *Produit de matrices élémentaires* 1

Méthode matricielle– Notons $P = E_{i,j}E_{k,l}$.
Soit $(u,v) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $u \neq i$, $[P]_{u,v} = 0$, car la ligne u de $E_{i,j}$ est nulle. De même si $v \neq l$, $[P]_{u,v} = 0$.
Il reste à déterminer $[P]_{i,l}$, or

$$[P]_{i,l} = \sum_{s=1}^{n} [E_{i,j}]_{i,s}[E_{k,l}]_{s,l} = \delta_{j,k}$$

et donc

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}\, E_{i,l}$$

Méthode géométrique– En considérant les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés f et g à $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ respectivement, et en notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on constate que $(f \circ g)(e_s)$ est nul si $s \neq l$, et que $g(e_l) = e_k$, donc, si $k \neq j$, $(f \circ g)(e_l) = 0$, et $(f \circ g)(e_l) = e_i$ si $k = j$.

1.4. Matrices inversibles

Correction de l'exercice 71 – *X MP 10* 3

Soit B la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ de diagonale nulle et d'autres coefficients égaux à 1.

En ajoutant à la première colonne de B toutes les autres, on a

$$\det(B) = (2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

puis, en retranchant la première aux autres, et en reconnaissant le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure

$$\det(B) = (2n-1)(-1)^{2n-1} = 1 - 2n$$

En particulier, $\det(B)$ est impair et donc non nul.
Remarque : on aurait aussi pu exploiter le fait que $B + I_{2n}$ soit de rang 1 pour calculer son déterminant.
Remarque : on aurait aussi pu diagonaliser la matrice B pour calculer son déterminant.

Revenons au cas général. Il s'agit de faire le lien entre l'inversibilité de B et celle de A. Pour ce faire, on remarque que A et B ont les mêmes coefficients modulo 2, et l'expression sommatoire du déterminant donne alors

$$\det(A) \equiv \det(B)\,[2]$$

En particulier, A est aussi de déterminant impair, et est donc également inversible.

Correction de l'exercice 72 – *Matrice à diagonale dominante (X MP 09, X PSI 09)* 1

Nous allons montrer que A est inversible en montrant que ses colonnes sont linéairement indépendantes.

Par hypothèse, le coefficient de chaque ligne est, en module, strictement supérieur à la somme des modules des autres coefficients de la ligne.

Par conséquent, la somme des colonnes $C_1, \dots, C_n$ de A n'est pas la colonne nulle (et ses coefficients sont même tous non nuls). Plus généralement, si les λ_i sont des nombres complexes de même module non nul, alors $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j$ est à coefficients tous non nuls.

Considérons maintenant des scalaires non tous nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et supposons que $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$. L'idée consiste à adapter la remarque ci-dessus, en se concentrant sur la ligne dont l'indice correspond au plus grand module pour les scalaires : soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

$$|\lambda_j| \leqslant |\lambda_i|$$

On a donc

$$-\lambda_i C_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j C_j$$

et donc, en position i

$$-\lambda_i a_{i,i} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j a_{i,j}$$

puis, par inégalité triangulaire

$$|\lambda_i||a_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} |\lambda_j||a_{i,j}| \leqslant |\lambda_i| \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

et enfin l'absurdité

$$|a_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

puisque $|\lambda_i| > 0$.

A est donc bien inversible.
Remarque : une autre démonstration consiste à se ramener au cas où les $a_{i,i}$ valent 1, puis à utiliser le fait que, dans une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie, si $\|u\| < 1$, alors $1 - u$ est inversible.

Correction de l'exercice 73 – *Inverse d'une matrice (X MP 09)* 2

Pour avoir une idée de l'inverse, on peut se placer dans le cas où $\|A\| < 1$ et $\|B\| < 1$ pour une norme d'algèbre, puis exprimer $(I_n - BA)^{-1}$ en fonction de A, de B, et de l'inverse de $I_n - AB$. Il ne reste plus qu'à montrer que l'inverse trouvé convient même sans supposer $\|A\| < 1$ et $\|B\| < 1$.

1.5. Représentation matricielle, équivalence et similitude

Correction de l'exercice 74 – *Mines MP 10* 1

Soit f un tel endomorphisme.

On peut supposer E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, et soit M la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

De plus, en changeant chaque e_i en $2e_i$ dans $\mathcal{B}$, pour tout $i \geqslant 2$, on constate que $m_{i,1} = \frac{1}{2} m_{i,1}$ et donc $m_{i,1} = 0$ pour tout $i \geqslant 2$, et donc $f(e_1) = \lambda\, e_1$. Pour tout vecteur non nul x de E, on a aussi $f(x) = \lambda\, x$ (en écrivant la matrice dans une base de premier vecteur x), donc f est nécessairement une homothétie.

Réciproquement, toute homothétie vérifie bien cette propriété.

Correction de l'exercice 75 – *Changement de base* 0

Correction de l'exercice 76 – *Représentation matricielle des endomorphismes de carré nul en dimension* 3 3

Correction de l'exercice 77 – *Condition suffisante de non similitude* 0

1 Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que A et B sont semblables : soit Q une matrice inversible telle que $B = Q^{-1}AQ$.

On vérifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = Q^{-1}A^kQ$, et donc que

$$P(B) = \sum_{k=0}^{N} a_k B^k = \sum_{k=0}^{N} a_k (Q^{-1}B^kQ) = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k B B^k\right) Q = Q^{-1}P(A)Q$$

Les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont bien semblables.

2 Supposons que $P(A) = 0$. Si A et B sont semblables, alors $P(B)$ est semblable à $P(A)$, donc $P(B) = 0$. La contraposée donne le résultat souhaité.

3 $A - I_3$ est triangulaire supérieure stricte de taille 3, donc nilpotente d'indice inférieur ou égal à 3. Le polynôme $(X-1)^3$ annule donc A, et un calcul élémentaire (mais fastidieux) montre que ce polynôme n'annule pas B : A et B ne sont pas semblables (bien qu'elles aient même rang, même trace et même déterminant).

4 Analogue à la question précédente.

Correction de l'exercice 78 – *Similitude de matrices* 2

Correction de l'exercice 79 – *La similitude matricielle dépend elle du corps ?* 4

Correction de l'exercice 80 – *Matrice semblable à son opposée (X PC 10)* 3

2. Utilisation de la linéarité

Correction de l'exercice 81 – *Propagation des propriétés par linéarité* 0

1 Facile.

2 Appliquer la première question à $f - g$.

Correction de l'exercice 82 – *Un problème de Cauchy pour l'opérateur différence (Mines MP 2015)* 3

Reformulons d'abord le résultat à établir : il s'agit de montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} X\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ Q & \mapsto & Q(X+1) - Q(X) \end{array}$$

est bijective. Or cette application est linéaire, donc cela ouvre la voie à une preuve par des arguments dimensionnels.

Deux points compliquent la tâche : on travaille en dimension infinie, et φ n'est pas un endomorphisme. Pour ce second point, il suffit d'utiliser l'isomorphisme $H \in \mathbb{K}[X] \mapsto XH$ de $\mathbb{K}[X]$ sur $X\mathbb{K}[X]$. On se ramène donc à montrer que l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & H & \mapsto & (X+1)H(X+1) - XH(X) \end{array}$$

est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Or on peut vérifier que ψ conserve le degré, et on en déduit classiquement que ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3. Endomorphismes

Correction de l'exercice 83 – *Lorsque tout vecteur non nul est propre* 1

3.1. Automorphismes

Correction de l'exercice 84 – *Banque CCP 2016 59* 2

Correction de l'exercice 85 – *CNS pour qu'un endomorphisme soit bijectif (ENSAM 2015)* 2

Correction de l'exercice 86 – *Suite de polynômes par primitivation (Centrale MP 2015)* 3

3.2. Projecteurs et symétries

Correction de l'exercice 87 – *Stabilité de sous-espaces par un projecteur* 3

Correction de l'exercice 88 – *Matrice d'un projecteur (Mines MP 08)* 2

Correction de l'exercice 89 – *Banque CCP 2016 71* 2

Correction de l'exercice 90 – *Projecteurs et puissances d'un endomorphisme* 1

Partir de $f = p - 2q$, et du fait que $pq = qp = 0$.

Correction de l'exercice 91 – *Combinaison de projecteurs avec des coefficients irrationnels donnés (CCP)* 3

1 Grand classique à savoir faire (en travaillant dans une base de E adaptée à p).

2 Cela devient un exercice d'arithmétique. On prend la trace. La $\mathbb{Q}$-liberté de $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, impose alors $q = r = 0$.

Correction de l'exercice 92 – *Matrice d'un projecteur (Mines-Ponts PSI 10)* 3

1 AB est la matrice d'un projecteur si et seulement si $(AB)^2 = AB$, ce qui conduit immédiatement à $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ pour unique choix possible.

2 Comme $AB = (AB)^2 = A(BA)B$, $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(BA)$, or $\mathrm{rg}(AB) = 2$ (calcul immédiat, ou en se rappelant que rang et trace sont égaux pour un projecteur), et BA est de taille 2 : BA est donc inversible. En outre $(BA)^3 = B(AB)^2A = B(AB)A = (BA)^2$, d'où, en simplifiant par la matrice inversible $(BA)^2$, $BA = I_2$.

3.3. Endomorphismes nilpotents

Correction de l'exercice 93 – *Stabilité de la nilpotence* 1

Correction de l'exercice 94 – *Quel est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes ?* 4

Correction de l'exercice 95 – *La nilpotence passe au crochet de Lie* 1

La somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent est nilpotente. Reste à appliquer ceci aux bons endomorphismes.

Correction de l'exercice 96 – *Présence de matrices nilpotentes dans un hyperplan (Centrale PSI 10)* 3

La dimension d'un hyperplan est « grosse » : il suffit de trouver un sous-espace vectoriel constitué de matrices nilpotentes « d'assez grosse dimension » pour montrer qu'elle ont un élément non nul en commun. On peut par exemple prendre le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures strictes, de dimension $n(n-1)/2 \geqslant 2$. Comme $n-1+n(n-1)/2 > n$ (car $n \geqslant 3$), le résultat est montré.

Remarque : pour $n \in \{1, 2\}$, le résultat est faux. C'est évident pour $n = 1$, et, pour $n = 2$, on peut prendre $\mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}+E_{2,1})$: un élément nilpotent N de ce sous-espace vectoriel doit être de trace nulle, donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ pour certains réels a et b. Son déterminant doit également être nul, ce qui conduit à $N = 0_2$.

Correction de l'exercice 97 – *Matrice semblable à son double (X PC 10)* 3

Correction de l'exercice 98 – *Produit nul d'endomorphismes nilpotents* 2T

1 On procède par récurrence sur k. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{H}_k \ : \mathrm{rg}(f \circ g^k) = \mathrm{rg}(f)$$

L'amorçage au rang 0 est évident.

Fixons $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}_k$. D'après cette hypothèse, et puisque $\mathrm{Im}(f \circ g^k) \subset \mathrm{Im}(f)$, on a en fait

$$\mathrm{Im}(f \circ g^k) = \mathrm{Im}(f)$$

On a donc

$$g\left(\mathrm{Im}(f \circ g^k)\right) = g\left(\mathrm{Im}(f)\right)$$

soit

$$\mathrm{Im}(g \circ f \circ g^k) = \mathrm{Im}(g \circ f)$$

soit, puisque g et f commutent et que $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$

$$\mathrm{Im}(f \circ g^{k+1}) = \mathrm{Im}(f)$$

d'où $\mathcal{H}_{k+1}$ en passant aux dimensions.

2 En appliquant le résultat de la question précédente à $u_1 \dots u_k$ et u_{k+1}, on constate [1] que si $\mathrm{rg}(u_1 \dots u_{k+1}) = \mathrm{rg}(u_1 \dots u_k)$, alors ces rangs sont nuls, et donc $u_1 \dots u_k = 0$, puis $u_1 \dots u_n = 0$.

Si, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\mathrm{rg}(u_1 \dots u_{k+1}) < \mathrm{rg}(u_1 \dots u_k)$, alors $\mathrm{rg}(u_1 \dots u_n) \leqslant \mathrm{rg}(u_1) - (n-1) \leqslant 0$, car u_1 n'est pas inversible (u_1 est nilpotente), et donc $u_1 \dots u_n = 0$.

3.4. Trace

Correction de l'exercice 99 – *Toute matrice de trace nulle est-elle semblable à une matrice de diagonale nulle ? (Centrale PC 10)* 4

Correction de l'exercice 100 – *Trace d'une somme* 3

Correction de l'exercice 101 – *Endomorphismes conservant la trace d'un produit (ENS MP)* 4

1 Si $u \in G$, et si $A \in \ker(u)$ alors $\mathrm{tr}(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $A = 0$ (par le produit scalaire canonique, éventuellement en prenant $B = A^T$, ou en considérant les matrices élémentaires. Par conséquent, u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension finie, c'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Par nilpotence de u_{k+1} et le fait qu'il commute avec $u_1 \dots u_k$.

2 G est une partie de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ d'après la question précédente. On montre aisément qu'il est stable par composition et par passage à la réciproque. Comme il possède $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, c'est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

3 Question de recherche.

3.5. Polynôme d'endomorphisme

Correction de l'exercice 102 – *CNS d'inversibilité et polynômes annulateurs (Mines PC 10)* 2

Correction de l'exercice 103 – *Polynôme de matrice et commutant (Mines PC 10)* 2

3.6. Commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice

Correction de l'exercice 104 – *Matrices commutant* 0

Correction de l'exercice 105 – *Commutant d'un endomorphisme* 1

Correction de l'exercice 106 – *Commutant d'une matrice* 1

Correction de l'exercice 107 – *Dénombrement d'un ensemble de matrices (Mines PC 10)* 3

Correction de l'exercice 108 – *Commutant d'un projecteur* 3

Correction de l'exercice 109 – *(Centrale PSI 10)* 3

Correction de l'exercice 110 – *Matrices commutant avec un ensemble de matrices* 2

1 On doit trouver les matrices scalaires. On peut utiliser une approche matricielle, en prenant par exemples des matrices élémentaires, mais on peut aussi raisonner plus géométriquement (*i.e.* en termes d'espaces vectoriels et d'applications linéaires), afin de se ramener à la dernière question de l'exercice 83 ci-dessus.

2 C'est plus technique : on peut d'abord montrer que si A commute avec toutes les matrices diagonales, alors elle est diagonale.

Correction de l'exercice 111 – *Commutant d'une matrice diagonale par blocs* 2

3.7. Endomorphismes cycliques

Correction de l'exercice 112 – *Endomorphismes cycliques* 1

1 Fait en cours.

2 Soit f un endomorphisme cyclique de E : soit $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

Tout d'abord, tout polynôme de f commute avec f.

Soit g un endomorphisme de E commutant avec f. On décompose $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

Les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïncident en x_0. Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$g(f^p(x_0)) = f^p(g(x_0)) = f^p(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(f^p(x_0))$$

donc les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïndident sur la base $\mathcal{B}$: ils sont égaux.

4. Image et noyau

Correction de l'exercice 113 – *Noyau et image d'un morphisme d'évaluation* 0

Correction de l'exercice 114 – *Stabilité du noyau et de l'image par un élément du commutant* 1

1 On suppose que f et g commutent. Soit $x \in \ker(f)$. On a $f(x) = 0$, et on veut montrer que $f(g(x)) = 0$. Or

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$$

d'où la stabilité de $\ker(f)$ par g.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$: soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On veut montrer que $g(y) \in \mathrm{Im}(f)$, or

$$g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f)$$

d'où la stabilité de $\mathrm{Im}(f)$ par g.

2 On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et soit $x \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$, *i.e.* $f(x) = \lambda x$. On a

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

donc $g(x) \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Remarque : plus efficacement, on aurait pu remarquer $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et g commutaient, et que $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ était donc stable par g d'après la question précédente.

3 Si $f = \mathrm{Id}_E$, tout sous-espace de E est stable par f. En prenant g ne laissant pas stable une droite vectorielle par exemple, on répond à la question.

Dans $E = \mathbb{K}^2$ par exemple, si $f = \mathrm{Id}_E$ et si g est l'endomorphisme $(x, y) \mapsto (x, -y)$, alors $\mathbb{K}(1, 1)$ est stable par f, mais pas par g (bien que f et g commutent).

4 Il suffit d'observer que $F = \ker(g - h)$ et que $g - h$ commute avec f.

Correction de l'exercice 115 – *Caractérisation de la supplémentarité du noyau et de l'image (INT 08)* 1

Avant d'établir ces équivalences, intéressons-nous aux informations pertinentes de ces propriétés (la question ouverte en fin d'exercice nous y incite).

Comme l'inclusion $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ est toujours vérifiée, la première propriété se reformule en $\ker(u^2) \subset \ker(u)$.

Comme l'inclusion $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$ est toujours vérifiée, la deuxième propriété se reformule en $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$.

La troisième propriété signifie que $\ker(u)+\mathrm{Im}(u) = E$ *et* $\ker(u)\cap\mathrm{Im}(u) = \{0\}$. Or $\dim\ker(u)+\dim\mathrm{Im}(u) = \dim(E)$ d'après le théorème du rang (valable en dimension finie) : La troisième propriété est donc équivalente à $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$ *ou* $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

Supposons la première propriété vérifiée, soit encore $\ker(u^2) \subset \ker(u)$. Soit $x \in E$. Si $u^2(x) = 0$, alors $u(x) = 0$. En posant $y = u(x)$, on obtient que si $y \in \ker(u)$, alors $y = 0$. Or y décrit précisément $\mathrm{Im}(u)$ lorsque x décrit E, donc $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$, puis **3**.

Réciproquement, supposons **3** : on a $\mathrm{Im}(u)\cap\ker(u) = \{0\}$, donc si $x \in \ker(u^2)$, alors $u(x) \in \ker(u)\cap\mathrm{Im}(u) = \{0\}$. On en déduit bien **1**.

Supposons la deuxième propriété vérifiée, soit en core $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$. Soit $x \in E$. Comme $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $y \in E$ tel que $u(x) = u^2(y)$, *i.e.* $x - u(y) \in \ker(u)$.

Ainsi, $x = x - u(y) + u(y) \in \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$: $E \subset \ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$ puis $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$ (l'inclusion réciproque étant évidente). On en déduit **3**.

Réciproquement, supposons **3** : On a $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$: il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Il existe $x_1 \in \ker(u)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(u)$ tels que $x = x_1 + x_2$, et on a alors

$$y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_2) \in \mathrm{Im}(u^2) car x_2 \in \mathrm{Im}(u)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(u^2)$: $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$, d'où **2**.

Cela montre bien, en dimension finie, l'équivalence entre ces trois propriétés. En dimension infinie, il manque le théorème du rang pour effectuer le lien entre $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$ et $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

Cependant, **1** équivaut à $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, tandis que **2** équivaut à $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$.

L'équivalence est bien perdue dans certains cas, comme le montre l'exemple de la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Correction de l'exercice 116 – *Polynôme annulateur* 1

1 Expliciter g, polynôme en f, tel que $fg = gf = \mathrm{Id}_E$.

2 $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$ signifie $g \circ f = 0$. Pour la supplémentarité, il suffit de vérifier que la somme est directe, et que

$$E = \mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$$

Correction de l'exercice 117 – *Banque CCP 2016 60* 2

Correction de l'exercice 118 – *Banque CCP 2015 62* 2

Correction de l'exercice 119 – *Banque CCP 2016 62* 0

Correction de l'exercice 120 – *Banque CCP 2016 64* 1

Correction de l'exercice 121 – *CCP MP 2015* 1

Correction de l'exercice 122 – *Supplémentarité* 2

Soit $y \in \ker(v) \cap \mathrm{Im}(u)$. On a $v(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a donc $v(u(x)) = 0$, et donc $x = 0$, puis $y = 0$:

$$\ker(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$$

Soit $x \in F$. On a $v(u(v(x))) = v(x)$, donc

$$x = (x - u(v(x))) + u(v(x)) \in \ker(v) + \mathrm{Im}(u)$$

d'où la supplémentarité voulue.
Remarque : $u \circ v$ est un projecteur et on peut montrer que $\ker v = \ker u \circ v$, et que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u \circ v$, ce qui permet d'établir à nouveau le résultat voulu.

Correction de l'exercice 123 – *Petites Mines MP 2015* 2

Correction de l'exercice 124 – *ENSEA MP 2015* 3

Correction de l'exercice 125 – *ENSEA MP 2015* 2

Correction de l'exercice 126 – *Télécom Sud Paris MP 2015* 3

Correction de l'exercice 127 – *Mines MP 2015* 3

Correction de l'exercice 128 – *Petites Mines MP 2015* 2

Correction de l'exercice 129 – *(X MP 10)* 3

Correction de l'exercice 130 – *Noyaux des itérés de dimension finie (X MP 10)* 3D

C'est vraiment difficile : on se ramène au cas où $n = 2$. Il s'agit alors de montrer que $f^{-1}(\ker(f))$ est de dimension finie.

En fait, plus généralement, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors $f^{-1}(F)$ est de dimension finie. En effet, $F \cap \mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, et si $(y_1, \ldots, y_p) = (f(x_1), \ldots, f(x_p))$ en est une base, on montre que

$$f^{-1}(F) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p) + \ker(f)$$

.

5. Rang

5.1. Généralités sur le rang

Correction de l'exercice 131 – *Sous-espaces de matrices de rang majoré (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 132 – *Inégalités et rang* 1

1 L'inégalité de gauche se déduit de celle de droite, un peu comme la seconde inégalité triangulaire se déduit de la première.

L'inégalité de droite se déduit de $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$ et de la formule de Grassmann.

2 L'inégalité de droite a été vue en cours.

Celle de gauche, difficile, peut s'obtenir en appliquant la fomrule du rang à la restriction de u (au départ) à $\operatorname{Im}(v)$ (idée à retenir).

Correction de l'exercice 133 – *Rang d'une matrice par le déterminant* 2

Correction de l'exercice 134 – *Égalité de rangs* 3

Pour la supplémentarité, on peut revenir à la définition et utiliser les hypothèses.

Pour l'égalité des rangs de f et g, on peut utiliser le théorème du rang.

Correction de l'exercice 135 – *Rang d'une matrice à paramètres (Mines-Ponts PSI 10)* 3

En utilisant la formule $\cos(t) = 2\tan(t/2)/(1+\tan^2(t/2))$, valable si $t \in \{a,b,c\}$, on se ramène (par opérations laissant le rang invariant) à calculer le rang de

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & \alpha(1+\alpha^2) \\ 1+\beta^2 & \beta & \beta(1+\beta^2) \\ 1+\gamma^2 & \gamma & \gamma(1+\gamma^2) \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \tan(a/2)$, $\beta = \tan(b/2)$ et $\gamma = \tan(c/2)$. En ôtant la deuxième colonne à la troisième, on est amené à calculer le rang de

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & \alpha^3 \\ 1+\beta^2 & \beta & \beta^3 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & \gamma^3 \end{pmatrix},$$

Correction de l'exercice 136 – *Base de matrices de rang fixé (Centrale PSI 10)* 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1 :*

Si $A = J_1$, le résultat est évident (prendre des matrices diagonales par exemple) : $J_1 = M_1 - M_1'$, où M_1 et M_1' sont de rang p.

Revenons au cas général : A est équivalente à J_1. Soit $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = UJ_1V$. Les matrices $A_1 = UM_1V$ et $A_1' = UM_1'V$ conviennent.

La base canonique est constituées de matrices de rang 1 : d'après la question précédente, on peut trouver une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, formée de matrices de rang p. De cette famille génératrice, on peut extraire une base, ce qui fournit le résultat.

Correction de l'exercice 137 – *Rang d'une matrice par blocs (Centrale)* 0

On trouve bien sûr $\operatorname{rg}(B) = 2\operatorname{rg}(A)$. À vrai dire, je me demande quel est le degré de détail attendu dans la rédaction.

Correction de l'exercice 138 – *Applications linéaires dont la composée est un projecteur de rang 2 (CCP)* 0

Puisque $\operatorname{Im}(u \circ v) \subset \operatorname{Im} u$, il suffit de montrer que ces sous-espaces vectoriels ont même dimension, *i.e.* que $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.

Correction de l'exercice 139 – *Curiosité de rang* 3

5.2. Endomorphismes et matrices de rang 1

Correction de l'exercice 140 – *Matrices de rang* 1 1

1 X doit être un vecteur directeur de la droite engendrée par les colonnes de A, par exemple toute colonne non nulle de A convient. Choisir alors Y à partir du choix de X.

2 On peut utiliser la question précédente, en observant que ${}^tYX$ est une matrice de taille 1, c'est-à-dire un scalaire.

Correction de l'exercice 141 – *Matrices de rang* 1 2

On rappelle que lorsque A est (carrée) de rang 1, $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$.

1 Immédiat.

2 Si $\operatorname{tr}(A) = 0$, alors $A^2 = 0$, donc A est nilpotente : elle est diagonalisable si et seulement si elle est nulle. Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, $X^2 - \operatorname{tr}(A)X$ est simplement scindé.

Pour le calcul de déterminant, comme les colonnes sont de « légères pertubations » de la colonne des y_j, on peut exploiter le caractère multilinéaire alterné du déterminant.

3 Le cas $n = 1$ est évident. On suppose $n \geqslant 2$. Les valeurs propres de A sont 0 et $\operatorname{tr}(A)$, ce qui permet de tester l'inversibilité de B.

Comme $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$, on trouve facilement un polynôme annulateur de B, puis son inverse.

Correction de l'exercice 142 – *(TPE PSI 10)* 2

Correction de l'exercice 143 – *(Mines PC 10)* 2

6. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

6.1. Structure d'espace-vectoriel, dimension

Correction de l'exercice 144 – *Étude algébrique d'une partie de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *(CCP)* 0

E s'exprime directement comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par une partie de cardinal 3.

Correction de l'exercice 145 – *Dimension d'un sous-espace matriciel (CCP 12)* 0

L'application $\varphi\ : M \mapsto M + {}^tM - 2\operatorname{tr}(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (essentiellement parce que la transposition et la trace sont linéaires), donc E, qui en est le noyau, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En considérant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on constate que l'image de φ est l'ensemble des matrices symétriques de diagonale nulle. Le théorème du rang permet alors de trouver la dimension de E (à savoir $\frac{n(n+1)}{2}$).

Correction de l'exercice 146 – *Sous-espaces d'intersection non triviale (CCP)* 3

Comme souvent, il y a une application pour ça.

Introduire l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi\ : & F_1 \times \cdots \times F_p & \to & E^{p-1} \\ & (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & (x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_1) \end{array}$$

Cette application n'est pas injective par un argument dimensionnel, son noyau n'est donc pas trivial.

Correction de l'exercice 147 – *Dimension d'un sous-espace d'endomorphismes* 3

On vérife aisément que F est une partie de $\mathcal{L}(E)$ possédant $0_{\mathcal{L}(E)}$, et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Notons N sa dimension.

Si $x = 0_E$, $F = \mathcal{L}(E)$, et donc $N = n^2$.

Si $x \neq 0_E$, soit H un supplémentaire de $\mathbb{K}\,x$ dans E. On sait que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(\mathbb{K}\,x, E) \times \mathcal{L}(H, E) \\ & & f & \mapsto & (f_{|\mathbb{K}\,x}, f_{|H}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Or $f \in F$ si et seulement si $\varphi(f) = (0, f_{|H})$, donc F est de dimension $n(n-1)$.
Remarque : on pouvait aussi faire un raisonnement matriciel.

6.2. Supplémentarité, somme directe

Correction de l'exercice 148 – *Supplémentaire* 0

H est le noyau de la forme linéaire non nulle

$$\varphi\ : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1 + \cdots + x_n$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}^n \setminus \ker(\varphi)$, $\mathbb{R}\,u$ est un supplémentaire de H. On peut par exemple prendre $\mathbb{R}\,(1, 1, \dots, 1)$.

Correction de l'exercice 149 – *Les sous-espaces propres sont en somme directe* 1

Correction de l'exercice 150 – *Division euclidienne et supplémentaires* 2

Correction de l'exercice 151 – *Sous-espaces supplémentaires à un même troisième* 3

7. Familles de vecteurs

Correction de l'exercice 152 – *Base en dimension* 4 0

Correction de l'exercice 153 – *Base selon la valeur d'un paramètre* 2

Correction de l'exercice 154 – *Suppression d'un vecteur dans une famille génératrice* 0

Correction de l'exercice 155 – *Des exemples simples de liberté* 0

Correction de l'exercice 156 – *Bases* 2

Correction de l'exercice 157 – *Décomposition en éléments simples et bases* 2

Correction de l'exercice 158 – *Liberté de familles* 2

1 Utiliser les formules de trigonométries. Les sous-familles libres (non vides) sont celles réduites à un vecteur, et les couples (f_a, f_b) tels que $b - a \notin \pi\mathbb{Z}$.

2 Utiliser la propriété « être nul en a_i. »

3 Utiliser la propriété « être dérivable en a ».b

4 Échelonner les g_a par leur comportement asymptotique, en $+\infty$ par exemple.

5 Utiliser l'appartenance (ou pas) aux sous-espaces de la forme $\ker(f^i)$.

6 Parmi les nombreuses possibilités, on peut échelonner les h_n par leur comportement asymptotique, en $+\infty$ par exemple.

7 Échelonner par l'équivalent $u_n^m \sim \frac{1}{n^m}$ en $+\infty$.

8 Pour hiérarchiser les f_n, on peut considérer le comportement de leurs dérivées en 0 : si $n \neq 0$, $f_n'(x) \sim_{x\to 0} nx^{2n-1}$. Il ne reste qu'à préciser que f_0 n'est pas la fonction nulle pour conclure.

9 Le premier vecteur est la somme du deuxième et du dernier ...

10 Encore une fois, le comportement asymptotique en $+\infty$ permet de conclure.

8. Déterminant

n désigne un entier naturel non nul.

8.1. Calculs de déterminants

Correction de l'exercice 159 – *Nullité d'un déterminant* 0

Correction de l'exercice 160 – *Déterminant d'une matrice triangulaire* 0

Correction de l'exercice 161 – *Calculs simples de déterminants* 0

Correction de l'exercice 162 – *Calculs divers de déterminants* 2

Correction de l'exercice 163 – *Matrice compagnon* 1

Correction de l'exercice 164 – *Calcul de déterminant par multilinéarité* 2

Correction de l'exercice 165 – Mines MP 08 3

Correction de l'exercice 166 – *Un déterminant tridiagonal* 3

1 Simple développement selon une ligne ou une colonne.

2 Rappeler le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

3 C'est le cas le moins évident (celui où l'équation caractéristique admet une unique solution).

Correction de l'exercice 167 – *Calcul astucieux de déterminant* 3

Astuce : ajouter l'indéterminée X à chaque coefficient, puis étudier ce polynôme (trouver son expression par interpolation de Lagrange).

Correction de l'exercice 168 – Mines MP 08 4

Si $m < n-1$, alors $(P_1, \dots, P_n)$ est liée, donc la famille des lignes de la matrice A dont on cherche le déterminant est liée : ce déterminant est nul.

On suppose désormais $m = n-1$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i,k} X^k$$

la décomposition de P_i dans la base canonique. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$P_i(a_j) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{i,j} a_j^k.$$

On observe que A peut s'écrire comme le produit BV, où

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n-1} \\ \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,0} & \alpha_{n,1} & & \alpha_{n,n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\det(A) = \det(B) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Correction de l'exercice 169 – *Déterminant d'un opérateur matriciel (Mines MP 10)* 3

8.2. Propriétés du déterminant

Correction de l'exercice 170 – *Déterminant par blocs* 2

On trouve dans les deux cas $\det(A)\det(B)$. Pour montrer le résultat efficacement, on pourra utiliser le produit matriciel par blocs, en faisant notamment apparaître des blocs I_p et I_q.

Correction de l'exercice 171 – *Perturbation matricielle sans effet sur le déterminant* 3

1 Vérifier que la fonction polynomiale $t \mapsto \det(A+tJ)$ est paire et de degré au plus 1.

2 On suppose bien sûr $n \geqslant 2$. On peut s'intéresser à la stabilité de la propriété : si A la vérifie, alors toute matrice qui lui est équivalente la vérifie aussi. En prenant un bon représentant de la classe d'équivalence de A, on constate que seul le choix $A=0$ convient.

Correction de l'exercice 172 – *Déterminant d'un endomorphisme matriciel* 3

Correction de l'exercice 173 – (Ulm MP 08) 3

Correction de l'exercice 174 – X 07, Mines MP 08 3

H étant de rang 1, elle est équivalente à $J_r(1)$. Soit $U,V\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $H=UJ_1(n)V$.
Soit $B=U^{-1}AV^{-1}=(b_{i,j})$, de sorte que $A=UBV$.
On a $\det(A+H)\det(A-H)=\det(U)^2\det(V)^2\det(B-J_1(n))\det(B+J_1(n))$.
En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on observe que

$$\det(B+J_1(n))=\det(B)+\begin{vmatrix}1 & b_{1,2} & \dots & b_{1,n}\\ 0 & b_{2,2} & \dots & b_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n,2} & \dots & b_{n,n}\end{vmatrix},$$

soit encore $\det(B+J_1(n))=\det(B)+\Delta$, où Δ est le mineur du coefficient en position $(1,1)$ de B. De même, $\det(B-J_1(n))=\det(B)-\Delta$, puis

$$\det(A+H)\det(A-H)=\det(U)^2\det(V)^2(\det(B)^2-\Delta^2)=\det(U)^2\det(V)^2\det(B)^2=\det(A)^2.$$

8.3. Utilisation du déterminant

Correction de l'exercice 175 – *Racines carrées réelles de l'unité* 2

Correction de l'exercice 176 – *Matrice antisymétrique de taille impaire* 2

Correction de l'exercice 177 – *Inversion matricielle par le déterminant* 0

Correction de l'exercice 178 – *Indépendance de la similitude par rapport au corps des scalaires* 1

Correction de l'exercice 179 – *Déterminant avec des coefficients binomiaux (ENSAM 2015)* 3

Correction de l'exercice 180 – *Mines MP 2015* 1

Correction de l'exercice 181 – *X MP 10* 3

8.4. Comatrice

Correction de l'exercice 182 – *Comatrice de la transposée* 2

Correction de l'exercice 183 – *Comatrice* 0

Correction de l'exercice 184 – *Rang et déterminant de la comatrice* 1

Correction de l'exercice 185 – *Comatrice d'un produit (Mines MP 10)* 2

Correction de l'exercice 186 – *Si A est une involution, sa comatrice aussi* 3

Il suffit d'utiliser la relation $A\,{}^t\mathrm{com}(A) = \det(A)I_n$.

On peut aussi utiliser le fait, surprenant et assez peu connu, que $\mathrm{com}(A)\,\mathrm{com}(B) = \mathrm{com}(AB)$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ici, il suffit de le vérifier pour des matrices inversibles, mais un argument de densité et de continuité permet d'étendre la formule à tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

8.5. Déterminant de Vandermonde

Correction de l'exercice 187 – *Déterminant de Vandermonde* 1

Une façon efficace de procéder est de voir ce déterminant comme un polynôme en α_{n+1}, et d'utiliser les propriétés des polynômes pour deviner une formule, que l'on démontre ensuite par récurrence.

On trouve

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Correction de l'exercice 188 – *Centrale MP 2015* 3

9. Hyperplans, dualité

Correction de l'exercice 189 – *Intersection d'hyperplans* 2

Correction de l'exercice 190 – *Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$* 1

1 On peut utiliser la notion d'équation d'un hyperplan, mais aussi montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})' \\ & A & \mapsto & (M \mapsto \mathrm{tr}(AM)) \end{array}$$

est un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.

Correction de l'exercice 191 – *Sur le dual* 2

1 Le cas où l'une des formes est nulle est évident, on l'écarte.

Si $H = \ker(f) = \ker(g)$, considérer $x \in E \setminus H$, de sorte que $\mathbb{K}\,x \oplus H = E$. Trouver λ tel que $f(x) = \lambda g(x)$, puis vérifier que $f = \lambda g$.

2 On pourra échelonner la famille de Φ_n en considérant leurs évaluations en certains éléments de E.

3 Expliquer pourquoi $\mathrm{rg}(u) \leqslant 1$, puis s'inspirer de la première question.

Correction de l'exercice 192 – *Formes linéaires coordonnées* 4

Correction de l'exercice 193 – *Liberté d'une famille de formes linéaires* 3D

Correction de l'exercice 194 – *Base antéduale et bidual* 5

Correction de l'exercice 195 – *Détermination d'une base antéduale (CCP 12)* 5

Correction de l'exercice 196 – *Formes linéaires sur des espaces de polynômes* 3

1 Il s'agit d'un problème de dualité, et il semble naturel ici de travailler dans la base $(\varphi_k : P \mapsto P(k))_{k \in [\![-n,n]\!]}$ du dual de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

Reste ensuite à établir les propriétés des coordonnées de $P \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$ dans cette base.

2 On voit A comme le noyau d'une forme linéaire non nulle, et donc comme un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme l'évaluation en 1 joue un rôle prépondérant, on peut travailler dans la base $((X-1)^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$.

3 Il faut que a soit racine de Q', où $Q = (X+2)^2(X+1)(X-1/2)$.

Correction de l'exercice 197 – *Formes linéaires et une propriété de positivité (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 198 – *Forme linéaire nulle sur le noyau d'une autre* 3

Correction de l'exercice 199 – *Équations d'hyperplans* 2

CHAPITRE XXXVII

Suites et séries (corrections)

1. Borne supérieure

Correction de l'exercice 200 – *Caractérisation de la borne supérieure dans le cas d'un ordre total*	0
Correction de l'exercice 201 – *Autour de la borne supérieure*	2

1 B est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure et une borne inférieure. A est incluse dans B, donc A est également bornée, et non vide par ailleurs, elle admet elle aussi une borne supérieure et une borne inférieure.

Soit $a \in A$. Comme A est incluse dans B, on a

$$\inf B \leqslant a \leqslant \sup B$$

et donc, par définition de $\sup A$ et de $\sup B$, on a

$$\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B$$

2 Soit $a \in A$. On a $a \leqslant b$ pour tout $b \in B$, donc a est un minorant de B : B admet une borne inférieure, et

$$a \leqslant \inf B$$

Comme cette inégalité vaut pour tout $a \in A$, $\inf B$ est un majorant de A, donc A admet une borne supérieure, et

$$\sup A \leqslant \inf B$$

3 A et B admettent des bornes supérieures (parties non vides majorées de $\mathbb{R}$). Soit $z \in A + B$: soit $(a, b) \in A \times B$ tel que $z = a + b$. On a

$$z = a + b \leqslant \sup A + \sup B$$

donc $A + B$ est majorée par $\sup A + \sup B$: elle admet une borne supérieure, et

$$\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$$

Reste à établir l'inégalité inverse.

Première méthode – Fixons $(a, b) \in A \times B$. On a

$$a = (a + b) - b \leqslant \sup(A + B) - b$$

et ceci vaut (pour b fixé) pour tout $a \in A$, donc A est majorée par $\sup(A + B) - b$, d'où

$$\sup(A) \leqslant \sup(A + B) - b$$

Dès lors

$$b \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$$

et ceci vaut pour tout $b \in B$, donc

$$\sup(B) \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$$

ce qui établit l'inégalité souhaitée.

Seconde méthode – Montrons que $\sup(A) + \sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A + B$: on sait déjà que c'en est un majorant. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On sait que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ ne majore pas A, donc qu'il existe a dans A tel que

$$a > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, il existe b dans B tel que

$$b > \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$$

et on a donc

$$a + b > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$$

ce qui prouve que $\sup(A)+\sup(B)-\varepsilon$ ne majore pas $A+B$, et établit le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 202 – *Borne supérieure de fonctions numériques* 1

Notons M_f et M_g les bornes supérieures respectives de f et de g.

1 Soit $x \in X$. On a

$$|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \leqslant M_f+M_g$$

donc $|f+g|$ est majorée par M_f+M_g. Cela prouve que $f+g$ est bornée, que $\sup_X(|f+g|)$ existe, et que

$$\sup_X(|f+g|) \leqslant M_f+M_g$$

(par définition, $\sup_X(|f+g|)$, est le plus petit des majorants de $|f+g|$).

2 Soit $x \in X$. On a

$$|\lambda\, f(x)| = |\lambda|\,|f(x)| \leqslant |\lambda|\, M_f$$

donc $\lambda\, f$ est bornée, $\sup_X(|\lambda\, f|)$ existe, et

$$\sup_X(|\lambda\, f|) \leqslant |\lambda| \sup_X(|f|)$$

Pour obtenir l'inégalité en sens inverse, on peut appliquer l'inégalité que l'on vient de prouver au couple $(\lambda\, f, 1/\lambda)$. Bien sûr, ceci conduit à traiter à part le cas où $\lambda=0$, cas évident par ailleurs.

3 Soit $x \in X$. On a

$$|(fg)(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leqslant M_f\, M_g$$

donc fg est bornée, $\sup_X(|fg|)$, et

$$\sup_X(|fg|) \leqslant M_f\, M_g$$

4 Si on prend $f=\cos^2$ et $g=\sin^2$, on a $\sup_{\mathbb{R}}|f| = \sup_{\mathbb{R}}|g| = 1$, mais $\sup_{\mathbb{R}}|f+g|=1$ et $\sup_{\mathbb{R}}|fg| = \frac{1}{4}$.

5 On a bien $\sup_X(f+g) \leqslant \sup_X(f)+\sup_X(g)$ car, pour tout $x\in X$,

$$f(x) \leqslant \sup_X(f) \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant \sup_X(g),$$

donc

$$(f+g)(x) \leqslant \sup_X(f)+\sup_X(g)$$

puis l'inégalité voulue.

En revanche, il n'y a rien de tel pour le produit : si f et g sont l'application identique sur $X=[-3,1]$, alors $\sup_X f = \sup_X g = 1$, mais $\sup_X fg = 9$.

2. Expressions séquentielles de notions ou propriétés topologiques

Correction de l'exercice 203 – *Borne supérieure et suites* 0

Cas où $\sup A$ est un réel l : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A\cap[l-\frac{1}{n}, l]$ (puisque l est le plus petit des majorants de A). On a alors par encadrement la converence de (a_n) vers l.

Dans le cas où $\sup(A)=+\infty$, il suffit de prendre, pour tout $n\in\mathbb{N}$, un élement a_n commun à A et $[n,+\infty[$ (il en existe car A n'est pas majorée) : cette suite d'élements de A tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 204 – *Caractérisation séquentielle de la densité* 1

Supposons A dense dans $\mathbb{R}$: soit $x\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut trouver un point a_n de A dans $[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}]$: cette suite de points de A converge vers x.

Réciproquement, supposons que A vérifie cette propriété séquentielle : soit x et y deux réels, où $x<y$. On peut trouver une suite (a_n) de points de A de limite $l=\frac{x+y}{2}$. En prenant $\varepsilon=\frac{y-x}{2}$ dans l'assertion formelle de convergence de (a_n) vers l, on trouve un rang N à partir duquel $|a_n-l|\leqslant\varepsilon$, *i.e.* $a_n\in[x,y]$. a_N par exemple est un point de A dans $[x,y]$.

D'où la densité de A dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 205 – *Caractérisation séquentielle des fermés de* $\mathbb{R}$ 2

Supposons F fermée. Soit (x_n) une suite convergente de points de F, et soit l sa limite. Supposons $l\notin F$. Comme $\mathbb{R}\setminus F$ est ouverte, il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset(\mathbb{R}\setminus F)$: il existe donc un rang à partir duquel x_n n'est pas dans F, d'où l'absurdité.

Supposons F non fermée : il existe $l \in \mathbb{R} \setminus F$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\cap F \neq \emptyset$. En prenant une suite de valeurs de ε qui converge vers 0, on trouve une suite de points de F qui tend vers l.

3. Généralités sur les suites numériques

Correction de l'exercice 206 – *Divergence d'une suite réelle* 0

La convergence de u vers un certain réel l s'écrit

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N) \Rightarrow (|u_n - l| \leqslant \varepsilon)$$

La convergence de u s'écrit

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N) \Rightarrow (|u_n - l| \leqslant \varepsilon)$$

La divergence de l s'écrit donc

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N) \wedge (|u_n - l| > \varepsilon)$$

Correction de l'exercice 207 – *Expression formelle de la convergence* 0

1 Oui.
2 Non.
3 Oui.
4 Non (l'assertion exprime le fait que (u_n) stationne en la valeur l).
5 Oui.
6 Non (l'assertion exprime le fait que (u_n) stationne en la valeur l).

Correction de l'exercice 208 – *Suite convergente d'entiers relatifs* 0

Si (u_n) est une suite convergente, alors il existe un rang N à partir duquel $|u_{n+1} - u_n| < 1$. Si elle est en outre à valeurs entières, alors $u_{n+1} = u_n$ à partir de ce rang N.

Version 5/2 : toute suite convergente d'un ensemble discret et fermé Ω est stationnaire. Attention, le fait d'être fermé est important (l'image de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est discrète, mais cette suite n'est pas stationnaire), il permet de s'assurer que la limite soit encore dans Ω.

Correction de l'exercice 209 – *Étude élémentaire de convergence ou de divergence* 2

Correction de l'exercice 210 – *Une autre étude de convergence* 3

Correction de l'exercice 211 – *Théorème de Cesàro* 1

Correction de l'exercice 212 – *Moyenne arithmético-géométrique* 2

Correction de l'exercice 213 – *Étude d'une suite définie par un nombre de chiffres (Petites Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 214 – $\sin(\ln(n))$ *(X PSI 05)* 3

Raisonnons par l'absurde, en supposant que cette suite (u_n) admette une limite l. l est un réel, car (u_n) est bornée. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \cos(\ln(n))$. En considérant u_{2n}, on obtient

$$u_{2n} = \sin(\ln(2))v_n + \cos(\ln(2))u_n$$

donc, par opérations algébriques sur les limites (et comme $\sin(\ln(2)) \neq 0$), la suite v converge également.

La suite de terme général $w_n = e^{i\ln(n)}$ est donc convergente, vers un certain complexe α. Or la relation $w_{2n} = e^{i\ln(2)}\, w_n$ conduit par passage à la limite à

$$\alpha = e^{i\ln(2)}\,\alpha$$

et donc à $\alpha = 0$ (puisque $e^{i\ln(2)} \neq 1$). Comme w_n est de module 1, on obtient bien une absurdité.

Correction de l'exercice 215 – *Suite réelle (x_n) telle que $(2x_{n+1} - x_n)$ converge* 3D

On peut déjà se ramener au cas a est nul, en considérant la suite de terme général $y_n = x_n - a$: la suite $(2y_{n+1} - y_n)$ converge vers 0.

On a

$$2^{n+1}y_{n+1} - 2^n y_n = \mathrm{o}(2^n)$$

donc, par théorème de sommation des relations de comparaison, dans le cas de la divergence :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{k+1}y_{k+1} - 2^k y_k\right) = \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\right)$$

et donc

$$2^n y_n - y_0 = \mathrm{o}(2^n)$$

puis $y_n = \mathrm{o}(1)$.

Correction de l'exercice 216 – *Suite réelle bornée vérifiant une condition de convergence* 3D

Soit u une telle suite. Notons a la limite de $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$. Étant bornée, u admet une valeur d'adhérence b : il existe une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers b. On en déduit que $(u_{2\varphi(n)})$ converge vers $2(a-b)$.

Ainsi, l'ensemble Ω des valeurs d'adhérence de u est stable par l'application $\psi\ : x \mapsto 2(x-a)$. Considérons la suite (c_n) définie par $c_0 = b$, et d'itératrice ψ. On vérifie que $(c_n - 2a/3)$ est géométrique de raison 2, et, comme Ω est bornée, cette suite est nulle, donc $b = 2a/3$.

La suite u est bornée et admet une unique valeur d'adhérence $2a/3$, elle est donc convergente vers $2a/3$.

Réciproquement, toute suite convergente vérifie cette propriété.

Correction de l'exercice 217 – *Suite d'entiers naturels* 3D

4. Suites extraites, valeurs d'adhérence

Correction de l'exercice 218 – *Extraction convergente d'une suite monotone* 0

Toute suite monotone admet une limite. C'est aussi la limite de toutes ses suites extraites. Si l'une d'entre elles converge, la suite initiale converge également.

Correction de l'exercice 219 – *De la convergence de sous-suites à la convergence* 2

Correction de l'exercice 220 – *Infinité de sous-suites convergentes* 2

Correction de l'exercice 221 – *D'une suite réelle non majorée, peut-on extraire une suite tendant vers $+\infty$?* 4

Soit u une suite réelle non majorée. Pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\Omega_M \overset{def}{=} \{n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant M\}$ est infini.

On construit alors φ en imposant

$$\varphi(n+1) \in \Omega_{n+1} \cap]\varphi(n), +\infty[$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : on peut bien sûr aborder le problème de différentes manières, mais, pour s'assurer que la suite extraite diverge vers $+\infty$, il vaut mieux trouver une suite minorante tendant vers $+\infty$ que d'imposer sa monotonie, qui ne prouve pas que la suite tend vers $+\infty$ (même la stricte croissance).

Correction de l'exercice 222 – *Quels sont les intervalles vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass ?* 4

5. Suites récurrentes

5.1. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Correction de l'exercice 223 – *Banque CCP 2016 55* — 0

Correction de l'exercice 224 – *Suite de Fibonacci* — 1

1 Voir le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

2 On doit trouver le nombre d'or $\phi \stackrel{def}{=} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 225 – *Suites récurrentes linéaires, ou presque* — 2

5.2. Étude de suites récurrentes

Correction de l'exercice 226 – *Étude élémentaire de suites récurrentes* — 2

Correction de l'exercice 227 – *Suite récurrente complexe* — 3

Correction de l'exercice 228 – *Suite récurrente à l'envers* — 3

Correction de l'exercice 229 – *Suite récurrente et fonction lipschitzienne (ENS Cachan MP 08)* — 3

6. Étude locale de suites

6.1. Relations de comparaison

Correction de l'exercice 230 – *Composition des équivalents* — 2I

Correction de l'exercice 231 – *Banque CCP 2016 1* — 0

Correction de l'exercice 232 – *Équivalents et convergence* — 0

Utiliser des équivalents.

Correction de l'exercice 233 – *Équivalents simples* — 0

Correction de l'exercice 234 – *Limite par analyse asymptotique (Centrale MP 10)* — 2

Correction de l'exercice 235 – *Un énoncé type Cesàro (Centrale MP 2015)* — 3

Correction de l'exercice 236 – *Équivalent d'une suite* — 3

1 Encadrement standard.

2 On peut prendre le même genre d'exemple que pour montrer l'importance de la monotonie dans le CSSA.

Correction de l'exercice 237 – *Développements asymptotiques de suites* — 2

1

2 La suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \ln(n-1)$ donc u_n tend vers $+\infty$.

On peut montrer que $u_n \leqslant n$, puis $u_n = \mathrm{O}(\ln(n))$, puis $u_n \sim \ln(n)$.

Ensuite, $u_n = \ln(n-1+u_{n-1}) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{u_{n-1}-1}{n}\right) = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

3

6.2. Étude asymptotique de suites récurrentes

Correction de l'exercice 238 – *Comportement asymptotique de suites récurrentes* 2

Correction de l'exercice 239 – *Application des séries aux suites récurrentes* 3D

Correction de l'exercice 240 – *Suite récurrente et nature d'une série associée* 3

Correction de l'exercice 241 – *Équivalent d'une suite récurrente d'itératrice rationnelle (Centrale MP 10)* 2

Correction de l'exercice 242 – *Étude d'une suite via une série* 3D

Correction de l'exercice 243 – *Étude d'une suite puis d'une série (Mines MP 06)* 3

$u_n - 1 = \mathrm{O}(1/2^n)$, donc $\sum(u_n-1)$ converge. Pour tout n, $\frac{|u_{n+1}-1|}{|u_n-1|} \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui prouve que la série est absolument convergente.

6.3. Étude asymptotique de suites implicites

Correction de l'exercice 244 – *Exemple de suite implicite* 2

1 $\varphi\ : x \mapsto x + \ln(x)$ est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

2 (u_n) est strictement croissante, car (n) l'est, ainsi que φ^{-1}.
u_n tend vers $+\infty$ car φ est de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc φ^{-1} aussi.

3 u_n tend vers $+\infty$, donc $\ln(u_n) = \mathrm{o}(u_n)$.

4 $u_n - n = -\ln(u_n)$ or $u_n \sim n$ et n tend vers $+\infty$, donc $\ln(u_n) \sim \ln(n)$.

Remarque : ce n'est pas officiellement du cours, mais il faut savoir que si une suite (u_n) de réels strictement positifs tend vers $l \neq 1$, et si $v_n \sim u_n$, alors $\ln(v_n) \sim \ln(u_n)$ (tout simplement parce que $\ln(v_n) = \ln(u_n) + \mathrm{o}(1)$).

Correction de l'exercice 245 – *Une autre suite implicite* 3

Correction de l'exercice 246 – *Mines MP 2015* 3

Correction de l'exercice 247 – *Une suite implicite avec tangente* 3

On a $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$, or $x_n - n\pi \in [0, \pi/2[$, donc

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1).$$

Ainsi a-t-on : $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)$.

Pour aller plus, loin, on écrit, plus finement :

$$x_n - n\pi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

obtenant ainsi :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour aller plus loin, on écrit :

$$\begin{aligned}
x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} &= -\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \\
&= -\arctan\left(\frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1/n)}\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1/n)} + \mathrm{o}(1/n^3) \\
&= -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}(1/n^2)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}(1/n^2).$$

Correction de l'exercice 248 – *Développement asymptotique d'une suite de racines (Mines MP 05)* 3DT

Correction de l'exercice 249 – *Équivalent d'une suite de racines de polynômes dérivés (Mines MP 2015)* 3DT

Correction de l'exercice 250 – *Un autre développements asymptotiques de suite implicite* 3DT

7. Nature de séries

7.1. Séries à termes positifs

Correction de l'exercice 251 – *Nature de séries à termes positifs* 0

1 $u_n \sim 1$ divergence grossière.
2 $u_n \sim \frac{1}{n} > 0$: divergence.
3 $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n} > 0$: divergence.
4 $u_n \sim \frac{2}{n^2} > 0$: convergence.
5 $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$: convergence.
6 $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$: convergence.
7 $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$: convergence.

Correction de l'exercice 252 – *D'autres natures de séries à termes positifs* 2

1 $u_n = \frac{1}{n}(1/n)^{1/n} \sim \frac{1}{n} > 0$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.
2 $\mathrm{ch}(1/n) - 1 \sim \frac{1}{2n^2}$, donc $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,n} > 0$, donc $\sum u_n$ diverge.
3 $u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n^2} = \exp(-n + \mathrm{o}(n)) = \mathrm{o}(1/2^n)$ d'où la convergence de $\sum u_n$.
4 $n^3 \ln(\cos(1/n) \sim -n/2$, donc $u_n = \mathrm{o}(1/2^n)$, puis $\sum u_n$ converge.
5 $\mathrm{th}(n) = \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = 1 - 2e^{-2n} + \mathrm{o}(e^{-2n})$, donc $u_n \sim 2e^{-2n} > 0$ et $\sum (e^{-2})^n$ converge, donc $\sum u_n$ converge.
6 On peut s'inspirer de la preuve de divergence de la série harmonique en considérant une tranche :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{(2n)^2} \sim \frac{1}{8},$$

donc la série considérée diverge.

Correction de l'exercice 253 – *Cas douteux de la règle de d'Alembert* 2

La présence de quotients, produits, puissances et factorielles invite à utiliser le critère de d'Alembert.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

or $(n/(n+1))^n$ tend vers $1/e$, d'où la discussion suivante :

Cas 1 : $a > e$ La série diverge grossièrement.

Cas 2 : $a < e$ La série converge.

Cas 2 : $a = e$ Il s'agit du cas douteux de la règle de d'Alembert, il va falloir faire une étude plus fine.

Or l'équivalent de Stirling nous donne

$$u_n \sim \sqrt{2\pi\, n}$$

d'où la divergence grossière de $\sum u_n$ dans ce cas.

Correction de l'exercice 254 – *Produit et série* 3

Correction de l'exercice 255 – *(Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 256 – *Nature d'une série définie à l'aide d'une fonction* 3

7.2. Séries de Bertrand

Correction de l'exercice 257 – *Séries de Bertrand* 1

1 Le cas problématique est celui où $\alpha = 1$ (dans les autres, la comparaison avec les séries de Riemann est fructueuse).

Dans le cas où $\alpha = 1$, on peut faire une comparaison série-intégrale.

2 Comparaison série intégrale (ou sommation des relations de comparaison).

Correction de l'exercice 258 – *Banque CCP 2016 5* 2

7.3. Règle de d'Alembert

Correction de l'exercice 259 – *Banque CCP 2016 6* 2

7.4. Règle de Raabe-Duhamel

Correction de l'exercice 260 – *Nature d'une série par un argument type Raabe-Duhamel (X MP 2015)* 3D

7.5. Nature de série par développement asymptotique de son terme général

Correction de l'exercice 261 – *Banque CCP 2016 46* 2

Correction de l'exercice 262 – *Nature d'une perturbation d'une série de Riemann (Petites Mines MP 2015)* 2

On notera $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n}$.

Si $\alpha = 0$, cette série n'est pas bien définie.

Si $\alpha < 0$, cette série diverge grossièrement.

On se place dans le cas où $\alpha > 0$. On effectue un développement asymptotique :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\frac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + w_n \text{ où } w_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Or $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge par application du CSSA (le terme général a un signe alterné, et décroit vers 0 en valeur absolue), donc $\sum u_n$ a même nature que $\sum w_n$, et donc que $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ (termes généraux positifs équivalents).

L'exemple des séries de Riemann permet de conclure : $\sum u_n$ est convergente si $\alpha > 1/2$, et divergente si $\alpha \in]0, 1/2]$.
Remarque : bien sûr, le seul équivalent $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ (dans le cas où $\alpha > 0$) ne permettait pas de conclure.
Remarque : on aurait pu commencer par se poser la question de l'absolue convergence (qui a lieu si et seulement si $\alpha > 1$).

Correction de l'exercice 263 – *Petites Mines MP 2015* 2

Correction de l'exercice 264 – *Nature de série à paramètres* 2

7.6. Nature de séries alternées

Correction de l'exercice 265 – *Critère spécial des séries alternées* 0

1

2 Il suffit de perturber une série convergente $\sum \alpha_n$ par CSSA par une série divergente $\sum \beta_n$, où $\beta_n = \mathrm{o}(\alpha_n)$. On peut prendre, par exemple

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

La série de $\sum u_n$ est de terme général alterné au moins à partir d'un certain rang (grâce à l'équivalence $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$), son terme général tend vers 0, mais $\sum u_n$ est divergente (comme somme d'une série convergente par CSSA et d'une série divergente).

Correction de l'exercice 266 – *Nature de séries alternées* 2

1 Convergence par application du CSSA (la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$).

2 Un développement asymptotique donne $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + w_n$ où $w_n \sim \frac{1}{n} > 0$, donc $\sum u_n$ est divergente.

3 On peut faire le développement asymptotique suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente (par CSSA) et d'une série absolument convergente (d'après l'exemple des séries de Riemann) : $\sum u_n$ est également convergente.

4 On peut cette fois écrire

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + w_n, \text{ où } w_n \sim -\frac{1}{2n} < 0$$

Somme d'une série convergente (par CSSA) et d'une série divergente (exemple de la série harmonique et nature de séries de termes équivalents et de signe constant), $\sum u_n$ est divergente.

5 On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + w_n \text{ où } w_n \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}} < 0$$

d'où la convergence si $\alpha > 1/2$, et la divergence si $\alpha \in]0, 1/2]$.
Remarque : il y a convergence absolue si et seulement si $\alpha > 1$.

Correction de l'exercice 267 – *Nature d'une série alternée* 3

1 Cette suite (u_n) est bien définie, et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par positivité de u_n, on a

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

d'où la convergence de (u_n) vers 0.

De la relation

$$(n+1)u_{n+1} = e^{-u_n}$$

et du fait que (u_n) converge vers 0, on déduit que (nu_n) converge vers 1

2 Notons $v_n = (-1)^n u_n$. La série $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente (puisque $|v_n| \sim 1/n > 0$, d'après la question précédente).

C'est une série alternée dont le terme général tend vers 0. L'éventuelle décroissance de (u_n) permettrait de conclure (grâce au CSSA). Elle semble cependant délicate à établir.

On peut aussi tenter de donner un développement asymptotique plus fin de (u_n). Pour cela, on « injecte » le développement asymptotique auquel on est parvenu :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} e^{-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

ce développement asymptotique de (u_{n+1}) (et par changement d'indice de (u_n)) montre que $\sum v_n$ est convergente, comme somme d'une série qui converge par CSSA et d'une série absolument convergente.

7.7. Séries à termes de signe indéterminé

Correction de l'exercice 268 – *Nature de séries à termes quelconques* 0

1 $u_n = \mathrm{O}(1/2^n)$ et $\sum 1/2^n$ est absolument convergente (ou si on préfère est convergente de terme général positif) donc $\sum u_n$ est convergente.

2 $u_n = \mathrm{O}(1/n^2)$ et $\sum 1/n^2$ est convergente de terme général positif, donc $\sum u_n$ est convergente.

Correction de l'exercice 269 – *Nature d'une série se ramenant à une série de Bertrand* 2

Correction de l'exercice 270 – *Un terme général pas si incontrôlable que ça* 3

Correction de l'exercice 271 – *Nature d'une série de cosinus* 0

Notons $u_n = \cos\left(\pi n\sqrt{1+n^2}\right)$. On a

$$u_n = \cos\left(\pi n^2\left(1 + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où l'absolue convergence de $\sum u_n$.

Correction de l'exercice 272 – *Nature d'une série complexe non absolument convergente (Centrale PSI 10)* 3

Correction de l'exercice 273 – *Nature de séries en vrac* 3

Correction de l'exercice 274 – *Étude de convergence d'une série selon le choix d'un polynôme* 3

Correction de l'exercice 275 – *Nature d'une série dont le terme général est donné par une intégrale* 3

Correction de l'exercice 276 – *D'autres natures de séries* 2

Correction de l'exercice 277 – *Divergence d'une série (X MP 10)* 3D

Correction de l'exercice 278 – *Étude d'une série compliquée* 4

7.8. Transformation d'Abel (hors-programme)

La transformation d'Abel est hors-programme, mais tombe parfois à l'oral des concours X/ENS, ainsi qu'à l'écrit : on pourra consulter le problème du sujet Maths 1 MP CCP 2014.

Correction de l'exercice 279 – *Transformation d'Abel* 3HP

8. Calculs de sommes de séries

Correction de l'exercice 280 – *Lorsque le terme général est une fonction rationnelle* 0

1 $u_n \sim \frac{1}{n^3} > 0$, et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, d'où la convergence de $\sum u_n$.
$\frac{X}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{2(X^2-X+1)} - \frac{1}{2(X^2+X+1)}$ donc par télescopage, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
2 $u_n \sim \frac{2}{n^2} > 0$ d'où la convergence.
$\frac{2X-1}{X^3-4X} = \frac{3}{8(X-2)} + \frac{1}{4X} - \frac{5}{8(X+2)}$, puis télescoper soigneusement.

Correction de l'exercice 281 – *Série et produit* 2

On prouve que $\frac{u_n}{a-1} = \alpha_n - \alpha_{n+1}$, où $\alpha_n = \frac{1}{a^{2^n}-1}$.
On a donc

$$S_n = (a-1)(\alpha_0 - \alpha_{n+1}) = 1 - \frac{a-1}{a^{2^{n+1}}-1}.$$

Si $a \in]0,1[$, la série converge vers a.
Si $a > 1$, la série converge vers 1.
(Si $a = 1$, la série converge vers 1.)

Correction de l'exercice 282 – *Autres calculs de sommes* 2 à 4

1 Télescopage.

2 $\frac{1}{3n+1} = \int_0^1 x^{3n}\mathrm{d}x$.

3 $\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$.
Ainsi,

$$u_n = \frac{H_n}{2n} - \frac{H_n}{n+1} + \frac{H_n}{2(n+2)} = \frac{H_n}{n} - \frac{H_{n+1}}{n+1} + \frac{H_{n+2}}{n+2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+2)^2}$$

Correction de l'exercice 283 – *Calcul de somme de série liée à l'écriture décimale (ENSEA MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 284 – *Somme de série dont le terme général est une intégrale (Petites Mines MP 2015)* 2Rev

Correction de l'exercice 285 – *Série des inverses des sommes de carrés (Mines MP)* 3

On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
La convergence s'en déduit immédiatement.
De plus,

$$\frac{1}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} - \frac{4}{2X+1}$$

En utilisant $H_n = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$, on trouve que la somme cherchée vaut $18 - 24\ln(2)$.

Correction de l'exercice 286 – *Calcul de* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ 2

1 $\sum \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$, donc $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge. $\sum(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge par CSSA.

2 La fonction $f\ : x \in [e,+\infty[\to \mathbb{R}$ est décroissante, positive et continue par morceaux. Par comparaison série-intégrale, la série de terme général v_n converge.

3 La suite de terme général $\sum_{q=2}^{n} v_q$ converge, or

$$\sum_{q=2}^{n} v_q = \sum_{q=2}^{n} \frac{\ln(q)}{q} - \int_1^n \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = w_n$$

4 D'une part,

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln(p)}{p}+\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^p\ln(p)}{p} &= \sum_{p=1}^{2n}(1+(-1)^n)\frac{\ln(p)}{p}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2)}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}\\
&= \ln(2)H_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}\\
&= \ln(2)H_n+w_n+\frac{\ln(n)^2}{2}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln(p)}{p}+\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^p\ln(p)}{p} &= w_{2n}+\frac{\ln(2n)^2}{2}+\sum_{p=1}^{2n}(-1)^n\frac{\ln(p)}{p}\\
&= w_{2n}+\frac{\ln(2)^2}{2}+\ln(2)\ln(n)+\frac{\ln(n)^2}{2}+\sum_{p=1}^{2n}(-1)^n\frac{\ln(p)}{p}
\end{aligned}$$

De plus, $H_n=\ln(n)+\gamma+\mathrm{o}(1)$, et on obtient donc

$$\ln(2)\ln(n)+\ln(2)\gamma+\mathrm{o}(1)+w_n+\frac{\ln(n)^2}{2}=w_{2n}+\frac{\ln(2)^2}{2}+\ln(2)\ln(n)+\frac{\ln(n)^2}{2}+\sum_{p=1}^{2n}(-1)^n\frac{\ln(p)}{p}$$

soit

$$\sum_{p=1}^{2n}(-1)^n\frac{\ln(p)}{p}=\ln(2)\gamma+w_n-w_{2n}-\frac{\ln(2)^2}{2}+\mathrm{o}(1)$$

puis, en passant à la limite :

$$\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}=\ln(2)\gamma-\frac{\ln(2)^2}{2}$$

Correction de l'exercice 287 – *Nature et somme d'une série* | 2

Correction de l'exercice 288 – *Série et produit, calcul de somme* | 3

Correction de l'exercice 289 – *Nature et somme d'une série donnée par les termes modulo 3* | 3

Correction de l'exercice 290 – *Série exponentielle lacunaire (Centrale MP 08)* | 3

La convergence de la série est claire (par exemple parce que $1/(3n)!=\mathrm{o}(1/n^2)$).

Tout part de l'observation que $1^n+j^n+(j^2)^n=3$ si n est un multiple de 3, et $1^n+j^n+(j^2)^n=0$ si n est un entier non multiple de 3.

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}=\frac{1}{3}\left(e+e^j+e^{j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(e+\frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Correction de l'exercice 291 – *Un opérateur sur certaines séries (Mines-Ponts PSI 10)* | 3

Correction de l'exercice 292 – *Développement en série de Engel et irrationalité de e* | 4I

On observe déjà que pour toute telle suite (u_n), (S_n) converge bien, vers un élément de $]0,1]$.

Unicité : supposons que deux telles suites (u_n) et (v_n) fournissent une même valeurs. On montre par récurrence forte que pour tout n, $u_n=v_n$.

On a

$$\frac{1}{u_0} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v_0 \dots v_n} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v_0^{n+1}} = \frac{1}{v_0 - 1},$$

donc $v_0 - 1 < u_0$, puis $v_0 \leqslant u_0$.

Par symétrie des rôles joués par u_0 et v_0, on a bien $u_0 = v_0$.

L'hérédité est du même genre.

Existence : soit $x_0 \in]0,1]$. On pose $u_0 = [1/x_0] + 1$, $x_1 = u_0 x_0 - 1$ puis, par récurrence $u_n = [1/x_n] + 1$ et $x_{n+1} = u_n x_n - 1$.

On montre par récurrence que (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

On montre en outre qu'elle est décroissante.

(u_n) est donc une suite croissante d'entiers. En outre, $u_0 \geqslant 2$.

On a

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{u_0} + \frac{x_1}{u_0} \\ &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{x_2}{u_1}\right) \\ &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \dots + \frac{1}{u_0 \dots u_n} + \frac{x_{n+1}}{u_0 \dots u_n}. \end{aligned}$$

Par l'encadrement

$$0 \leqslant \frac{x_{n+1}}{u_0 \dots u_n} \leqslant \frac{x_0}{2^{n+1}},$$

on prouve bien l'existence d'une telle suite (u_n).

1 On montre facilement que si (u_n) stationne, alors $\lim S_n$ est rationnel. Réciproquement, supposons que $x = a/b$ soit rationnel ($a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \leqslant b$).

On a

$$\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{u_0 \dots u_n} \leqslant \frac{1}{u_0 \dots u_p} \cdot \frac{1}{u_{p+1} - 1},$$

donc

$$0 < (u_{p+1} - 1) \cdot \left(a u_0 \dots u_p - b \sum_{n=0}^{p} (u_{n+1} \dots u_p)\right) \leqslant b,$$

donc u est majorée, puis stationnaire.

2 Résulte immédiatement de $e - 2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

9. Série harmonique

Correction de l'exercice 293 – *Divergence de la série harmonique par les équivalents* 0

Comme $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} > 0$, les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sont de même nature. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

La série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ a donc même nature que la suite $(\ln(n))$, et elle est donc divergente.

Remarque : en utilisant le théorème de sommation des relations de comparaison (cas de la divergence), on obtient même l'équivalent

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Correction de l'exercice 294 – *Série harmonique et calcul de somme (Centrale MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 295 – *Série harmonique tronquée* 4

Correction de l'exercice 296 – *Série harmonique alternée* 1

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-x)^{k-1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x} \mathrm{d}x$$

Or $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln(2)$, et

$$\left| \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

donc $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et sa somme vaut $\ln(2)$.
Remarque : on a directement calculé la limite de la suite des sommes partielles, et établi ce faisant la convergence de la série étudiée. On pouvait bien sûr vérifier d'emblée la convergence de cette série, en appliquant le CSSA.

Correction de l'exercice 297 – *Nature de la série des restes de la série harmonique alternée* 3

1 La série harmonique alternée converge, par application du CSSA, donc la suite (u_n) de ses restes existe également.

2 En utilisant l'astuce intégrale de l'exercice 296, on trouve que

$$u_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$$

On en déduit la convergence de $\sum u_n$ par application du CSSA.

On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(-x)^k}{1+x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x(1-(-x)^n)}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$

et on montre que la somme cherchée vaut $\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \mathrm{d}x = \ln(2) - 1/2$.

Correction de l'exercice 298 – *Développement asymptotique de la série harmonique* 1

Comme $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln(n) > 0$, la série harmonique est divergente, et

$$H_n \sim \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \sim \ln(n)$$

Cela donne le développement asymptotique à un terme suivant :

$$H_n = \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n))$$

On cherche maintenant un équivalent de $v_n = H_n - \ln(n)$. Or

$$v_n - v_{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{2(n+1)^2} > 0$$

ce qui établit la convergence de la suite (v_n) (on note γ sa limite), et par sommation des relations de comparaison, dans le cas de la convergence

$$v_n - \gamma \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2(k+1)^2} \sim \frac{1}{2n}$$

d'où

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2n}\right)$$

Correction de l'exercice 299 – *Nature d'une série donc le terme général est lié à la série harmonique* 3

On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$, donc

$$u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \frac{(-1)^n \gamma}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

mais le dernier terme n'est pas assez précis pour conclure.

On cherche donc un meilleur développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On cherche un équivalent de $w_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Pour ce faire, on utilise le théorème de sommation des relations de comparaison, en calculant un équivalent de $w_n - w_{n+1}$:

$$w_n - w_{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{2(n+1)^2} > 0$$

Par théorème de sommation des relations de comparaison dans le cas de la convergence, on obtient

$$w_n \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)^2} \sim \frac{1}{2n}$$

donc

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ce développement plus fin nous permet de conclure à la convergence de $\sum u_n$.

10. Somme partielles, restes

Correction de l'exercice 300 – *Nature de la série des restes de la série exponentielle* **3**

Correction de l'exercice 301 – *Application à l'étude de sommes partielles et de restes* **1**

Vu en exemple de cours.

Correction de l'exercice 302 – *Équivalents de sommes partielles* **2**

Le premier exemple est lié aux séries de Riemann.

Pour le second, on trouvera $n!$. Une façon de le prouver consister à observer que $n! - (n-1)! \sim n! > 0$, puis à utiliser le théorème de sommation des relations de comparaison.

Correction de l'exercice 303 – *Série telle que $u_{n+1}/u_n \to +\infty$* **3**

La divergence de cette série provient du critère de d'Alembert, et la suite (u_n) tend en fait vers $+\infty$.

Par hypothèse, $u_{n-1} = \mathrm{o}(u_n)$, donc $u_n - u_{n-1} \sim u_n > 0$, puis, par sommation des relations de comparaison dans le cas de la divergence, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim u_n - u_0 \sim u_n$$

Correction de l'exercice 304 – *Nature d'une série dont le terme général est un reste de série convergente* **3**

u_n est bien définie par application du CSSA, ou plus simplement parce que $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Le CSSA nous donne des renseignements supplémentaires : il prouve que u_n est du signe de $(-1)^n$, mais aussi que

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

ce qui nous donne l'absolue convergence de $\sum u_n$.

Remarque : Il est tentant d'appliquer le CSSA à la série de terme général u_n, mais la décroissance en valeur absolue ne va pas de soi (on sait seulement que $(|u_{2n}|)$ et $(|u_{2n+1}|)$ sont décroissantes).

Remarque : On pouvait aussi, en justifiant sa démarche, regrouper dans la somme définissant u_n les termes d'indices $2k$ et $2k+1$ par exemple.

Correction de l'exercice 305 – *Équivalent d'une somme partielle à paramètre (Mines MP 2015)* **3**

Correction de l'exercice 306 – *Développement asymptotique à deux termes d'une suite de sommes partielles* **3**

Correction de l'exercice 307 – *Série et dérivation discrète* **3**

Correction de l'exercice 308 – *Nature compliquée de séries* 4

Supposons la série $\sum a_n$ convergente, de somme σ. On a $a_n/t_n = \mathrm{O}(t_n)$, donc la première série converge. On a $s_n \sim \sigma$ et $t_n \sim n\sigma$, donc la seconde série converge.
Supposons la série $\sum a_n$ divergente. On a $a_n = \mathrm{o}(s_n)$, donc $s_n \sim s_{n-1}$, puis $s_n = \mathrm{o}(t_n)$, donc $t_n \sim t_{n-1}$. On a donc

$$\frac{s_n}{t_n} = 1 - \frac{t_{n-1}}{t_n} \sim \ln \frac{t_n}{t_{n-1}} = \ln(t_n) - \ln(t_{n-1}).$$

On a

$$\frac{a_n}{t_n} = \frac{s_n - s_{n-1}}{t_n} = \left(\frac{s_n}{t_n} - \frac{s_{n-1}}{t_{n-1}}\right) + \frac{s_{n-1}s_n}{t_{n-1}t_n}.$$

Comme $\frac{s_n}{t_n}$ tend vers 0, la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{s_n}{t_n} - \frac{s_{n-1}}{t_{n-1}}\right)$ converge, donc les deux séries étudiées ont même nature.
On observe que

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j \\ &\leqslant s_n + 2\sum_{j=1}^{n} s_{j-1}a_j \\ &\leqslant s_n + 2\sum_{j=1}^{n} s_{j-1} \\ &\leqslant 2t_n. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{a_n}{t_n} \leqslant \frac{2a_n}{s_n^2} \leqslant 2\int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Les deux séries convergent donc.

Correction de l'exercice 309 – *Nature d'une série définie à l'aide d'une fonction convexe (Mines MP 07)* 3D

11. Un calcul de zeta(2)

Correction de l'exercice 310 – *Un calcul de $\zeta(2)$ (Mines MP 2015)* 1

12. Comportement asymptotique du terme général, natures comparées

Correction de l'exercice 311 – *Banque CCP 2016 7* 0

Correction de l'exercice 312 – *Opérateurs sur les séries convergentes à termes positifs* 2

1 $a_n^2 = \mathrm{o}(a_n)$ et $\sum a_n$ est convergente à termes positifs : convergence.
2 $\frac{a_n}{a_n+1} \sim a_n > 0$: convergence.
3 $a_n a_{2n} = \mathrm{O}(a_n)$ (et même $a_n a_{2n} = \mathrm{o}(a_n)$) : convergence.
4 $\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$: convergence.

Remarque : pour prolonger l'exercice, on peut se poser les questions suivantes :

5 Les réciproques sont fausses, sauf pour $b_n \overset{def}{=} \frac{a_n}{a_n+1}$.
6 Rien ne va plus.

Correction de l'exercice 313 – *Lois de composition interne sur les séries convergents à termes positifs* 2

1 Convergence par $0 \leqslant \max(a_n, b_n) \leqslant a_n + b_n$.

2 Convergence par $0 \leqslant \sqrt{a_n b_n} \leqslant \max(a_n, b_n)$ par exemple.

3 Moyenne harmonique, inférieure aux autres.

Correction de l'exercice 314 – *Équivalence de nature entre deux séries (Centrale PSI 08)* 2

Correction de l'exercice 315 – *Lien entre convergences de séries* 3

Correction de l'exercice 316 – *Si $\sum u_n$ converge, a-t-on $u_n = \mathrm{o}(1/n)$? (X MP 2015)* 4

Correction de l'exercice 317 – *Une série dont le terme général tend vers 0 et dont la suite des sommes partielles est bornée est-elle convergente ? (X MP)* 4

En raisonnant sur la suite (S_n) des sommes partielles, on cherche une suite bornée (S_n) divergente, mais telle que $(S_n - S_{n+1})$ tende vers 0. L'exemple de la suite $(\sin(\ln(n)))$ donné par l'exercice 214 convient.

Pour justifier que, pour ce choix, on a bien convergence de $(S_n - S_{n+1})$ vers 0, on peut vérifier que $(\ln(n+1) - \ln(n))$ tend vers 0, et le caractère lipschitzien de la fonction sinus.

Correction de l'exercice 318 – *Un opérateur linéaire continu d'un espace préhilbertien (Centrale MP 2015)* 3

CHAPITRE XXXVIII

Intégration (corrections)

1. Intégration sur un segment

Sauf mention contraire, a et b sont deux réels, $a < b$.

1.1. Annulation et intégrales

Correction de l'exercice 319 – *Lorsque la valeur moyenne est aussi le maximum* 0

Correction de l'exercice 320 – *Annulation de fonction et intégrales* 0

1 On peut appliquer le théorème de Rolle à une primitive de $[a, b]$, ou raisonner par l'absurde.

2 Considérer $g\ : x \mapsto f(x) - x$.

Correction de l'exercice 321 – *Annulation et intégrales* 3

1 Raisonner par l'absurde, et utiliser un polynôme qui change de signe en même temps que f.

2 Comme à la question précédente, raisonner par l'absurde, utiliser la linéarité de l'intégrale et des combinaisons linéaires de cos et sin.

3 Posons $g = f + f''$. g est de moyenne nulle, et on peut vérifier que $\int_{[0,2\pi]} g \cos = \int_{[0,2\pi]} g \sin = 0$. Utiliser la même technique que précédemment.

Correction de l'exercice 322 – *Nullité de fonction et intégrales* 3

1.2. Inégalités intégrales

Correction de l'exercice 323 – *Inégalité entre valeurs moyennes* 2

Correction de l'exercice 324 – *Inégalités intégrales* 3

1 Inégalité de Cauchy-Schwarz (comme le produit d'intégrales et la condition sur le produit nous y invitent).

2 On sait que f est de moyenne nulle, que $(f - m)$ et $(M - f)$ sont positives, et on veut faire apparaître f^2 et mM.

3 Pour avoir une idée de la réponse à donner, on peut évaluer ces quantités pour des fonctions particulières.
Pour établir l'inégalité, on pourra au choix :

- Utiliser le fait que $\int_{[0,1]} fg - \int_{[0,1]} f \int_{[0,1]} g$ est inchangé si on remplace f par $f - m$ et g par $g - M$, où m et M sont deux réels.
- Introduire de la variabilité en extrapolant l'inégalité à des fonctions définies sur $[0, x]$, puis à exploiter cette variabilité en faisant l'étude d'une fonction.

Remarque : on pouvait aussi montrer ce résultat à l'aide d'une intégrale double, mais ce n'est plus au programme.

1.3. Suites et intégrales

Correction de l'exercice 325 – *Suites étudiées à l'aide d'intégrales* 1

Correction de l'exercice 326 – *Comparaison somme intégrale* 2

Correction de l'exercice 327 – *Lemme de Lebesgue* 1D

1.4. Sommes de Riemann

Correction de l'exercice 328 – *Calcul d'intégrale en passant par une somme de Riemann* 0

Correction de l'exercice 329 – *Calcul de limites par les sommes de Riemann* 0

Correction de l'exercice 330 – *Une pseudo-somme de Riemann* 3D

1.5. Calculs

Correction de l'exercice 331 – *Calcul d'une intégrale* 2

Correction de l'exercice 332 – *Méthode de calcul pour une intégrale* (Centrale MP 09) 2

Correction de l'exercice 333 – *Une astuce de calcul intégral* (Mines PSI 08) 2

Correction de l'exercice 334 – *La même astuce de calcul intégral* (Centrale MP 09) 2

Correction de l'exercice 335 – *Calcul de primitive (Petites Mines MP 2015)* 2

1.6. Divers

Correction de l'exercice 336 – *Extremums d'une fonction définie par des intégrales* (CCP 09) 2

Pour trouver $\sup \Phi$, on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (et son cas d'égalité).
Pour trouver $\inf \Phi$, on pourra se demander comment rendre $\int [0,1] f$ « grand » sans que $\int_{[0,1]} \frac{1}{f}$ soit « petit ».

Correction de l'exercice 337 – *Équations fonctionnelles intégrales* 2

Correction de l'exercice 338 – *Étude d'un opérateur moyenne glissante (ENSEA MP 2015)* 3

2. Intégrabilité

2.1. Existence d'intégrales, intégrabilité

Correction de l'exercice 339 – *Exemples d'absolue convergence* 0

Correction de l'exercice 340 – *Intégrabilité des fonctions exponentielles* 0

1 Une condition nécessaire et suffisante est évidemment $\alpha < 0$.

2

i Une condition nécessaire et suffisante est $\Re(\alpha) < 0$.

ii Une condition nécessaire et suffisante est $\Re(\alpha) < 0$.

Correction de l'exercice 341 – *Intégrabilité d'une fonction selon la valeur de paramètres* 0

La fonction intégrée f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on s'intéresse donc au comportement aux bornes. Un développement limité montre que f se prolonge par continuité en 0 : $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre.

En $+\infty$:
Si $a = b$, la fonction f est nulle, donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $a > b$, alors $f(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{e^{at}}{t}$, or $\int_1^{+\infty} \frac{e^{at}}{t}\mathrm{d}t$ converge (absolument) si et seulement si $a < 0$.
En effet, si $a < 0$, alors $\frac{e^{at}}{t} = \mathrm{o}_{t\to+\infty}(1/t^2)$, et, si $a \geqslant 0$, alors

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{e^{at}}{t}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{at}}{t}\mathrm{d}t$ diverge.
De même, si $b > a$, $f \sim_{t\to+\infty} -\frac{e^{bt}}{t} < 0$, donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $b < 0$.
En conclusion, f est intégrable si et seulement si $a = b$ ou a et b sont strictement négatifs.

Correction de l'exercice 342 – *Banque CCP 2016 28* — 2

Correction de l'exercice 343 – *Mines MP 2015* — 3

Correction de l'exercice 344 – *Non intégrabilité du sinus cardinal* — 2

1 La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue (par morceaux). L'intégrale est faussement impropre en 0. Le seul problème est en $+\infty$. Pour montrer la convergence, on pourrait s'inspirer du travail effectué pour l'intégrale de Dirichlet, mais comme on demande ici la valeur de l'intégrale, on peut aussi étudier $\int_0^X \frac{\sin(2x)-\sin x}{x}\mathrm{d}x$.
Si on sait que l'intégrale de Dirichlet converge, on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)-\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

et le changement de variable $u = 2x$ dans la première intégrale montre alors que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)-\sin x}{x}\mathrm{d}x = 0$$

2 Non (il s'agit d'établir la divergence de $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\mathrm{d}x$, voir l'exercice 363).

Correction de l'exercice 345 – *Étude de convergence d'une intégrale* — 3

1

2 Pas de problème en 0, effectuer une intégration par parties pour prouver l'intégrabilité en $+\infty$. En linéarisant $\sin(x)\cos(x^2) = (\sin(x+x^2)+\sin(x-x^2))/2$, on peut prouver que cette intégrale est semi-convergente.

3

Correction de l'exercice 346 – *Normes euclidiennes de f, f' et f''* — 2

Il est tentant d'effectuer une intégration par parties pour $\int(f')^2$, en dérivant l'un des f' et en intégrant l'autre. On fait tout ceci sur un segment $[a, b]$ (où $b \geqslant a$) puisqu'on ne sait pas encore si les expressions engagées sont bien définies :

$$\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x = [f'(x)f(x)]_{x=a}^b - \int_a^b f(x)f''(x)\mathrm{d}x$$

L'intégrale $\int_{[a,+\infty[} ff''$ est convergente, grâce à l'intégrabilité de f^2 et de $(f'')^2$.
Il reste à justifier la convergence du crochet, *i.e.* que ff' admet une limite finie en $+\infty$.
Peut-on déjà montrer que ce crochet admet une limite ? Oui, en considérant justement la relation ci-dessus, et en observant que $(f')^2$ est positive.
Cette limite existant, il reste à expliquer pourquoi elle n'est pas infinie. Pour ce faire, on peut utiliser l'intégrabilité de f^2 et le fait que $(f^2)' = 2f'f$.
Remarque : on peut même montrer plus finement que ff' tend vers 0 en $+\infty$.

2.2. Calcul d'intégrales généralisées

Correction de l'exercice 347 – *La fonction Gamma d'Euler, première approche* — 1

1 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $f\ : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-t}t^{x-1}$.
La fonction f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, étudions le comportement de f aux bornes :

Étude en 0 – On a $f(t) \sim_{t \to 0} \frac{1}{t^{1-x}} > 0$ et $1 - x < 1$, d'où la convergence de $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ grâce à l'exemple des intégrales de Riemann.

Étude en $+\infty$ – On a $f(t) = \mathrm{o}_{t \to +\infty}(1/t^2)$, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

2 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On effectue une intégration par parties, en introduisant les fonctions $u \ : t \mapsto e^{-t}$ et $v \ : t \mapsto \frac{t^x}{x}$.

Ces fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, uv admet une limite finie en 0 et en $+\infty$, égale à 0.

On a donc

$$\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-t}\,t^x}{t}\mathrm{d}t$$

soit

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

d'où le résultat souhaité.

3 Un calcul immédiat donne $\Gamma(1) = 1$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

on obtient par récurrence que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction de l'exercice 348 – *Calcul d'intégrale à paramètres (Mines MP 2015)* 1

Existence – La fonction intégrée f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, et admet une limite finie en 0, donc l'intégrale considérée est faussement impropre en 0.

On peut montrer la convergence sur $[1, +\infty[$ en effectuant une intégration par parties (comme dans l'intégrale de Dirichlet).

Calcul – Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t}\mathrm{d}t$$

($I_{a,b}$ est la limite, lorsque ε tend vers 0, de J_ε). Par convergence des intégrales engagées, on a

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t}\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(bt)}{t}\mathrm{d}t$$

En effectuant les changements de variables respectifs $u = at$ et $v = bt$ dans les intégrales du membre de droite, on obtient

$$J_\varepsilon = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$$

Comme $\frac{\cos(t)}{t} = \frac{1}{t} + \mathrm{O}_{t \to 0}(1)$, on obtient

$$J_\varepsilon = \ln(b/a) + \mathrm{O}_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon)$$

et donc $I_{a,b} = \ln(b/a)$.

Correction de l'exercice 349 – *ENSEA MP 2015*

Correction de l'exercice 350 – *Calculs d'intégrales généralisées* 3

1 Pas de problème réel en 0, et en faisant par exemple $x = \mathrm{sh}(t)$, on obtient $\ln(2) - \ln(\sqrt{2} + 1)$.

2 En 0, $\cos(x)\ln(\tan(x)) \sim \ln(x)$. En $\frac{\pi}{2}$, pas de réel problème. On peut effecter $t = \sin(x)$ ou intégrer par parties. On trouve $-\ln(2)$.

3 On part de $(\sin(x))^3 = (3\sin(x) - \sin(3x))/4$. Pour tout $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{(\sin(x))^3}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{3a}^{+\infty} \frac{3\sin(u)}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{3}{4}\int_a^{3a} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

On écrit :

$$\int_a^{3a} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_a^{3a} \frac{\sin(x) - x}{x^2}\mathrm{d}x + \int_a^{3a} \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

On trouve donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(x))^3}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln(3).$$

Correction de l'exercice 351 – *Calculs d'intégrales généralisées plus délicats* 3D

1

2 Intégrer par parties en dérivant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)$:

$$I = \left[-\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(x)}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x.$$

Le changement de variable $t = 1/x$ donne

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(x)}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2-\ln(t)}{2\sqrt{t}\,(1+t)}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \pi$.

3 Pas de problème réel en x. On calcule $I_n + I_{n+2} = 2\cos(x) I_{n+1}$. En résolvant cette récurrence linéaire, on trouve $I_n = \pi \sin(nx)/\sin(x)$.

Correction de l'exercice 352 – *D'autres calculs d'intégrales* 3

1 La fonction $f\ : x \mapsto \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$ est continue et définie sur $\mathbb{R}$, paire et $f(x) = \mathrm{O}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc l'intégrale est bien convergente.

Par parité, $I = 2J$, où $J = \int_0^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$. En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ dans J, on trouve que $J = 0$: $I = 0$.

2 Si $a \neq b$, on écrit

$$\frac{1}{(X^2+a^2)(X^2+b^2)} = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{X^2+b^2} - \frac{1}{X^2+a^2}\right)$$

Comme les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ sont intégrables (classique), on a

$$I = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+b^2}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right)$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{\pi}{b} - \frac{\pi}{a}\right) = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

Reste à traiter le cas où $a = b$. On peut le faire à la main, mais c'est technique et assez compliqué. On a plutôt envie d'utiliser la question précédente en prenant $a = b$. L'idée, pour justifier ce passage à la limite, est d'utiliser un argument de continuité : avec des notations évidentes, on montre que pour a fixé, $I_{a,b}$ tend vers $I_{a,a}$ lorsque a tend vers b. Pour ce faire, on peut majorer $|I_{a,b} - I_{a,a}|$.

Remarque : la dernière étape se justifie très facilement à l'aide du théorème de convergence dominée et ses conséquences. Si le résultat n'est pas connu, vous pouvez substituer à ce résultat de cours de la technique.

Correction de l'exercice 353 – *Convergence et calcul* 3

1 Le seul problème se situe en $+\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t\,e^{-nt} = \mathrm{o}_{t\to+\infty}(1/t^2)$, d'où la convergence de l'intégrale.

En effectuant une IPP, on obtient après calcul $I_n = \frac{1}{n^2}$.

Remarque : On pouvait aussi effectuer le changement de variable $u = nt$, afin d'obtenir

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{n^2}\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(2)}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

Correction de l'exercice 354 – *Existence et calcul d'une intégrale* 3

Correction de l'exercice 355 – *Calcul surprenant d'intégrale généralisée* 3D

Pour l'étude asymptotique en $+\infty$, faire une double intégration par parties. Pour le calcul de la dernière intégrale, faire une primitivation par parties.

Correction de l'exercice 356 – *Fonction définie par une intégrale sur* $\mathbb{R}_+$ 0

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g_x : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $g_x(t) = \mathrm{O}_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, d'où l'intégrabilité de g_x sur $[1, +\infty[$.

Reste à étudier le problème en 0 : si $x \neq 0$, $g_x(t) \sim_{x \to 0} \frac{\ln(t)}{x^2}$, or $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x^2}$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc g_x l'est également.

En revanche, si $x = 0$, $\frac{1}{t^2} = \mathrm{O}_{t \to 0}(g_0(t))$, g_0 est de signe constant sur $]0, 1]$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, donc g_0 ne l'est pas.

Pour conclure, f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2 On effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans l'expression de $f(1)$:

$$f(1) = \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_{u=+\infty}^{u=0} \frac{-\ln(u)}{(1/u)^2+1}\frac{-\mathrm{d}u}{u^2} = -f(1),$$

donc $f(1) = 0$.

3 Pour le calcul général de $f(x)$, il est tentant de se ramener au calcul précédent *via* le changement de variable $u = t/x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+x^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{u=0}^{+\infty} \frac{\ln(u\,x)}{x^2(1+u^2)}\,x\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{x}\left(f(1) + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+u^2}\mathrm{d}u\right) \\ &= \frac{\pi\ln(x)}{2x} \end{aligned}$$

2.3. Étude locale

Correction de l'exercice 357 – *Fonctions définies par une intégrale* 2

1 En 0 : une mauvaise preuve consiste à dire que $\frac{\cos(t)}{t} \sim_0 \frac{1}{t}$, donc que $\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t \sim_0 \int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(3)$, et donc que $\ln(3)$ est la limite de f en 0.

La question est de savoir comment rendre cette idée rigoureuse.

En $+\infty$: on ne va pas se contenter de la majoration $\frac{|cos(t)|}{t} \leqslant \frac{1}{t}$. Pour être plus fin, on pourra s'inspirer de la preuve de convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$, voire utiliser cette convergence.

2 Similaire à l'étude en 0 de la première question.

Correction de l'exercice 358 – *Quel est le comportement asymptotique d'une fonction dont l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ converge ?* 4

Si f admet une limite l non nulle en $+\infty$, alors f garde un signe constant au voisinage de $+\infty$, et $1 = \mathrm{O}_{t \to +\infty}(f(t))$, donc si $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge, alors $\int_1^{+\infty} 1\mathrm{d}t$ converge, d'où une absurdité.

Correction de l'exercice 359 – *Intégrale résiduelle (Mines MP 2015)* 3

Il suffit de reprendre la preuve de convergence de l'intégrale de Dirichlet par intégration par parties et de faire des majorations.

Correction de l'exercice 360 – *Équivalents aux bornes d'une primitive (Télécom Sud Paris MP 2015)* 3

Pour que $f(x)$ soit une intégrale non impropre, il faut et il suffit que $x > 1$. Il reste à voir si $f(1)$ est défini, *i.e.* si l'intégrale $\int_1^e \ln(\ln(t))\mathrm{d}t$ converge.

On a $\ln(t) \sim_{t \to 1} (t-1)$, *i.e.* $\ln(t) = (t-1) + \mathrm{o}_{t \to 1}(t-1)$, donc, pour $t > 1$:

$$\ln(\ln(t)) = \ln(t-1) + \ln(1 + \mathrm{o}_{t \to 1}(1)) = \ln(t-1) + \mathrm{o}_{t \to 1}(1) = \ln(t-1) + \mathrm{o}_{t \to 1}(\ln(t-1)) \sim_{t \to 1} (\ln(t-1))$$

Or $t \mapsto \ln(t-1)$ est intégrable sur $]1, e]$ (comme ln l'est sur $]0, 1]$), donc $f(1)$ est bien défini.

Cherchons maintenant un équivalent de f en $+\infty$.

Utilisation de l'intégration des relations de comparaison – Bien sûr, $\int_e^{+\infty} \ln(\ln(t))\mathrm{d}t$ est divergente. Pour trouver un équivalent simple de f en $+\infty$, il suffirait de trouver une fonction « simple » g de classe $\mathcal{C}^1$, telle que f' et g' soient équivalentes en $+\infty$.

On tente $g\ : x \mapsto x\ln(\ln(x))$.

g est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, et, pour tout $x > 1$:

$$g'(x) = \ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}$$

On a donc bien, $f' \sim_{+\infty} g'$. Par théorème d'intégration des relations de comparaison dans le cas de la divergence (et comme les fonctions f' et g' sont bien positives au voisinage de $+\infty$), on a

$$f(x) \sim_{x\to+\infty} \int_e^x g'(t)\mathrm{d}t = g(x) - g(e) = g(x)$$

donc $f(x) \sim_{x\to+\infty} x\ln(\ln(x))$.

Utilisation d'une intégration par parties – On écrit

$$f(x) = [t\ln(\ln(t))]_e^x - \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = x\ln(\ln(x)) - \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

Or pour tout $t \geqslant e$, $0 \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant 1$ donc $\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(x) = \mathrm{o}_{x\to+\infty}(x\ln(\ln(x)))$, et on retrouve l'équivalent précédent.

Comme $\int_e^1 \ln(\ln(t))\mathrm{d}t$ converge, si cette intégrale n'est pas nulle, elle nous donnera un équivalent de f en 1. C'est bien le cas puisque la fonction intégrée est continue et à valeurs strictement négatives sur $]1, e[$: cette intégrale est strictement positive (par interversion des bornes).

Le calcul explicite de cette intégrale ne semble pas évident.

Correction de l'exercice 361 – *Lorsque $f + f'$ est de carré intégrable (X MP 10)* 3D

Correction de l'exercice 362 – *Condition suffisante pour qu'une fonction soit de limite nulle en $+\infty$* 3D

2.4. Semi-convergence

Correction de l'exercice 363 – *Intégrale de Dirichlet* 1

Correction de l'exercice 364 – *Intégrale semi-convergente (Mines MP 10)* 3

La démarche est similaire à celle effectuée pour l'intégrale de Dirichlet.

Pour montrer la convergence de $\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\mathrm{d}t$, on pourra effectuer un changement de variable $u = x^2$, puis faire une IPP, mais on peut aussi faire directement une IPP en écrivant $f(t) = \frac{1}{t}tf(t)$.

Pour la non intégrabilité, on s'inspirera de la preuve de non intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en se plaçant sur les segments de la forme $\left[\sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi}\right]$.

2.5. Divers

Correction de l'exercice 365 – *Sommes de Riemann pour des intégrales généralisées* 1

On écrit le terme général comme une somme de Riemann, puis on s'inspire du principe de comparaison série-intégrale. La limite vaut $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$.

Correction de l'exercice 366 – *Limite d'une suite définie par des intégrales* 3

Notons F la primitive de f nulle en 0.

Par hypothèse, F est croissante, et de limite finie en $+\infty$, que nous appellerons l. On a donc

$$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}[xF(x)]_0^n - \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\mathrm{d}x$$

Le crochet vaut $F(n)$, et tend donc vers l lorsque n tend vers l'infini.

Pour l'intégrale, on pourra utiliser l'intégration des relations de comparaison (en écrivant $F(x) = l + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(1)$).

Correction de l'exercice 367 – *Comparaison d'intégrales* 3

CHAPITRE XXXIX

Structures algébriques (corrections)

1. Groupes

1.1. Structure de groupe, de sous-groupe

Correction de l'exercice 368 – *Quand le produit de deux sous-groupes est-il un sous-groupe ?* 4

Correction de l'exercice 369 – *Structure des sous-groupes additifs réels* 1

Correction de l'exercice 370 – *L'addition des vitesses relativistes* 0

Montrons déjà que $\star$ définit bien une loi de composition interne sur G. Soit $x, y \in]-1, 1[$.
On a $|x| < 1$, $|y| < 1$ et donc également $|xy| < 1$. Ceci prouve que$x \star y$ est bien défini, et, de plus, que

$$\frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{1+x+y+xy}{1+xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0$$

Ainsi, $x \star y > -1$, et un calcul similaire montre que $x \star y < 1$.

Il est clair que $\star$ est commutative (par commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$), que 0 est neutre pour $\star$ dans G, que $-x$ est symétrique de $x \in G$ dans G pour $\star$.

Reste à vérifier l'associativité : soit $x, y, z \in G$. On a

$$(x \star y) \star z = \frac{x+y}{1+xy} \star z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + z\,\frac{x+y}{1+xy}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz},$$

et un calcul similaire conduit à

$$x \star (y \star z) = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz},$$

d'où l'associativité.
Remarque : les vérifications ne sont pas difficiles, mais dans cet exercice, on ne voit pas G comme sous-groupe d'un groupe bien connu, ce qui est plutôt rare.

Correction de l'exercice 371 – *Partie finie stable par multiplication* 0

D'après l'une des caractérisations des sous-groupes, il reste à vérifier la stabilité de H par passage au symétrique.

Soit $h \in H$. L'idée est d'écrire h^{-1} comme une puissance de h à un exposant naturel.

L'application $\varphi\ : n \in \mathbb{N} \mapsto h^n$ n'est pas injective, car $\mathbb{N}$ est infini et pas H : il existe donc $i, j \in \mathbb{N}$ distincts tels que $h^i = h^j$. En supposant par exemple $i > j$, on obtient $h^{i-j} = e_G$, donc $h^{-1} = h^{i-j-1}$.

Si $i - j - 1 > 0$, alors comme $h \in H$ et comme H est stable par produit, $h^{-1} \in H$.

Si $i - j - 1 = 0$, alors $h^{-1} = h = e_G$, donc $h^{-1} \in H$.

H est donc un sous-groupe de G.
Remarque : plutôt que de parler de i et j, on aurait pu utiliser $\psi\ : n \in \mathbb{Z} \mapsto h^n$ qui a l'avantage d'être un morphisme, non injectif par étude des cardinaux, et donc de noyau non trivial.
Remarque : l'hypothèse de finitude est essentielle, comme le montre l'exemple de $\mathbb{N}$ additif (ou $\{e^n, n \in \mathbb{N}\}$ si on tient à donner un exemple multiplicatif).

Correction de l'exercice 372 – *Monoïde fini et régulier* 1

Pour montrer qu'un monoïde est un groupe, il reste à vérifier que tout élément est symétrisable. Ici, on considère un monoïde fini et régulier G. Pour tout $a \in G$, tout $(b, c) \in G^2$, on a

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

Autrement dit, l'application $g \in G \mapsto ag$, de G dans G, est injective. Comme G est en outre fini, on en déduit que cette application est bijective : en particulier, il existe $g \in G$ tel que $ag = e_G$, donc a admet un symétrique à droite dans G.

De même (en considérant $g \mapsto ga$), a admet un symétrique à gauche dans G : a est symétrisable dans G.

Ceci valant pour tout $a \in G$, G est bien un groupe.

Remarque : la finitude du groupe est essentielle, comme le montre l'exemple de $(\mathbb{N}, +)$. Elle nous a servi à passer d'une injectivité à une surjectivité (d'une unicité à une existence). En algèbre linéaire, c'est la dimension finie qui joue ce rôle de passeur entre unicité et existence.

Remarque : attention, $g \mapsto ag$ n'est pas un endomorphisme du groupe G, à moins que $a = e_G$.

Correction de l'exercice 373 – *Existence d'un idempotent (X MP 07)* 3

Correction de l'exercice 374 – *Éléments réguliers de E^E* 3

Correction de l'exercice 375 – *Structure de groupe* 3D

1 Cette question est difficile.

Soit e_G un élément neutre à gauche de G, $g \in G$, g' un symétrique à gauche de g (à ce stade, on ne peut affirmer l'unicité de l'élément neutre ou d'un symétrique à gauche).

On souhaite montrer que g' est symétrique à droite de g, *i.e.* $gg' = e_G$. Pour ce faire, introduisons un symétrique à gauche g'' de g'. On a

$$gg' = e_G gg' = g''g'gg' = g''e_G g' = g''g' = e_G,$$

d'où le résultat (l'associativité a permis de ne pas mettre de parenthèses).

Reste à prouver que e_G est aussi élément neutre à droite :

$$ge_G = g(g'g) = (gg')g = e_G g = g,$$

d'où le résultat.

2 Il s'agit de montrer que G admet un élément neutre, et que tout élément de G admet un symétrique.

Fixons un élément a de G. Par hypothèse, il existe un élément e de G tel que $ea = a$ (en prenant $b = a$ dans l'assertion $\star$). En multipliant cette relation à droite par b, où b décrit G, et en utilisant encore $\star$, on constate que e est élément neutre à gauche de G. De la même manière, G admet un élément neutre à droite e', puis $e = ee' = e'$.

Par hypothèse $\star$, il existe a' et a'' dans G tels que $e = aa' = a''a$, puis $a' = a''aa' = a''$, donc a admet un symétrique.

G est bien un groupe.

3 Fixons $a \in G$. a étant simplifiable, les applications $\alpha_a \ : g \mapsto a \cdot g$ et $\beta_a \ : g \mapsto g \cdot a$ de G dans G sont injectives, donc bijectives puisque G est fini. En particulier, a admet un antécédent par α_a, *i.e.* il existe $e \in G$ tel que $a = ae$. On a donc, pour tout $b \in G$, $ba = bae$. Or, par surjectivité de β_a, ba décrit G lorsque b décrit G, donc e est élément neutre à droite de G. De même G admet un élément neutre à gauche, qui s'avère ensuite égal à e, et les surjectivités de α_a et β_a appliquées à e montrent que a admet un symétrique.

Remarque : en fait, cette question se ramène facilement à la précédente, la finitude de G permettant de passer d'une injectivité (ce que l'on suppose dans cette question) à une surjectivité (ce que l'on suppose dans la question précédente).

Remarque : comme d'habitude, on doit se demander si les hypothèses peuvent être affaiblies. La finitude de G ne peut être omise, comme le montre l'exemple de $(\mathbb{N}, +)$.

Correction de l'exercice 376 – *Une loi de groupe sur un ensemble de polynômes* 3

1.2. Morphismes de groupes

Correction de l'exercice 377 – *Un isomorphisme de groupes* 0

De $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ vers $\mathbb{C}^*$, il est naturel de considérer

$$\varphi \ : (r, u) \mapsto ru$$

qui est une application bien définie, surjective. C'est aussi un morphisme, essentiellement par associativité et commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}^*$.

Enfin, si $(r,u) \in \ker(\varphi)$, *i.e.* $ru = 1$, alors en égalant les modules, il vient $r = |r| = |ru| = 1$, puis $u = 1$ (car $r = 1$ et $ru = 1$) : φ est injective.
Remarque : tester l'injectivité en revenant à la définition montre un manque de recul.
Remarque : on peut donner la bijection réciproque de φ : c'est $z \mapsto \left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$.

Correction de l'exercice 378 – *Caractérisation de la commutativité* 1

1 Reformulons les diverses assertions :
La première signifie
$$\forall\, x,y \in G, \quad xy = yx$$
La deuxième signifie
$$\forall\, x,y \in G, \quad (xy)^2 = x^2y^2$$
La troisième signifie
$$\forall\, x,y \in G, \quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$
(car le passage au symétrique est bijectif, puisqu'involutif).
Soit $x,y \in G$. On a
$$xy = yx \Leftrightarrow xxyy = xyxy \Leftrightarrow x^2y^2 = (xy)^2,$$
car dans un groupe tout élément est simplifiable.
Ceci montre l'équivalence entre les deux premières assertions.
On a
$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow ((xy)^{-1})^{-1} = (x^{-1}y^{-1})^{-1} \Leftrightarrow xy = (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} \Leftrightarrow xy = yx,$$
la première équivalence se justifiant par l'injectivité de la fonction de passage au symétrique.
Ceci montre l'équivalence entre la première et la troisième assertion.
2 Par hypothèse, la fonction carré est l'endomorphisme trivial (constamment égal à 1) : G est donc abélien.

Correction de l'exercice 379 – *Groupes d'ordre* 4 *(X MP 10)* 0

Correction de l'exercice 380 – *Étude d'isomorphie (X PC 10)* 0

Correction de l'exercice 381 – *Théorème de Cayley* 1

1 α_a (resp. β_a) est bijective, car elle admet $\alpha_{a^{-1}}$ (resp. $\beta_{a^{-1}}$) pour inverse (pour la composition).
2 Pour que α_a soit un endomorphisme, il faut que $\alpha_a(e_G) = e_G$, et donc que $a = e_G$.
Réciproquement, si $a = e_G$, alors $\alpha_a = \mathrm{Id}_G$, et est donc un endomorphisme de G.
3 Soit $a,b,x \in G$.
$$\begin{aligned}((\phi(a)) \circ (\phi(b)))(x) &= (\alpha_a \circ \alpha_b)(x)\\ &= \alpha_a(bx)\\ &= abx\\ &= \alpha_{ab}(x)\\ &= (\phi(ab))(x).\end{aligned}$$
Ceci valant pour tout $x \in G$, $\phi(a) \circ \phi(b) = \phi(ab)$.
Ceci valant pour tout $(a,b) \in G^2$, ϕ est un morphisme de groupes.
On teste l'injectivité sur le noyau : soit $a \in \ker(\phi)$, *i.e.* $\phi(a) = \mathrm{Id}_G$. En évaluant cette relation en e_G, on obtient $a = e_G$. Le noyau du morphisme ϕ étant réduit à e_G, ϕ est bien injectif.
ϕ induit donc un isomorphisme de G sur son image, et donc de G sur un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$.

Correction de l'exercice 382 – *Transfert de structure* 1

On vérifie à la main que $(E,*)$ est un groupe, et que ϕ^{-1} est un isomorphisme de E sur G.
Remarque : cet exercice semble compliqué, mais il ne fait que rappeler que des groupes sont isomorphes si et seulement si ils ne diffèrent que par l'écriture.
Remarque : cet exercice permet de mieux comprendre la structure de groupe donnée dans l'exercice 370. En effet, on a transféré l'addition dans $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ grâce à la fonction tangente hyperbolique.

Correction de l'exercice 383 – *Un sous-groupe à un paramètre (Petites Mines MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 384 – *Groupe d'automorphismes d'un groupe, automorphismes intérieurs* 1

1 $\mathrm{Aut}(G)$ est une partie non vide de $\mathcal{S}_G$, non vide car possédant Id_G, stable par composition et passage à la bijection réciproque : c'est donc un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$, puis un groupe pour $\circ$.

2 On se demande pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{Z}$ l'application $n \in \mathbb{Z} \mapsto an$ est bijective.
Pour qu'elle le soit, 1 doit posséder un antécédent, et donc nécessairement, $a = \pm 1$.
Réciproquement, ces valeurs de a conviennent, donc $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, -\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\}$.

3 Soit $a, x, y \in G$. On a

$$\phi_a(x)\phi_a(y) = axa^{-1}aya^{-1} = axya^{-1} = \phi_a(xy),$$

donc ϕ_a est un endomorphisme de G.

Il est bijectif, car il admet $\phi_{a^{-1}}$ pour inverse pour la composition (ou, si on préfère, car pour tout $y \in G$, l'unique antécédent de y par ϕ_a est $a^{-1}ya$).

4 Soit $a, b, x \in G$. On a

$$\psi(a) \circ \psi(b)(x) = \phi_a(\phi_b(x)) = \phi_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1} = abx(ab)^{-1} = \psi(ab)(x),$$

donc ψ est bien un morphisme.

Étudions son noyau : soit $a \in G$. a est dans le noyau de ψ si et seulement si $\psi(a) = \mathrm{Id}_G$, si et seulement si $axa^{-1} = x$ pour tout $x \in G$, si et seulement si $ax = xa$ pour tout $x \in G$. Le noyau de ψ est donc le centre de G.

Correction de l'exercice 385 – *Équipotence et isomorphisme* 2

On peut montrer que ces deux groupes sont équipotents à $\mathbb{R}$, et qu'ils peuvent donc être mis en bijection.

Correction de l'exercice 386 – *Partie génératrice finie stable par passage à l'inverse* 3

Correction de l'exercice 387 – *Reconnaître un groupe connu* 3

Correction de l'exercice 388 – *Le premier théorème d'isomorphie, dégradé en relation entre cardinaux (ENS MP 10)* 2

Correction de l'exercice 389 – *Morphismes de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Q}^*$* 2

Correction de l'exercice 390 – *Groupe abélien d'exposant fini (Mines MP 2015)* 3

1.3. Ordre d'un groupe, d'un élément. Groupes cycliques

Correction de l'exercice 391 – *Existe-t-il des groupes infinis dont tout élément est d'ordre fini ?* 4

Correction de l'exercice 392 – *Structure des groupes d'ordre p où p est un nombre premier* 2

Correction de l'exercice 393 – *Ordre d'un produit dans un cas particulier* 2

Correction de l'exercice 394 – *Périodicité d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$* 0

Correction de l'exercice 395 – *Résultats élémentaires sur les ordres* 0

Correction de l'exercice 396 – *Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$* 2

Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$, de cardinal n. D'après le théorème de Lagrange, pour tout $z \in G$, $z^n = 1$, donc $G \subset \mathbb{U}_n$. Par égalité des cardinaux (finis), $G = \mathbb{U}_n$.

Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est bien un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$.

Correction de l'exercice 397 – *Existence d'une involution non triviale dans un groupe d'ordre pair* 3

Correction de l'exercice 398 – *Groupe n'ayant qu'un nombre fini de sous-groupes* 3

Correction de l'exercice 399 – *Racine carrée dans un groupe d'ordre impair* 3

Correction de l'exercice 400 – *Sous-groupes de type fini de* $(\mathbb{Q}, +)$ 3

Correction de l'exercice 401 – *Groupe fini d'involutions (Mines MP 08)* 2

Correction de l'exercice 402 – *Sur le ppcm des ordres des éléments d'un groupe fini* 3

Correction de l'exercice 403 – *Ordre d'un élément dans un groupe abélien (X MP 07)* 3

Correction de l'exercice 404 – *Élément d'ordre p (X MP 06)* 4

Correction de l'exercice 405 – *Théorème de Lagrange, cas général* 5

Correction de l'exercice 406 – *Groupe n'ayant que deux classes de conjugaison* 5

Correction de l'exercice 407 – *Groupe n'ayant que deux classes sous l'action de* $\mathrm{Aut}(G)$ 5

Correction de l'exercice 408 – *Loi de groupe sur les points entiers d'une branche d'hyperbole* 3

1 Notons G cet ensemble. Il est clairement non vide, puisqu'il comprend 1, et est une partie de $\mathbb{R}_+^*$, car si $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$ vérifient $x^2 - 3y^2 = 1$, alors $x + \sqrt{3}y$ ou $x - \sqrt{3}y$ est positif, donc les deux le sont, puisque leur produit vaut 1 (et ils sont non nuls). On montre comme dans l'exercice 2 que G est stable par produit et passage à l'inverse.

2

i Par irrationnalité de $\sqrt{2}$, G est une partie de $\mathbb{R}^*$, évidemment non vide. On vérifie de plus que G est stable par produit et par passage à l'inverse pour conclure.

C'est facile pour l'inverse (avec des notations évidentes, celui de $x + \sqrt{2}y \in G$ est $x - \sqrt{2}y \in G$, ça l'est un peu moins pour le produit, car il faut prouver (avec des notations évidentes) que $xx' + 2yy' \in \mathbb{N}^*$: c'est un entier relatif par structure d'anneau de $\mathbb{Z}$, non nul (car impair, x et x' l'étant nécessairement).

ii G est en fait un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$. On applique l'isomorphisme logarithme, afin de se ramener au cas connu des sous-groupes (additifs) de $\mathbb{R}$. Le sous-groupe $\ln(G)$ de $\mathbb{R}$ n'est pas dense, car ses éléments positifs sont ceux de la forme $\ln(x + \sqrt{2}y)$, où $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, et $x^2 - 2y^2 = 1$. $\ln(G)$ est donc monogène, et G également (il lui est isomorphe).

1.4. Groupe symétrique

Correction de l'exercice 409 – *Cardinal du groupe symétrique alterné d'indice n* 0

Correction de l'exercice 410 – *Autre point de vue sur la signature* 3

Correction de l'exercice 411 – *Sous-groupes de $\mathcal{S}_3$ (Centrale MP 07)* 0

Correction de l'exercice 412 – *$\mathcal{S}_n$ est de rang 2 (Centrale MP 08)* 1

Correction de l'exercice 413 – *Transpositions et groupe symétrique* 4

Correction de l'exercice 414 – *Sous-groupes maximaux de $\mathcal{S}_n$ (ENS MP 10)* 3

Correction de l'exercice 415 – *Racine carrée d'une permutation circulaire (Mines MP 10)* 3

Si ce cycle admet une racine carrée c, alors c est nécessairement un n-cycle, car il ne peut pas y avoir plusieurs orbites sous l'action de c. Si n est pair, alors on constate que le carré d'un n-cycle n'est pas un n-cycle, et donc que le cycle considéré c_0 n'admet pas de racine carrée.

Si n est impair on peut écrire $n = 2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Comme $c_0^n = \mathrm{Id}$, on constate que c_0 admet c_0^{-k} pour racine carrée.

Correction de l'exercice 416 – *Nombre d'éléments d'ordre donné* 3

2. Arithmétique

2.1. Divisibilité, diviseurs, division euclidienne

Correction de l'exercice 417 – *Divisibilité* 0

Correction de l'exercice 418 – *Calculs de restes* 0

Correction de l'exercice 419 – *Nombre de diviseurs* 3

Correction de l'exercice 420 – *Une caractérisation des carrés parfaits* 3

Première méthode : on a

$$d(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} (v_p(n)+1)$$

donc $d(n)$ est impair si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$, $v_p(n)$ est pair, si et seulement si n est un carré parfait.

Deuxième méthode : on observe que $k \mapsto n/k$ est une involution sur l'ensemble des diviseurs de n, qui induit une bijection entre l'ensemble des diviseurs de n strictement plus petits que $\sqrt{n}$ sur l'ensemble des diviseurs de n strictement plus grands que $\sqrt{n}$: $d(n)$ est impair si et seulement si $\sqrt{n}$ est un entier qui divise n, *i.e.* n est un carré parfait.

Correction de l'exercice 421 – *Somme des diviseurs* 3

On a

$$S(m)S(n) = \sum_{d|m} d \sum_{s|n} s = \sum_{d|m,s|n} ds$$

Il suffit donc de montrer que

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{D}(m)\times\mathcal{D}(n) & \to & \mathcal{D}(mn) \\ & (d,s) & \mapsto & ds \end{array}$$

est bijective.

Or on peut en trouver un inverse, à savoir $N \mapsto (N\wedge m, N\wedge s)$. Le point clé étant que si b et c sont premiers entre eux, alors

$$a\wedge(bc) = (a\wedge b)(a\wedge c)$$

ce que l'on peut montrer en revenant à la définition du pgcd, ou en utilisant les valuations p-adiques.

Correction de l'exercice 422 – *Égalité de ppcm* 3

Correction de l'exercice 423 – *Centrale MP 08* 2

En travaillant dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on s'intéresse au produit des éléments non nuls de cet anneau.

Si n est composé, on montre aisément que le résultat cherché est 0, sauf dans le cas où $n = 4$.

Si n est premier, on forme le produit des éléments non nuls du corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: on peut trouver sa valeur en appariant les éléments distincts inverses l'un de l'autre. On trouve que ce produit vaut $\overline{-1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc que la réponse cherchée vaut $n-1$.

Remarque : pour trouver le produit des éléments non nuls de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (lorsque n est premier), on aurait aussi pu remarquer que ce sont les racines simples du polynôme $X^{n-1}-1$, et utiliser les relations coefficients racines.

Correction de l'exercice 424 – *CCP MP 2015* 0

2.2. Une preuve du petit théorème de Fermat

Correction de l'exercice 425 – *Banque CCP 2016 86* 2

2.3. Congruences

Correction de l'exercice 426 – *Chiffres en base 10* 0

Correction de l'exercice 427 – *Chiffres en base 10* 2

Correction de l'exercice 428 – *Somme des chiffres de la somme des chiffres* 3D

Correction de l'exercice 429 – *Restes chinois* 0

Correction de l'exercice 430 – *Banque CCP 2016 94* 2

2.4. Nombres premiers

Correction de l'exercice 431 – *Nombres de Mersenne et de Fermat* 1

Correction de l'exercice 432 – *Vers le théorème de Dirichlet* 1

Correction de l'exercice 433 – *Mines MP 2015* 3

2.5. Équations diophantiennes

Correction de l'exercice 434 – *2011 est-il la somme de deux carrés d'entiers ?* 0

Correction de l'exercice 435 – *Équations diophantiennes* 3

1 Il suffit de réduire modulo 5 (réduire modulo 3 fonctionne également).

2 La réponse est non, il suffit de raisonner sur les valuations 2-adiques de x, y et z pour s'en convaincre.

Remarque : une autre approche consiste à effectuer une « descente infinie » : si (x, y, z) est un triplet de solutions, alors x est pair, et $(-y, z, x/2)$ est aussi un triplet de solutions.

3. Anneaux

3.1. Généralités sur les anneaux

Correction de l'exercice 436 – *Développement dans un anneau* 0

Correction de l'exercice 437 – *D'un inverse à un autre* 2

On vérifie par simple calcul que l'élément proposé est bien inverse (à droite et à gauche) de $1+ba$. Par exemple à droite :

$$(1+ba)(1-b(1+ab)^{-1}a) = 1-b(1+ab)^{-1}a+ba+bab(1+ab)^{-1}a = 1+ba-b(1+ab)(1+ab)^{-1}a = 1.$$

Remarque : pour trouver un tel inverse, on peut partir de la relation formelle (qui n'a pas de vrai sens)

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots,$$

l'appliquer pour $x = ab$ et $x = ba$, et on tombe sur la relation voulue. Ceci est à faire au brouillon, ou on précise que c'est un jeu purement formel, destiné à retrouver l'inverse.

Correction de l'exercice 438 – *Centre d'un anneau* 0

C est une partie de A, comprenant 1_A.
De plus, soit $b, c \in C$, et $a \in A$. On a

$$(b-c)a = ba - ca = ab - ac = a(b-c)$$

donc C est stable par différence, et

$$a(bc) = (ab)c = (ba)c = b(ac) = b(ca) = (bc)a,$$

donc C est stable par produit.
Au final, C est bien un sous-anneau de A.

Correction de l'exercice 439 – *Parité du nombre d'idempotents dans un anneau* 0

Par simple calcul, si $a \in M$, alors $1 - a \in M$. L'application $\varphi\ : a \mapsto 1 - a$ de M dans M est bijective, car involutive. Si elle n'a pas de point fixe, on peut apparier les éléments de M images l'un de l'autre par φ par paires, fournissant le résultat. Si elle a un point fixe, cela signifie que 2 a un inverse a_0 dans M, et on en déduit que 2 appartient aussi à M (en inversant la relation $a_0^2 = a_0$), donc que $4 = 2$, puis $2 = 0$, or 0 n'est jamais inversible dans un anneau non nul, c'est absurde.
Remarque : j'ai écrit 2 et 4 mais j'ai considéré rigoureusement $1_A + 1_A$ et $1_A + 1_A + 1_A + 1_A$ respectivement.

Correction de l'exercice 440 – *Y a-t-il toujours un morphisme d'anneaux entre deux anneaux ?* 4

La réponse est non. Par exemple, il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Z}$. En effet, si on disposait d'un tel morphisme φ, alors on aurait

$$2\varphi(1/2) = \varphi(1) = 1,$$

d'où l'absurdité $\varphi(1/2) = \frac{1}{2}$.
Remarque : autre exemple (moins intéressant) : si A et nul et pas B, alors un morphisme d'anneaux ψ de A vers B doit vérifier à la fois $\psi(0_A) = 0_B$ et $\psi(1_A) = 1_B$, ce qui est impossible puisque $0_A = 1_A$ et que $0_B \neq 1_B$.
Remarque : en revanche, entre deux groupes, il existe au moins un morphisme, le morphisme trivial (envoyant tout élément du premier sur l'élément neutre du second).

Correction de l'exercice 441 – *Éléments associés* 0

Correction de l'exercice 442 – *Sous-anneau engendré par* 1/5 0

Correction de l'exercice 443 – *Puissances identiques dans un anneau fini* 2

Soit N le cardinal de A, et $a_1, \dots, a_N$ ses éléments. L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi\ : & \mathbb{N} & \to & A^N \\ & n & \mapsto & (a_1^n, \dots, a_N^n) \end{array}$$

n'est pas injective ($\mathbb{N}$ est infini, pas A^N), d'où le résultat.

Correction de l'exercice 444 – *Anneau des endomorphismes d'un groupe commutatif* 1

Il est clair que $+$ et $\circ$ sont des lois de composition interne sur $\mathrm{End}(G)$, associatives, et que $+$ est commutative (puisqu'elle l'est dans G).
De plus, l'application identiquement nulle $x \mapsto e_G$ et l'application identique $x \mapsto x$ sont clairement des élements neutres respectifs pour $+$ et $\circ$ dans $\mathrm{End}(G)$.
Tout élément f de $\mathrm{End}(G)$ admet $-f\ : x \mapsto -(f(x))$ pour symétrique dans $\mathrm{End}(G)$.
Vérifions la distributivité de la composition par rapport à l'addition (qui est le point le plus difficile) : soit $f, g, h \in \mathrm{End}(G)$.
Soit $x \in G$.

On a , par définition des termes ci-dessous

$$\begin{aligned}((f+g)\circ h)(x) &= (f+g)(h(x))\\ &= f(h(x))+g(h(x))\\ &= (f\circ h+g\circ h)(x),\end{aligned}$$

donc $\circ$ est distributive à droite de $+$.

On a également,

$$\begin{aligned}(h\circ(f+g))(x) &= h((f+g)(x))\\ &= h(f(x)+g(x))\\ &= h(f(x))+h(g(x))\\ &= (h\circ f+h\circ g)(x),\end{aligned}$$

où la troisième égalité se justifie par le fait que h soit un endomorphisme de G, donc $\circ$ est distributive à gauche de $+$.

$(\mathrm{End}(G),+,\circ)$ est bien un anneau.

Remarque : en général, cet anneau n'est pas commutatif, car la composition n'est pas commutative (sauf exception).

Remarque : il faut bien mettre en valeur la différence d'argumentation pour les deux distributivités. En fait, la distributivité à droite de $\circ$ par rapport à $+$ est toujours vérifiée, même si les fonctions considérées ne sont pas des morphismes (par exemple, $(\cos+\sin)\circ\exp=\cos\circ\exp+\sin\circ\exp$, mais $\exp\circ(\cos+\sin)\neq\exp\circ\cos+\exp\circ\sin$).

Correction de l'exercice 445 – *Éléments nilpotents d'un anneau* 1

1 La matrice $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ convient.

2 Raisonnons par l'absurde, en supposant disposer de $a\in A$ nilpotent et inversible. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $a^n=0_A$. On a $a^n=0_A$, donc, puisque a et a^{-1} commutent

$$1_A=(aa^{-1})^n=a^n(a^{-1})^n=0_A,$$

ce qui contredit le fait que A soit non nul.

3 3 dans l'anneau $\mathbb{Z}$ n'est ni nilpotent, ni inversible.

Autre exemple : la matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ n'est ni nilpotente, ni inversible (et c'est un diviseur de zéro).

4 Supposons x nilpotent, et soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $x^n=0_A$. On utilise la formule de Bernoulli aux éléments 1_A et x (qui commutent bien) :

$$1=1^n-x^n=(1-x)\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\sum_{k=0}^{n-1}x^k(1-x),$$

donc $1-x$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{n-1}x^k$ (que l'on peut aussi écrire $\sum_{k\in\mathbb{N}}x^k$, puisque $x^k=0$ dès que $k\geqslant n$).

5 Supposons que x et y commutent, et qu'il existe $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $x^m=y^n=0$.

Comme x et y commutent, $(xy)^m=x^my^m=0$, donc xy est nilpotent.

Remarque : en examinant cette preuve on constate que si deux éléments d'un anneau commutent et que l'un (au moins) d'entre eux est nilpotent, alors leur produit l'est aussi.

Nous voulons maintenant montrer que $x+y$ est nilpotent, *i.e.* qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $(x+y)^p=0$.

Or la formule du binôme de Newton s'applique, puisque x et y commutent :

$$(x+y)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^ky^{p-k}$$

Pour que $(x+y)^p$ soit nul, il suffit que tous les termes de la somme ci-dessus le soient. Soit $k\in[\![0,p]\!]$: pour que $\binom{p}{k}x^ky^{p-k}=0$, il suffit que $x^k=0$ ou $y^{p-k}=0$, et donc il suffit que $k\geqslant m$ ou $p-k\geqslant n$ (soit encore $k\leqslant p-n$).

Ainsi, en prenant $p=m+n$, on obtient bien $(x+y)^p=0$, donc $x+y$ est nilpotent.

Remarque : on pouvait même prendre $p=m+n-1$.

Remarque : l'hypothèse de commutation est essentielle, comme le montre l'exemple de $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

3.2. Idéaux

Correction de l'exercice 446 – *Un anneau principal est-il toujours intègre ?* 4

$\mathbb{K} \times \mathbb{K}'$ où $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ sont deux corps.

Correction de l'exercice 447 – *Radical d'un idéal* 3

$\sqrt{12\mathbb{Z}} = \sqrt{72\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$.

Remarque : ce n'est pas demandé dans l'exercice, mais on peut montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal contenant I.

Correction de l'exercice 448 – *Nilradical d'un anneau commutatif* 2

Correction de l'exercice 449 – *Idéaux maximaux* 3

3.3. Anneaux particuliers

Correction de l'exercice 450 – *Anneau local* 3

(1) $\Rightarrow$(2) : supposons (1), et soit I l'ensemble des non inversibles de A : I possède 0, est stable par le produit par un élément quelconque et passage à l'opposé (par exemple parce que $-x = (-1_A)x$), sans supposer (1). Cette dernière hypothèse amène la stabilité par somme, et donc le fait que I soit un idéal de A.

(2) $\Rightarrow$(3) : supposons (3), et soit J un idéal propre de A : J ne possède pas d'élément inversible dans A (car sinon , $J = A$), donc $J \subset I$. Par conséquent, tout idéal propre de A est inclus dans J. Si on admet que tout idéal propre de A est inclus dans un idéal maximal (théorème de Krull), alors il s'ensuit que J est l'unique idéal maximal de A. En fait, ce serait très maladroit ici, puisqu'il est aisé de montrer que J est maximal (un idéal le contenant strictement possèderait un inversible).

(3) $\Rightarrow$(1) : supposons (3), et raisonnons par l'absurde en nous donnant deux éléments non inversibles a et b de A, tels que $a + b$ soit inversible. On a alors $aA + bA = A$. Or, si on note $\mathcal{M}$ l'unique idéal maximal de A, il contient les deux idéaux propres aA et bA, donc leur somme également, puis $\mathcal{M} = A$: c'est absurde.

Correction de l'exercice 451 – *Anneau des entiers de Gauss* 1

Nous montrons que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$: pour cela on vérifie qu'il possède 1, qu'il est stable par différence et par produit (détails laissés au lecteur).

Cherchons les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Analyse Soit $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$: soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $z = a + ib$ et $z^{-1} = c + id$. On a donc

$$(a + ib)(c + id) = 1,$$

puis, en passant aux carrés des modules :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1,$$

donc $a^2 + b^2 = 1$, puis $z = a + ib \in \{1, -1, i, -i\}$.

Synthèse Réciproquement, 1, -1, i et $-i$ sont bien des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$:

$$\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}.$$

Correction de l'exercice 452 – *Sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par j* 2

Correction de l'exercice 453 – *Écriture de $(1 + \sqrt{2})^n$ comme somme de racines* 3

Correction de l'exercice 454 – *Pseudo division euclidienne* 2

Correction de l'exercice 455 – *Anneau dont l'ensemble des inversibles est monogène* 3

Correction de l'exercice 456 – *Irréductibles d'un anneau de matrices* 3

4. Corps

Correction de l'exercice 457 – *Caractérisation des morphismes de corps* 0

Correction de l'exercice 458 – *Automorphismes du corps des réels* 1

Correction de l'exercice 459 – *Morphisme de corps* 0

Soit φ un morphisme de corps de K vers L. Vérifions que $\ker(\varphi)$ est trivial, *i.e.* réduit à 0_K. Soit $x \in K\backslash\{0_K\}$. x est donc inversible, puis

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(1_K) = 1_L,$$

donc $\varphi(x) \neq 0_L$: $x \notin \ker(\varphi)$.

φ est donc bien injectif.

Remarque : en examinant cette preuve, on constate plus généralement que, étant donné un morphisme d'anneaux $\psi\ : A \to B$, les inversibles de A ne sont jamais dans le noyau de ψ (sauf dans le cas peu intéressant où B est l'anneau nul).

Correction de l'exercice 460 – *Anneau intègre fini* 1

Il manque le fait que tout élément non nul soit inversible. Soit donc un tel anneau A, et $a \in A \setminus \{0_A\}$. L'application

$$b \mapsto ab$$

de A dans A est injective (puisque A est intègre), et donc bijective puisque A est fini. En particulier, 1_A admet un antécédent par cette application, donc a est inversible.

Remarque : A étant intègre, il est commutatif, il suffisait donc de trouver un inverse à droite (comme on l'a fait).

Remarque : en fait, tout anneau fini non nul sans diviseur de zéro est un corps (c'est plus ou moins le théorème de Wedderburn), mais la démonstration dépasse largement le cadre de la prépa.

Correction de l'exercice 461 – *Condition suffisante pour être un corps* 3

Correction de l'exercice 462 – *Groupe d'automorphismes d'une extension quadratique de* $\mathbb{Q}$ 3

On montre que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Pour ce faire, on vérifie que $1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est stable par différence (essentiellement parce que $\mathbb{Q}$ l'est), et enfin que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \setminus \{0\}$ est stable par quotient. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, tels que $z = a + \sqrt{3}b$ et $z' = c + \sqrt{3}d$ soient non nuls, *i.e.* $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$, par irrationnalité de $\sqrt{3}$.

On a, en multipliant par la quantité conjuguée $c - \sqrt{3}d$ (non nulle par irrationnalité de $\sqrt{3}$)

$$\frac{z}{z'} = \frac{(a + \sqrt{3}b)(c - \sqrt{3}d)}{c^2 - 3d^2} = \frac{ac - 3bd}{c^2 - 3d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 3d^2}\sqrt{3},$$

donc $\frac{z}{z'} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ($\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}$ et $\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}$ sont rationnels).

$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est donc bien un corps.

Déterminons ses automorphismes :

Analyse Soit φ un automorphisme de ce corps. On a en particulier, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$q\varphi(p/q) = \varphi(p) = p\varphi(1) = p, \quad i.e. \varphi(p/q) = p/q.$$

φ laisse donc fixe tout nombre rationnel.

De plus,

$$(\varphi(\sqrt{3}))^2 = \varphi(3) = 3,$$

puis $\varphi(\sqrt{3}) = \varepsilon\sqrt{3}$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. On a donc $\varphi(a + b\sqrt{3}) = a + \varepsilon\sqrt{3}b$, ce qui laisse donc deux possibilités pour φ.

Synthèse Réciproquement, $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})}$ est bien un automorphisme de ce corps, ainsi que

$$\psi\ : a + b\sqrt{3} \mapsto a - b\sqrt{3}$$

(vérifications laissées au lecteur).

Remarque : ψ est bien définie en tant qu'application par existence mais aussi *unicité* de l'écriture d'un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.

Correction de l'exercice 463 – *Calculs dans une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 3* 3

Correction de l'exercice 464 – *Une caractérisation des corps* 3

Il s'agit encore une fois de montrer que tout élément non nul x admet un inverse. Considérons l'idéal principal x^2A. Comme cet idéal est premier, et que $x^2 = x \cdot x$, on a $x \in x^2A$, *i.e.* il existe $y \in A$ tel que $x = x^2y$. on aimerait maintenant simplifier par x. il suffirait pour cela que x soit simplifiable, *i.e.* qu'il ne soit pas un diviseur de zéro.

Or par hypothèse, l'idéal $\{0\}$ est premier, ce qui se traduit par le fait que A n'admette pas de diviseur de zéro, d'où le résultat.

Correction de l'exercice 465 – *Corps algébriquement clos* 5

Soit K un corps fini. Le polynôme non constant $\prod_{x\in K}(X-x)+1$ n'a pas de racine dans K, ce corps n'est donc pas algébriquement clos.

Le résultat est établi par contraposition.

5. Anneaux de congruence

Correction de l'exercice 466 – *Sommes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$* 2

Que cherche-t-on à montrer ? Que, si on pose $S_k = \sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k$, alors $S_k^2 = -S_k$. Or

$$S_k^2 = \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k\right)\left(\sum_{y\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} y^k\right) = \sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}\sum_{y\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (xy)^k = (p-1)S_k$$

car, si $x = 0$, alors $\sum_{y\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(xy)^k = 0$, et, si $x \neq 0$, alors $y \mapsto xy$ est une permutation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Le résultat s'ensuit puisque $(p-1)S_k = \overline{p-1}\, S_k = -S_k$.

Pour déterminer si on obtient 0 ou 1, le petit théorème de Fermat montre que (S_k) est $p-1$-périodique et que $S_{p-1} = -1$.

Si k est premier avec $p-1$, alors on peut montrer que $x \mapsto x^k$ est une permutation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et donc que $S_k = S_1$.

Or pour tout $y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, non nul, $yS_1 = S_1$, donc si $p \geqslant 3$, alors $S_1 = 0$ (en prenant $y \neq 1$). Si $p = 2$, $S_1 = 1 = -1$.

Remarque : on aurait aussi pu utiliser une matrice compagnon.

Correction de l'exercice 467 – *Banque CCP 2016 66* 0

Correction de l'exercice 468 – *Groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (Mines MP 08)* 0

Correction de l'exercice 469 – *Isomorphie entre groupes d'inversibles (Mines MP 07)* 2

Correction de l'exercice 470 – *Nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (Mines MP 2015, Centrale MP 2015)* 3I

1 L'application carré est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, de noyau $\{\pm 1\}$, il y a donc $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 471 – *Points sur le « cercle unité » dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$* 3

Correction de l'exercice 472 – *Suite modulaire périodique (Centrale MP 2015)* 3

6. Algèbres

Correction de l'exercice 473 – *Sous-algèbres, ou pas* 0

Correction de l'exercice 474 – *Éléments inversibles d'une sous-algèbre de dimension finie* 1I

Correction de l'exercice 475 – *Quelles sont les $\mathbb{R}$-algèbres commutatives intègres de dimension finie ? (Centrale MP 2015)* 4

Correction de l'exercice 476 – *Quel est le groupe des automorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}(X)$?* 4

Ce sont les $P \mapsto P(aX+b)$, où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 477 – $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *sont-ils isomorphes en tant qu'algèbres ?* 4

7. Polynômes

7.1. Division euclidienne

Correction de l'exercice 478 – *Calculs de restes* 2

Correction de l'exercice 479 – *Bézout effectif* 0

Correction de l'exercice 480 – *Division euclidienne (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 481 – *Algorithme d'Euclide étendu* 0

Correction de l'exercice 482 – *Couple de Bézout optimal* 3I

7.2. Aspects linéaires

Correction de l'exercice 483 – *Exemple de base polynomiale* 1

Correction de l'exercice 484 – *Familles de* $\mathbb{R}_3[X]$ (TPE PC 08) 0

Correction de l'exercice 485 – *Un automorphisme de* $\mathbb{R}[X]$ (TPE PC 08) 0

Correction de l'exercice 486 – *Un opérateur sur les polynômes* 1

Correction de l'exercice 487 – *Bases d'espaces polynomiaux* 2

Correction de l'exercice 488 – *(Centrale MP) Sous-espace de* $\mathbb{R}_n[X]$ 0

Correction de l'exercice 489 – *Une base de* $\mathbb{R}_n[X]$*, dans laquelle on exprime la base canonique* 0

7.3. Multiplicité d'une racine

Correction de l'exercice 490 – *Banque CCP 2016 85* 0

Correction de l'exercice 491 – *Multiplicité de racines* 2

7.4. Polynôme scindé, scindé à racines simples

Correction de l'exercice 492 – *Polynômes scindés* 1

Correction de l'exercice 493 – *Polynômes scindés* 3D

Correction de l'exercice 494 – *ENSAM 2015* 2

7.5. Polynômes irréductibles

Correction de l'exercice 495 – *Décomposition en produit d'irréductibles* 2

Correction de l'exercice 496 – *Polynôme irréductible sur* $\mathbb{Q}$ 3D

7.6. Relation coefficients-racines

Correction de l'exercice 497 – *Relations coefficients-racines* 2

Correction de l'exercice 498 – *(Mines MP 08) Relations coefficients-racines* 3

Correction de l'exercice 499 – *Une curiosité polynomiale (Centrale PSI 10)* 3

On utilise les relations coefficients racines : soit P le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x, y et z :

$$P = X^3 + \sigma_2 X - \sigma_3,$$

où $\sigma_2 = xy + xz + yz$ et $\sigma_3 = xyz$ (et $\sigma_1 = x + y + z = 0$). On a $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2\sigma_2$.

Pour exprimer $x^3 + y^3 + z^3$ et $x^5 + y^5 + z^5$ en fonction de σ_2 et σ_3, on calcule les restes de X^3 et X^5 par P. On trouve respectivement $-\sigma_2 X + \sigma_3$ et $\sigma_3 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_2\sigma_3$, d'où, en évaluant en x, y et z puis en sommant :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3\sigma_3 \quad \text{et} \quad x^5 + y^5 + z^5 = -2\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_2\sigma_3 = -5\sigma_2\sigma_3,$$

d'où le résultat annoncé.

7.7. Localisation des racines

Correction de l'exercice 500 – *Théorème de Gauss-Lucas* 1

Correction de l'exercice 501 – *Localisation des racines* 2

Correction de l'exercice 502 – *Polynôme scindé en prenant les parties réelles des coefficients* 3

7.8. Divers

Correction de l'exercice 503 – *Centrale MP 2015* 3

Correction de l'exercice 504 – *Développement eulérien du sinus (Mines MP 2015)* 1

Correction de l'exercice 505 – *Petites Mines MP 2015* 3

Correction de l'exercice 506 – *Centrale MP 2015* 3D

Correction de l'exercice 507 – *Équation d'inconnue polynomiale* 3

Correction de l'exercice 508 – *D'un polynôme positif à un autre (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 509 – *Polynôme prenant aux entiers des valeurs entières* 4

Correction de l'exercice 510 – *Polynômes cyclotomiques (X MP 07)* 3DC

Correction de l'exercice 511 – *Un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré 3* 2

1 Comme X^3-2 est de degré 3, il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si il n'a pas de racine rationnelle, ce que l'on vérifie aisément.

Attention ! $(X^2+1)^2$ est sans racine réelle, mais n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$.

2 A est clairement une partie de $\mathbb{C}$, comprenant 1, stable par différence.

De plus, si P est un polynôme à coefficients rationnels, alors $P(\alpha) \in A$: en effet, il suffit pour l'observer d'effectuer la division euclidienne de P par X^3-2, puis d'évaluer la relation obtenue en α (on rappelle que le reste est également à coefficients rationnels).

Cela permet de montrer que A est stable par produit.

Enfin, soit $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a+b\alpha+c\alpha^2 \neq 0$. En particulier, $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$. D'après la question précédente, X^3-2 et $a+bX+cX^2$ sont premiers entre eux. En évaluant une relation de Bézout entre ces polynômes en α, on constate que $a+b\alpha+c\alpha^2$ est inversible dans A.

A est bien un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 512 – *Irrationnalité de π* 1

Correction de l'exercice 513 – *Une curiosité polynomiale* 3D

7.9. Interpolation de Lagrange

Correction de l'exercice 514 – *Banque CCP 2016 87* 0

Correction de l'exercice 515 – *Banque CCP 2016 90* 2

Correction de l'exercice 516 – *Prolongement de l'interpolation de Lagrange* 3

Correction de l'exercice 517 – *Polynôme complexe laissant stable l'ensemble des rationnels* (Mines PSI 08) 3

Spoiler : interpolation de Lagrange.

8. Fractions rationnelles

Correction de l'exercice 518 – *Décomposition en éléments simples par développement limité* 2T

Correction de l'exercice 519 – *Décompositions en éléments simples* 2

Correction de l'exercice 520 – *Fraction rationnelle à coefficients rationnels* (Centrale MP 06) 3

Correction de l'exercice 521 – *Sommes classiques et fractions rationnelles* 3T

Correction de l'exercice 522 – *Le théorème de Gauss-Lucas (Centrale MP 06)* 1

Correction de l'exercice 523 – *Autour de la dérivée logarithmique* 3D

Correction de l'exercice 524 – *Utilisation de la dérivée logarithmique* 2

Correction de l'exercice 525 – *Identité polynomiale* 3

CHAPITRE XL

Fonctions numériques, convexité (corrections)

Par défaut, toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

1. Propriétés de fonctions

1.1. Monotonie

Correction de l'exercice 526 – *Par quelles opérations la propriété de croissance est-elle stable ?* 4

Correction de l'exercice 527 – *Point fixe et croissance* 3D

Considérer $\sup\{x \in [0,1], f(x) \geqslant x\}$.

Correction de l'exercice 528 – *Une fonction minimale en un point est-elle croissante au voisinage à droite de ce point ?* 4

Correction de l'exercice 529 – *Étude d'un comportement asymptotique* 3

1.2. Périodicité

Correction de l'exercice 530 – *Groupe des périodes* 0I

Correction de l'exercice 531 – *Par quelles opérations l'ensemble des fonctions périodiques est-il stable ?* 4

Correction de l'exercice 532 – *Fonctions périodiques et limite en l'infini* 0

Soit f une telle fonction, l sa limite en $+\infty$, et $T > 0$ une de ses périodes.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$: les suites $(x + nT)$ et $(y + nT)$ tendent vers $+\infty$, donc les suites images par f tendent vers l. Par ailleurs, ces suites $(f(x + nT))$ et $(f(y + nT))$ sont constantes de valeurs respectives $f(x)$ et $f(y)$. par unicité de la limite, $f(x) = l = f(y)$: f est constante.

Réciproquement, les fonctions constantes vérifient clairement ces propriétés.

Correction de l'exercice 533 – *Groupe des périodes de la dérivée* 2

Soit $T \in \mathbb{R}$.

Bien sûr, si f est T-périodique, alors sa dérivée l'est également.

Réciproquement, soit T une période de f'. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x + T) - f(x)$ est de dérivée nulle, donc constante. Soit α sa valeur.

On vérifie par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(nT) - f(0) = n\alpha$$

Supposer $\alpha \neq 0$ montrerait que f n'est pas bornée, ce qui est absurde puisque f est T'-périodique et continue, donc son image – qui est aussi celle du segment $[0, T']$– est bornée.

Ainsi, $\alpha = 0$, et f est T-périodique.

Correction de l'exercice 534 – *Fonction continue périodique non constante* 2

1 Si le groupe des périodes G de f était dense, alors f serait constante sur une partie dense de $\mathbb{R}$, et donc constante puisqu'en outre continue. Ainsi, G est discret, et f admet une plus petite période strictement positive.

2 Prendre l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

3 f est bornée, car continue et périodique.

La fonction f est continue sur le segment $[0, T]$, donc elle est y est bornée, et atteint ses bornes, mettons supérieure en α et inférieure en β. Supposons par exemple $\alpha \leqslant \beta$. On a $0 \leqslant \beta-\alpha \leqslant T/2$ ou $0 \leqslant \alpha+T-\beta \leqslant T/2$, donc dans tous les cas, il existe u (α dans le premier cas, β dans le second) tel que $f(\mathbb{R}) = f([u, u+T/2])$.

Correction de l'exercice 535 – *Fonction continue ayant* 1 *et* $\sqrt{3}$ *pour périodes (X PC 10)* 3

f est constante sur $\mathbb{Z}+\sqrt{3}\mathbb{Z}$. Or ce sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un réel a (car $\sqrt{3}$ est irrationnel), donc il est dense dans $\mathbb{R}$: f est continue et constante sur une partie dense, elle est donc constante.

1.3. Fonctions lipschitziennes

Correction de l'exercice 536 – *Par quelles opérations le caractère lipschitzien est-il stable ?* 4I

Correction de l'exercice 537 – *Mines PSI 06* 3

Le sens direct est facile (pour x, y deux points fixés de I, distinguer selon les signes de $f(x)$ et de $f(y)$. Pour la réciproque, supposons f^+ et f^- k-lipschitziennes, et soit $x, y \in I$, $x < y$. Le seul cas intéressant est celui où $f(x)f(y) < 0$, par exemple $f(x) < 0 < f(y)$. Par continuité de l'application lipschitzienne f, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0$. Par hypothèse, $\left|\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right| \leqslant k$ et $\left|\frac{f(y)-f(z)}{y-z}\right| \leqslant k$ (car $f(z) = f^+(z) = f^-(z)$). On a donc $0 \leqslant (f(z)-f(x)) \leqslant k(z-x)$ et $0 \leqslant (f(y)-f(z)) \leqslant k(y-z)|$, d'où $0 \leqslant (f(y)-f(x)) \leqslant k(y-x)$ en sommant, puis le résultat.

Correction de l'exercice 538 – *(ENS MP 10)* 3D

2. Limite, continuité

2.1. Inégalités, étude de limites

Correction de l'exercice 539 – *Condition suffisante pour qu'une fonction ait une limite finie en l'infini* 3T

Correction de l'exercice 540 – *Une limite (X PC 10)* 2

Correction de l'exercice 541 – *Une inégalité (X PC 10)* 3

Correction de l'exercice 542 – *Inégalité (X PC 10)* 3

2.2. Continuité

Correction de l'exercice 543 – *Continuité du max et du min* 1

Remarquer que $\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$ et $\inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$

Correction de l'exercice 544 – *Prolongements par continuité* 0

Correction de l'exercice 545 – *Continuité d'une fonction définie par une borne supérieure* 3

Correction de l'exercice 546 – *Une condition suffisante de continuité inattendue* 3D

2.3. Utilisation de la continuité

Correction de l'exercice 547 – *Points fixes* 0

1 TVI à $g\ : x \in [a, b] \mapsto f(x) - x$.
2 La fonction $g\ : x \mapsto x - f(x)$ est strictement croissante, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$.

Correction de l'exercice 548 – *Points fixes* 3

1 Se placer en des points où f prend respectivement son maximum et son minimum.

Correction de l'exercice 549 – *Une valeur moyenne est atteinte* 0

Correction de l'exercice 550 – *Fonction continue de valeur absolue constante* 0

Correction de l'exercice 551 – *Enfin une application concrète* 0

Correction de l'exercice 552 – *Contrôle sur un segment* 0

Correction de l'exercice 553 – *Minoration, majoration, encadrement* 2

Correction de l'exercice 554 – *Utilisation du TVI* 2

Correction de l'exercice 555 – *Il existe deux points sur l'équateur où la température est la même (X PC 10)* 2

On ne nuit pas à la généralité du raisonnement en supposant le cercle étudié centré en $(0, 0)$. Soit R son rayon. Considérons l'application

$$g\ : \theta \mapsto f(R\cos(\theta), R\sin(\theta)) - f(-R\cos(\theta), -R\sin(\theta)).$$

$g(0)$ et $g(\pi)$ sont opposés, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule, ce qui montre que la restriction de f à ce cercle n'est pas injective (plus précisément, il existe deux points diamétralement ayant même image par f).

Correction de l'exercice 556 – *Existence d'un point où deux fonctions coïncident* 2

Correction de l'exercice 557 – *Valeur atteinte une unique fois par une fonction continue* 2

2.4. Propriétés de fonctions continues

Correction de l'exercice 558 – *Cardinal de l'image d'un intervalle par une fonction continue* 0

Correction de l'exercice 559 – *Un segment inclus dans l'image continue d'un segment est-il l'image d'un segment ?* 4

Correction de l'exercice 560 – *Ensemble de valeurs d'adhérence à l'infini* 2

Correction de l'exercice 561 – *Fonction continue sans extremum local* 3

Correction de l'exercice 562 – *Une partie bornée n'est pas réversible (Centrale PSI 10)* 3

Supposons qu'une telle fonction f existe : comme A est bornée, on peut l'inclure dans un segment, donc son image par l'application continue f est également incluse dans un segment : $f(A)$ et $f(\mathbb{R} \setminus A)$ sont bornées, donc f est bornée : soit $[m, M]$ un segment contenant l'image de f. On a $f(m) \geqslant m$ et $f(M) \leqslant M$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à $f - \mathrm{Id}$), f admet un point fixe c. Supposer $c \in A$ conduit à

$c = f(c) \in \mathbb{R} \setminus A$, ce qui est absurde. De même, supposer $c \notin A$ est absurde : il ne peut exister de telle fonction f.

Correction de l'exercice 563 – *Fonction continue passant d'un rationnel à un irrationnel, et réciproquement* 5

Correction de l'exercice 564 – *Bijectivité d'une fonction solution d'une équation fonctionnelle* 3D

2.5. Lieu de (dis)continuité

Correction de l'exercice 565 – *Que dire du lieu de dicontinuité d'une fonction quelconque ?* 4

Correction de l'exercice 566 – *Que dire du lieu de discontinuité d'une fonction monotone ?* 4DI

Correction de l'exercice 567 – *Points de discontinuité d'une fonction réglée* 3DI

Correction de l'exercice 568 – *Existe-t-il une permutation de* $[0, 1]$ *discontinue en tout point ?* 4

Correction de l'exercice 569 – *Lieu de continuité original* 3

3. Dérivée

3.1. Dérivabilité, calcul de dérivée

Correction de l'exercice 570 – *Dérivation, dérivabilité* 2

1 Notons f cette fonction, définie sur $\mathbb{R}_+$.
2 $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{\sqrt{x}^2}{2} + \mathrm{o}(\sqrt{x}^2) = 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$, donc la fonction considérée est bien dérivable en 0.
3 $g(x) = \mathrm{o}(x)$ (en 0), donc g est prolongeable en $\tilde{g}$ continue et dérivable en 0.
On vérifie que $\tilde{g}'$ n'a pas de limite en 0.

Correction de l'exercice 571 – *Prolongement dérivable* 2

Un simple développement limité donne $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0.

Correction de l'exercice 572 – *Banque CCP 2016 56* 2

3.2. Utilisation de la dérivation

Correction de l'exercice 573 – *Limite d'une suite définie par une fonction dérivable en 0* 3

Correction de l'exercice 574 – *D'une inégalité entre fonctions à une inégalité entre réels* 2

Correction de l'exercice 575 – *(ENS PC 10)* 3

Correction de l'exercice 576 – *Majoration du nombre d'annulations d'une fonction* 3

Correction de l'exercice 577 – *Cesàro intégral sans intégrale* 3I

Correction de l'exercice 578 – *Fonction à dérivée logarithmique bornée (X PC 09)* 2

3.3. Autour de la définition du nombre dérivé

Correction de l'exercice 579 – *Une caractérisation de la dérivabilité* 3

Correction de l'exercice 580 – *Taux d'accroissement à bornes variables (Centrale PSI 09)* 3I

3.4. Propriété de la dérivée

Correction de l'exercice 581 – *Effets de la dérivation* 0

Correction de l'exercice 582 – *Dérivée et comportement asymptotique* 2

Correction de l'exercice 583 – *Signe de la dérivée* 2

Correction de l'exercice 584 – *À quel point la stricte monotonie empêche l'annulation de la dérivée ?* 4

Correction de l'exercice 585 – *Une fonction de dérivée strictement positive en un point est-elle croisante au voisinage de ce point ?* 4

Correction de l'exercice 586 – *Condition suffisante d'annulation de la dérivée* 2

Correction de l'exercice 587 – *Théorème de Darboux* 3CDI

Première méthode Traiter d'abord le cas où il existe a et b dans I, où $a < b$, tels que $f'(a)f'(b) > 0$, et montrer que f' s'annule (montrer que f présente un extremum sur $[a, b]$ en un point intérieur à $[a, b]$).

Deuxième méthode Montrer que l'ensemble τ des taux d'accroissement de f est un intervalle. Pour faire un lien entre cet ensemble et $f'(I)$, utiliser le TAF et la définition de la dérivée en un point.

Remarque : : Pour montrer que τ est un intervalle, on pourra utiliser la notion de connexité par arcs.

3.5. Lieu de dérivabilité

Correction de l'exercice 588 – *À quel point une fonction continue peut-elle ne pas être dérivable ?* 4

3.6. Dérivations successives

Correction de l'exercice 589 – *Banque CCP 2016 3* 0

Correction de l'exercice 590 – *Dérivées successives en* 0 3

Exploiter la formule de Taylor-Young à rebours.

Correction de l'exercice 591 – *Mines MP 2015* 3

Correction de l'exercice 592 – *Étude d'une fonction s'annulant au moins n fois* 2

1 Pour x fixé, introduire A tel que $f(x) = A(x-a_1)\dots(x-a_n)$ puis considérer $t \mapsto f(t)-A(t-a_1)\dots(t-a_n)$.

Correction de l'exercice 593 – *Quelles sont les séries de Taylor réalisables ? (Centrale MP 2015)* 4D

3.7. Théorème de Rolle, accroissements finis

Correction de l'exercice 594 – *Rolle généralisé* 1

Correction de l'exercice 595 – *Rolle itéré* 1

1 Rolle itéré appliqué à des segments d'intérieurs disjoints.

2 Récurrence sur n sans fixer la fonction f dans l'hypothèse de récurrence.

3 Récurrence sur n.

4 Cf. première question.

5 Cf. question précédente (on peut d'ailleurs être plus fin dans le cas où n est impair).

6 Considérer n points $x_1, \dots, x_n$ de $[0, T[$ où f s'annule, où $x_1 < \dots < x_n$, et introduire $x_{n+1} \overset{def}{=} x_1 + T$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[x_1, x_{n+1}[$, et conclure.

7 Si f est une telle fonction, et si $n \overset{def}{=} \deg(f) \geqslant 1$, alors ce lieu de coïncidence est borné, inclus dans un segment $[a, b]$. De plus, toutes les dérivées de f coïncident en une infinité de points de $[a, b]$ avec sin, $-\sin$, cos, ou $-\cos$.

En dérivant plus de n fois, la fonction sinus ou cosinus s'annule une infinité de fois sur $[a, b]$, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 596 – *Une hypothèse et un dessin à interpréter* 3

Correction de l'exercice 597 – *Applications du théorème de Rolle* 2

1 On peut utiliser la technique du rétrécissement, ou montrer que f n'est pas injective (par l'absurde, si elle l'était alors elle serait strictement monotone, puisqu'elle est en outre continue).

2 Comme la question précédente.

3 Traduire algébriquement la conclusion, puis introduire la bonne fonction auxiliaire.

Correction de l'exercice 598 – *Banque CCP 2016 4* 0

Correction de l'exercice 599 – *(Mines MP 06)* 3

3.8. Uniforme continuité

Correction de l'exercice 600 – *Exemple d'uniforme continuité* 0

Correction de l'exercice 601 – *Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité* 1I

1 Soit (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de I telles que $\lim_n (y_n - x_n) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit η un module d'uniforme continuité pour f et ε. Il existe un rang à partir duquel $|y_n - x_n| \leqslant \eta$, et donc à partir duquel $|f(y_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $\lim_n (f(y_n) - f(x_n)) = 0$.

2 La réciproque est vraie : montrer la contraposée. Nier formellement l'uniforme continuité, et procéder comme dans le théorème de Heine.

3 Les suites données par $y_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $x_n = \sqrt{2n\pi}$ vérifient $\lim_n y_n - x_n = 0$, mais $\left(\sin(y_n^2) - \sin(x_n^2)\right)$ est constante de valeur 1 : $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 602 – *Condition suffisante d'uniforme continuité* 2

Correction de l'exercice 603 – *Uniforme continuité et limite finie en un point adhérent* 3I

1 On peut utiliser la technique du rétrécissement, ou prendre un segment et un voisinage de b qui se chevauchent et dont la réunion vaut $[a, b[$.

Remarque : le cas b fini provient immédiatement du théorème de Heine.

2 Considérer des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, et les joindre grâce à un segment, ou utiliser la technique du rétrécissement.

Correction de l'exercice 604 – *Encadrement d'une fonction uniformément continue (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 605 – *Uniforme continuité et périodicité* 2

Correction de l'exercice 606 – *Uniforme continuité et limite en l'infini* 3

Correction de l'exercice 607 – *Comment caractériser les fonctions uniformément continues sur un intervalle borné ?* 4I

1

2

i Fixer ε strictement positif arbitrairement, à 1 par exemple, prendre un module d'uniforme continuité associé η, puis $a \in [0,1[$ tel que $|1-a| \leqslant \eta$: f est bornée car continue sur le segment $[0,a]$, et majorée en valeur absolue par $|f(a)|+1$ sur $[a,1[$, donc bornée sur $[0,1[$.

On peut même montrer que toute fonction uniformément est encadrée par des fonctions affines, et qu'en réalité, f admet une limite finie en 1 (vu en DM).

Correction de l'exercice 608 – *Comportement asymptotique d'une fonction uniformément continue* 3D

4. Équations fonctionnelles

Correction de l'exercice 609 – *Banque CCP 2016 43* 0

Correction de l'exercice 610 – *Équations fonctionnelles* 0

1 Soit f une telle fonction. Soit $x_0 \in [0,1[$. On vérifie que la suite $(f(x_0^{2^n}))$ est d'une part constante de valeur $f(x_0)$, et tend d'autre part vers $f(0)$ par continuité de f en 0.

f est donc constante sur $[0,1[$, puis sur $[0,1]$ par continuité en 1.

Réciproquement, les fonctions constantes conviennent clairement.

2 Soit f une telle fonction. Posons $\alpha = f(1)$. On sait que pour tout rationnel x, $f(x) = \alpha x$. Les fonctions f et $x \mapsto \alpha x$ coïncident donc sur $\mathbb{Q}$, qui est dense dans $\mathbb{R}$. Étant en outre continues sur $\mathbb{R}$, elles sont égales, donc f est linéaire.

Réciproquement, les fonctions linéaires conviennent évidemment.

Correction de l'exercice 611 – *Équation fonctionnelle classique* 1

Correction de l'exercice 612 – *Mines MP 2015* 3

Correction de l'exercice 613 – *Équations fonctionnelles* 3

1 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

2 Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ admettant pour périodes 1 et $\sqrt{2}$.

3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et involutive (*i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$). Montrer que f est l'application identique sur $\mathbb{R}$.

4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax+b) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a est fixé différent de 1 et -1, et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

5 Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\lim\limits_{0} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et : $\quad \forall x, y > 0, \quad f(xf(y)) = yf(x)$.

Indication : étudier les points fixes de f.

Correction de l'exercice 614 – *Équations fonctionnelles et dérivation* 2

Correction de l'exercice 615 – *Équation fonctionnelle d'un autre siècle (X 98)* 3

Correction de l'exercice 616 – *Équation fonctionnelle* 3

Correction de l'exercice 617 – *Équation fonctionnelle* 3

Correction de l'exercice 618 – *Une équation fonctionnelle (X PC 10)* 3

Correction de l'exercice 619 – *X PC 10* 3

L'identité et les fonctions constantes conviennent.

Soit f une fonction non constante vérifiant cette propriété. Son image $J = f(\mathbb{R})$ est un intervalle (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), non réduit à un point, et sur lequel f coïncide avec l'identité (d'après la relation qu'elle vérifie).

Supposons J majoré, et soit M sa borne supérieure. Par continuité à gauche de f en M, $f(M) = M$, et sa dérivée à gauche vaut 1. Or, M étant le maximum de f, sa dérivée à droite est négative ou nulle, ce qui contredit la dérivabilité de f en M : J n'est pas majoré, ni, de, même, minoré, donc $J = \mathbb{R}$, puis $f = \mathrm{Id}$.

Correction de l'exercice 620 – *X PC 10* 3

Correction de l'exercice 621 – *(Centrale MP 10)* 3

Correction de l'exercice 622 – *X MP 06* 3

Soit f une telle fonction. Si $f(0) = 0$, alors, en prenant $y = 0$ dans la relation fonctionnelle (désignée $\mathcal{E}$ dans la suite), on constate que f est identiquement nulle. Supposons désormais $f(0) \neq 0$. En prenant $x = y = 0$ dans $\mathcal{E}$, on obtient $f(0) = 1$. En prenant $x = 0$, on constate que f est paire.

Par continuité de f, il existe $c > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $[0, c]$.

Supposons $f(c) < 1$. On écrit $f(c) = \cos(\theta)$, où $\theta \in]0, \pi/2[$ ($\theta = \arccos(f(c))$). Notons $\omega = \frac{\theta}{c}$, de sorte que $f(c) = \cos(\omega c)$. En prenant $x = y$ dans $\mathcal{E}$, on a, pour tout réel x :

$$f(2x) + 1 = 2f(x)^2.$$

En prenant $x = c/2$, et sachant que $f(c/2) > 0$ (par choix de c), on a

$$f(c/2) = \sqrt{f(c) + 1}/2 = \cos(\omega c/2).$$

Plus généralement, par une récurrence immédiate,

$$f(c/2^n) = \cos(\omega c/2^n).$$

Une nouvelle récurrence (et la parité de f) permet de montrer que

$$f(kc/2^n) = \cos(\omega kc/2^n),$$

pour tout $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Par continuité de f, et densité de $\{kc/2^n, (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$, on a, pour tout réel x :

$$f(x) = \cos(\omega x).$$

Dans le cas où $f(c) \geqslant 1$, on vérifie comme ci-dessus l'existence de $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{ch}(\omega x)$.

Réciproquement, ces fonctions conviennent.

Trouver les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)\, f(y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Correction de l'exercice 623 – *X PC 10* 3

Correction de l'exercice 624 – *Centrale MP 10* 3

Correction de l'exercice 625 – *Fonction convexe périodique* 0

Une telle fonction est nécessairement constante, d'après le lemme des trois pentes par exemple.

Correction de l'exercice 626 – *Fonction convexe bornée* 0

1 Raisonner par l'absurde et utiliser le lemme des trois pentes.

2 Idem.

Correction de l'exercice 627 – *Comparaison des moyennes harmonique, géométrique, arithmétique* 1

Correction de l'exercice 628 – *Fonctions convexes dont la somme est affine* 0

Correction de l'exercice 629 – *Sup de fonctions convexes* 2

Correction de l'exercice 630 – *Fonction convexe et bornée (X PC 10)* 2

Correction de l'exercice 631 – *Quelle régularité espérer pour une fonction convexe ?* 4

Correction de l'exercice 632 – *Caractérisation de convexité par une autre fonction* 3

Correction de l'exercice 633 – *Étude asymptotique générale d'une fonction convexe en* $+\infty$ 3

Correction de l'exercice 634 – *Convexité et bijection réciproque (Centrale PC 09)* 3

Correction de l'exercice 635 – *Condition suffisante de changement de concavité (X MP 09)* 3

Correction de l'exercice 636 – *Plus grande fonction convexe inférieure à une fonction positive (ENS MP 10)* 3

Correction de l'exercice 637 – *Détermination du maximum d'un produit avec contrainte sur la somme (ENS PC 10)* 3

Correction de l'exercice 638 – *Nature d'une série par concavité (Centrale PC 10)* 3

Correction de l'exercice 639 – *Inégalité de Hölder pour un ensemble fini* 3C

Correction de l'exercice 640 – *Convexité et positivité d'une intégrale* 3C

Correction de l'exercice 641 – *Décroissance d'une suite de moyennes pour une fonction convexe* 3

CHAPITRE XLI

Espaces vectoriels normés (corrections)

1. Normes

Correction de l'exercice 642 – *Normes sur un espace de fonctions continues et périodiques*	2

Correction de l'exercice 643 – *Exemple de norme*	2

Correction de l'exercice 644 – *Normes d'algèbres*	1

Correction de l'exercice 645 – *Banque CCP 2016 37*	3

Correction de l'exercice 646 – *Banque CCP 2016 38*	2

Correction de l'exercice 647 – *Comparaison de normes*	2

Correction de l'exercice 648 – *Valeurs absolues ultramétriques sur $\mathbb{R}$ (Centrale MP 2015)*	5

Correction de l'exercice 649 – *Norme sur un espace de fonctions*	3

1 Seul l'axiome de séparation pose un problème. La condition nécessaire et suffisante est que le lieu d'annulation de g soit d'intérieur vide.

2 Bien sûr, $N \leqslant N_\infty(g)N_\infty$. Dans l'autre sens, $|g|$ est minorée par un réel strictement positif (son minimum).

La réciproque est vraie. On montre la contraposée. Il suffit, en un point a où g s'annule, de construire une fonction f_n minorée par n sur un voisinage de a, telle que $N_\infty(f_n) \leqslant 1$. Le choix $1/(|g|+1/n)$ devrait également convenir.

Correction de l'exercice 650 – *Norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par des fonctions*	0

N est la composée de l'application

$$\varphi \ : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$$

et de la norme infinie : c'est donc une semi-norme, et c'est une norme si et seulement si φ est injective, *i.e.* $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Correction de l'exercice 651 – *Comparaison de normes sur les polynômes*	0

1 Standard, la plus grande difficulté étant de vérifier la séparation (grâce à la formule de Taylor polynomiale).

2 Ces normes ne sont pas équivalentes, car on peut trouver une suite de polynômes qui est bornée pour l'une des normes mais pas pour l'autre.

Correction de l'exercice 652 – *Somme de distances à des sous-espaces*	0

Le résultat à établir ressemble à une équivalence de normes. Comme on travaille en dimension finie, on constate que la véritable question est de savoir si

$$N' \ : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} d(x, F_i)$$

est une norme.

C'est une fonction de E dans $\mathbb{R}_+$.

On vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire (travail assez fin sur la notion de borne inférieure si on n'admet pas que les distances sont atteintes).

La séparation provient du résultat admis que chaque F_i soit fermé.

Correction de l'exercice 653 – *Comparaison de normes, toujours* 1

Comme $f \mapsto 3f + f'$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, N est une semi-norme. En évoquant un problème de Cauchy, on montre que c'est aussi une norme.

La seconde question incite à comparer $N_\infty(f)$ et $N_\infty(g)$, où $3f+f' = g$. En résolvant l'équation différentielle $3y' + y = g$, on exprime f en fonction de g et on conclut par des inégalités intégrales classiques.

Correction de l'exercice 654 – *Équivalence de normes sur des espaces de fonctions* 1

1 Standard (la partie la plus difficile est la séparation de N, que l'on établit par la considération d'un problème de Cauchy.

2 Trouver une suite classique de fonctions bornée pour N_∞ mais pas pour N et N_1.

3 Bien sûr, $N \leqslant N_1$.

Une inégalité de la forme $N_1 \leqslant \alpha N$ est plus difficile à obtenir. On pourra s'inspirer de la méthode de l'exercice 653, et éventuellement considérer $h = f + if'$ de sorte que $h - ih' = f + f''$.

Remarque : on peut utiliser, si on la connaît, la méthode de variation des constantes pour l'équation $y''+y = g$.

Correction de l'exercice 655 – *Comparaison de normes* 1

1 La positivité, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont faciles à montrer. Pour l'axiome de séparation, il suffit de penser à l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy.

2 Pour tout $t \in [0,1]$, on observe que :

$$f(t) = e^t \int_0^t \int_0^x (f(u) + 2f'(u) + f''(u))e^u \mathrm{d}x,$$

de sorte que

$$|f(t)| \leqslant e^t \int_0^t \int_0^x \|f + 2f' + f''\| \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e}{2} N(f).$$

Correction de l'exercice 656 – *Comment caractériser les normes euclidiennes parmi les normes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?* 4

Correction de l'exercice 657 – *D'autres équivalences de normes* 3

Correction de l'exercice 658 – *Pseudo-normes multiplicatives* 3

1 Une telle norme doit être invariante par conjugaison, et n'existe donc pas.

Remarque : on aurait aussi pu utiliser des matrices A et B telles que AB soit nul mais pas BA.

2

i La trace est linéaire et le module est une norme, donc la composée est une semi-norme.

ii Facile.

iii Commencer par regarder $N(E_{i,j})$ où $i \neq j$.

Vérifier que $N(E_{i,i} - E_{j,j})$ est nul pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.

Conclure.

Correction de l'exercice 659 – *Comparaison des normes infinie et euclidienne (Centrale PSI 10)* 3

Correction de l'exercice 660 – *En dimension finie, convergences simple et uniforme sont équivalentes* 2

Correction de l'exercice 661 – *Comparaison de deux normes sur un espace de fonctions continues* 2

Correction de l'exercice 662 – *Idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (Centrale MP 06)* 2

1 Soit $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k f^k$ une combinaison linéaire à résultat nul de $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$. f étant continue et non constante, son image est infinie, donc $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k$ a une infinité de racines : ce polynôme est nul, ainsi que ses coefficients $\lambda_0, \dot{;} \lambda_N$: $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

2 D'après la question précédente, la seule sous-algèbre unitaire de dimension finie de $\mathcal{C}(A)$ est celle constituée des fonctions constantes. Si on admet une sous-algèbre non unitaire, il faut rajouter $\{0\}$.

3 $\mathcal{I}_c$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}$, stable par multiplication par un élément quelconque de $\mathcal{A}$: c'est un idéal de $\mathcal{A}$.

Plus directement, c'est le noyau du morphisme d'anneaux d'évaluation en c.

4 Un idéal de la forme $\mathcal{I}_c$ est bien maximal : en effet, si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$ contenant strictement $\mathcal{I}_c$, alors il contient une certaine fonction f non nulle en c. Il contient également $g\ : x \mapsto |x-c|$. Il contient donc f^2+g^2, qui ne s'annule pas sur $[a,b]$, et qui est donc inversible : il comprend donc enfin $1_{\mathcal{A}}$, et vaut donc $\mathcal{A}$.

Réciproquement, soit $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$. Supposons qu'il ne soit pas de la forme précédente : en particulier, on peut trouver $f \in \mathcal{I}$, non nulle en a. On introduit :

$$\Omega = \{c \in]a,b], \exists g \in \mathcal{I}, g_{|[a,c]} \text{ ne s'annule pas}\}.$$

Ω est une partie convexe non vide de $]a,b]$ (on a écarté le cas sans intérêt où $a=b$). Notons c sa borne supérieure, et supposons $c<b$: par hypothèse, on peut trouver $h \in \mathcal{I}$ tel que $h(c) \neq 0$. De plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que h ne s'annule pas sur $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset]a,b[$. Enfin, puisque $c-\varepsilon \in \Omega$ il existe $g \in \mathcal{I}$, ne s'annulant pas sur $[a, c-\varepsilon]$. La considération de g^2+h^2 conduit à une absurdité sur la définition de c. On a nécessairement $c=b$, $\mathcal{I}$ contient un élément inversible, et vaut donc $\mathcal{A}$, ce qui est absurde.

Remarque : la propriété (hors-programme) de Borel-Lebesgue pour les compacts simplifie la dernière partie de cette solution.

Correction de l'exercice 663 – *Valeurs d'adhérence de (u_n) lorsque $u_{n+1}-u_n$ tend vers 0 (X MP 10)* 2

Correction de l'exercice 664 – *Une fonction polynomiale à une indéterminée est fermée (Mines MP 10)* 3

Correction de l'exercice 665 – *Partie convexe dense (X MP 10)* 3D

Il suffit de montrer que $0_E \in C$ (pour un autre vecteur v, on applique ce qui précède à $C+v$).

On peut trouver une base $(u_1, \dots, u_n)$ d'éléments de E. On prend un vecteur u_{n+1} de E dont toutes les composantes dans cette base sont négatives. Le vecteur nul est combinaison linéaire de ces $n+1$ vecteurs, à coefficients positifs, donc 0_E appartient à l'enveloppe convexe de $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$.

Correction de l'exercice 666 – *Un cas particulier de Hahn-Banach (X MP 10)* 3D

Correction de l'exercice 667 – *Condition suffisante tordue pour être un disque (ENS MP 10)* 3D

Correction de l'exercice 668 – *Encore une version d'Hahn-Banach (ENS MP 10)* 3D

Correction de l'exercice 669 – *Toute isométrie est affine (ENS MP 10)* 3D

Correction de l'exercice 670 – *Endomorphismes conservant un compact dans $\mathbb{R}^n$* 3D

Correction de l'exercice 671 – *Recouvrement d'un compact par des pavés (X MP 12)* 3D

Il suffit de le montrer pour le pavé $[0,A]\times[0,B]$, où A,B sont des réels strictement positifs fixés.

Quitte à réordonner, on peut supposer (b_i) décroissante.

Comme $b_i \leqslant 1$,

$$\sum a_i \geqslant \sum a_i b_i = +\infty.$$

On partitionne $\mathbb{N}$ par paquets d'indices consécutifs minimaux $[\![i_n, i_{n+1}-1]\!]$ tels que

$$A \leqslant \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} a_i$$

On note que par minimalité de i_{n+1}, et puisque $a_{i_{n+1}-1} \leqslant 1$,

$$(*) \qquad \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} a_i < A+1$$

Pour n fixé, les pavés d'indices i_n à $i_{n+1}-1$ permettent donc de recouvrir $[0,A] \times [0, b_{i_{n+1}}]$ (par décroissance de (b_i)), en les posant sur l'axe des abscisses tout en les accolant.

Or, toujours par décroissance de (b_i), et d'après $(*)$

$$\sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} a_i b_i \leqslant (A+1) b_{i_n}$$

donc $\sum_n b_{i_n} = +\infty$, puisque

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i b_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=i_n}^{i_{n+1}-1} a_k b_k$$

On peut donc recouvrir $[0,A] \times [0,B]$.

2. Fermés, ouverts, voisinages

Correction de l'exercice 672 – *Banque CCP 2016 41* 0

Correction de l'exercice 673 – *Boules selon la norme* 0

Correction de l'exercice 674 – *Boules et sphères vides* 2

Correction de l'exercice 675 – *Centre d'une boule* 2

On peut retrouver le rayon d'une telle boule grâce à son diamètre.

Si on suppose qu'elle a deux centres distincts, on obtiendra une absurdité en trouvant des points de cette boule à distance strictement supérieure à son diamètre (il est conseillé de faire un dessin).

Correction de l'exercice 676 – *Diamètre d'une partie non vide bornée* 2

Correction de l'exercice 677 – *Inclusion d'une boule fermée dans une autre (Centrale MP 10)* 3

Correction de l'exercice 678 – *Sous-espace engendré par une partie d'intérieur non vide* 0

Faire un dessin.

Un sous-espace vectoriel strict de E est d'intérieur vide.

Correction de l'exercice 679 – *Sous-espace ouvert* 0

Si F est ouvert, alors il est égal à son intérieur. Comme F n'est pas vide, l'exercice précédent montre que $F = E$.

Remarque : bien sûr, la réciproque est vraie.

Correction de l'exercice 680 – *Topologie des hyperplans* 1

Soit H un hyperplan de E (un evn). Les seuls sous-espaces de E contenant H sont H et E. Si on montre que $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, l'exercice est terminé.

Cela se fait très bien séquentiellement.

Correction de l'exercice 681 – *Sous-espace d'intérieur non vide* 0

Correction de l'exercice 682 – *Séparation de fermés disjoints* 2

Correction de l'exercice 683 – *Les fermés à partir d'ouverts* 2

Correction de l'exercice 684 – *Hyperplan fermé ou dense selon la norme choisie* 2

Correction de l'exercice 685 – *Ouvert étoilé* 3

Correction de l'exercice 686 – *Un opérateur sur les espaces de fonctions* 3

Correction de l'exercice 687 – *Un fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$* 3

Correction de l'exercice 688 – *Boule fermée contenant une partie bornée donnée* 3D

Correction de l'exercice 689 – *Distance à une partie atteint en un unique point* 4

F doit être fermé (prendre un point de sa frontière). F doit être convexe. Finalement, F est un intervalle fermé (et la réciproque est vraie).

3. Intérieur, adhérence

Correction de l'exercice 690 – *Sur la frontière* 1I

Correction de l'exercice 691 – *Banque CCP 2016 34* 2

Correction de l'exercice 692 – *Banque CCP 2016 44* 2

Correction de l'exercice 693 – *Banque CCP 2016 45* 2

Correction de l'exercice 694 – *Distance à un sous-espace affine (Mines MP 2015)* 3

4. Continuité, uniforme continuité, fonctions lipschitziennes

4.1. Étude de continuité

Correction de l'exercice 695 – *Continuité du polynôme caractéristique* 1

Correction de l'exercice 696 – *Continuité de l'inverse matriciel* 1

Correction de l'exercice 697 – *Continuité de la distance à une partie* 1

Soit $x, y \in E$, $a \in A$. On a $\|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\| \leqslant \|x-y\| + d(y,A)$, donc en passant à la borne inférieure, et compte tenu de la symétrie des rôles joués par x et y :

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant \|x-y\| .$$

En particulier, l'application considérée est 1-lipschitzienne donc continue.

Correction de l'exercice 698 – *Application continue pour une norme, pas pour une autre* 3D

Correction de l'exercice 699 – *Condition suffisante de linéarité et continuité* 3

4.2. Utilisation de la continuité

Correction de l'exercice 700 – *Parties fermées ou ouvertes par préimage* 2

Correction de l'exercice 701 – *Le graphe d'une fonction continue est fermé* 2

Correction de l'exercice 702 – *Parties réversibles* 3D

4.3. Fonctions lipschitziennes

Correction de l'exercice 703 – *Par quelles opérations le caractère lipschitzien est-il stable ?* 4

Correction de l'exercice 704 – *Prolongement lipschitzien d'une fonction lipschitzienne* 3

Correction de l'exercice 705 – *Une fonction lipschitzienne* 3

4.4. Prolongation d'une identité par continuité et densité

Correction de l'exercice 706 – *Banque CCP 2016 35* 0

Correction de l'exercice 707 – *Prolongation d'une égalité par densité et continuité* 2

4.5. Continuité des applications linéaires

Correction de l'exercice 708 – *Banque CCP 2016 36* 0

Correction de l'exercice 709 – *Continuité (ou pas) de l'endomorphisme de dérivation* 2

Correction de l'exercice 710 – *Forme linéaire préservant la positivité* 2

Correction de l'exercice 711 – *Banque CCP 2016 39* 2

Correction de l'exercice 712 – *Banque CCP 2016 54* 2

Correction de l'exercice 713 – *Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire* 3D

Correction de l'exercice 714 – *Homéomorphisme, cas des applications linéaires* 3I

Correction de l'exercice 715 – *Mines MP 2015* 3

Correction de l'exercice 716 – *Mines MP 2015* 2

Correction de l'exercice 717 – *Étude de régularité selon la norme (Mines MP 2015)* 3

5. Compacité

Correction de l'exercice 718 – *Sommes de parties* 1

Correction de l'exercice 719 – *Le rang est localement croissant* 2

Correction de l'exercice 720 – *Distance entre deux compacts* 3

Correction de l'exercice 721 – *Injection continue ayant pour source un compact* 3

Correction de l'exercice 722 – *Distance à un fermé en dimension finie* 1

Correction de l'exercice 723 – *Théorème de Carathéodory (X MP 10)* 3D

6. Algèbres normées

Correction de l'exercice 724 – *Norme d'algèbre* 3

1 On peut prendre par exemple la norme infinie sur $[0,1]$ (exemple de cours).

2 Fixons une norme N' sur A. Comme $(a,b)\mapsto ab$ est bilinéaire en dimension finie, il existe $C>0$ tel que, pour tous $a,b\in A$:

$$N'(ab)\leqslant CN'(a)N'(b)$$

Un multiple de N' convient alors.

3

Correction de l'exercice 725 – *Banque CCP 2016 40* 1

Correction de l'exercice 726 – *Boule ne contenant que des éléments inversibles* 1

Soit $u\in E$, tel que $\|u\|<1$.
On est tenté d'écrire

$$(1_E-u)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$$

On justife d'abord la convergence de $\sum u^n$ (par absolue convergence), puis on vérifie que

$$(\sum_{n=0}^{+\infty}u^n)(1_E-u)=(1_E-u)(\sum_{n=0}^{+\infty}u^n)=1_E$$

7. Théorèmes de point fixe

Correction de l'exercice 727 – *Point fixe et compacité (Centrale PSI 10)* 1

Correction de l'exercice 728 – *Point fixe d'un opérateur linéaire sur un convexe compact* 3D

Correction de l'exercice 729 – *Description topologique d'un ensemble de points fixes* 3

Correction de l'exercice 730 – *Théorème du point fixe de Banach-Picard* 2CD

8. Connexité par arcs

Correction de l'exercice 731 – *Par quelles opérations ensemblistes la connexité par arcs est-elle stable ?* 4

Correction de l'exercice 732 – *Par quelles opérations topologiques la connexité par arcs est-elle stable ?* 4

Correction de l'exercice 733 – *Connexité par arcs de la sphère unité (ou pas)* 3

Correction de l'exercice 734 – *Connexité par arcs (ou pas) du complémentaire d'un hyperplan* 3D

Correction de l'exercice 735 – *Le cercle unité est-il homéomorphe à un segment ? (X PC 10)* 3

Correction de l'exercice 736 – *Pas d'homéorphisme grâce à la connexité par arcs* 3

Correction de l'exercice 737 – *Applications de la connexité par arcs* 3I

9. Topologie matricielle

Correction de l'exercice 738 – *Connexité par arcs de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 1

Correction de l'exercice 739 – *Existe-t-il une norme matricielle invariante par conjugaison ?* 4C

Il faut déjà comprendre pourquoi l'existence d'une matrice non nulle A semblable à $2A$ permet de conclure.

Reste alors à trouver une telle matrice A. Plusieurs arguments (considération des valeurs propres, nullité de la trace de A et de ses puissances) permettent d'en déduire que A est nécessairement nilpotente.

On montre facilement que le choix le plus évident ($A \stackrel{def}{=} E_{1,n}$) convient.

Correction de l'exercice 740 – *Banque CCP 2016 61* 0

Correction de l'exercice 741 – *Existence de l'exponentielle matricielle complexe avec* $\|\cdot\|_\infty$ 2

Correction de l'exercice 742 – *Mines MP 10* 2

Correction de l'exercice 743 – *Centrale MP 2015* 3

Correction de l'exercice 744 – *Adhérence des racines de l'unité (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 745 – *Quelles sont les matrices dont la classe de similitude est bornée ? (Mines MP 2015)* 4

Correction de l'exercice 746 – *Densité des diagonalisables, ou pas* 1

1 On peut utiliser la trigonalisation.

2 Le discriminant $X^2 + bX + c \mapsto b^2 - 4c$ est une fonction continue.

Correction de l'exercice 747 – *Matrices dont la classe de similitude est bornée* 1

Observons déjà que la réponse sera indépendante de la norme choisie.

Les matrices scalaires conviennent de manière évidente.

Réciproquement, si A n'est pas scalaire, elle est semblable à une matrice non diagonale (on pourra raisonner géométriquement). On peut alors conclure avec la norme infinie par exemple.

Correction de l'exercice 748 – *Caractérisation topologique de la diagonalisabilité d'une matrice complexe* 3C

Dans le sens direct, on pourra utiliser le polynôme minimal et le polynôme caractéristique, qui sont des invariants de similitude.

Dans le sens indirect, on pourra partir d'une matrice triangulaire supérieure, et ratatiner les coefficients non diagonaux par changement d'échelle.

Correction de l'exercice 749 – *Caractérisation topologique de la nilpotence d'une matrice complexe (Mines MP 10)* 3C

Correction de l'exercice 750 – *Adhérence des matrices de rang donné* 2

CHAPITRE XLII

Fonctions vectorielles (corrections)

1. Dérivation des fonctions vectorielles

Correction de l'exercice 751 – *Sous-groupe à un paramètre de matrices* 2

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$A\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{(tA)^k}{k!}\right) = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{(tA)^k}{k!}\right) A,$$

car tout polynôme en A commute avec A.

Comme les applications $B \mapsto AB$ et $B \mapsto BA$ sont continues (car linéaires en dimension finie), on obtient, en passant à la limite,

$$A \exp(tA) = \exp(tA)A,$$

soit le résultat souhaité.

2 On a

$$\exp_A(t) = \exp(tA) = I_n + tA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!},$$

et on conjecture que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \mathrm{o}_{t \to 0}(t^2)$.

Prouvons-le :

$$\left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} = t^2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^{k-2} \|A\|^k}{k!} \right)$$

donc, si $|t| \leqslant 1$:

$$\left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leqslant t^2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \right)$$

ce qui établit le résultat annoncé. On en déduit que

$$\exp_A(t) = \exp_A(0) + tA + \mathrm{o}_{t \to 0}(t)$$

D'après le lien entre dérivabilité et existence d'un développement limité à l'ordre 1, on en déduit que $\exp_A$ est dérivable en 0, et que

$$\exp_A'(0) = A$$

3 Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$. D'après le résultat admis :

$$\exp_A(t_0 + h) = \exp_A(t_0) \exp_A(h) = \exp_A(t_0)(I_n + tA + \mathrm{o}_{t \to 0}(t)) = \exp_A(t_0) + t \exp_A(t_0)A + \mathrm{o}_{t \to 0}(t)$$

d'où le résultat souhaité.

4 Vous ne voudriez vraiment pas voir comment prouver cela sans passer par le produit de Cauchy de séries absolument convergentes ni par le théorème de dérivation des séries de fonctions ...

Correction de l'exercice 752 – *Trajectoire sur une sphère* 2

Par hypothèse, la fonction $\|f\|^2$ est constante. Or $\|f\|^2 = (f|f)$, et f est dérivable en a, donc, en dérivant en a :

$$0 = 2(f(a)|f'(a))$$

Les vecteurs $f(a)$ et $f'(a)$ sont donc orthogonaux.

Correction de l'exercice 753 – *Dérivation et composition par une application multilinéaires* 3

Correction de l'exercice 754 – *Paramétrage de matrices orthogonales* 2

1 On rappelle que la structure euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire celle qui rend la base canonique orthonormée, est donnée par

$$\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A|B) = \operatorname{tr}((A^T)B = \operatorname{tr}(B(A^T))$$

Pour cette norme, on a, pour tout $A\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$\|A\|^2 = (A|A) = \operatorname{tr}((A^T)A) = \operatorname{tr}(I_n) = n$$

D'après l'exercice 752, on a bien, pour tout $t\in I$, $(f(t)|f'(t)) = 0$, *i.e.* $f'(t)(f(t))^T$ est de trace nulle.

2 Comme f est à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a, pour tout $t\in I$:

$$f(t)(f(t))^T = I_n$$

donc la fonction vectorielle $t\mapsto f(t)(f(t))^T$ est constante. Comme f est dérivable, et comme $(A,B)\mapsto AB^T$ est bilinéaire, on obtient en dérivant, pour tout $t\in I$

$$f'(t)(f(t))^T + f(t)(f'(t))^T = 0$$

soit encore

$$f'(t)(f(t))^T = -f(t)(f'(t))^T$$

soit l'antisymétrie de $f'(t)(f(t))^T$.

Remarque : le résultat est bien plus fort car $f'(t)(f(t))^T$ est non seulement de trace nulle, mais aussi de diagonale nulle.

Remarque : il n'est pas étonnant d'avoir obtenu un résultat plus fin, puisque prendre la trace dans la première question faisait perdre beaucoup d'informations.

Correction de l'exercice 755 – *Dérivée de l'inverse d'une fonction inversible* 1

Correction de l'exercice 756 – *Calcul d'un déterminant par dérivation* 2

Correction de l'exercice 757 – *Croissance du module d'une fonction* 3

Correction de l'exercice 758 – *Une équation fonctionnelle matricielle* 3

Correction de l'exercice 759 – *Dérivée d'une fonction définie par un déterminant* 2

Le déterminant étant invariant par transposition, et n-linéaire, $\det(A+tJ) = \det({}^t(A+tJ)) = \det(-A+tJ) = (-1)^n\det(A-tJ) = \det(A-tJ)$.

La fonction $t\mapsto \det(A+tJ)$ est donc paire, or elle est en outre polynomiale, de degré au plus 1 (retrancher la première colonne à toutes les autres) : elle est constante, de valeur $\det(A)$.

Pour tout réel t, $\det(A+tJ) = \det(A)$.

Correction de l'exercice 760 – *Fonction à valeurs dans* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (X MP 08) 3

En reprenant l'exercice 754, on sait que pour tout réel t, $\Phi'(t)\Phi(t)^T$ est antisymétrique.

Or une matrice symétrique de taille p impaire est de déterminant nul (dans un tel cas, $\det(A) = \det(-A^T) = \det(-A) = ((-1)^p\det(A) = -\det(A))$. donc $\Phi'(t)\Phi(t)^T$ n'est pas inversible. Comme $\Phi(t)^T$ l'est ($\Phi(t)$ est une matrice orthogonale), $\Phi'(t)$ ne l'est pas.

Correction de l'exercice 761 – *Suite de valeurs de la dérivée tendant vers l'infini* 3

2. Intégration et formules de Taylor

Correction de l'exercice 762 – *Inégalité de Jensen* 1

On s'intéresse d'abord aux sommes de Riemann. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{b-a}S_{n,g}(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

D'après l'inégalité de convexité généralisée (les poids sont bien positifs de somme 1),

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}S_{n,g}(f)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi\circ f)\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

soit

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}S_{n,g}(f)\right) \leqslant \frac{1}{b-a}S_{n,g}(\varphi\circ f)$$

f et φ étant continues, on obtient, en faisant tendre n vers l'infini, le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 763 – *Différence entre deux exponentielles matricielles* 2

La fonction intégrée est bien continue sur $[0,1]$ (et même dérivable), donc l'intégrale est bien définie.

Le produit matriciel étant bilinéaire (en dimension finie), et grâce à l'exercice 751, l'application

$$\varphi \ : s\in[0,1]\mapsto \exp(sA)\exp((1-s)B)$$

est dérivable sur $[0,1]$, et, pour tout $s\in[0,1]$:

$$\varphi'(s) = \exp(sA)A\exp((1-s)B) - \exp(sA)B\exp((1-s)B) = \exp(sA)(A-B)\exp((1-s)B)$$

On a donc bien :

$$\int_0^1 \exp(sA)(A-B)\exp((1-s)B)\mathrm{d}s = [\varphi(s)]_0^1 = \exp(A)-\exp(B)$$

Correction de l'exercice 764 – *Un raffinement de l'inégalité des accroissements finis* 3

Correction de l'exercice 765 – *Égalité de Taylor-Lagrange* 1

Correction de l'exercice 766 – *Fonction nulle sur un voisinage de* $+\infty$ 2

Correction de l'exercice 767 – *Fonction dont les dérivées sont nulles en* 0 2

Correction de l'exercice 768 – *Majoration de la vitesse par la position et l'accélération* 2C

Correction de l'exercice 769 – *Un produit infini* 2

3. Arcs paramétrés

Correction de l'exercice 770 – *Astroïde* 0

Correction de l'exercice 771 – *Droites tangentes et normales à une même courbe* 3

Correction de l'exercice 772 – *Étude poussée d'un arc paramétré* 3

Soit C l'arc paramétré : $x(t)=\frac{t}{1+t^4}, y(t)=\frac{t^3}{1+t^4}$.

1 L'arc C est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Les fonctions coordonnées étant impaires, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ (une fois le support de l'arc restreint obtenu, on lui adjoindra son symétrique par rapport à l'origine). De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $M(1/t)$ se déduit de $M(t)$ par symétrie par rapport à la première bissectrice : il suffit donc d'étudier l'arc sur $[0,1]$ (on adjoindra au support obtenu son symétrique par rapport à la première bissectrice).

Pour tout $t\in[0,1]$,

$$f'(t) = \left(\frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}, \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}\right).$$

En particulier, l'arc est régulier.

L'arc restreint $([0,1], f)$ ne présente pas de branche infinie.

x est croissante sur $[0,3^{-1/3}]$, décroissante sur $[3^{-1/3},1]$, tandis que y est croissante sur $[0,1]$.

On est donc en mesure de tracer l'arc C.

2 Supposons que t_1 et t_2 soient deux instants distincts en lesquels les points physiques coïncident. Ces instants sont nécessairement non nuls (l'origine n'est atteinte que pour l'instant nul), et l'on peut donc évaluer y/x en t_1 et t_2, ce qui montre que $t_1^2 = t_2^2$, puis conduit à la contradiction $t_1 = t_2$ en revenant à $x(t_1) = x(t_2)$.

L'arc C est donc simple.

3 Soit $t \in \mathbb{R}$. La droite D_t est dirigée par $f'(t)$, soit encore par $(1 - 3t^4, t^2(3 - t^2))$. Une équation de D_t est donc

$$\begin{vmatrix} x - \frac{t}{1+t^4} & 1 - 3t^4 \\ y - \frac{t^3}{1+t^4} & t^2(3 - t^4) \end{vmatrix} = 0,$$

soit encore, après simplification :

$$\boxed{t^2(3 - t^4)x - (1 - 3t^4)y = 2t^3.}$$

4 Soit $t \in \mathbb{R}$. Nous souhaitons que l'équation

$$t^2(3 - t^4)\frac{t_0}{1 + t_0^4} - (1 - 3t^4)\frac{t_0^3}{1 + t_0^4} = 2t^3$$

admette deux solutions distinctes t_1 et t_2 dans $\mathbb{R} \setminus \{t\}$.

En s'aidant de Maple, on arrive à la condition équivalente que le polynôme

$$2t^3X^2 + (1 + t^4)X + 2t$$

admette deux racines réelles distinctes, différentes de t.

t est racine de ce polynôme si et seulement si $t = 0$, cas qu'il faut donc écarter. De plus, le discriminant Δ de ce polynôme vaut $t^8 - 14t^4 + 1$, et est donc strictement positif si et seulement si $t^4 \in]-\infty, 7 - 4\sqrt{3}[\cup]7 + 4\sqrt{3}[$, soit $t \in]-\infty, -\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{1/4}[\cup] - \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{1/4}, 0[\cup] \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{1/4} [\cup] \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{1/4}, +\infty[$.

Remarque : on peut, après calcul, observer que $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{1/4} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, et que $\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{1/4} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Dans un tel cas, on a $t_1t_2 = \frac{1}{t^2}$ et $t_1 + t_2 = -\frac{1+t^4}{2t^3}$.

5 On conserve les notations de la question précédente.

Une équation cartésienne de la médiatrice de $[OM(t_1)]$ est

$$\begin{vmatrix} x - \frac{x(t_1)}{2} & -y(t_1) \\ y - \frac{y(t_1)}{2} & x(t_1) \end{vmatrix} = 0,$$

soit $xx(t_1) + yy(t_1) = \frac{t_1^2}{2(1+t_1^4)}$, soit encore

$$x + yt_1^2 = \frac{t_1}{2}.$$

De même pour la médiatrice de $[OM(t_2)]$. On trouve pour intersection le point de couple de coordonnées $\left(\frac{t_1t_2}{2(t_1+t_2)}, \frac{1}{2(t_1+t_2)}\right)$, soit encore, compte tenu de la question précédente

$$\left(\frac{-t}{1 + t^4}, \frac{-t^3}{1 + t^4}\right).$$

Le centre du cercle circonscrit au triangle $OM(t_1)M(t_2)$ est donc le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine, soit encore $M(-t)$.

Correction de l'exercice 773 – *Étude d'arcs paramétrés classiques* 1

Correction de l'exercice 774 – *Étude d'arcs paramétrés rationnels* 2

1

2 Généralités L'arc f est défini sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine. On ne constate pas de réduction du domaine d'étude.

Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on a :

$$x'(t) = \frac{-t(t + 4)}{(t - 2)^2(t + 1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t(2t^2 + 5t + 4)}{(t + 1)^2}.$$

On en déduit les variations des fonctions coordonnées.

Points remarquables Le seul point stationnaire est celui d'instant 0, la tangente est verticale à l'instant -4

Les points d'instants 0, et -2 se situent sur l'axe des abscisses.

Étude du point singulier : c'est le point d'instant 0, qui se situe en l'origine. L'abscisse (resp. l'ordonnée) est négative (resp. positive) au voisinage de 0. En outre, on vérifie facilement que y/x est de limite -4 en 0. La courbe admet donc une tangente d'équation $y = -4x$ à l'instant 0.

Branches infinies Au voisinage de 2, la courbe présente une asymptote horizontale d'équation $y = 16/3$. Au voisinage de $\pm\infty$, on a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Dans ces deux cas, les variations des fonctions coordonnées permettent aisément de situer courbe et asymptotes.

La branche infinie au voisinage de -1 est plus délicate à étudier, car les deux fonctions coordonnées tendent vers $\pm\infty$ en $-1^{\pm}$. On trouve sans difficulté que

$$\lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -3$$

On cherche donc à déterminer l'éventuelle limite de $y(t) + 3x(t)$ lorsque t tend vers -1.

Pour tout $t \in \mathcal{D}$, $y(t) + 3x(t) = \frac{(t-1)t^2}{t-2}$: cette quantité tend donc vers $2/3$ lorsque t tend vers -1. La courbe admet donc une asymptote d'équation $y = -3x + 2/3$ en -1. Enfin, pour tout $t \in \mathcal{D}$,

$$y(t) + 3x(t) - 2/3 = \frac{3t^2(t-1) - 2(t-2)}{3(t-2)} = \frac{3t^3 - 3t^2 - 2t + 4}{3(t-2)} = \frac{(t+1)(3t^2 - 6t + 4)}{3(t-2)},$$

cette quantité est du signe opposé de $t + 1$ lorsque t est suffisamment proche de -1. La courbe est localement au-dessus de son asymptote en -1^-, et en dessous en -1^+.

Étude des points multiples On peut d'emblée écarter l'origine, correspondant uniquement à l'instant 0. On cherche deux instants distincts t et t' tels que $x(t) = x(t')$ et $y(t) = y(t')$, *i.e.*

$$\begin{cases} \frac{t^2}{(t-2)(t+1)} & = & \frac{t'^2}{(t'-2)(t'+1)} \\ \frac{t^2(t+2)}{t+1} & = & \frac{t'^2(t'+2)}{t'+1} \end{cases}$$

En formant le quotient la seconde relation par la première (on a écarté l'instant 0), on obtient la relation $t^2 - 4 = (t')^2 - 4$, *i.e.* $t = -t'$ (car $t \neq t'$). Cela induit la relation $(t-2)(t+1) = (t'-2)(t'+1)$, puis $t = t'$: la courbe n'admet pas de point multiple.

Support

Tous ces renseignements permettent de tracer le support de la courbe : on trace les asymptotes, les points remarquables, et on suit l'évolution temporelle.

3

Correction de l'exercice 775 – *Arcs paramétrés plans* 3

Correction de l'exercice 776 – *Étude d'arcs paramétrés trigonométriques* 2

Correction de l'exercice 777 –

CHAPITRE XLIII

Suites et séries de fonctions (corrections)

1. Suites de fonctions

1.1. Étude pratique d'une suite de fonctions

Correction de l'exercice 778 – *Convergence simple ou uniforme de suites de fonctions* 2

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, si $x = 0$, alors $f_n(x) = 1$, donc $(f_n(x))$ converge vers 1. Si $x \neq 0$, alors $(f_n(x))$ tend vers 0, donc la suite (f_n) tend simplement vers l'indicatrice de $\{0\}$, que nous noterons g.

La convergence n'est pas uniforme, car chaque f_n est continue, mais pas g.

Autre raison : En prenant $x_n = 1/n$, $1 = |f_n(x_n) - g(x_n)| \leqslant \|f_n - g\|_\infty$, donc la suite $(\|f_n - g\|_\infty$ ne tend pas vers 0.

2 f_n est définie sur $\mathbb{R}$ si n est pair, sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ si n est impair. On travaille donc sur cette dernière partie de $\mathbb{R}$.

La suite de fonction (f_n) converge simplement vers g, valant 1 sur $]-1,1[$, valant $1/2$ en 1, et 0 sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

g n'étant pas continue alors que chaque f_n l'est, la convergence n'est pas uniforme.

3 Chaque f_n est bien sûr définie sur $\mathbb{R}$, mais il n'y a convergence simple que sur $]-1,1]$, vers la fonction nulle.

Bien que g soit continue, la convergence n'est pas uniforme, car $\|f_n\|_{\infty,]-1,1]} = 2$.

Remarque : on pourrait se demander s'il y a convergence uniforme sur $[0,1]$ par exemple. Une étude de fonction montre que sur cet intervalle, f_n est positive, et maximale en $\frac{n}{n+1}$:

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = f_n(n/(n+1)) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

de sorte que la convergence est bien uniforme sur $[0,1]$.

4 C'est presque l'exemple précédent : on montre encore la convergence simple vers la fonction nulle sur $]-1,1]$, et que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1]$.

Contrairement à l'exemple précédent, il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$, puisque

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = f_n(n/(n+1)) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to_n \frac{1}{e}$$

5 $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)^4$.

6 $f_n(x) = \cos(x)^n \sin(x)^{2n}$.

Correction de l'exercice 779 – *Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions et de sa dérivée* 2

La suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. La convergence est en fait uniforme, car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$|u_n(x)| = \frac{x}{1+n^2x} \leqslant \frac{x}{n^2x} = \frac{1}{n^2}$$

et cette inégalité est vraie en 0, de sorte que $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

u_n est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et, pour tout $x \geqslant 0$:

$$u_n'(x) = \frac{1}{(1+n^2x)^2}$$

La suite de fonctions (u_n') converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$, mais non uniformément, car $\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = u_n'(0) = 1$.

Remarque : : en revanche, il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ (mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$).

Correction de l'exercice 780 – *Banque CCP 2016 9* 2

Correction de l'exercice 781 – *Étude de convergence uniforme et passage à l'inverse (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 782 – *Étude de convergence uniforme d'une suite de fonctions définie par des intégrales (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 783 – *Exemple de convergence uniforme* 3

Correction de l'exercice 784 – *Étude de mode de convergence (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 785 – *Un exemple de convergence uniforme* 3

Pour l'étude de la limite simple, nous sommes amenés à fixer $x \in [0,1]$, puis à considérer la fonction $f\ : t \mapsto t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. La suite $(p_n(x))$ est la suite de terme initial 1 et d'itératrice f. Comme f est croissante sur $[0,1]$, que $f(0) = \frac{1}{2}x$ et que $f(1)\frac{1+x}{2}$, $[0,1]$ est stable par f. De plus, $(p_n(x))$ est monotone car f est croissante sur $[0,1]$, et $p_0(x) = 1 \geqslant p_1(x)$, donc $(p_n(x))$ est décroissante.

La suite $(p_n(x))$ est décroissante et minorée, donc convergente, vers un point fixe de f par continuité de cette fonction : on trouve donc que $(p_n(x))$ tend vers $\sqrt{x}$: la suite de fonction (p_n) converge simplement vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$, que nous noterons g

Pour étudier la convergence uniforme, On peut tenter de comparer $\|p_{n+1} - g\|_\infty$ et $\|p_{n+1} - g\|_\infty$. Pour tout $x \in [0,1]$, tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant p_{n+1}(x) - g(x) = p_n(x) - g(x) + \frac{1}{2}(g(x)^2 - p_n(x)^2) = (p_n(x) - g(x))(1 - \frac{1}{2}(g(x) + p_n(x))) \leqslant (1 - \sqrt{x})(p_n(x) - x)$$

Correction de l'exercice 786 – *Itérée d'une fonction par un opérateur* 3

Correction de l'exercice 787 – *Étude de convergence d'une suite de fonctions* 3

1.2. Étude théorique de suites de fonctions

Correction de l'exercice 788 – *La convergence uniforme est-elle stable par composition ?* 4

Correction de l'exercice 789 – *Une convergence uniforme théorique* 3

1 On revient à la définition formelle de la convergence (avec ε) : soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $f(1)$ et que f est continue en 1, il existe $a \in]0,1[$ tel que, pour tout $x \in [a,1]$: $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|f_n\|_{\infty,[a,1]} \leqslant \varepsilon$.

Par ailleurs, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant a^n \|f\|_\infty$. Comme $a \in]0,1[$, il existe un rang N à partir duquel $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant \varepsilon$. Ainsi, à partir du rang N, $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat.

2 En reprenant l'indication de l'énoncé, U est un ouvert relatif de $[a,b]$ (par continuité de g et car $]-\varepsilon,\varepsilon[$ est ouvert), donc K est une partie fermée du compact $[a,b]$, puis un compact. Sur K, $|f|$ est à valeurs dans $[0,1[$ (par l'hypothèse faite sur f et g), et continue, donc bornée et atteint ses bornes. Par conséquent, $\|f\|_{\infty,\mathbb{K}} < 1$. On obtient donc un rang N à partir duquel $\|f^n g\|_{\infty,K} \leqslant \varepsilon$. Comme $\|f^n g\|_{\infty,U} \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f^n g\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, puis le résultat.

Correction de l'exercice 790 – *Théorème de Chudnosky* 3

Correction de l'exercice 791 – *Théorème de sélection de Helly* 3D

1.3. Conditions nécessaires de convergence uniforme

Correction de l'exercice 792 – *Banque CCP 2016 11* 2

Correction de l'exercice 793 – *Convergence uniforme sur tout segment mais non uniforme* 0

1 La suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction cosinus (par continuité de cette dernière).
2 Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [-a, a]$, on a, grâce au caractère 1-lipschitzien de cos :

$$|f_n(x) - \cos(x)| = \left|\cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) - \cos(x)\right| \leqslant \left|\frac{nx}{n+1} - x\right| = \frac{|x|}{(n+1)} \leqslant \frac{a}{n+1}$$

donc $\|f_n - \cos\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \frac{a}{n+1}$, puis la convergence uniforme de (f_n) vers cos sur $[-a, a]$.
Remarque : plus généralement, si $(g_n \ : I \to J)$ converge uniformément vers $g \ : I \to J$, et si $h \ : J \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors $(h \circ g_n)$ converge uniformément vers $h \circ g$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - \cos\|_\infty \geqslant |f_n((n+1)\frac{\pi}{2}) - \cos((n+1)\frac{\pi}{2}| = |\cos(n\frac{\pi}{2}) - \cos((n+1)\frac{\pi}{2})| = \frac{\pi}{2}$, ce qui montre que la convergence n'est pas uniforme.

Correction de l'exercice 794 – *Banque CCP 2016 12* 0

Correction de l'exercice 795 – *Banque CCP 2016 13* 2

1.4. Conditions suffisantes de convergence uniforme

Correction de l'exercice 796 – *Quelles propriétés sur les fonctions permettent de déduire la convergence uniforme de la convergence simple ?* 4

Correction de l'exercice 797 – *Comment caractériser séquentiellement la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues ?* 4

Correction de l'exercice 798 – *Convergence simple dans un espace de dimension finie* 2I

Quitte à considérer $V + \mathbb{K}f$ au lieu de V, on peut supposer que $f \in V$.

L'idée est de montrer comment la connaissance des évaluations de $g \in V$ sur une certaine partie finie de $[0, 1]$ permet de déterminer g. Pour tout $x \in V$, on introduit

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x : & V & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

Cette application est une forme linéaire sur V, donc un élément du dual $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ de V. Comme V est de dimension finie, V' est également de dimension finie (et d'ailleurs $\dim(V) = \dim(V')$), et on peut donc trouver un sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_p\}$ de $[0, 1]$ tel que

$$\mathrm{Vect}(\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_p}) = \mathrm{Vect}(\varphi_x, x \in [0, 1])$$

Autrement dit, pour tout $x \in [0, 1]$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$(\star) \quad \varphi_x = \lambda_1\varphi_{x_1} + \cdots + \lambda_p\varphi_{x_p}$$

Cette relation permet de prouver la séparation de

$$\begin{array}{rccc} N : & V & \to & \mathbb{R}_+ \\ & g & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} |g(x_i)| \end{array}$$

Comme l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont claires, c'est une norme sur V, équivalente à la norme infinie puisque V est de dimension finie. Ainsi, (f_n) converge vers f pour la norme N, puis pour la norme infinie, d'où le résultat.
Remarque : *a posteriori*, f est bien un élément de V, puisque V est un fermé comme sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, et que (f_n) converge vers f dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme infinie.

Correction de l'exercice 799 – *Espace de fonctions de dimension finie invariant par translation* 3DI

V est de dimension finie, donc la convergence simple y implique la convergence uniforme. De plus, on montre que V est stable par dérivation. V est donc constitué de combinaisons linéaires d'exponentielles-polynômes.

1.5. Intégration et convergence uniforme d'une suite de fonctions

Correction de l'exercice 800 – *Banque CCP 2016 10* 2

Correction de l'exercice 801 – *La convergence uniforme permet-elle d'intervertir limite et intégrale sur un intervalle non borné ? (Mines MP 2015)* 4

1.6. Le théorème de Weierstrass

Correction de l'exercice 802 – *Banque CCP 2016 48* 2

Correction de l'exercice 803 – *Une application du théorème de Weierstrass* 1

Correction de l'exercice 804 – *Suite polynomiale convergeant uniformément vers une fonction non polynomiale* 3I

2. Séries de fonctions

2.1. Convergence uniforme d'une série de fonctions

Correction de l'exercice 805 – *Banque CCP 2016 17* 3

Correction de l'exercice 806 – *Étude d'une série de fonctions par transformation d'Abel* 5

2.2. CVU et intégration terme à terme

Correction de l'exercice 807 – *Banque CCP 2016 14* 2

Correction de l'exercice 808 – *Étude de série de fonctions (CCP MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 809 – *Calcul d'intégrale par une série de fonctions* 3

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{1+(-1)^n}{2\,n!} \cos(n\theta) \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \int_0^{\pi/2} \frac{1+(-1)^n}{2\,n!} \cos(n\theta) \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(2p)!} \cos(2p\theta) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

2.3. Convergence normale

Correction de l'exercice 810 – *Banque CCP 2016 15* 2

Correction de l'exercice 811 – *Étude de série de fonctions (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 812 – *Peut-il y avoir convergence uniforme, et convergence absolue en tout point, sans qu'il y ait convergence normale ?* 2

Étude de la (non) convergence normale : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $]0,1[$, et, pour tout $x \in]0,1[$:

$$f_n'(x) = \frac{((1-x)^n - nx(1-x)^{n-1})\ln(x) - (1-x)^n}{\ln(x)^2} = \frac{(1-x)^{n-1}}{\ln(x)^2}\left((1-(n+1)x)\ln(x) - (1-x)\right)$$

La détermination de $\|f_n\|_\infty$ est ardue, on va plutôt chercher une série minorante à termes positifs divergente sous la forme $\sum |f_n(x_n)|$. Pour que $(1-x_n)^n$ ne tende pas vers 0, il est naturel de faire tendre x_n vers 0. On prend $x_n = \frac{1}{n}$:

$$f_n(x_n) = \frac{(1-1/n)^n}{-n\ln(n)} \sim \frac{1}{-en\ln(n)},$$

d'où la divergence de $\sum |f_n(x_n)|$, puis la non convergence normale.

Étude de la convergence uniforme : pour tout $x \in]0,1[$, tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \frac{x}{\ln(x)} \cdot \frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{\ln(x)}$$

d'où la convergence simple vers $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$.

Reste à montrer que $\sup\limits_{x\in]0,1[} \{(1-x)^{n+1}\ln(x)\}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Cela rentre dans le cadre de l'exercice 789 (et on recourt donc à ε dans une preuve à la Cesàro).

2.4. Équations fonctionnelles et séries de fonctions

Correction de l'exercice 813 – *Équation fonctionnelle et séries de fonctions* 3

Analyse. Soit f une telle fonction : continue sur le segment $[0,1]$, f est bornée et atteint ses bornes inférieure et supérieure, mettons en c et d respectivement.

Traitons d'abord le cas où c et d sont distincts de 1.

On a

$$f(c) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(c^n)}{2^n}$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{f(c)}{2^n} \leqslant \frac{f(c^n)}{2^n}$ et

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{f(c)}{2^n} = f(c)$$

On a donc, nécessairement, $f(c^n) = f(c)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis $f(0) = f(c)$ par continuité de f en 0.

De la même manière, $f(0) = f(d)$, et donc f est constante.

Cette démonstration convient si on peut prendre c et d distincts de 1, mais il se peut *a priori* que f atteigne par exemple son maximum en 1 uniquement. On peut reprendre la démonstration et travailler sur $[0,\alpha]$, où $\alpha \in]0,1[$, pour montrer que f est constante sur $[0,\alpha]$. Ceci valant pour tout $\alpha \in]0,1[$, f est constante sur $[0,1[$, puis sur $[0,1]$ par continuité en 1.

Dans tous les cas, f est constante.

Synthèse. Réciproquement, les fonctions constantes conviennent clairement : ce sont les fonctions cherchées.

Remarque : les notions classiques sur les séries de fonctions ne sont pas utiles (cet exercice peut être posé en MPSI).

Correction de l'exercice 814 – *Équation fonctionnelle et série de fonctions* 3

1 Montrons tout d'abord que u est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \sim_n \frac{x}{n^2}$$

or $\sum \frac{x}{n^2}$ est absolument convergente (exemple de Riemann), donc $\sum u_n(x)$ également.

Pour montrer que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{(n+x)^k}$$

et donc :

$$\left\| u_n^{(k)} \right\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} \leqslant \frac{k!}{n^k}$$

d'où la convergence normale, puis uniforme, de $\sum u_n^{(k)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est bien croissante car sa dérivée est positive (ou parce que $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et les u_n le sont), et $f(1) = 0$ par télescopage.

Enfin, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} u(x+1) - u(x) &= -\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} \right) + \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) \\ &= \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

à nouveau par télescopage.

2 δ est 1-périodique. Si sa limite en $+\infty$ existe, c'est celle de $(\delta(n))$, suite constante de valeur 0, donc c'est 0.

Reste cependant à établir l'existence de cette limite (l'énoncé est d'ailleurs pousse-au-crime à cet égard).

Pour ce faire, on se fonde sur les croissances de f et g, et sur le fait qu'elles coïncident sur les entiers : soit $x \in [1, +\infty[$. On a $E(x) \leqslant x \leqslant E(x) + 1$, donc

$$f(E(x)) \leqslant f(x) \leqslant f(E(x)+1) \quad \text{et} \quad g(E(x)) \leqslant g(x) \leqslant g(E(x)+1)$$

donc

$$f(E(x)) - g(E(x)+1) \leqslant \delta(x) \leqslant f(E(x)+1) - g(E(x))$$

soit, puisque f et g coïncident sur les entiers (par une récurrence immédiate) :

$$-\frac{1}{E(x)} \leqslant \delta(x) \leqslant \frac{1}{E(x)}$$

Cet encadrement montre que δ tend effectivement vers 0 en $+\infty$.

Étant en outre périodique, δ est identiquement nulle (pour tout $x > 0$, $(\delta(x+n))$ est constante et tend vers 0), *i.e.* $f = g$. E est donc le singleton $\{u\}$.

Correction de l'exercice 815 – *Le théorème de Bohr-Mollerup (Centrale MP 2015)* 3D

2.5. Calcul de somme d'une série de fonctions

Correction de l'exercice 816 – *Calcul de somme d'une série trigonométrique (Centrale MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 817 – *Somme d'une série de monômes (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 818 – *Étude d'une série de fonctions dont les termes sont des primitives itérées d'une fonction (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 819 – *Régularité d'une série de fonctions puis détermination de la somme* 3

3. Étude pratique de séries de fonctions

3.1. Série de fonctions à termes positifs

Correction de l'exercice 820 – *Banque CCP 2016 53* 2

Correction de l'exercice 821 – *Étude de la somme d'une série de fonctions (Télécom Sud Paris MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 822 – *Étude d'une série de fonctions* 1

1 Si $x<0$, $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.
Si $x=0$, $f_n(x)=0$ pour tout n, d'où la convergence.
Si $x>0$, $f_n(x)=\mathrm{o}_{n\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où la convergence absolue puis la convergence.
φ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2 Pour montrer la continuité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, car la continuité est une propriété locale, et car chaque f_n est évidemment continue.

Or, pout tout $x\in[a,b]$:

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{be^{-na}}{\ln(n)},$$

donc $\|f_n\|_{\infty,[a,b]}\leqslant\frac{be^{-na}}{\ln(n)}$, puis $\|f_n\|_{\infty,[a,b]}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où la convergence normale de $\sum f_n$ sur tout $[a,b]$.
Remarque : ce n'est pas demandé, mais y a-t-il convergence normale sur un voisinage $[a,+\infty[$ de $+\infty$? Il ne faut pas être impressionné par le facteur x : la fonction $h\ :x\mapsto xe^{-x}$ est continue, de limite nulle en $+\infty$, donc bornée. Soit M un majorant de $|h|$. On a

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}\leqslant\frac{Me^{-(n-1)a}}{\ln(n)}$$

d'où la convergence normale sur $[a,+\infty[$.

3 La convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$, car $f_n(1/n)=\frac{1}{en\ln(n)}$ donc $\frac{1}{en\ln(n)}\leqslant\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$.

Or la série $\sum\frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente, car $x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)}$ est positive continue décroissante au voisinage de $+\infty$, donc $\sum\frac{1}{n\ln(n)}$ a même nature que $\int_2^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$, qui est clairement divergente (une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)}$ est $x\mapsto\ln(\ln(x))$).
Remarque : comment a-t-on eu l'idée d'évaluer en $1/n$? Ici, c'est facile, on a étudié les variations de f_n pour trouver en quel point elle était maximale.

4 Il s'agit de savoir si $\varphi(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

On peut, pour tout $x>0$, effectuer l'encadrement

$$0\leqslant\varphi(x)\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(2)}xe^{-nx}=\frac{xe^{-2x}}{\ln(2)(1-e^{-x})}$$

mais la fonction à droite ne tend pas vers 0 en 0.

Cependant, en étudiant plus attentivement les majorations effectuées, on constate que, pour tout $x>0$:

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}xe^{-kx}=\frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n)(1-e^{-x})}\leqslant\frac{1}{\ln(n)}\cdot\frac{x}{1-e^{-x}}$$

et comme $\psi\ :x\mapsto\frac{x}{1-e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet une limite finie en 0, elle est bornée au voisinage de 0, d'où la convergence uniforme au voisinage de 0, puis la continuité de φ en 0 (héritée de celles des f_n).

5 En reprenant les dernières majorations de la question précédente, on a, pour tout $n\geqslant2$, et tout $x>0$:

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}xe^{-kx}=\frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n)(1-e^{-x})}\leqslant\frac{1}{\ln(n)}\cdot\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$$

or $\gamma\ :x\mapsto\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet des limites finies en 0 et $+\infty$, et est donc bornée :

$$\|R_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}\leqslant\frac{\|\gamma\|_\infty}{\ln(n)}$$

d'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Correction de l'exercice 823 – *Toujours une étude de série de fonctions* 1

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$.

f est clairement définie en 0, et, chaque f_n étant impaire, f est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est en $-x$.

Soit $x > 0$. On a $f_n(x) \sim_n \frac{x}{n^2}$, or $\sum \frac{x}{n^2}$ est absolument convergente, donc $\sum f_n(x)$ également, puis f est définie en x : f est définie sur $\mathbb{R}$.

2 Chaque f_n étant continue, il suffit, pour établir la continuité de f, d'établir la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur tout segment de la forme $[-M, M]$, où $M > 0$.

Or, pour tout $x \in [-M, M]$, tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{n^2}$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} \leqslant \frac{M}{n^2}$$

dont on déduit la convergence normale (puis la convergence uniforme) de $\sum f_n$ sur $[M, M]$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant f_n(n) = \frac{1}{2n},$$

et $\sum \frac{1}{2n}$ est une série divergente à termes positifs, donc la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Remarque : : pourquoi évaluer en n ? Ici, $f_n'(x) = \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$, donc f_n est maximale en n.

Remarque : : pour montrer que $\sum f_n$ ne convergeait pas normalement sur $\mathbb{R}$ en montrant qu'il existe une suite (x_n) telle que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge, il fallait prendre une suite (x_n) non bornée (puiqu'il y a convergence normale sur tout segment).

4 Pour n fixé, $f_n(x) \sim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$, le théorème de la double limite ne semble donc pas adapté ici.

Le fait que f_n ne soit pas monotone empêche *a priori* d'utiliser une comparaison série-intégrale. Cependant, en introduisant, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, l'application

$$g_n \ : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^2 + n^2}$$

on a, pour tout $x > 0$, tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = x g_n(x)$, et on peut appliquer la comparaison série-intégrale à $\sum g_n$.

En effet, pour $x > 0$ fixé l'application $t \mapsto \frac{1}{x^2+t^2}$ est continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $\frac{1}{x^2+t^2} = \mathrm{O}_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{x^2 + (n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{x^2 + t^2} \leqslant \frac{1}{x^2 + n^2}$$

d'où, en sommant pour n décrivant $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) - g_1(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^2 + t^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2} = \frac{1}{x}\left[\arctan(t/x)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\arctan(1/x)$, de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\arctan(1/x) + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(g_1(x))$$

or le premier terme du membre de droite est prépondérant devant les autres en $+\infty$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \sim_{x \to +\infty} \pi/(2x)$, puis $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

5 Si la convergence était uniforme, alors (R_n) convergerait uniformément vers 0, donc $(R_{2n}-R_n)$ également. Or

$$\begin{aligned}\|R_{2n}-R_n\|_{\infty,\mathbb{R}} &\geqslant R_{2n}(n)-R_n(n)\\ &= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}\\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{(2n)^2+n^2}\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

d'où une absurdité.

Correction de l'exercice 824 – *Convergence d'une série de fonctions (CCP MP 13)* 2

La série $\sum u_n(1)$ est convergente (son terme général est nul), et, pour tout $x\in[0,1[$, $u_n(x)=\mathrm{o}_{n\infty}(x^n)$, or la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente, donc $\sum u_n(x)$ l'est également.

Y a-t-il convergence normale sur $[0,1]$? La fonction positive u_n prend son maximum en $\frac{n}{n+1}$, donc

$$\|u_n\|_{\infty,[0,1]}=u_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}{(n+1)\ln(n)}\sim\frac{1}{en\ln(n)}$$

il n'y a donc pas convergence normale.

En revanche, pour tout $x\in[0,1[$, tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$0\leqslant R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\ln(k)}x^k(1-x)\leqslant\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k(1-x)=\frac{x^{n+1}}{\ln(n+1)}\leqslant\frac{1}{\ln(n+1)}$$

et $R_n(1)=0$, donc $\|R_n\|_{\infty,[0,1]}\leqslant\frac{1}{\ln(n+1)}$: il y a bien convergence uniforme.

3.2. Régularité de la somme d'une série de fonctions

Correction de l'exercice 825 – *Banque CCP 2016 16* 2

Correction de l'exercice 826 – *Continuité de la somme d'une série de fonctions* 0

1 Le domaine de convergence simple est $\mathbb{R}_+^*$.

Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=\frac{1}{2}$.

La convergence n'est pas non plus uniforme pour la même raison (on rappelle que si $\sum f_n$ converge uniformément, alors le terme général f_n converge uniformément vers 0.

Remarque : on aurait aussi pu utiliser le théorème de la double limite.

2 Montrons la convergence normale (et donc uniforme) sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, où $a>0$ (chaque f_n étant continue, et la continuité étant une notion locale, cela prouvera bien la continuité de la somme sur $\mathbb{R}_+^*$).

Soit donc $a>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, tout $x\in[a,+\infty[$:

$$|f_n(x)|\leqslant f_n(a)$$

par positivité et décroissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$, donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}=f_n(a)$, la convergence normale sur $[a,+\infty[$ s'ensuit.

Correction de l'exercice 827 – *Régularité de la somme d'une série de fonctions* 0

Posons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, tout $n\in\mathbb{N}$: $f_n(x)=\frac{e^{-n^2x}}{1+n^2}$.

1 $D=\mathbb{R}_+$.

2 $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, d'où la continuité de f sur D (héritée par convergence uniforme de celle des f_n).

3 On montre facilement que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ où $a>0$, ce qui prouve la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (car la dérivabilité en un point est une notion locale). Cela établit aussi que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{1+n^2} e^{-n^2 x}$$

Il reste cependant le problème en 0. On peut observer que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc que f' admet en 0 soit une limite finie (auquel cas f sera dérivable en 0, par le théorème de la classe $\mathcal{C}^1$), soit $-\infty$ pour limite (auquel cas f ne sera pas dérivable en 0, par une démonstration analogue à celle du théorème de la classe $\mathcal{C}^1$). Notons l cette limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f'(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$$

d'où, en faisant tendre x vers 0 : $l \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{1+k^2} \leqslant -\frac{n}{2}$.

On obtient donc $l = -\infty$.

Pour l'intégrabilité, on sait que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, le point crucial est donc le comportement asymptotique en $+\infty$.

Intuitivement, la suite de fonction (f_n) est à décroissance rapide, dans le sens où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(f_n(x))$.

On peut formaliser cette idée : on montre facilement que la série de fonctions $\sum e^x f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, et donc, par théorème de la double limite, que $f(x) = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(e^{-x})$, ce qui suffit à établir l'intégrabilité de f.

Remarque : on peut aussi montrer ce résultat à la main, par des majorations explicites (rédaction rapide) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x > 0$, $f_n(x) \leqslant e^{-nx}$, donc :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(e^{-x})$$

Remarque : pour ceux qui connaissent le résultat, le théorème d'intégration terme à terme permettait de conclure immédiatement.

Correction de l'exercice 828 – *Peut-il y avoir convergence uniforme, et convergence absolue en tout point, sans convergence normale ?* 4

3.3. Série de fonctions alternée

Correction de l'exercice 829 – *Banque CCP 2016 8* 3

Correction de l'exercice 830 – *Banque CCP 2016 18* 3

Correction de l'exercice 831 – *Une étude d'une série de fonctions alternée* 1

L'expression incite à utiliser le critère spécial des séries alternées. Vérifions qu'on peut bien l'appliquer : soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$$\frac{n+1}{x^2+(n+1)^2} - \frac{n}{x^2+n^2} = \frac{(n+1)(x^2+n^2) - n(x^2+(n+1)^2)}{(x^2+n^2)(x^2+(n+1)^2)} = \frac{x^2 - n(n+1)}{(x^2+n^2)(x^2+(n+1)^2)}$$

donc, pour x fixé, la suite de terme général $\frac{n}{x^2+n^2}$ est décroissante à partir d'un certain rang (par exemple le rang $E(x)+1$). Elle tend aussi vers 0, donc la série $\sum f_n(x)$ est convergente. La somme S de $\sum f_n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Il n'y a convergence normale sur auncune partie non vide de $\mathbb{R}$, puisqu'il n'y pas de convergence absolue (pour tout réel x fixé, $\frac{n}{x^2+n^2} \sim_n \frac{1}{n}$, terme général positif d'une série divergente).

On ne peut pas prouver la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ en utilisant le critère spécial des séries alternées, puisque le rang à partir duquel $\frac{n}{x^2+n^2}$ décroît avec n dépend de x.

En revanche, cela permet d'établir la convergence uniforme sur tout segment $[-a, a]$, car, pour tout $x \in [-a, a]$ et tout $n \geqslant a$, on peut appliquer la majoration du reste par le premier terme négligé :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{n}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

puis $\|R_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \frac{1}{n}$, d'où la convergence uniforme sur $[-a, a]$.

Cela suffit à établir la continuité de la somme S sur $\mathbb{R}$ (chaque f_n est évidemment continue).

Remarque : une autre approche aurait consisté à regrouper les termes d'indices $2k+1$ et $2k+2$, pour montrer la convergence uniforme sur tout segment.
Remarque : on aurait aussi pu montrer la convergence uniforme sur tout segment de $\sum f_n'$, et appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions pour trouver la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur tout segment.

Correction de l'exercice 832 – *Expression intégrale de la somme d'une série de fonctions (Centrale MP 2015)* 3

3.4. Étude asymptotique

Correction de l'exercice 833 – *Convergence uniforme non normale* 3

Correction de l'exercice 834 – *Équivalent pour une série de fonctions, encore* 1

Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right)$. Pour tout $x > 0$, $f_n(x) \sim_{n\infty} \frac{x}{n^2}$ et $\sum \frac{x}{n^2}$ est absolument convergente, donc $\sum f_n(x)$ est (absolument) convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) \sim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{n^2}\right) \sim_{x\to+\infty} \ln(x),$$

et $\sum \ln(x)$ est divergente pour $x > 0$ fixé (distinct de 1), le théorème de la double limite ne s'applique pas.
Remarque : le premier équivalent s'obtient en constatant que la différence de ces deux logarithmes tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

En revanche, l'application $g\ : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right)$ est continue, décroissante car $t \mapsto \frac{x}{t^2}$ est décroissante et $y \mapsto \ln(1+y)$ est croissante) et à valeurs positives pour $x > 0$ fixé : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)^2}\right) \leqslant \int_n^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right),$$

d'où, puisque g est intégrable sur $[1, +\infty[$ (g est continue, $g(t) \sim_{t\to\infty} \frac{x}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{x}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après l'exemple de Riemann), en sommant pour n décrivant $\mathbb{N}^*$:

$$f(x) - f_1(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right) \mathrm{d}t \leqslant f(x)$$

Intéressons-nous à $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

On effectue une intégration par parties, en introduisant les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ données par

$$u(t) = \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad v(t) = t$$

pour tout $t \geqslant 1$. La fonction uv a bien une limite finie en $+\infty$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right) \mathrm{d}t &= [u(t)v(t)]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} t\left(\frac{2t}{t^2+x} - \frac{2}{t}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\ln(1+x) + \int_1^{+\infty} \frac{2x}{t^2+x} \mathrm{d}t \\
&= -\ln(1+x) + 2\sqrt{x}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right]_1^{+\infty} \\
&= -\ln(1+x) + \pi\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\arctan(1/\sqrt{x})
\end{aligned}$$

On a donc

$$f(x) = \pi\sqrt{x} - \ln(1+x) - 2\sqrt{x}\arctan(1/\sqrt{x}) + \mathrm{O}_{x\to+\infty}(\ln(1+x))$$

d'où l'équivalent cherché, puisque le premier terme est prépondérant devant les autres en $+\infty$.

Correction de l'exercice 835 – *Un autre équivalent pour une somme de série de fonctions* 1

La fonction $f \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est définie au voisinage de $+\infty$, car, pour $x > 0$ fixé, $f_n(x) \sim \frac{\ln(n)}{\sqrt{x}n^{3/2}}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{x}n^{3/2}}$ est absolument convergente. En effet, il suffit, par comparaison à une série de Riemann, de trouver $\alpha > 1$ tel que

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{x}n^{3/2}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), i.e. \ln(n) = \mathrm{o}(n^{3/2-\alpha})$$

donc tout $\alpha \in]1, 3/2[$ convient.

Pour $x > 0$ fixé, cet équivalent nous suggère de montre la convergence uniforme, voire normale, de $\sum \sqrt{x} f_n(x)$ sur un voisinage de $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x > 0$

$$0 \leqslant \sqrt{x} f_n(x) = \frac{x \ln(n)}{1 + n^2 x} \leqslant \frac{x \ln(n)}{n^2 x} \leqslant \frac{\ln(n)}{n^2}$$

cette majoration est indépendante de x, et est le terme général d'une série convergente, d'où la convergence normale annoncée, puis, par le théorème de la double limite :

$$f(x) \sim_{x \to +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}}{\sqrt{x}}$$

Correction de l'exercice 836 – *Étude d'une série de fonctions* 1

1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}^k \frac{1}{n+n^2 x}}{\mathrm{d}x^k} = \frac{(-n^2)^k \, k!}{(n + n^2 x)^{k+1}}$$

La série de ce terme général converge uniformément sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.

2 On introduit la fonction $\varphi_x \ : t \mapsto \frac{1}{t+t^2 x} = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction étant décroissante :

$$\frac{1}{n + 1 + (n+1)^2 x} \leqslant \int_n^{n+1} \varphi_x(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n + n^2 x},$$

d'où

$$\int_1^{n+1} \varphi_x(t) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + k^2 x} \leqslant \varphi_x(1) + \int_1^n \varphi_x(t) \mathrm{d}t,$$

soit

$$\ln(1+x) - \ln(x + \frac{1}{n+1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + k^2 x} \leqslant \frac{1}{1+x} + \ln(1+x) - \ln(x + \frac{1}{n}),$$

un passage à la limite donnant $F(x) \sim -\ln(x)$.

3 $F(x) \sim \frac{\zeta(2)}{x}$.

Correction de l'exercice 837 – *Équivalents de séries de fonctions* 1

1 On fixe $x > 0$ (S_1 est impaire). Comme $\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et que $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente à termes positifs, $S_1(x)$ est bien défini.

En 0, $\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \sim_{x \to 0} \frac{1}{nx}$ mais $\sum \frac{1}{nx}$ diverge : pas de double limite.

L'application $g \ : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}$ est continue, décroissante (pour $x > 0$) et intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $t^2 g(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini). De plus, on sait calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)}$, on peut donc tenter une comparaison série-intégrale : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par décroissance de g :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}((n+1)x)} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$$

Comme les séries et l'intégrale convergent, on obtient, en sommant sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_1(x) - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} \leqslant S_1(x)$$

Or, en effectuant le changement $u = tx$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}(u)}$$

De plus, $\frac{1}{\mathrm{sh}(u)} \sim_{u \to 0} \frac{1}{u} > 0$, donc, par théorème d'intégration des relations de comparaison (de fonctions de signe constant), dans le cas de la divergence :

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}(u)} \sim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln(x)$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}(u)}$ est une constante, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} \sim_{x\to 0} -\frac{\ln(x)}{x}$$

Comme $S_1(x) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} = \mathrm{O}_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right)$, et comme $\frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \mathrm{o}_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$, on trouve :

$$S_1(x) \sim_{x\to 0} -\frac{\ln(x)}{x}$$

Remarque : en fait, comme g est décroissante, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)}$ a même nature que $\sum \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ (se démontre facilement à partir de la proposition sur la comparaison série-intégrale), donc une seule des deux convergences était nécessaire.

Remarque : cette méthode a fonctionné parce que l'écart entre la somme de la série et l'intégrale était bien négligeable devant l'intégrale.

Remarque : on pouvait bien sûr calculer explicitement $\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}(u)}$, mais ce qui compte, c'est de connaître son ordre de grandeur, il est donc naturel d'essayer d'utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison.

Remarque : si on veut un équivalent valable pour x négatif également, on peut prendre $\frac{-\ln(|x|)}{x}$.

2 On passe sur la bonne définition de S_2 sur $\mathbb{R}^*$.

Pour S_2, on a $\frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)} \sim_{x\to 0} \frac{1}{n^2x^2}$, on peut donc tenter d'utiliser le théorème de la double limite à $\sum \frac{x^2}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

Pour tout $x > 0$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{sh}(nx) \geqslant nx$ (par convexité de sh sur $\mathbb{R}_+$), donc $\frac{x^2}{\mathrm{sh}^2(nx)} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Cette majoration ne dépendant pas de $x \in \mathbb{R}_+^*$, et sachant que $\sum \frac{1}{n^2}$ (série de Riemann avec $2 > 1$), on en déduit la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions considérée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème de la double limite s'applique, et comme $\frac{x^2}{\mathrm{sh}^2(nx)}$ tend vers $\frac{1}{n^2}$ lorsque x tend vers 0, on obtient

$$S_2(x) \sim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6x^2}$$

Remarque : la comparaison série-intégrale ne fonctionne pas, car l'écart entre série et intégrale est du même ordre que l'intégrale.

4. La fonction zêta de Riemann

Correction de l'exercice 838 – *Équivalent de la fonction zêta de Riemann en 1* | 1

Correction de l'exercice 839 – *Équivalent faisant intervenir la fonction ζ* | 4

5. Applications du théorème de la double limite

Correction de l'exercice 840 – *Application du théorème de la double limite* | 2

Correction de l'exercice 841 – *Application topologique du théorème de la double limite* | 3C

Correction de l'exercice 842 – *Double limite pour une série de fonctions* | 2

Correction de l'exercice 843 – *Série de fonctions cachée* | 1

Si de loin u_n ressemble au terme d'une somme de Riemann, l'exposant n nous dissuade d'exploiter cette piste.

Pour introduire une série de fonctions convergente, en écrivant que $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(n)$, il serait intéressant de réécrire les termes de la somme afin qu'ils décroissent, ou du moins tendent vers 0 lorsque k est grand, d'où le changement d'indice $k \leftarrow n-k$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$$

puis l'introduction, pour tout $k \in \mathbb{N}$, de $v_k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ tel que $v_k(n) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n$ si $k \leqslant n$ et $v_k(n) = 0$ si $k > n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $n \geqslant k$:

$$v_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) \leqslant \exp(-n \cdot \frac{k}{n}) = e^{-k}$$

par croissance de l'exponentielle, et l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$, valable pour tout $x \in]-1, +\infty[$, et provenant de la concavité du logarithme.

Pour $n < k$, on a $v_k(n) = 0$, de sorte que $\|v_k\|_{\infty,\mathbb{N}^*} = e^{-k}$.

Or la série géométrique $\sum e^{-k}$ est convergente (car $|e^{-1}| < 1$), d'où la convergence normale sur $\mathbb{N}^*$ de $\sum v_k$. Comme v_k a pour limite e^{-k} en $+\infty$, le théorème de la double limite assure que (u_n) converge vers $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$, c'est-à-dire vers $\frac{e}{e-1}$.

CHAPITRE XLIV

Intégrales à paramètres (corrections)

1. Le théorème de convergence dominée

1.1. Application directe

Correction de l'exercice 844 – *Banque CCP 2016 25* | 0

Correction de l'exercice 845 – *Application directe du théorème de convergence dominée* | 0

Correction de l'exercice 846 – *CCP MP 2015* | 0

Correction de l'exercice 847 – *Banque CCP 2016 27* | 2

Correction de l'exercice 848 – *Limite d'une suite intégrale (Mines MP 2015)* | 2

Correction de l'exercice 849 – *Limite de suites d'intégrales* | 2

Correction de l'exercice 850 – *Limite d'intégrales* | 3

Appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre réel (ou théorème de continuité des intégrales à paramètre).

Pour calculer $I \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{(t^2+1)t}\mathrm{d}t$, effectuer $u = \sqrt{t^2+1}$:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{u-1}{u^2\sqrt{u^2-1}}\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty}\frac{1}{u(u+1)}\mathrm{d}u = [\ln(u/(u+1))]_1^{+\infty} = \ln(2)$$

Correction de l'exercice 851 – *Convergence dominée, cas d'un paramètre réel (X MP 08)* | 3

Correction de l'exercice 852 – *Convergence monotone* | 1

Correction de l'exercice 853 – *Limite d'intégrales, encore* | 3

Soit $f_n(x) = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$ pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*$.

(f_n) est une suite de fonctions continues (par morceaux) convergeant simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction identiquement nulle car, pour $x > 0$ fixé, $\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \sim_{k\infty} \frac{x}{k} > 0$, donc $\sum \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$ diverge, puis la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ car la série est à termes positifs.
Remarque : on aurait aussi pu utiliser la sommation des relations de comparaison (cas de la divergence) pour obtenir directement $\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \sim_{n\infty} x\ln(n)$.
Remarque : l'idée de prendre le logarithme provient de l'écriture de $f_n(x)$ comme un produit et quotient de réels strictement positifs.

$\ln(f_n(x))$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini, donc, par composition des limites, $(f_n(x))_n$ converge vers 0.

De plus, pour $x > 0$ fixé, on a $0 \leqslant \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{n+1}{x+n+1} \leqslant 1$, puis, en multipliant par $f_n(x)$ (qui est positif), $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$. Par conséquent on a $|f_n| \leqslant f_2$ pour tout $n \geqslant 2$, et f_2 est intégrable. D'après le théorème de convergence dominée, la limite cherchée (existe et) vaut 0.

Correction de l'exercice 854 – *Toujours une limite d'intégrales* 3

Montrer d'abord par convergence dominée que $\int_0^1 (f(x))^{1/n}\mathrm{d}x \to 1$.
Ensuite on prend le logarithme :

$$\ln\left(\left(\int_0^1 ((f(x))^{1/n}\mathrm{d}x\right)^n\right) = n\ln\left(\int_0^1 ((f(x))^{1/n}\mathrm{d}x\right) \sim_n n\left(\int_0^1 ((f(x))^{1/n}\mathrm{d}x - 1\right) = \int_0^1 n(f(x)^{1/n} - 1)\mathrm{d}x$$

Or pour tout $y > 0$, $\frac{y^{1/n}-1}{1/n}$ tend vers $\ln(y)$ lorsque n tend vers l'infini. Si en outre $y < 1$, alors

$$\left|\frac{y^{1/n}-1}{1/n}\right| = \frac{1-y^{1/n}}{1/n} \leqslant -\ln(y)$$

par l'inégalité $e^u \geqslant 1 + u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (appliquée ici à $u = \frac{\ln(y)}{n}$).
Comme $y \mapsto -\ln(y)$ est intégrable sur $]0, 1]$, on peut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée. On conclut aisément par continuité de l'exponentielle.

Correction de l'exercice 855 – *Existence et calcul d'une intégrale* 3

Cette intégrale (que l'on notera I) converge, puisque $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$, et que, φ étant bornée, $\frac{\varphi(t)}{t^2} = \mathrm{O}_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
La 1-périodicité de φ nous incite à utiliser la relation de Chasles :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{\varphi(t)}{(t+k)^2}\mathrm{d}t$$

par changement de variable.

Correction de l'exercice 856 – *Existence et limite d'une suite d'intégrales* 0

Correction de l'exercice 857 – *Limite d'une suite d'intégrales dépendant d'une fonction* 0

1.2. Utilisation du TCVD pour étudier la nature d'une série

Correction de l'exercice 858 – *Banque CCP 2016 26* 2

Correction de l'exercice 859 – *Petites Mines MP 2015* 2

Correction de l'exercice 860 – *Nature d'une série alternée d'intégrales (CCP MP 13)* 0

Correction de l'exercice 861 – *Nature d'une série dont le terme général est une intégrale* 3

1.3. Utilisation du TCVD pour déterminer un équivalent

Correction de l'exercice 862 – *Un équivalent d'une suite d'intégrales* 2

Correction de l'exercice 863 – *Mines MP 10* 2

Correction de l'exercice 864 – *Mines MP 2015* 3

Correction de l'exercice 865 – *Mines MP 2015* 3

Correction de l'exercice 866 – *Développement asymptotique d'une suite d'intégrales* 1

1 Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \in]0,1[$, $g_n(t) = f(t)\ln(1+t^n)$. Les fonctions g_n sont continues (par morceaux) sur $]0,1[$, et la suite (g_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction nulle (évidemment continue par morceaux).

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \in]0,1[$:

$$|g_n(t)| \leqslant \ln(2)|f(t)|$$

or $\ln(2)|f|$ est intégrable sur $]0,1[$ (car f est continue sur $[0,1]$).

Le théorème de convergence dominée montre alors que (I_n) tend vers 0.

2 On effectue le changement de variable $u = t^n$ (polynomial donc de classe $\mathcal{C}^1$), induisant une bijection strictement croissante de $]0,1[$ sur lui-même, d'où :

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+u)\left(\frac{1}{n}f(u^{1/n})\frac{u^{1/n}}{u}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}f(u^{1/n})u^{1/n}\mathrm{d}u$$

Posons, pour tout $(n,u) \in \mathbb{N}\times]0,1[$: $h_n(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}f(u^{1/n})u^{1/n}$.

Les fonctions h_n sont continues (par morceaux) sur $]0,1[$, et la suite (h_n) converge simplement vers $h\ : u \mapsto f(1)\frac{\ln(1+u)}{u}$ sur $]0,1[$.

De plus, si on note M un majorant de $|f|$ (f est bornée car continue sur le segment $[0,1]$), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $u \in]0,1[$:

$$|h_n(u)| \leqslant M\frac{\ln(1+u)}{u}$$

et $u \mapsto M\frac{\ln(1+u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$ (elle est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$) : le théorème de convergence dominée assure que $\int_0^1 h_n(u)\mathrm{d}u$ tend vers $C \overset{def}{=} \int_0^1 f(1)\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$.

Or C est non nul car $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $]0,1[$, d'où le résultat souhaité.

3 On écrit, pour tout $u \in]0,1[$: $\frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^n}{n+1}$.

Comme $\int_0^1 \left|\frac{(-1)^n u^n}{n+1}\right|\mathrm{d}u = \frac{1}{(n+1)^2}$, $\sum\int_0^1\left|\frac{(-1)^n u^n}{n+1}\right|\mathrm{d}u$ converge, donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, il vient :

$$C = f(1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

En formant $C - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(1)}{n^2}$, on trouve que $C = \frac{f(1)\pi^2}{12}$.

Remarque : pour cette question, un argument de convergence uniforme de $\sum\frac{(-1)^n u^n}{n+1}$ (par majoration du reste grâce au critère spécial des séries alternées) aurait été recevable.

Correction de l'exercice 867 – *Mines MP 2015* 3D

Correction de l'exercice 868 – *Étude d'une suite d'intégrales* 1

1 u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} = \left[2(1+t)^{1/2}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

2 On a, d'après la formule de Bernoulli :

$$u_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1-t^{n+1}}}\mathrm{d}t$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $t \in]0,1[$: $g_n(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1-t^{n+1}}}$. La suite (g_n) de fonctions continues par morceaux converge simplement vers $g\ : t \mapsto \sqrt{1-t}$, également continue par morceaux. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant g_n \leqslant g_1$, et g_1 est intégrable sur $]0,1[$, donc le théorème de convergence dominée assure que (u_n) converge vers $\int_0^1 \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

3 Reformulons l'objectif : on cherche à montrer que la suite de terme général $J_n \overset{def}{=} n^{3/2}(u_n - 2/3)$ converge vers un certain réel strictement positif I.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} n^{3/2}(u_n - 2/3) &= n^{3/2} \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-t}{1-t^{n+1}}} - \sqrt{1-t} \right) \mathrm{d}t \\ &= n^{3/2} \int_0^1 \sqrt{1-t} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^{n+1}}} - 1 \right) \mathrm{d}t \\ &= n^{3/2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}\, t^{n+1}}{\sqrt{1-t^{n+1}}\left(1+\sqrt{1-t^{n+1}}\right)} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

en multipliant par la quantité conjuguée.

Pour compenser le terme en $n^{3/2}$, on effectue le changement de variable $u = t^{n+1}$:

$$\begin{aligned} J_n &= n^{3/2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u^{1/(n+1)}}}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})} \frac{u^{1/(n+1)}}{(n+1)} \mathrm{d}u \\ &= \frac{n^{3/2}}{n+1} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}\, u^{1/(n+1)} \sqrt{1-u^{1/(n+1)}} \mathrm{d}u \end{aligned}$$

Analysons les différentes termes : le facteur devant l'intégrale équivaut à $\sqrt{n}$, donc à $\sqrt{n+1}$, le terme $\frac{1}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}$ ne dépend pas de n, $u^{1/(n+1)}$ tend à u fixé vers 1 et se domine bien.

Reste le terme $\sqrt{1-u^{1/(n+1)}}$, qui tend vers 0 à u fixé lorsque n tend vers l'infini : il va falloir d'une manière ou d'une autre montrer que les termes qui tendent respectivement vers l'infini et 0 se « compensent », d'où l'idée d'écrire

$$J_n \sim \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}\, u^{1/(n+1)} \sqrt{\frac{1-u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}} \mathrm{d}u$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in]0,1[$, étudions $\sqrt{\frac{1-u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}}$:

$$\sqrt{1-u^t} = \sqrt{1-\exp(t\ln(u))} = \sqrt{1-1-t\ln(u)+\mathrm{o}_{t\to 0}(t)} = \sqrt{-t\ln(u)+\mathrm{o}_{t\to 0}(t)} \sim_{t\to 0} \sqrt{t}\,\sqrt{-\ln(u)}$$

donc $\sqrt{\frac{1-u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}}$ tend vers $\sqrt{-\ln(u)}$ lorsque n tend vers l'infini.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$ (par convexité de l'exponentielle), donc $u^{1/(n+1)} \geqslant 1 + \frac{\ln(u)}{n+1}$, puis

$$0 \leqslant \sqrt{\frac{1-u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}} \leqslant \sqrt{-\ln(u)}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0,1[$,

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}\, u^{1/(n+1)} \sqrt{\frac{1-u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}} \leqslant \frac{\sqrt{-\ln(u)}}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}$$

et cette fonction par laquelle on domine est bien intégrable sur $]0,1[$ (faussement impropre en 1, et on exploite $\lim_{u\to 0} \sqrt{u}\,\sqrt{-\ln(u)} = 0$ en 0).

Le théorème de convergence dominée prouve alors que (J_n) converge vers $\int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln(u)}}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})} \mathrm{d}u$.

En conclusion,

$$I_n - \frac{2}{3} \sim_n \frac{1}{n^{3/2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln(u)}}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})} \mathrm{d}u$$

Correction de l'exercice 869 – *Équivalent d'une suite d'intégrales* 2

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}$: on a

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^3}$$

or $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et, les f_n sont continues (par morceaux) et la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ (évidemment continue par morceaux) : le théorème de convergence dominée fournit alors le résultat souhaité.

2 On effectue le changement de variable indiqué : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u^{1/3}/n^{1/3})}{1+u} \frac{1}{3n^{4/3}u^{2/3}} \mathrm{d}u$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\sin(u^{1/3}/n^{1/3})}{1+u}\,\frac{1}{3n^{4/3}u^{2/3}} \sim_n \frac{1}{3n^{5/3}u^{1/3}(1+u)}$$

Il est donc naturel d'étudier $n^{5/3}I_n$, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin(u^{1/3}/n^{1/3})}{1+u}\,\frac{1}{3u^{2/3}}\mathrm{d}u$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $u \in \mathbb{R}_+$:

$$\left| n^{1/3}\frac{\sin(u^{1/3}/n^{1/3})}{1+u}\,\frac{1}{3u^{2/3}}\right| \leqslant \frac{1}{3u^{1/3}(1+u)}$$

(grâce à la majoration $|\sin(\alpha)| \leqslant |\alpha|$ pour tout réel α) et $\varphi\ : u \mapsto \frac{1}{3u^{1/3}(1+u)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et vérifiant

$$\varphi(u) \sim_{u\to 0} \frac{1}{3u^{1/3}} \quad \text{et} \quad \varphi(u) \sim_{u\to+\infty} \frac{1}{3u^{4/3}}$$

(on a bien $1/3 < 1$ et $4/3 > 1$).

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée :

$$I_n \sim \frac{C}{n^{5/3}},\ \text{où } C = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3u^{1/3}(1+u)}\mathrm{d}u$$

On peut calculer C, en effectuant le changement de variable $v = u^{1/3}$:

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{3v^2\mathrm{d}v}{3v(1+v^3)} = \int_0^{+\infty} \frac{v\mathrm{d}v}{1+v^3}$$

Or

$$\frac{X}{X^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{1+X} + \frac{X+1}{X^2-X+1}\right)$$

(de la forme $\frac{\alpha}{1+X} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2-X+1}$, on trouve α en multipliant par $1+X$ puis en évaluant en 0, β en multipliant par X puis en regardant la limite en $+\infty$, et γ en évaluant en 0), d'où

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{3}\left[-\ln(1+v) + \frac{1}{2}\ln(v^2-v+1) + \frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(2(v-1/2)/\sqrt{3})\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} \end{aligned}$$

Remarque : le changement de variable $v = n^{4/3}x$ aurait clairement été plus judicieux.

Correction de l'exercice 870 – *Équivalent d'une suite d'intégrales faisant intervenir* Γ 3

Correction de l'exercice 871 – *Calcul d'une limite d'intégrales* 3

Correction de l'exercice 872 – *Limite et équivalent d'une suite d'intégrales* 0

Correction de l'exercice 873 – *Équivalent d'une suite d'intégrales (Télécom Sud Paris)* 0

Correction de l'exercice 874 – *Équivalents de suites d'intégrales* 3

Correction de l'exercice 875 – *Limite d'une suite d'intégrales* 3

Correction de l'exercice 876 – *Développement asymptotique d'une suite d'intégrales* 3

2. Intégrales à paramètres

2.1. Calculs d'intégrales grâce par dérivation sous le signe somme

Correction de l'exercice 877 – *Calcul d'une intégrale à paramètre (ENSAM 2015)* 2

Correction de l'exercice 878 – *Étude d'une intégrale à paramètre (ENSEA 13)* 0

Correction de l'exercice 879 – *Calcul d'une intégrale à paramètres (CCP MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 880 – *Calcul d'une intégrale à paramètre (Télécom Sud Paris MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 881 – *Existence et calcul d'une intégrale à paramètre, encore* 2

Notons $g(x,t) = \frac{\ln(1+x\cos(t))}{\cos(t)}$ pour tout $(x,t) \in]-1,1[\times[0,\frac{\pi}{2}[$. La fonction g admet une dérivée partielle première par rapport à sa première variable, et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+x\cos(t)}$$

De plus, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x\cos(t)}\mathrm{d}t$ se calcule : la piste naturelle consiste donc à utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Sur $]-1,1[\times[0,\frac{\pi}{2}[$:

(1) la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ (faussement impropre en $\frac{\pi}{2}$).

(2) $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue par rapport à sa première variable, et intégrable par rapport à sa seconde variable.

(3) Pour tout $a \in]0,1[$, tout $(x,t) \in [-a,a]\times[0,\frac{\pi}{2}[$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{\max(|\ln(1-a\cos(t))|,|\ln(1+a\cos(t))|)}{\cos(t)}$$

et $t \mapsto \frac{\max(|\ln(1-a\cos(t))|,|\ln(1+a\cos(t))|)}{\cos(t)}$ est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

Par conséquent, f est dérivable sur $]-1,1[$, et, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x\cos(t)}\mathrm{d}t$$

On effectue le changement de variable $u = \tan(t/2)$ ($t \mapsto \tan(t/2)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi/2[$ sur $[0,1[$), de sorte que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^1 \frac{1}{1+x\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{2}{1+x+(1-x)u^2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left[\arctan\left(u\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]_0^1 \end{aligned}$$

d'où

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

En fait, en posant $\theta = \arccos(x)$, on peut vérifier que

$$f'(x) = \frac{\theta}{\sin(\theta)} = \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos'(x)\arccos(x)$$

Comme $f(0) = 0$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \arccos(x)^2\right)$$

Correction de l'exercice 882 – *Existence et calcul d'une intégrale à paramètre, toujours* 2

Correction de l'exercice 883 – *Calcul d'une intégrale à paramètre (Centrale MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 884 – *Existence et calcul d'une intégrale à paramètre* 3

Notons, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$: $f(x,t) = \frac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}$.

Pour x fixé, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet une limite finie en 0 et $f(x,t) = \mathrm{o}_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $I(x)$ est bien définie (et l'intégrale définissant $I(x)$ est absolument convergente).

On observe que f admet une dérivée partielle première par rapport à sa première variable, et que l'on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = ie^{ixt}e^{-t} = ie^{(ix-1)t}$, et $t \mapsto ie^{(ix-1)t}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout réel x.

Or, pour tout réel non nul x :

$$\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$$

Nous allons essayer d'appliquer le théorème de Leibniz. La fonction $(x,t) \mapsto ie^{(ix-1)t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et, pour tout réel x, tout $t > 0$:

$$\left|i(e^{(ix-1)t}\right| \leqslant e^{-t}$$

(il y a en fait égalité).

Cette domination permet d'affirmer que I est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout réel x :

$$I'(x) = \frac{i}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

En outre, $I(0) = 0$, d'où, en intégrant :

$$I(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + i\arctan(x)$$

Correction de l'exercice 885 – *Simplification d'expressions intégrales à paramètres* 2

Correction de l'exercice 886 – *Un calcul d'intégrale via une intégrale à paramètre* 2

Correction de l'exercice 887 – *Égalité entre deux intégrales* 2

Le fait de devoir montrer cette égalité pour tout x donne l'idée de montrer que les fonctions sont deux primitives d'une même fonction, coïncidant en un point.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

La fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ grâce à l'encadrement

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2(1+t^2)}$$

Cette domination (associée à la continuité de $x \mapsto \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$) permet au passage d'établir la continuité de F sur $\mathbb{R}_+$.

G est également définie sur $\mathbb{R}_+$. En effet, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ admet une limite finie en 1 et se prolonge donc par continuité en une fonction g continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, en 0, $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \sim_{t \to 0} -\ln(t)$, et $-\ln$ est intégrable sur $]0,1]$.

En outre $F(0) = G(0)(= 0)$. Il reste à montrer que F et G ont même dérivée.

G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(x) = g(x)$ (théorème fondamental de l'analyse).

Pour la dérivabilité de F on utilise bien sûr le théorème de dérivation sous le signe somme : posons $h(x,t) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{t(1+(x/t)^2)(1+t^2)} = \frac{t}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

En particulier, $\frac{\partial h}{\partial x}$ est continue par rapport à sa première variable, et continue par morceaux par rapport à sa seconde variable.

Soit $a > 0$. Pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leqslant \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \leqslant \frac{t}{(a^2+t^2)(1+t^2)}$$

et cette domination (associée à ce qui précède) par la fonction intégrable $t \mapsto \frac{t}{(a^2+t^2)(1+t^2)}$ justifie le caractère $\mathcal{C}^1$ de F sur $\mathbb{R}_+^*$, et le fait que, pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

Or pour tout réels distincts α et β,

$$\frac{1}{(X+\alpha)(X+\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{X+\alpha} - \frac{1}{X+\beta}\right)$$

donc pour tout $t > 0$, tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$\frac{t}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{t^2+x^2} - \frac{t}{t^2+1}\right)$$

de sorte que si $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$F'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\left(\frac{t^2+x^2}{t^2+1}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{x^2-1} = g(x)$$

La continuité de F' en 1 montre que cette relation est valable en 1.

Pour résumer, F et G sont nulles en 0, dérivables de même dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$, et F est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour s'assurer que $F = G$ sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer que G aussi est continue en 0. Or cela résulte de la définition d'une intégrale impropre : par exemple, $\int_0^{1/2} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \int_x^{1/2} g(t)\mathrm{d}t$, d'où $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Le résultat est donc bien établi.

2.2. Étude générale d'une intégrale à paramètre

Correction de l'exercice 888 – *Simplification de fonctions définies par des intégrales à paramètres* 3

Correction de l'exercice 889 – *Représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale* 2

Correction de l'exercice 890 – *Le théorème fondamental de l'algèbre par les intégrales* 2I

Correction de l'exercice 891 – *Étude d'une intégrale à paramètre* 3

Correction de l'exercice 892 – *Uniforme continuité d'une intégrale à paramètre* 3

Correction de l'exercice 893 – *Étude fonctionnelle d'une intégrale à paramètre* 2

Correction de l'exercice 894 – *Études d'intégrales à paramètre* 2

2.3. Étude asymptotique d'une intégrale à paramètre

Correction de l'exercice 895 – *Banque CCP 2016 50* 2

Correction de l'exercice 896 – *Étude d'une intégrale à paramètre avec équivalent (Petites Mines MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 897 – *Développement asymptotique d'une fonction intégrale* 3

Correction de l'exercice 898 – *Équivalent en $+\infty$ d'une intégrale à paramètre* 3

Correction de l'exercice 899 – *Régularité et équivalent d'une intégrale à paramètre (Mines MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 900 – *Fonction définie par une intégrale* 1

1 Soit $f : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$ par opérations algébriques, donc $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Le seul problème d'intégrabilité se pose en $+\infty$.

Si $x > 0$, alors $f(x,t) = o_{t \to +\infty}(1/t^2)$, donc $F(x)$ est bien définie.

Si $x \leqslant 0$, alors $0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant f(x,t)$ pour tout $t \geqslant 1$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ diverge.

Le domaine de définition de F est donc bien $\mathbb{R}_+^*$.

2 Soit $a > 0$. Nous allons utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres sur $[a,+\infty[$. Pour tout $x \geqslant a$, tout $t \geqslant 1$:

$$0 \leqslant f(x,t) \leqslant e^{-at}$$

or $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, et f est continue par rapport à ses deux variables.

Ceci prouve que $F_{|[a,+\infty[}$ est continue, puis, ceci valant pour tout $a > 0$, que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Pour $t \geqslant 1$ fixé, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}$$

L'application $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est de continue sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue par rapport à sa première variable et continue par morceaux par rapport à sa seconde variable.

Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, tout $(x,t) \in [a,b] \times [1,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant t^k e^{-at}$$

Cette domination par une fonction intégrable (et ce qui précède) prouve que F est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et que $F^{(k)}$ s'obtient en dérivant k fois sous le signe somme).

4 On a, en faisant le changement de variable $u = xt$:

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{x^2+u^2}}\mathrm{d}u$$

Face à cette intégrale, le x dans la borne intégrale nous incite à utiliser l'intégration des relations de comparaison, tandis que le x^2 dans l'intégrande incite plutôt à utiliser le théorème de convergence dominée dans le cas d'un paramètre réel.

Comme il n'y a pas de théorème unifiant les deux résultats mentionnés, nous allons écrire

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}t$$

On peut appliquer le théorème d'intégration des relations de comparaison pour la seconde intégrale : $e^{-u}/u \sim_{u \to 0} 1/u$ et $u \mapsto 1/u$ est positive non intégrable sur $]0,1]$, donc

$$\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}t \sim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln(x)$$

et comme $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}t$ est une constante, on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}t \sim_{x \to 0} -\ln(x)$$

Concernant la première intégrale, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}} - \frac{1}{u} = \frac{u-\sqrt{x^2+u^2}}{u\sqrt{x^2+u^2}} = \frac{-x^2}{u\sqrt{x^2+u^2}(u+\sqrt{x^2+u^2})}$$

On a donc $\left|e^{-u}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}}-\frac{1}{u}\right)\right| \leqslant \frac{x^2}{2u^3}$ donc

$$\left|\int_x^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}}-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\right| \leqslant x^2\int_x^{+\infty}\frac{1}{2u^3}\mathrm{d}u = 1$$

On obtient donc bien le résultat.

2.4. Intégrales à paramètres et équations différentielles

Correction de l'exercice 901 – *Banque CCP 2016 30* — 2

Correction de l'exercice 902 – *Équivalent d'une intégrale à paramètre (CCP MP 2015)* — 2

Correction de l'exercice 903 – *Expression sous forme intégrale d'une solution d'une équation différentielle* — 0

Correction de l'exercice 904 – *Résolution d'une équation différentielle via une intégrale à paramètre* — 2

Correction de l'exercice 905 – *Intégrale à paramètre et résolution d'une équation différentielle (Centrale MP 2015)* — 3

Correction de l'exercice 906 – *Intégrale à paramètre et équation différentielle* — 3

2.5. Calcul d'une intégrale à l'aide d'intégrales à paramètres

Correction de l'exercice 907 – *Calcul de l'intégrale de Gauss par convergence dominée* — 1

Correction de l'exercice 908 – *Un calcul de l'intégrale de Gauss par intégrale à paramètre* — 1

Correction de l'exercice 909 – *Calcul de l'intégrale de Dirichlet* — 2I

1

i Posons $a(x,t)=\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$. Comme $0\leqslant a(x,t)\leqslant\frac{1}{1+t^2}$ pour tout $(x,t)\in(\mathbb{R}_+)^2$, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ (et ne l'est pas en $x<0$ car dans ce cas, $1=\mathrm{o}_{t\to+\infty}(a(x,t))$.

De plus, a est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue par rapport à chacune de ses variables. La majoration de $a(x,t)$ proposée ci-dessus montre que l'hypothèse de dérivation du théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique, d'où la continuité de f.

ii Soit $b>0$. Sur $[b,+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial a}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant e^{-bt} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant e^{-bt}$$

donc on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, obtenant le fait que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais aussi que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

On a donc

$$f''(x)+f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$$

2 On montre que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ grâce à une intégration par parties (comme pour l'intégrale de Dirichlet).

Remarque : l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$ est toutefois semi-convergente (convergente mais pas absolument convergente). Cette semi-convergence fait que le théorème de continuité des intégrales à paramètres ne s'applique pas directement.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On effectue le changement de variable $u = x + t$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} \mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t &= \int_{u=x}^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u \\ &= \int_{u=x}^{+\infty} \frac{\sin(u)\cos(x) - \sin(x)\cos(u)}{u}\mathrm{d}u \\ &= \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u \quad (\star)\end{aligned}$$

cette dernière égalité se justifie en montrant la convergence des intégrales engagées (toujours par une intégration par parties).

Or $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ est la primitive de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de limite nulle en $+\infty$. De même pour $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u$. Ceci montre par opérations algébriques que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le fait que g soit de limite nulle en $+\infty$ s'obtient aisément par la relation $\star$ (le produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0 en $+\infty$ tend vers 0 en $+\infty$).

Reste à établir la continuité en 0 : la relation $\star$ la justifie, en observant que $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ est continue en 0 (par définition et existence de l'intégrale de Dirichlet). Le même raisonnement ne s'applique pas à $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u$, car $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u$ est divergente (problème en 0). Cependant, pour tout $x \in]0,1]$

$$\left|\int_x^1 \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_x^1 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln(x)$$

et $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$, donc

$$\sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u \to_{x\to 0} 0$$

ce qui montre que g admet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ pour limite à droite en 0, soit sa valeur en 0 : g est continue en 0.

Remarque : on aurait pu établir la continuité de g en 0 en reprenant la formule initiale : (preuve rapide)

$$\begin{aligned}|g(x) - g(0)| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(t)}{t(x+t)}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant x\left|\int_0^1 \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t\right| + \left|x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0.

3 $f - g$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, donc $f - g \in \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. Comme elle est en outre de limite nulle en $+\infty$, $f - g$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité en 0.

On a en particulier $f(0) = g(0)$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Correction de l'exercice 910 – *Calcul d'une intégrale via une intégrale à paramètre* 2

(Preuve rapide)

1 Provient de la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2(1+t^2)}$$

2 En posant $g(x,t) = \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$, on a existence de $\frac{\partial g}{\partial x}$, continuité (resp. continuité par morceaux) de cette fonction par rapport à sa première (resp. sa seconde) variable, et, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}$$

On domine facilement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ (par $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$), d'où le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et le fait que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

Pour $x \neq 1$, on obtient par une décomposition en éléments simples

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\left(-\frac{t}{1+t^2} + \frac{x^2 t}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2(x^2-1)}\left[\ln\left(\frac{1+x^2t^2}{1+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Par continuité de f' en 1, $f'(1) = \frac{1}{2}$.

3 On a

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t = -\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t = f(0) - f(1) = -f(1) = -\left[\frac{1}{2}(\arctan(t))^2\right]_0^{+\infty} = -\frac{\pi^2}{8}$$

Remarque : pour calculer cette intégrale, une autre approche possible consistait à partir de $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$ pour tout $t \in [0,1[$, puis d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme (voir un exocours).

2.6. Fonction Γ d'Euler

Revoir d'abord l'exercice 347

Correction de l'exercice 911 – *Continuité de la fonction Gamma d'Euler* 1

On rappelle que la fonction Γ est bien définie, voir 347.
On introduit l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array}$$

Cette fonction est continue par rapport à sa première variable, continue par morceaux (et même continue) par rapport à sa seconde variable.

Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$:

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

où $\varphi(t) = t^{a-1}e^{-t}$ si $t \leqslant 1$, et $\varphi(t) = t^{b-1}e^{-t}$ si $t > 1$. Cette fonction est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, et intégrable (essentiellement parce que $\Gamma(a)$ et $\Gamma(b)$ sont bien définis.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\Gamma_{|[a,b]}$ est continue sur $[a,b]$. Ceci valant pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et la continuité étant une notion locale, la fonction Γ est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 912 – *Banque CCP 2016 29* 1

Correction de l'exercice 913 – *Dérivées de la fonction Gamma d'Euler* 1

On rappelle que la fonction Γ est bien définie, voir 347.
On introduit l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array}$$

Cette fonction est continue par rapport à sa première variable, continue par morceaux (et même continue) par rapport à sa seconde variable.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est bien définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et, pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln(t))^k t^{x-1}e^{-t}$$

Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_k(t)$$

où $\varphi_k(t) = |\ln(t)|^k t^{a-1}e^{-t}$ si $t \leqslant 1$, et $\varphi_k(t) = |\ln(t)|^k t^{b-1}e^{-t}$ si $t > 1$. Cette fonction est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, $\varphi_k(t) = \mathrm{o}_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (exemple de Riemann). De plus

$$\varphi_k(t) = \mathrm{o}_{t \to 0}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$$

où on a fixé $\alpha \in]0, 1-a[$, et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable au voisinage de 0 car $\alpha < 1$ (exemple de Riemann).

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres itéré, avec domination sur tout segment, Γ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et, de plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

On note bien que Γ est convexe, puisque de dérivée seconde positive.

3. Intégration terme à terme

Correction de l'exercice 914 – *Banque CCP 2016 49* 2C

Correction de l'exercice 915 – *Équivalent d'une intégrale à paramètre* 2

Correction de l'exercice 916 – *Information sur $\zeta(3/2)$* 0

Correction de l'exercice 917 – *Une application du théorème d'intégration terme à terme* 2

Tout d'abord I_k est bien définie car la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet une limite finie en 0, et car $\frac{t^k}{e^t-1} = \mathrm{o}_{t\to+\infty}(1/t^2)$.

Grâce à l'indication, on peut écrire

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^k e^{-nt} \right) \mathrm{d}t$$

Il paraît naturel d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme (et ce d'autant plus que $t^k e^{-nt}$ est positif pour tout $t > 0$).

La série de fonctions $\sum_n (t \mapsto t^k e^{-nt})$ de fonctions continues converge simplement vers la fonction continue $t \mapsto \frac{t^k}{e^t-1}$.

De plus, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors, en effectuant le changement de variable $u = nt$, on constate que $\int_0^{+\infty} \left| t^k e^{-nt} \right| dt$ a même nature que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^k e^{-u} \frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{1}{n^{k+1}} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} \mathrm{d}u$.

Or on reconnaît en cette dernière intégrale la fonction Γ évaluée en $k+1$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \left| t^k e^{-nt} \right| \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(k+1)}{n^{k+1}} = \frac{k!}{n^{k+1}}$$

Comme la fonction ζ est bien définie en $k+1 (>1)$, on a bien convergence de $\sum_n \int_0^{+\infty} \left| t^k e^{-nt} \right| \mathrm{d}t$, et le théorème d'intégration terme à terme donne bien :

$$I_k = k! \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \right) = k!\, \zeta(k+1)$$

Remarque : le théorème d'intégration terme à terme est au programme (bien qu'admis), on peut donc l'appliquer sans problème. On aurait toutefois pu s'en passer par un argument de type convergence monotone pour produire une preuve à partir du seul théorème de convergence dominée (en dominant les sommes partielles par la limite simple), car la série de fonctions est à termes positifs.

Remarque : en variante de cet exercice, on peut montrer que pour tout réel $x > 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \Gamma(x)\zeta(x)$$

Correction de l'exercice 918 – *Une interversion somme-intégrale (Centrale PSI 10)* 2

Le membre de droite existe par application du critère spécial des séries alternées ($(1/u_n)$ est bien décroissante de limite nulle).

Ce même critère montre que pour tout $x > 0$, $\sum (-1)^n e^{-u_n x}$ converge. Il fournit aussi une majoration du reste, en particulier

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-u_n x} \leqslant e^{-u_0 x}$$

Il manque la continuité par morceaux de la somme pour justifier l'existence du membre de gauche, que l'on obtient par exemple par un argument de convergence sur tout $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$ grâce à la majoration du reste :

$$\forall\, x \geqslant a, \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n e^{-u_n x}\right| \leqslant e^{-u_{N+1}x} \leqslant e^{-u_{N+1}a}$$

Pour montrer l'égalité entre ces deux expressions, il n'est pas possible d'appliquer directement le théorème d'intégration terme à terme car il n'est pas sûr que $\sum \frac{1}{u_n}$ converge.

Cependant, on a, pour tout $x>0$, tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-u_n x}\right| \leqslant e^{-u_0 x}$$

car à x fixé, les suites des sommes partielles des rangs pairs et impairs respectivement sont adjacentes.

Cette domination légitime l'emploi du théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles, qui conduit bien au résultat voulu.

Correction de l'exercice 919 – *Intégrale sur $\mathbb{R}_+$ d'une série de fonctions* 2

Correction de l'exercice 920 – *Interversion série-intégrale* 2

CHAPITRE XLV

Réduction des endomorphismes (corrections)

1. Valeurs propres, vecteurs propres

1.1. Valeurs propres, éléments propres en dimension finie

Correction de l'exercice 921 – *Liberté et sous-espaces propres* 0

Correction de l'exercice 922 – *Effet d'un automorphisme intérieur sur les éléments propres* 2I

Correction de l'exercice 923 – *Valeurs propres et polynômes annulateurs (CCP MP 2015)* 0

Correction de l'exercice 924 – *Étude de spectre (CCP MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 925 – *Éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (Mines MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 926 – *Banque CCP 2016 93* 2

Correction de l'exercice 927 – *Valeur propre double pour une combinaison linéaire* 3

Le résultat est trivial si (A, B, C) est liée : supposons (A, B, C) libre. $\mathrm{Vect}(A, B, C)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Comme $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{K}^2\right\}$ est de dimension 2, et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est de dimension 4, il existe des scalaires α, β, γ non tous nuls, des scalaires a et b, tels que

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Remarque : cette solution est un peu parachutée, mais les opérations algébriques ne respectant pas la réduction (la somme de deux matrices diagonalisables ne l'est pas toujours, etc.), et travaillant en basse dimension, il était assez naturel de se diriger vers un argument dimensionnel.

Correction de l'exercice 928 – *Réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$* 3

Correction de l'exercice 929 – *Encore une réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$* 3

Correction de l'exercice 930 – *Réduction d'une matrice par blocs* 0

1.2. Étude de spectre en dimension infinie

Correction de l'exercice 931 – *Banque CCP 2016 83* 3

Correction de l'exercice 932 – *Valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$* 3

Correction de l'exercice 933 – *Éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (Télécom Sud Paris MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 934 – *Éléments propres d'un opérateur fonctionnel* 3

Correction de l'exercice 935 – *Étude topologique du spectre d'un endomorphisme de primitivation (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 936 – *Éléments propres d'un opérateur sur les fonctions continues* 3

Correction de l'exercice 937 – *Éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$* 0

1.3. Valeur propre commune, vecteur propre commun

Correction de l'exercice 938 – *Une condition nécessaire et suffisante pour que les spectres soient disjoints* 2

Correction de l'exercice 939 – *CNS d'existence d'une valeur propre commune* 1

Correction de l'exercice 940 – *Matrices sans valeur propre commune* 1

Correction de l'exercice 941 – *CNS d'existence d'une valeur propre commune (TPE-EIVP MP 2015)* 1

Correction de l'exercice 942 – *Valeurs propres en commun pour deux matrices (X MP 10)* 3D

Correction de l'exercice 943 – *Vecteurs propres communs à des endomorphismes commutant deux à deux* 2

2. Diagonalisation, diagonalisabilité

2.1. Diagonalisation pratique

Correction de l'exercice 944 – *Réduction de J* 0

$J^2 = nJ$ (cas particulier de $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ pour une matrice carrée de rang 1), donc $X^2 - nX$ annule J, et est scindé à racines simples, donc J est diagonalisable, et son spectre est inclus dans $\{0, n\}$.

Or $\dim E_0(J) = n - \mathrm{rg}(J) = n - 1$, donc J est semblable à $\mathrm{Diag}(n, 0, \ldots, 0)$ (cela pouvait aussi se voir par la trace).

Un vecteur directeur de $E_n(J)$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et une base de $E_0(J)$ est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

donc, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(n, 0, \ldots, 0)$.

Correction de l'exercice 945 – *Banque CCP 2016 68* 0

Correction de l'exercice 946 – *Banque CCP 2016 70* 2

Correction de l'exercice 947 – *Diagonalisabilité et limite des puissances d'une matrice (Mines MP 2015)* 3

2.2. Étude pratique de diagonalisabilité

Correction de l'exercice 948 – *Preuves de diagonalisabilité (Télécom Sud Paris MP 2015)* 0

Correction de l'exercice 949 – *Diagonalisabilité d'une matrice de taille* 3 0

Correction de l'exercice 950 – *Étude d'élements propres (ENSEA MP 2015)* 0

Correction de l'exercice 951 – *Banque CCP 2016 63* 2

2.3. Étude pratique de diagonalisabilité avec un ou plusieurs paramètres

Correction de l'exercice 952 – *Banque CCP 2016 69* 2

Correction de l'exercice 953 – *Étude de diagonalisabilité en fonction d'un paramètre* 0

Correction de l'exercice 954 – *Étude de diagonalisabilité d'un $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathbb{C}$ (ENSAM 2015)* 2

Correction de l'exercice 955 – *Étude de diagonalisabilité d'une matrice symétrique complexe (ENSAM 2015)* 2

Correction de l'exercice 956 – *Banque CCP 2016 67* 2

Correction de l'exercice 957 – *Diagonalisabilité et suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 958 – *Étude de diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (Mines MP 2015)* 2

2.4. Étude de diagonalisabilité d'un endomorphisme de rang 1

Correction de l'exercice 959 – *Quand une matrice carrée de rang* 1 *est-elle diagonalisable ?* 4I

Correction de l'exercice 960 – *Banque CCP 2016 72* 2

Correction de l'exercice 961 – *Étude de diagonalisabilité d'une matrice produit d'une colonne et de sa transposée (Mines MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 962 – *Diagonalisabilité d'une matrice de fractions* 2

C'est une matrice de rang 1 et de trace non nulle, donc diagonalisable.

2.5. Polynômes de matrices et diagonalisabilité

Correction de l'exercice 963 – *Diagonalisabilité de certaines matrices en dimension 2* 2I

Correction de l'exercice 964 – *Équivalence entre deux diagonalisabilités* 1

Correction de l'exercice 965 – *Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$* 0

f est un endomorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, *i.e.* une symétrie vectorielle, et est donc diagonalisable.

Pour trouver une base de vecteurs propres, on peut s'inspirer de la diagonalisation de $P \mapsto P(-X)$: la base $\left((X-\frac{1}{2})^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de vecteurs propres.

Correction de l'exercice 966 – *Codiagonalisation* 1

Correction de l'exercice 967 – *Endomorphisme diagonalisable sur un espace de matrices* 1

Correction de l'exercice 968 – *Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$* 0

u est une symétrie vectorielle, donc diagonalisable.

Correction de l'exercice 969 – *Étude de diagonalisabilité de $M \mapsto M + ({}^tM)$ (Centrale PSI 10)* 0

$T\ : M \mapsto^t M$ est une symétrie vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et est donc diagonalisable. Ainsi, f, qui est égal à $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + T$, est également diagonalisable. (en tant que polynôme de T par exemple, pas en tant que somme d'endomorphismes diagonalisables !)

Correction de l'exercice 970 – *Une CNS de diagonalisabilité pour un certain endomorphisme* 0

Le fait que p^2 soit un projecteur se traduit par $p^4 = p^2$, ou encore par le fait que $X^4 - X^2$ annule p.

Si p est diagonalisable, son polynôme minimal μ est scindé à racines simples, et annule $X^4 - X^2$, donc μ divise $X^3 - X$, puis $p^3 = p$.

Si $p^3 = p$, alors le polynôme $X^3 - X$, scindé et à racines simples sur $\mathbb{K}$, annule p, qui est donc diagonalisable.

Correction de l'exercice 971 – *Diagonalisabilité d'une matrice diagonale par blocs* 2

Le sens indirect est clair, en conjuguant par une matrice diagonale par blocs.

Le sens direct provient de ce que si un endomorphisme diagonalisable laisse stable un sous-espace vectoriel, alors l'endomorphisme qu'il induit sur ce sous-espace vectoriel est diagonalisable.

Correction de l'exercice 972 – *Banque CCP 2016 88*

Correction de l'exercice 973 – *Comparaison de diagonalisabilité entre un endomorphisme et son carré (CCP MP 2015)* 2I

Correction de l'exercice 974 – *Comparaison de diagonalisabilité entrer une matrice inversible et l'une de ses puissances (ENS MP 10)* 3

Correction de l'exercice 975 – *Étude de diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 976 – *Polynôme du polynôme*	2
Correction de l'exercice 977 – *Égalité des cubes pour des endomorphismes diagonalisables*	2
Correction de l'exercice 978 – *Appartenance à un groupe multiplicatif matriciel*	3
Correction de l'exercice 979 – *Matrice inversible dont le carré est diagonalisable*	0
Correction de l'exercice 980 – *Liens entre A et $g_A : M \mapsto AM$ (ENS MP 10)*	0
Correction de l'exercice 981 – *Diagonalisabilité et matrices par blocs*	0
Correction de l'exercice 982 – *Quand un polynôme d'un projecteur est-il un projecteur ?*	0
Correction de l'exercice 983 – *Étude concrète de diagonalisabilité*	0
Correction de l'exercice 984 – *Matrice diagonalisable polynôme de l'un de ses polynômes*	2
Correction de l'exercice 985 – *Diagonalisabilité de la transposée de la comatrice*	2
Correction de l'exercice 986 – *Diagonalisabilité d'une matrice par blocs*	2
Correction de l'exercice 987 – *CNS de diagonalisabilité d'une matrice diagonale par blocs*	2
Correction de l'exercice 988 – *Étude de diagonalisabilité d'un opérateur sur les matrices*	3
Correction de l'exercice 989 – *Étude de diagonalisabilité de AB connaissant explicitement BA*	3
Correction de l'exercice 990 – *Diagonalisabilité d'un endomorphisme particulier*	3
Correction de l'exercice 991 – *Condition suffisante de diagonalisabilité*	3

3. Applications de la réduction

3.1. Renseignements sur la trace, le rang et le déterminant

Correction de l'exercice 992 – *Renseignements sur la trace d'une symétrie (CCP MP 2015)*	0
Correction de l'exercice 993 – *Déterminant et trace d'une matrice à polynôme minimal irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ (ENSEA MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 994 – *Condition suffisante pour que le déterminant soit strictement positif*	0
Correction de l'exercice 995 – *Informations sur une matrice réelle dont on connaît un polynôme annulateur*	3
Correction de l'exercice 996 – *Condition suffisante pour que la trace soit paire*	3

Correction de l'exercice 997 – *Déterminant strictement positif pour une matrice diagonalisable dans* $\mathbb{C}$	0
Correction de l'exercice 998 – *Réduction d'un projecteur*	0
Correction de l'exercice 999 – *Trace d'une racine carrée de* $-I_n$	0
Correction de l'exercice 1000 – *Rang et polynôme annulateur*	0
Correction de l'exercice 1001 – *Polynôme minimal et trace nulle*	0
Correction de l'exercice 1002 – *Déterminant et polynôme annulateur*	3

3.2. Puissances d'une matrice

Correction de l'exercice 1003 – *Banque CCP 2016 91*	2
Correction de l'exercice 1004 – *Puissances d'une matrice (ENSAM 2015)*	2
Correction de l'exercice 1005 – *Nature de* $\sum \operatorname{tr}(A^n)$ *pour une matrice particulière* A	3
Correction de l'exercice 1006 – *Rayon de convergence de* $\sum \operatorname{tr}(A^n) z^n$	3

3.3. Équation matricielle

Correction de l'exercice 1007 – *Équation matricielle (Petites Mines MP 2015)*	3
Correction de l'exercice 1008 – *Équation polynomiale d'inconnue matricielle*	0
Correction de l'exercice 1009 – *Équation matricielle (Mines MP 2015)*	3
Correction de l'exercice 1010 – *Résolution de* $A^2 = (\operatorname{tr} A)A + I_n$	3
Correction de l'exercice 1011 – *Matrice polynôme de son carré (Mines MP 2015)*	3
Correction de l'exercice 1012 – *Équation matricielle faisant intervenir la transposée (Mines MP 2015)*	3
Correction de l'exercice 1013 – *Une équation d'inconnue matricielle*	3D

3.4. Matrices stochastiques

Correction de l'exercice 1014 – *Matrices stochastiques*	1
Correction de l'exercice 1015 – *Matrice stochastique*	1

3.5. Réduction et exponentielle matricielle

Correction de l'exercice 1016 – *Calcul d'exponentielle de matrice (CCP MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1017 – *Antécédents de I_n par l'exponentielle matricielle complexe (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1018 – *Matrices diagonalisables dont les exponentielles sont égales* 2

Correction de l'exercice 1019 – *Surjectivité de l'exponentielle matricielle complexe (X MP 10)* 3D

Correction de l'exercice 1020 – *Trajectoires planes de sous-groupes à un paramètre* 3D

3.6. Applications de la réduction à l'étude du groupe linéaire

Correction de l'exercice 1021 – *Équivalence de diagonalisabilité pour AB et BA dans le cas inversible* 0

Correction de l'exercice 1022 – *Éléments propres de la somme des termes d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (Mines MP 2015)* 3I

Correction de l'exercice 1023 – *Diagonalisabilité des puissances d'une matrice inversible* 2

Correction de l'exercice 1024 – *Quelles sont les matrices semblables à leur carré (en taille 2) ?* 4

Correction de l'exercice 1025 – *Un théorème de Burnside (Centrale MP 2015)* 3C

Correction de l'exercice 1026 – *Ordre d'un élement d'un groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1027 – *Quand $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont-ils isomorphes ?* 4

Correction de l'exercice 1028 – *Cardinal d'unipotentes dans un anneau matriciel fini (ENS MP)* 5

3.7. Commutant

Correction de l'exercice 1029 – *Comment caractériser le fait de commuter avec un endomorphisme diagonalisable donné ?* 4

Correction de l'exercice 1030 – *Autant de valeurs propres que la dimension* 1

Correction de l'exercice 1031 – *Banque CCP 2016 73* 0

Correction de l'exercice 1032 – *Condition suffisante de commutation en cas de diagonalisabilité (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1033 – *Toutes les dimensions sont-elles possibles pour le commutant ? (Mines MP 2015)* 4

Correction de l'exercice 1034 – *Deux matrices qui commutent sont-elles des polynômes d'une même matrice ?* 4

Correction de l'exercice 1035 – *Lorsque $fg = gf$, équivalence de conditions sur images et noyaux* 3D

4. Polynôme minimal, polynôme caractéristique

4.1. Polynôme minimal

Correction de l'exercice 1036 – *Valuation du polynôme minimal* 2

Correction de l'exercice 1037 – *Matrice de polynôme minimal imposé* 2

Voyons une telle matrice A comme à coefficients complexes : son polynôme minimal étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, semblable à une matrice diagonale dont les coefficients valent $\pm j$. Comme sa trace est en outre réelle, on obtient une contradiction si A est de taille 3.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il suffit de trouver une matrice réelle dont le polynôme caractéristique est égal à $X^2 + X + 1$ (en effet, son polynôme minimal ne peut pas être de degré 1, car elle ne peut pas être scalaire), c'est-à-dire de trace -1 et de déterminant 1 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

4.2. Polynôme caractéristique

Correction de l'exercice 1038 – *Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont-ils les mêmes racines ?* 4I

Correction de l'exercice 1039 – *Déterminant d'une matrice et de son opposée (CCP MP 2015)* 0

Correction de l'exercice 1040 – *Détermination d'un polynôme caractéristique* 3

Correction de l'exercice 1041 – *Polynôme caractéristique d'une certaine matrice inversible* 3

Correction de l'exercice 1042 – *Polynôme caractéristique d'un produit (Centrale MP 12)* 2

Correction de l'exercice 1043 – *$\chi_{A^{-1}}$ et χ_{A^2} en fonction de χ_A* 2

Correction de l'exercice 1044 – *Calcul de déterminant se ramenant à un calcul de polynôme caractéristique* 0

Correction de l'exercice 1045 – *Égalité de polynômes caractéristiques* 3

Correction de l'exercice 1046 – *Banque CCP 2016 65* 0

5. Trigonalisation, endomorphismes nilpotents

Correction de l'exercice 1047 – *Matrices nilpotentes (CCP MP 2015)* 0

Correction de l'exercice 1048 – *Banque CCP 2016 59 (antagonisme entre nilpotence et diagonalisabilité)* 0

Correction de l'exercice 1049 – *Caractérisation de la nilpotence par la trace des puissances* 1

Correction de l'exercice 1050 – *Caractérisation de la nilpotence par nullité de traces (X MP 10)* 1

Correction de l'exercice 1051 – *Ajout à une matrice d'un nilpotent avec lequel elle commute* 2

Si A est inversible, alors $A+B = A(I_n + A^{-1}B)$, donc $A+B$ est inversible si et seulement si $I_n + A^{-1}B$ l'est. Or $A^{-1}B$ est nilpotente car B l'est et commute avec A, donc est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte : $I_n + A^{-1}B$ est semblable à une matrice triangulaire de coefficients diagonaux égaux à 1, donc $I_n + A^{-1}B$ est inversible.

Si $A+B$ est inversible, le raisonnement ci-dessus appliqué au couple $(A+B, -B)$ plutôt qu'au couple (A, B) montre que A est inversible, d'où l'équivalence demandée.

Remarque : on a prouvé ce résultat en trigonalisant, mais il est valable dans n'importe quel anneau (le point clé étant la formule de Bernoulli).

Correction de l'exercice 1052 – *Coefficients en position donnée nuls sur une classe de similitude (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1053 – *Existence de matrices non trigonalisables par un argument de cardinalité (Petites Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1054 – *Caractérisation de nilpotence par nullité de traces (Petites Mines MP 2015)* 1

Correction de l'exercice 1055 – *Dimension de noyaux et polynôme caractéristique (Centrale MP 2015)* 3

6. Non diagonalisabilité

Correction de l'exercice 1056 – *Matrice réelle de polynôme minimal $X(X-1)^2$ (Navale MP 13)* 2

Correction de l'exercice 1057 – *Représentation matricielle de $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\chi_v = \mu_v = (X-1)^3$* 0

Correction de l'exercice 1058 – *Écriture matricielle d'un endomorphisme (CCP MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1059 – *Cas particulier de réduction de Jordan (ENSEA MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1060 – *Réduction de Frobénius simultanée dans un cas de non codiagonalisabilité* 3

7. Sous-espaces stables

Correction de l'exercice 1061 – *Par quelles opérations la notion de sous-espace stable est-elle stable ?* 4

Correction de l'exercice 1062 – *Quand un endomorphisme laisse-t-il stable tout sous-espace ?* 4

Correction de l'exercice 1063 – *Comment caractériser les sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable ?* 4

Correction de l'exercice 1064 – *Semi-simplicité et diagonalisabilité*	2
Correction de l'exercice 1065 – *Recherche de sous-espaces stables (Mines MP 2015)*	3I
Correction de l'exercice 1066 – *Sous-espaces stables d'une matrice compagnon*	3

8. Crochet de lie

Correction de l'exercice 1067 – *Crochet de Lie (Centrale MP 2015)*	3
Correction de l'exercice 1068 – *Vecteur propre pour un crochet de Lie*	2

9. Endomorphismes cycliques, matrice compagnon

Correction de l'exercice 1069 – *Matrice diagonale à termes diagonaux distincts*	0
Correction de l'exercice 1070 – *Recherche des racines carrées d'une matrice à spectre scindé simple (ENSEA MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 1071 – *Matrice compagnon (Petites Mines MP 2015)*	2

CHAPITRE XLVI

Variables aléatoires discrètes (corrections)

1. Ensembles finis

1.1. Dénombrement

Correction de l'exercice 1072 – *Dénombrement concret* 0

Correction de l'exercice 1073 – *Dérangements* 1

1 $n!$ (cours).

2 $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$.

3 Se donner un élément de X_k, c'est se donner un dérangement de $[\![1, n-1]\!]\backslash\{k\}$: X_k est donc de cardinal d_{n-2}.

On définit une application ψ de Y_k vers Der_{n-1}, de la façon suivante : à tout élément f de Y_k, on associe le dérangement de $[\![1, n-1]\!]$, coïncidant avec f sur $[\![1, n-1]\!]\backslash\{k\}$, et envoyant k sur $f(n)$.

On définit également une application ϕ de Der_{n-1} vers Y_k envoyant un dérangement g de $[\![1, n-1]\!]$ sur le dérangement de $[\![1, n]\!]$ coïncidant avec g sur $[\![1, n-1]\!]\backslash\{k\}$, envoyant k sur n, et n sur $g(k)$. On vérifie aisément que :

$$\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{Y_k} \quad \text{et} \quad \psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{Der_{n-1}}$$

Ainsi, Y_k et Der_{n-1} sont en bijection, et ont donc même cardinal d_{n-1}.

4 Comme Der_n est la réunion disjointe des ensembles $X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$, la question précédente prouve que :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

5 Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on formule l'hypothèse :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$$

L'amorçage pour $n = 2$ est aisé.

Fixons un entier $n \geqslant 2$, supposons $\mathcal{H}_n$, et déduisons-en $\mathcal{H}_{n+1}$: $n+1 \geqslant 3$, donc on a $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$ d'après la question précédente. D'après l'hypothèse de récurrence, $d_{n-1} = \frac{d_n - (-1)^n}{n}$, ce qui donne en remplaçant dans l'expression précédente :

$$d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$$

La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, la propriété est vérifiée, pour tout entier $n \geqslant 2$.

6 Pour tout entier naturel non nul n, on formule l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad d_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

On vérifie aisément que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Fixons un entier naturel non nul n, supposons $\mathcal{H}_n$, et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$:

$$d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1} = (n+1)\left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}\right) + (-1)^{n+1}$$

$$= \left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!}\right) + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n+1} (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!}$$

La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, la formule est bien vérifiée pour tout entier naturel non nul n.

Correction de l'exercice 1074 – *Nombre d'applications (strictement) croissantes* 2

Correction de l'exercice 1075 – *Formules de convolution de Vandermonde* 3

1 Il suffit de fixer deux ensembles disjoints A et B de cardinaux respectifs p et q, et d'écrire $\mathcal{P}_r(A \cup B)$ comme la réunion disjointe des

$$\mathcal{P}i, r-i \overset{def}{=} \{X \in \mathcal{P}(A \cup B), \operatorname{Card}(X \cap A) = i \quad \text{et} \quad \operatorname{Card}(X \cap B) = r-i\}$$

lorsque i décrit $[\![0, r]\!]$, et d'observer que $\mathcal{P}_{i,r-i}$ est équipotent à $\mathcal{P}_i(A) \times \mathcal{P}_{r-i}(B)$.
Remarque : on peut aussi trouver le résultat en égalant les coefficients dans devant X^r à partir de la relation

$$(1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q}$$

2 Appliquant la formule précédente lorsque $p = q = r = n$, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

Correction de l'exercice 1076 – *Dénombrement lié à des parties* 3

1 Notons Ω l'ensemble dont on cherche le cardinal.
Première approche
Ω est la réunion disjointe des

$$\Omega_k = \{(A, B) \in \Omega, \operatorname{Card}(B) = k\}$$

où k décrit $[\![0, n]\!]$. Or Ω_k est lui-même réunion disjointe des

$$\Omega_B = \{(A, B) \in CP([\![1, n]\!])^2, A \subset B\}$$

où B décrit $\mathcal{P}_k([\![0, n]\!])$.
Comme $\operatorname{Card}(\Omega_B) = 2^k$ si $\operatorname{Card}(B) = 2^k$, on obtient

$$\operatorname{Card}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$$

Deuxième approche
Le résultat trouvé est si simple qu'on se dit qu'un autre argument, plus direct, devait être possible. Comme le 3^n rappelle le $2^n = \operatorname{Card}(\mathcal{P}([\![1, n]\!])$, on a l'idée d'introduire

$$\begin{array}{rccl} \varphi\ : & \Omega & \to & \{0, 1, 2\}^{[\![1,n]\!]} \\ & (A, B) & \mapsto & f\ : k \mapsto 2 \text{ si } k \in A, 1 \text{ si } k \in B \setminus A, 0 \text{ si } k \notin B \end{array}$$

et on vérifie qu'il s'agit d'une bijection (son inverse bilatéral pour la composition est $\psi\ : f \mapsto (f^{-1}(\{2\}), f^{-1}(\{1, 2\})))$.

2 Notons $S \overset{def}{=} \sum_{A \subset E} \operatorname{Card}(A)$.
Première approche : sommer à cardinal de A constant

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \operatorname{Card}(A) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} \text{ par la formule du pion} \\ &= n 2^{n-1} \end{aligned}$$

Deuxième approche : compliquer (provisoirement) la somme

$$\begin{aligned} S &= \sum_{A\subset E}\sum_{a\in A} 1 \\ &= \sum_{a\in A}\sum_{A\in\mathcal{P}(E), a\in A} 1 \\ &= \sum_{a\in A} \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E\setminus\{a\}) \\ &= \sum_{a\in A} 2^{n-1} \\ &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

Troisième approche : changer d'indice l'application $A\mapsto E\setminus A$ est une permutation de $\mathcal{P}(E)$, donc

$$\begin{aligned} S &= \sum_{A\subset E} Card(E\setminus A) \\ &= \sum_{a\in A} \mathrm{Card}(E) - S \\ &= 2^n - S \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Correction de l'exercice 1077 – *Décomposition d'un entier en somme* 3D

Correction de l'exercice 1078 – *Divers dénombrements d'ensembles d'applications (X MP 10)* 3

Correction de l'exercice 1079 – *Dénombrement de relations binaires* 3D

Correction de l'exercice 1080 – *Parties donnant une intersection fixée avec une partie fixée* 3

Notons N le nombre cherché.

Si B n'est pas inclus dans A, alors $N = 0$.

Supposons désormais B inclus dans A. Notons Ω l'ensemble des parties X de E telles que $A\cap X = B$. Une partie X de E appartient à Ω si et seulement si elle contient B, et est disjointe de $A\setminus B$.

L'application

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathcal{P}(E\setminus A) \\ X & \mapsto & X\cap(E\setminus A) \end{array}$$

est bijective, d'application inverse

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E\setminus A) & \to & \Omega \\ H & \mapsto & H\cup B \end{array}$$

Ω est donc de cardinal $N = 2^{n-\mathrm{Card}(A)}$.

Correction de l'exercice 1081 – *Banque CCP 2016 112* 2

1.2. Probabilités élémentaires

Correction de l'exercice 1082 – *Probabilités sur les cartes* 0

Correction de l'exercice 1083 – *Probabilités sur les dés* 0

Correction de l'exercice 1084 – *Probabilités sur les chaussettes* 0

Correction de l'exercice 1085 – *Probabilités diverses* 0

Correction de l'exercice 1086 – *Les délices de la randonnée* 0

Correction de l'exercice 1087 – *9 avant 7* 0

Correction de l'exercice 1088 – *Le paradoxe du chevalier de Méré* 2

Correction de l'exercice 1089 – *Jetons (CCP MP 2015)*

1.3. Divers

Correction de l'exercice 1090 – *Parties disjointes de même somme* 3

Correction de l'exercice 1091 – *Monoïde fini et régulier* 1

Soit $(G, \cdot)$ un tel monoïde, d'élément neutre e.

Il s'agit de montrer que tout élément a de G admet un symétrique, *i.e.* l'existence de $x \in G$ tel que $ax = xa = e$.

On introduit l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & ax \end{array}$$

Puisque a est simplifiable à gauche, φ est injective. Puisque G est en outre fini, φ est bijective : en particullier, e admet un antécédent par φ, donc a admet un symétrique à droite. Par un argument similaire (en considérant $x \mapsto xa$), a est symétrisable à gauche, donc a admet un bien un symétrique : ceci valant pour tout $a \in G$, G est un groupe.

Remarque : plutôt que d'introduire une application bijective, on aurait pu introduire $\psi : k \in [\![0, \operatorname{Card}(G)]\!] \mapsto a^k$, et utiliser sa non injectivité. Cette idée est liée au fait que dans un groupe fini, tout élément est d'ordre fini, donc son symétrique est l'une de ses puissances (à un exposant naturel).

Remarque : souvent, pour passer d'un résultat d'unicité à un résultat d'existence, il y a une application pour ça.

Correction de l'exercice 1092 – *Utilisation du principe des tiroirs* 2

Pour la première question, deux des entiers considérés sont consécutifs donc premiers entre eux.

Pour la seconde, si on note $v(n)$ la « partie impaire » de n (*i.e.* $\frac{n}{2^{v_2(n)}}$), alors deux des entiers considérés ont même partie impaire.

Correction de l'exercice 1093 – *Nombre de zéros* 3

Correction de l'exercice 1094 – *Trois calculs d'une même somme (X MP 08)* 3

2. Dénombrabilité, ensembles infinis

Correction de l'exercice 1095 – *Théorème de Cantor* 3

Correction de l'exercice 1096 – *Théorème de Cantor-Bernstein* 3D

Correction de l'exercice 1097 – *Points sous la première bissectrice d'une permutation de* $\mathbb{N}$ 3D

Correction de l'exercice 1098 – *Cardinal du lieu de discontinuité d'une fonction monotone* 3D

Correction de l'exercice 1099 – *Droite évitant un nombre dénombrable de points* 3

Correction de l'exercice 1100 – *Fonction continue passant d'un rationnel à un irrationnel, et réciproquement* 3

Correction de l'exercice 1101 – *Dessiner des 8 dans le plan* 3

Correction de l'exercice 1102 – *Enlever un nombre dénombrable de points à un ouvert dense* 3

Correction de l'exercice 1103 – *Existence non constructive de nombres transcendants* 5

3. Familles sommables, produit de Cauchy

Correction de l'exercice 1104 – *Familles sommables et calculs de somme* 2

Correction de l'exercice 1105 – *Une famille non sommable* 2

1 La sous-famille[1] $(a_{p+1,p})_{p\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable, donc $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ ne l'est pas non plus.

2 Fixons $p \in \mathbb{N}$.
Si $p = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p} = \zeta(2)$.
Si $p \in \mathbb{N}^*$, on part de

$$\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{p\}$.

Ainsi, en notant $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (avec la convention $H_0 = 0$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p} &= \frac{1}{2p} \sum_{n\in\mathbb{N}, n\neq p} \left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) \\
&= \frac{1}{2p} \sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) + \frac{1}{2p} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) \\
&= \frac{1}{2p}(-H_p - (H_{2p-1} - H_{p-1})) + \frac{1}{2p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2p}\right) \\
&= \frac{1}{2p}\left(-\frac{1}{p} - H_{2p-1} + H_{2p}\right) \\
&= \frac{-1}{4p^2}
\end{aligned}$$

de sorte que $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p} = \frac{-\zeta(2)}{4}$, puis

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$$

En observant que $a_{n,p} = -a_{p,n}$ pour tout $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p\in\mathbb{N}} a_{n,p} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{-\pi^2}{8}$$

Remarque : ceci prouve à nouveau que la famille n'est pas sommable puisque dans le cas contraire, le théorème de Fubini s'appliquerait.

Correction de l'exercice 1106 – *Sommabilité d'une série double de termes positifs* 1

Correction de l'exercice 1107 – *Sommation par paquets et fonction zêta de Riemann* 2

Correction de l'exercice 1108 – *Famille sommable complexe* 0

Correction de l'exercice 1109 – *Une sommabilité arithmétique (Centrale MP 99)* 3

1. Ou plutôt $(a_{p+1,p})_{\Omega}$ où $\Omega = \{(p+1,p), p \in \mathbb{N}\}$

Considérons la famille $\mathcal{F} \overset{def}{=} \left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Le théorème de Fubini montre que cette famille est sommable, et que sa somme vaut $\zeta(2)^2$.

La famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p\wedge q=1}$ étant une sous-famille de $\mathcal{F}$, elle est également sommable. Notons S sa somme.

L'idée consiste alors à utiliser le théorème de sommation par paquets à $\mathcal{F}$, en posant, pout tout $\delta \in \mathbb{N}^*$:

$$I_\delta = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \wedge q = \delta\}$$

On a

$$\zeta(2)^2 = \sum_{\delta\in\mathbb{N}^*} \sum_{(p,q)\in I_\delta} \frac{1}{p^2q^2}$$

or, pour tout $\delta \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{(p,q)\in I_\delta} \frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{\delta^4}S$$

d'où

$$S = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2}$$

Correction de l'exercice 1110 – *Études diverses de sommabilité*	3
Correction de l'exercice 1111 – *TPE-EIVP MP 2015*	3
Correction de l'exercice 1112 – *Mines MP 2015*	3
Correction de l'exercice 1113 – *Somme d'une série grâce à un produit de Cauchy*	0
Correction de l'exercice 1114 – *Exponentielle d'une somme de matrices*	1 et 5 ?
Correction de l'exercice 1115 – *Le produit de Cauchy de deux séries convergentes dont l'une est ACV est-il convergent ? (Théorème de Mertens)*	4D
Correction de l'exercice 1116 – *Produit de Cauchy de séries divergentes*	3
Correction de l'exercice 1117 – *Étude difficile de famille sommable*	3D

4. Espaces probabilisés, événements

Correction de l'exercice 1118 – *Banque CCP 2016 101*	2
Correction de l'exercice 1119 – *Banque CCP 2016 105*	2
Correction de l'exercice 1120 – *Banque CCP 2016 107*	2
Correction de l'exercice 1121 – *Calcul de sommes de probabilités (Mines MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 1122 – *De combien $P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$ peuvent-ils différer (ENS Cachan Rennes MP 2015) ?*	4
Correction de l'exercice 1123 – *Probabilité et danse par couples (Mines MP 2015)*	3

Correction de l'exercice 1124 – *Probabilité d'appartenir à k termes d'une famille d'événements (ENS Paris MP 2015)* 3D

Correction de l'exercice 1125 – *Propagation d'une rumeur* 2

Correction de l'exercice 1126 – *Dérangements à Noël* 3

Correction de l'exercice 1127 – *Cible* 3

Correction de l'exercice 1128 – *Lemme de Borel-Cantelli et loi du zero-un de Borel* 1

5. Conditionnement et indépendance

Correction de l'exercice 1129 – *Test sanguin* 0

Correction de l'exercice 1130 – *Indépendances et dés* 0

Correction de l'exercice 1131 – *Indépendance et boules* 0

Correction de l'exercice 1132 – *Indépendance et lancers d'une pièce* 0

Correction de l'exercice 1133 – *Jeu télévisé* 0

Correction de l'exercice 1134 – *De l'arithmétique à l'aide de probas* 2

Correction de l'exercice 1135 – *Sauterelles à foison* 3

Correction de l'exercice 1136 – *Prisonniers* 3

Correction de l'exercice 1137 – *Lancers de pièces* 3

Correction de l'exercice 1138 – *Banque CCP 2016 110* 2

Correction de l'exercice 1139 – *Divisibilité et probabilités (Mines MP 2015)* 3I

6. Espérance, variance, moments

Correction de l'exercice 1140 – *Voulez-vous jouer ?* 0

Correction de l'exercice 1141 – *Un professeur sévère* 0

Correction de l'exercice 1142 – *Dé truqué* 0

Correction de l'exercice 1143 – *Comparatif de deux indicateurs de dispersion* 2

Correction de l'exercice 1144 – *Calculs d'espérance et de variance* 0

Correction de l'exercice 1145 – *Vaches laitières*	2
Correction de l'exercice 1146 – *Première obtention de deux piles consécutifs*	2
Correction de l'exercice 1147 – *Deuxième obtention d'un pile*	2
Correction de l'exercice 1148 – *Entropie d'une v.a. finie*	2
Correction de l'exercice 1149 – *De jolies inégalités*	2
Correction de l'exercice 1150 – *Inégalité de Cantelli*	2
Correction de l'exercice 1151 – *La linéarité de l'espérance via la formule de transfert*	3I
Correction de l'exercice 1152 – *Une formule pour $E(X)$ dans un cas particulier*	3
Correction de l'exercice 1153 – *Calculs d'espérance et variance*	3
Correction de l'exercice 1154 – *Banque CCP 2016 96*	2
Correction de l'exercice 1155 – *Calcul d'espérance (ENSEA MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 1156 – *Banque CCP 2016 98*	2
Correction de l'exercice 1157 – *Appels téléphoniques (Mines MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 1158 – *Banque CCP 2016 100*	2
Correction de l'exercice 1159 – *Banque CCP 2016 102*	2
Correction de l'exercice 1160 – *Banque CCP 2016 104*	2
Correction de l'exercice 1161 – *Banque CCP 2016 109*	2
Correction de l'exercice 1162 – *Péage (Petites Mines MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 1163 – *Réécriture de l'espérance dans un cas particulier (Centrale MP 2015)*	1
Correction de l'exercice 1164 – *Étude asymptotique probabiliste (Centrale MP 2015)*	3
Correction de l'exercice 1165 – *Loi, espérance, variance (Mines MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 1166 – *Moyenne de VAIID (Mines MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 1167 – *Fonction génératrice, espérance et variance (Mines MP 2015)*	2

Correction de l'exercice 1168 – *Probabilités et intégrales*	3
Correction de l'exercice 1169 – *Inégalité de type Markov (ENS Cachan Rennes MP 2015)*	3

7. Loi d'une variable aléatoire

Correction de l'exercice 1170 – *Banque CCP 2016 95*	2
Correction de l'exercice 1171 – *Banque CCP 2016 103*	2
Correction de l'exercice 1172 – *Détermination de lois*	0
Correction de l'exercice 1173 – *Nul n'est censé ignorer la loi*	2
Correction de l'exercice 1174 – *Construction d'une loi*	2
Correction de l'exercice 1175 – *Loi de Pascal*	2
Correction de l'exercice 1176 – *Variables aléatoires et urnes*	0
Correction de l'exercice 1177 – *Quel avion choisir ?*	2
Correction de l'exercice 1178 – *Sauts (Mines MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 1179 – *Quotient de variables aléatoires suivant une loi géométrique (Centrale MP 2015)*	2
Correction de l'exercice 1180 – *Minimum de deux v.a.i. suivant $\mathcal{G}(p)$*	0
Correction de l'exercice 1181 – *Les moments d'une variable aléatoire déterminent-ils sa loi ?*	4
Correction de l'exercice 1182 – *Caractérisation des lois de Poisson par relations entre espérances*	2

1

i D'après la formule de transfert,

$$\mathrm{E}(Ng(N)) = \sum_{n=0}^{\infty} ng(n)P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} ng(n)\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda\,\mathrm{E}(g(N+1))$$

ii On ne peut pas appliquer de qui précède puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{N}$.
On fait un calcul direct :

$$\mathrm{E}(1/(N+1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{\lambda(n+1)!} = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$$

2 L'idée consiste à appliquer la formule supposé aux fonctions caractéristiques des singletons (pour lesquelles l'existence des espérances ne pose pas de problème). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\mathrm{E}(T\chi_{\{n\}}(T)) = \lambda\,\mathrm{E}(\chi_{\{n\}}(T+1))$ donne

$$nP(T=n) = \lambda P(T=n-1)$$

donc on a, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(T=n) = (\lambda^n/n!)P(T=0)$ puis, en sommant, on trouve $e^{\lambda}P(T=0) = 1$, et T donc suit effectivement une loi de Poisson.

Correction de l'exercice 1183 – *Tirages dans une urne* 0

8. Couples de variables aléatoires

Correction de l'exercice 1184 – *Loi d'un couple* 2

Correction de l'exercice 1185 – *Indépendance dans un couple* 2

Correction de l'exercice 1186 – *Loi conjointe de v.a.d.* 2

Correction de l'exercice 1187 – *Minimum, maximum* 3

Correction de l'exercice 1188 – *Inégalité de Cauchy-Schwarz probabiliste (TPE-EIVP MP 2015)* 3I

Correction de l'exercice 1189 – *Banque CCP 2016 97* 2

Correction de l'exercice 1190 – *Banque CCP 2016 106* 2

Correction de l'exercice 1191 – *Banque CCP 2016 108* 2

Correction de l'exercice 1192 – *Banque CCP 2016 111* 2

Correction de l'exercice 1193 – *Covariance et indépendance (Centrale MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1194 – *Fonction génératrice d'un couple de variables aléatoires* 3

9. Variables aléatoires indépendantes identiquement distibuées

Correction de l'exercice 1195 – *Épreuves consécutives à plusieurs résultats possibles* 2

1 $X_1 + \cdots + X_k$ est la variable aléatoire constante n, d'où le résultat.
2 X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i, sa variance vaut $p_i(1-p_i)$.
3 La loi de $X_i + X_j$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i + p_j$, sa variance vaut $(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)$.
4 $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2}\left(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)\right) = -p_i p_j$.
5 $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_k) = \sum_{i=1}^k p_i(1-p_i) - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} p_i p_j = \sum_{i=1}^k p_i - \left(\sum_{i=1}^k p_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} p_i p_j\right) = 1 - 1 = 0$.

Correction de l'exercice 1196 – *Produit consécutif de Bernoulli* 3

Correction de l'exercice 1197 – *Banque CCP 2016 99* 0

Correction de l'exercice 1198 – *Une étude asymptotique probabiliste (X PC 2015)* 3

Correction de l'exercice 1199 – *Identité de Wald* 2

1 Soit $t \in]-1, 1[$. Par définition, on a

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S = n) t^n$$

tandis que $|G_X(t)| \leqslant G_X(1) = 1$, donc G_N est définie en $G_X(t)$, et :

$$G_N(G_X(t)) = \sum_{p=0}^{\infty} P(N=p)(G_X(t))^p$$

Pour faire le lien entre ces deux quantités, on écrit, par la formule des probabilités totales, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(S=n) = \sum_{p=0}^{\infty} P(S=n \cap N=p)$$

Or, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned} P(S=n \cap N=p) &= P(\sum_{k=1}^{p} X_k = n \cap N=p) \\ &= P(\sum_{k=1}^{p} X_k = n)P(N=p) \quad \text{(par indépendance)} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} P(N=p)P(\sum_{k=1}^{p} X_k = n)t^n$$

puis, par le théorème de Fubini dans le cas d'une suite double de réels positifs

$$G_S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} P(N=p)\sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{p} X_k = n)t^n \sum_{p=0}^{\infty} P(N=p)G_{\sum_{k=1}^{p} X_k}(t)$$

Or on sait que $G_{\sum_{k=1}^{p} X_k} = \prod_{k=1}^{p} G_{X_k} = G_X^p$ par indépendance (mutuelle) de $X_1, \dots, X_p$, et le résultat s'ensuit immédiatement.

2 Observons déjà que l'égalité de la question précédente est aussi valable en 1.

Puisque les X_i admettent une espérance, G_X est dérivable en 1 et $G'_X(1) = \mathrm{E}(X)$. Puisque N admet également une espérance, G_N est dérivable en 1 et $G'_N(1) = \mathrm{E}(N)$. Comme $G_X(1) = 1$, on en déduit par composition que $G_N \circ G_X$ est dérivable en 1, et que $(G_N \circ G_X)'(1) = G'_X(1)(G'_N(G_X(1))) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(N)$, d'où le résultat (que G_S soit définie au delà de 1 ou pas, G_S est dérivable en 1).

Correction de l'exercice 1200 – *Probabilité d'égalités de variables aléatoires* 3

Correction de l'exercice 1201 – *Probabilité de convergence d'une série* 3

CHAPITRE XLVII

Séries entières (corrections)

1. Rayon de convergence d'une série entière, domaine de convergence

Correction de l'exercice 1202 – *Série entière et rayon de convergence* 2

Correction de l'exercice 1203 – *Détermination du rayon de convergence d'une série entière* 0

En revenant à la définition, on trouve que le rayon de convergence cherché vaut $1/3$.

Correction de l'exercice 1204 – *Banque CCP 2016 20* 2

Correction de l'exercice 1205 – *Banque CCP 2016 21* 2

Correction de l'exercice 1206 – *Détermination de rayon de convergence (ENSEA MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1207 – *Banque CCP 2016 22 (Rayon de convergence d'une somme)* 2

Correction de l'exercice 1208 – *Banque CCP 2016 23 (Rayon de convergence de la série entière dérivée)* 2

Correction de l'exercice 1209 – *Détermination de rayon de convergence* 0

1 $R = +\infty$ par la règle de d'Alembert, par $0 \leqslant \frac{n!}{(2n)!} \leqslant \frac{1}{n!}$, par un retour à la définition éventuellement avec Stirling, etc.

$R = 1$ par $\mathcal{B}_a = [0, 1[$, par la règle de d'Alembert, par l'encadrement $1 \leqslant \ln(n) \leqslant n$ au voisinage de $+\infty$, etc.

$R = \sqrt{2}$ par $\mathcal{B}_a = [0, \sqrt{2}[$, par d'Alembert pour les séries numériques, ou car elle a le rayon de convergence de $\sum \frac{x^{2n}}{2^n+1}$, puis de $\sum \left(\frac{x^2}{2}\right)^2$ par le lemme pour la dérivation des séries entières et l'égalité du rayon de convergence de séries entières de termes équivalents. On pouvait aussi appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières à $\sum \frac{\sqrt{n}x^n}{2^n+1}$, puis substituer x^2 à x.

2 $\sum \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$ a même rayon que $\sum \frac{(1+i)^n z^{3n}}{2^n}$, puis que $\sum \frac{\sqrt{2}^n z^{3n}}{2^n}$ car $\sum a_n z^n$ a même rayon que $\sum |a_n| z^n$ (évident par définition du rayon de convergence). On trouve donc $R = 2^{1/6}$.

$\left|\frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}\right| \leqslant \frac{1}{n!}$, donc $R = +\infty$.

3 Par croissances comparées, $\mathcal{B}_a = [0, 1[$ (si $a > 1$) ou $\mathcal{B}_a = [0, 1]$ (si $a \in]0, 1]$) donc $R = 1$.

$\mathcal{B}_a = [0, 1[$, donc $R = 1$.

$\exp(1/n) - 1 \sim \frac{1}{n}$, donc $R = 1$.

$\ln(1 + \sin(1/n)) \sim \frac{1}{n}$, donc $R = 1$.

4 $1 \leqslant d_n \leqslant n$ (ou $1 \leqslant d_n \leqslant 2n$ si on prend les diviseurs relatifs), donc $R = 1$.

5 C'est au moins 1 car $\mathcal{B}_a$ contient $[0, 1[$. Si c'était plus, alors il existerait $r > 1$ pour lequel $\cos(n\theta) = \mathrm{O}(nr^{-n})$, donc $\lim \cos(n\theta) = 0$; ce qui est absurde (considérer $\sin(2n\theta)$.)

Correction de l'exercice 1210 – *Rayon de convergence d'une série entière modifiée* 2

Correction de l'exercice 1211 – *Détermination délicate de rayon de convergence* 3

Correction de l'exercice 1212 – *Minoration d'un rayon de convergence (Mines-Ponts PSI 10)* 3

Correction de l'exercice 1213 – *Équation fonctionnelle et série entière (CCP MP 13)* 3

Correction de l'exercice 1214 – *Détermination d'un rayon de convergence (Mines d'Alès)* 3

Correction de l'exercice 1215 – *Encore un rayon de convergence (CCP MP 13)* 3

Correction de l'exercice 1216 – *Minoration du rayon de convergence d'une série entière (Télécom Sud Paris)* 3

Correction de l'exercice 1217 – $\sum a_n t^n$ *où* $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n \, dt$ *(Mines MP)* 3

2. Calcul de somme d'une série entière

Correction de l'exercice 1218 – *Banque CCP 2016 47* 2

Correction de l'exercice 1219 – *Banque CCP 2016 51* 2

Correction de l'exercice 1220 – *Équation différentielle et série entière (CCP MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1221 – *Calcul d'une suite implicite à l'aide d'une série entière (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1222 – *Somme d'une série entière à coefficients binomiaux* 3

Correction de l'exercice 1223 – *Calculs de sommes élémentaires* 0

Correction de l'exercice 1224 – *Série exponentielle tronquée* 0

$\frac{1}{3}\left(e^z + e^{jz} + e^{j^2 z}\right)$.

Correction de l'exercice 1225 – *Série entière et série harmonique* 1

1 On a $1 \leqslant H_n \leqslant n$ d'où $R = 1$.

Remarque : on pouvait bien sûr utiliser $H_n \sim \ln(n)$.

2

i Immédiat par calcul et changement d'indice.

Remarque : comment a-t-on eu cette idée ? On a reconnu en $\sum H_n x^n$ le produit de Cauchy de $\sum x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n}$.

ii On a donc $F(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Correction de l'exercice 1226 – *Somme d'une série entière par la méthode de l'équation différentielle* 1

1 (a_n) n'est pas bornée donc $R \leqslant 1$.

Par le critère de d'Alembert, $R = 1/2$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(n+2)a_{n+1}x^n = (2n+3)a_n x^n \text{ soit } (n+1)a_{n+1}x^n + a_{n+1}x^n = 2na_n x^n + 3x^n$$

d'où, en sommnant sur $\mathbb{N}$, et en prenant $x \in]-1/2, 1/2[\setminus\{0\}$:

$$f'(x) + \frac{f(x) - a_0}{x} = 2xf'(x) + 3f(x)$$

puis

$$x(1-2x)f'(x)+(1-3x)f(x)=1$$

formule également valable en 0.

f est donc l'unique solution sur $]-1/2,1/2[$ du problème de Cauchy

$$(\mathcal{C})\quad x(1-2x)y'+(1-3x)y=1 \quad \text{et} \quad y(0)=1$$

Attention cependant : cette équation différentielle n'étant pas du type vu en cours, nous ne sommes pas assurés de l'unicité d'une solution à ce problème.

Sur un intervalle ne comprenant pas 0, l'équation différentielle

$$y'+\frac{1-3x}{x(1-2x)}y=0$$

a pour solution générale réelle $x\mapsto K\frac{1}{x\sqrt{|1-2x|}}$ où K décrit $\mathbb{R}$ car

$$\int \frac{1-3x}{x(1-2x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{1-2x}=\ln(|x|)+\frac{1}{2}\ln(|1-2x|)+C$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, $x\mapsto \frac{K(x)}{x\sqrt{1-2x}}$ est solution de $y'+\frac{1-3x}{x(1-2x)}y=\frac{1}{x(1-2x)}$ sur $I\in\{]-1/2,0[,]0,1/2[\}$ si et seulement si

$$\frac{K'(x)}{x\sqrt{1-2x}}=\frac{1}{x(1-2x)}, i.e. K'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

soit $K(x)=-\sqrt{1-2x}+C$. La solution générale de $y'+\frac{1-3x}{x(1-2x)}y=1$ sur I est donc

$$x\mapsto\frac{C}{x\sqrt{1-2x}}-\frac{1}{x}$$

La seule solution sur $]-1/2,1/2[$ au problème de Cauchy considéré est

$$x\mapsto\frac{1}{x\sqrt{1-2x}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x\sqrt{1-2x}}\left(1-\sqrt{1-2x}\right)=\frac{2}{\sqrt{1-2x}(1+\sqrt{1-2x})}$$

d'où l'expression de f sur $]-1/2,1/2[$.

Remarque : l'équation différentielle trouvée pour f est peu pratique à cause notamment du problème de raccord en 0. En fait, on aurait pu observer que $x\mapsto xf(x)$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 sans problème de raccord en 0, mais cela demandait de l'astuce.

Correction de l'exercice 1227 – *Rayon de convergence et somme d'une série entière* 2

Par le théorème de convergence dominée, (a_n) converge vers 0, donc le rayon vaut au moins 1.

Remarque : inutile d'ailleurs d'appliquer le théorème de convergence dominée, il suffit de préciser que (a_n) est bornée.

Cependant, pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$:

$$0\leqslant\cos(t)\sin(t)^n\leqslant\sin(t)^n$$

d'où, en intégrant sur $[0,\frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{1}{n+1}\leqslant a_n$$

Comme $\sum\frac{x^n}{n+1}$ est de rayon 1, $\sum a_nx^n$ est de rayon au plus 1 : il est donc égal à 1.

Remarque : si on connaît les intégrales de Wallis, on sait que $a_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, et donc le rayon de convergence vaut 1, mais cet argument culturel est un peu trop évolué.

Pour calculer la somme S en $x\in]-1,1[$, on utilise par exemple le théorème d'intégration terme à terme sur le segment d'extrémités 0 et x (ou la convergence normale sur ce même segment), obtenant

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t)x)^n\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(\sin(t)x)^n\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-x\sin(t)}\mathrm{d}t\quad(\star)$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable $u = \tan(t/2)$ (de classe $\mathcal{C}^1$), obtenant

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^1 \frac{1}{1 - x\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{1 - 2ux + u^2}\mathrm{d}u \\ &= 2\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\frac{u-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(\arctan\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) \end{aligned}$$

Remarque : en utilisant le fait que $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \mathrm{d}t$ (ou en effectuant le changement de variable $s = \frac{\pi}{2} - t$ dans $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\sin(t)}$), on serait tombé sur une expression plus agréable de $S(x)$ ($\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$).

On peut faire l'étude aux bornes : en 1, il y a divergence par $\frac{1}{n+1} \leqslant a_n$ et en -1, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.

On peut utiliser un argument de convergence dominée sur la suite des sommes partielles de $\sum t \mapsto (-\sin(t))^n$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ pour vérifier que la formule $\star$ reste valable pour $x = -1$:

$$S(-1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(t)}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{(1+u)^2}\mathrm{d}u = 2\left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^1 = 1$$

Remarque : un argument de majoration du reste par le CSSA montre qu'en fait S est continue en -1. La formule pour $S(x)$ lorsque $x \in]-1, 1[$ doit donc tendre vers 1 lorsque x tend vers -1. Pour s'entraîner au calcul asymptotique, on peut le vérifier à la main : pour un tel x, en posant $x = -1 + h$ *i.e.* $h = x + 1$, il vient $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \sim_{x \to -1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}}$, et

$$\begin{aligned} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) &= \arctan\left(\sqrt{\frac{2-h}{h}}\right) + \arctan\left(\frac{-1+h}{\sqrt{h(2-h)}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{\frac{h}{2-h}}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{h(2-h)}}{-1+h}\right) \\ &= -\sqrt{\frac{h}{2-h}} + \mathrm{o}(h^{1/2}) - \frac{\sqrt{h(2-h)}}{-1+h} + \mathrm{o}(h^{1/2}) \\ &= -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2h} + \mathrm{o}(h^{1/2}) \\ &\sim \frac{\sqrt{2h}}{2} \end{aligned}$$

d'où $S(x) \sim_{x \to -1^+} 1$.

Remarque : en posant $\theta = \arccos(x)$ pour $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ et $\alpha = \arcsin(x)$ pour $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, on peut donner d'autres expressions de $S(x)$:

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arccos(x) + 2\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\frac{\pi}{2} + \arcsin(x)) = \frac{\arccos(-x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque : cette expression permet d'ailleurs de calculer (par produit de Cauchy) les intégrales de Wallis, et elles donnent même immédiatement les termes d'indices pairs en observant que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot (2n-1)}{2^n\, n!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n\, (n!)^2}x^{2n}$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\, \frac{(2n)!}{4^n\, (n!)^2}$$

Correction de l'exercice 1228 – *Série entière dont le terme général est défini par une intégrale* 2

1 La suite (a_n) est bornée car positive et majorée par $\pi/4$ (et tend même vers 0 par le théorème de convergence dominée), donc $R \geqslant 1$.

Reste à avoir une estimation de a_n pour bien avoir $R = 1$.

On peut observer que $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (car $\tan' = 1 + \tan^2$), puis, par décroissance de (a_n) :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$$

On en déduit que $R = 1$ (seule l'inégalité de gauche était utile puisqu'on savait que $R \geqslant 1$).

Remarque : l'encadrement ci-dessus donne notamment $a_n \sim \frac{1}{2n}$.

Remarque : dans la même veine, on aurait pu écrire que, puisque $(1 + \tan^2(t))/2 \leqslant 1$ pour tout $t \in [0, \pi/4]$:

$$\frac{1 + \tan^2(t)}{2} \tan(t)^n \leqslant \tan(t)^n$$

puis intégrer sur $[0, \pi/4]$.

Remarque : on aurait aussi pu faire le changement de variable $u = \tan(t)$:

$$a_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1 + u^2} \mathrm{d}u$$

afin d'obtenir un encadrement de façon peut-être plus standard. D'ailleurs, ce changement de variable suivi de $v = u^n$ nous aurait permis de retrouver (par convergence dominée) l'équivalent de a_n donné ci-dessus.

2 Il y a divergence en 1 car $\frac{1}{n} = \mathrm{O}(a_n)$ et $a_n > 0$.

Il y a convergence en -1 par application du CSSA ((a_n) est bien décroissante (positive) et tend vers 0).

3 Pour $x \in]-1, 1[$, on a, par exemple par convergence normale de $\sum t \mapsto \tan(t)^n x^n$ sur $[0, \pi/4]$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/4} (\tan(t)x)^n \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} (\tan(t)x)^n \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 - x\tan(t)} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)(1-xu)} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \frac{1}{1-xu} + \frac{x}{1+x^2} \frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+u^2} \mathrm{d}u \\
&= \left[-\frac{x}{1+x^2} \ln|1 - xu| + \frac{x}{2(1+x^2)} \ln(1+u^2) + \frac{\arctan(u)}{1+x^2} \right]_{u=0}^{1} \\
&= -\frac{x}{1+x^2} \ln(1-x) + \frac{\ln(2)x}{2(1+x^2)} + \frac{\pi}{4(1+x^2)}
\end{aligned}$$

Remarque : on peut prouver que cette formule reste valable pour $x = -1$ (par un argument de convergence dominée pour la suite des sommes partielles, ou par convergence uniforme, mais pas par intégration terme à terme).

Correction de l'exercice 1229 – *DSE et application au calcul de la somme d'une série (TPE 13)* 3

1 f est clairement dérivable sur $]-1, 1[$, et, pour tout $x \in]-1, 1[$

$$f'(x) = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{x \arcsin(x)}{(1 - x^2)^{3/2}}$$

et f est donc solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle

$$(E) \ : \quad (1 - x^2)\, y' - x\, y = 1$$

et plus particulièrement du problème de Cauchy (C) constitué de (E) et de la condition initiale $y(0) = 0$.

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence R strictement positif, et on note g sa somme. On a donc, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Pour tout $x \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}(1-x^2)g'(x)-xg(x) &= g'(x)-x^2g'(x)-xg(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}\\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}\\ &= a_1+(2a_2-a_0)x+\sum_{n=1}^{\infty}((n+2)a_{n+2}-(n+1)a_n)x^n\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction admettant un DSE au voisinage de 0, on en déduit que g est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_1=1$, $2a_0-a_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_n=0$$

La fonction g est donc solution de (C) si et seulement si pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a_{2k}=0$, et, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$a_{2k+1}=\frac{\prod_{i=1}^{k}(2i)}{\prod_{i=1}^{k}(2i+1)}$$

i.e. pour tout $x\in]-R,R[$:

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{k}(2i)}{\prod_{i=1}^{k}(2i+1)x^{2k+1}}$$

Réciproquement, la série entière $\sum\frac{\prod_{i=1}^{k}(2i)}{\prod_{i=1}^{k}(2i+1)x^{2k+1}}$ est de rayon de convergence 1 (par critère de d'Alembert pour les séries numériques), et sa somme g est solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy (C).

Ainsi, par unicité de la solution à ce problème de Cauchy :

$$\forall\, x\in]-1,1[,\quad f(x)=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{k}(2i)}{\prod_{i=1}^{k}(2i+1)x^{2k+1}}$$

2 L'énoncé demande de calculer la somme

$$S\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{k}(2i)}{2^k\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1)}$$

Or pour tout $x\in]-1,1[$:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{k}(2i)}{\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1)}x^{2k}$$

et donc

$$f'(\sqrt{2}/2)=1+S$$

Or on trouve par simple calcul que $f'(\sqrt{2}/2)=2+\frac{\pi}{2}$, et donc que

$$S=1+\frac{\pi}{2}$$

Correction de l'exercice 1230 – *Série entière et suite de Fibonacci (CCP MP 13)* 3

1 Notons $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi=-1/\phi$: ϕ et ψ sont les deux solutions de l'équation caractéristique

$$z^2-z-1=0$$

et il existe donc des scalaires α et β tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=\alpha\,\phi^n+\beta\,\psi^n$$

On détermine α et β par les conditions initiales $u_0=0$ et $u_1=1$. On trouve :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n-\psi^n)$$

2 Comme $\sum\phi^n z^n$ et $\sum\psi^n z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs $1/\phi$ et $|1/\psi|$, où $1/\phi>|1/\psi|$, leur somme a pour rayon de convergence $1/\phi$.

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/\phi$:

$$\sum_{n=0} u_n\, z^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi\, z} - \frac{1}{1-\psi\, z}\right)$$

soit encore, si on met au même dénominateur :

$$\sum_{n=0} u_n\, z^n = \frac{z}{1-z-z^2}$$

Remarque : on aurait pu tomber directement sur cette somme S en observant que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/\phi$:

$$S(z) - z = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+2} z^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + u_{n+1}) z^{n+2} = (z+z^2) S(z)$$

Correction de l'exercice 1231 – *Somme d'une série entière* 3

Soit $r \in \mathbb{R}_+$. La suite $(2^{(-1)^n n} r^n)$ est bornée si et seulement si ses suites extraites de rangs pairs et impairs le sont, si et seulement si $r \leqslant 1/2$: le rayon de convergence cherché vaut $1/2$.

L'intervalle ouvert de convergence est donc $]-1/2, 1/2[$, et il coïncide avec le domaine de convergence, puisqu'il y a divergence grossière en $1/2$ et $-1/2$ de la série.

Enfin, pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(-1)^n n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{(-1)^n} x)^n = \sum_{p=0}^{\infty} (2x)^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} (x/2)^{2p+1} = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{x}{2}\,\frac{1}{1-x^2/4}$$

Correction de l'exercice 1232 – *Somme d'une série entière (ENSEA)* 3

1 L'encadrement souhaité est vrai aux rangs 0 et 1.

Si, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose $1 \leqslant a_n \leqslant (n+1)^2$ et $1 \leqslant a_{n+1} \leqslant (n+2)^2$, alors d'une part, $a_{n+2} \geqslant a_{n+1} \geqslant 1$, et, d'autre part :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \leqslant (n+2)^2 + \frac{(n+1)^2}{n+2} \leqslant (n+2)^2 + (n+2) \leqslant (n+3)^3$$

d'où l'hérédité de la propriété souhaitée.

On a donc bien $1 \leqslant a_n \leqslant (n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 f est la somme d'une série entière de convergence 1 (grâce à l'encadrement précédent). De plus, la suite (a_n) ne tendant pas vers 0, f n'est pas définie en 1 ni en -1 : le domaine de définition de f est $]-1, 1[$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Par ailleurs, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2) a_{n+2} - (n+2) a_{n+1}) x^{n+1}$$

Or $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} = f'(x) - a_1 = f'(x) - 1$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = x f'(x) + f(x) - 1,$$

de sorte que

$$x f(x) = f'(x) - 1 - x f'(x) - f(x) + 1$$

et enfin que

$$(1-x) f'(x) - (1+x) f(x) = 0$$

Sachant qu'en outre $f(0) = 1$, on trouve, en résolvant l'équation différentielle $(1-x)y' - (1+x)y = 0$, que

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$$

Correction de l'exercice 1233 – *Somme d'une série entière par la méthode de l'équation différentielle* 2

Correction de l'exercice 1234 – *Combinatoire et séries entières (CCP MP 13)* 3

Correction de l'exercice 1235 – *Série entière dont le coefficient général suit une relation de récurrence* 2

$a_n \geqslant 1/n(n+1)$ donc $R \leqslant 1$. $a_n \leqslant 1$ donc $R \geqslant 1$. En ± 1, convergence par $a_n \leqslant 1/n$ puis $a_n \leqslant 2/(n(n+1))$.
$f'(x) = 1 + f(x) - \ln(1-x)$ donc $f(x) = e^x - 1 - e^x \int_0^x e^{-t} \ln(1-t)\mathrm{d}t.$, y compris en 1 et -1.

3. Développement en série entière

Correction de l'exercice 1236 – *Développement en série entière d'une fonction rationnelle* 3I

Correction de l'exercice 1237 – *Développements élémentaires en série entière* 0

Correction de l'exercice 1238 – *Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est-elle toujours développable en série entière ?* 4

Correction de l'exercice 1239 – *Les fonctions à dérivées uniformément bornées admettent un DSE* 3I

Correction de l'exercice 1240 – *Étude au bord pour des séries entières classiques* 3I

Correction de l'exercice 1241 – *DSE explicite de la fonction arcsinus, application au calcul de $\zeta(2)$* 3

Correction de l'exercice 1242 – *DSE par la méthode de l'équation différentielle* 3

Correction de l'exercice 1243 – *Fonction développable en série entière nulle sur le cercle unité* 2

$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\mathrm{d}\theta = 2\pi a_p r^p$. On fait tendre r vers 1, obtenant $a_p = 0$.

Correction de l'exercice 1244 – *Relation intégrale entre deux fonctions développables en séries entières* 2

Correction de l'exercice 1245 – *Développement en série entière d'une fonction par intégration* 2

1 On dérive, on décompose en éléments simples, et on trouve $f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n/2}}{n} \sin(3n\pi/4)t^n$.

2 On dérive, observe que $\frac{1}{1+x^2+x^4} = \frac{1-x^2}{1-x^6}$, d'où $F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{6n+1}}{6n+1} - \frac{x^{6n+3}}{6n+3}\right)$.
On calcule

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \ln \frac{a^2+a+1}{a^2-a+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2a+1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2a-1}{\sqrt{3}}\right),$$

d'où $F(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 1246 – *Fonction définie par radicaux développable en série entière* 3

Correction de l'exercice 1247 – *Développement en série entière d'une exponentielle d'une série entière* 4

Correction de l'exercice 1248 – *Un DSE avec du logarithme (CCP MP 13)* 3

Correction de l'exercice 1249 – *Développements en série entière* 3

Correction de l'exercice 1250 – *Développement en série entière et calcul des coefficients* 5

Correction de l'exercice 1251 – *Un développement en série entière (CCP PSI 08)* 3

Correction de l'exercice 1252 – *Banque CCP 2016 2 (DSE d'une fonction rationnelle)* 2

Correction de l'exercice 1253 – *Un DSE en utilisant celui d'une fonction rationnelle (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1254 – *Banque CCP 2016 19* 2

Correction de l'exercice 1255 – *Banque CCP 2016 24* 2I

Correction de l'exercice 1256 – *DSE de la somme d'une série de fonctions (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1257 – *DSE d'une intégrale à paramètre (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1258 – *Utilisation d'un DSE (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1259 – *Intégration d'une série entière pour déterminer la somme d'une série* 2

Correction de l'exercice 1260 – *Identification de la somme d'une série entière (Petites Mines MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1261 – *DSE d'une intégrale à paramètre (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1262 – *Une fonction absolument monotone admet un DSE (Mines MP 2015)* 5I

4. Étude locale

Correction de l'exercice 1263 – *Équivalent de la somme d'une série entière (CCP MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1264 – *Domaine de convergence d'une série entière* 2

1 En revenant à la définition, on constate que le rayon de convergence vaut 1. Le domaine de convergence est le disque unité ouvert.

2 En faisant une comparaison série-intégrale, on trouve $F(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.

Correction de l'exercice 1265 – *Étude au bord d'une série entière (CCP MP 13)* 3

Correction de l'exercice 1266 – *Étude au bord de la somme d'une série entière* 3

Correction de l'exercice 1267 – *Équivalent en 1 de la somme d'une série entière (TPE MP 13)* 3

Correction de l'exercice 1268 – *Principe des zéros isolés* 5

CHAPITRE XLVIII

Espaces préhilbertiens réels (corrections)

1. Structure préhilbertienne

Correction de l'exercice 1269 – *Produit scalaire orthonormalisant une base*	2I

Correction de l'exercice 1270 – *Interprétation matricielle du procédé d'orthonormalisation de Schmidt*	3I

Correction de l'exercice 1271 – *Banque CCP 2016 76*	0

Correction de l'exercice 1272 – *Banque CCP 2016 79*	0

Correction de l'exercice 1273 – *Les couples libres de vecteurs forment un ouvert (Mines MP 2015)*	3

D'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la famille (x, y) de vecteurs de E est libre si et seulement si $|(x|y)[< \|x\| \, \|y\|$. On peut donc introduire la fonction

$$\varphi \ : \begin{array}{rcl} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \|x\| \, \|y\| - |(x|y)| \end{array}$$

de sorte que $\Omega = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$. Si on établit la continuité de φ, le résultat demandé sera bien prouvé.

L'application $(x, y) \mapsto \|x\| \, \|y\|$ est continue car la fonction norme l'est (elle est 1-lipschitzienne d'après la seconde inégalité triangulaire).

Reste à établir la continuité de $(x, y) \mapsto |(x|y)|$: il suffit de prouver la continuité de $\psi \ : (x, y) \mapsto (x|y)$.

Or pour tout $(x, y, u, v) \in E^4$

$$\begin{aligned} |(x+u|y+v) - (x|y)| &= |(x|v) + (u|y) + (u|v)| \\ &\leqslant |(x|v)| + |(u|y)| + |(u|v)| \\ &\leqslant \|x\| \, \|v\| + \|u\| \, \|y\| + \|u\| \, \|v\| \end{aligned}$$

ce qui montre que la continuité de ψ en (x, y).

Le résultat s'ensuit.

Remarque : plus généralement, on peut montrer qu'une application bilinéaire $C \ : E \times F \to G$ (où E, F et G sont trois EVN) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(x, y) \in E \times F$:

$$\|C(x,y)\|_G \leqslant K \, \|x\|_E \, \|y\|_F$$

La continuité du produit scalaire résulte donc immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction de l'exercice 1274 – *Détermination de supplémentaire orthogonal en dimension infinie (Télécom Sud Paris MP 2015)*	2

Correction de l'exercice 1275 – *Produit scalaire canonique matriciel*	1

Correction de l'exercice 1276 – *Sous-espace sans supplémentaire orthogonal*	2

Correction de l'exercice 1277 – *Deux sous-espaces orthogonaux dans un espace de fonctions*	3

Correction de l'exercice 1278 – *Étude des parties mid-convexes dans l^2 (X MP 10)*	4

2. Structure euclidienne

Correction de l'exercice 1279 – *Banque CCP 2016 77* 0

Correction de l'exercice 1280 – *Banque CCP 2016 92* 2

Correction de l'exercice 1281 – *Quels sont les endomorphismes préservant l'orthogonalité ?* 4

Correction de l'exercice 1282 – *Endomorphisme de trace nulle dans un espace euclidien* 2

Il s'agit de montrer l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E, telle que $(u(e_i)|e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ou encore de montrer que toute matrice carrée réelle de taille nulle est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle.

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, l'initialisation étant évidente.

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de E, et soit M la matrice de u dans cette base : si tous les coefficients diagonaux sont nuls, le résultat souhaité est établi. Sinon, il existe des indices i et j tels que $[M]_{i,i}$ et $[M]_{j,j}$ soient de signes contraires.

En considérant $\lambda \in [0, 1] \mapsto (u(\lambda f_j + (1-\lambda)f_i)|\lambda f_j + (1-\lambda)f_i)$, et en lui appliquant le TVI, on constate qu'il existe un vecteur g_1 non nul de E tel que $u(g_1) = 0$. On prend alors pour e_1 le normalisé de g_1.

Variante de rédaction : pour justifier l'existence de g_1. L'application $x \mapsto (x|u(x))$ est continue et à valeurs réelles, donc si elle ne s'annulait pas, elle serait à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ ou à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$, ce qui contredirait le fait que u soit de trace nulle ($\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^n (u(f_i)|f_i)$ car $(f_1, \dots, f_n)$ est orthonormée).

On complète e_1 en une base orthonormée $(e_1, h_2, \dots, h_n)$ de E. La matrice A de u dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & M \end{pmatrix},$$

où $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est de trace nulle.

Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice orthogonale Q telle que QMQ^{-1} soit de diagonale nulle. En prenant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

la matrice PAP^{-1} est de diagonale nulle, et c'est bien la matrice de u dans une base orthonormée.

Correction de l'exercice 1283 – *Perturbation d'une base orthonormée préservant la liberté* 3

Correction de l'exercice 1284 – *Condition suffisante pour qu'une famille soit génératrice* 3

Correction de l'exercice 1285 – *Vecteurs de la sphère unité et produit scalaire contraint* (X MP 09) 4

Correction de l'exercice 1286 – *Familles obtusangles (CCP MP 2015)* 3C

3. Bases orthonormées

Correction de l'exercice 1287 – *Une caractérisation des bases orthonormées dans un espace euclidien (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1288 – *Base orthonormée* 0 et 4

Correction de l'exercice 1289 – *Inégalité d'Hadamard (Navale MP 13)* 1

Correction de l'exercice 1290 – *Matrice orthogonale définie par blocs à partir d'une autre* 2

Correction de l'exercice 1291 – *Majoration du déterminant* 1

4. Automorphismes orthogonaux

Correction de l'exercice 1292 – *Banque CCP 2016 78* 0

Correction de l'exercice 1293 – *Expression d'une réflexion* 2

1 $r(u) = u - 2(u|a)a$.

2 $r(u) = u - \frac{2(u|a)}{\|a\|^2}a$.

3 $r(x,y) = (x,y) - \frac{2(3x+4y)}{25}(3,4) = \frac{1}{5}(7x - 24y, -24x - 7y)$

Remarque : la matrice de r dans la base canonique est

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier qu'elle est bien symétrique, orthogonale, de trace nulle (comme il se doit de la matrice dans une base orthonormée d'une réflexion dans un plan).

Correction de l'exercice 1294 – *Réflexion échangeant deux vecteurs distincts de même norme* 3

Analyse : une telle réflexion doit changer $a - b$ en son oppposée, donc son hyperplan doit être $\{a - b\}^{\perp}$.
Synthèse : soit r la réflexion d'hyperplan $\{a - b\}^{\perp}$. Comme $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$, et que

$$\left(\frac{a+b}{2} | \frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{4}(\|a\|^2 - \|b\|^2) = 0,$$

on a

$$r(a) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$$

et donc aussi $b = r(a)$ (r est involutive) : r est bien une réflexion échangeant a et b.

Correction de l'exercice 1295 – *Par quelles opérations l'ensemble des matrices orthogonales est-il stable ?* 4

Correction de l'exercice 1296 – *$O(E)$ est engendré par les réflexions* 1

Correction de l'exercice 1297 – *Connexité par arcs du groupe spécial orthogonal* 3I

Le vérifier pour SO(2). Utiliser ensuite la réduction des endomorphismes orthgonaux (on observera que la multiplicité de -1 est paire).

Correction de l'exercice 1298 – *Éléments caractéristiques d'une rotation (Banque CCP MP 15)* 2

Exercice obsolète ?

Correction de l'exercice 1299 – *Une propriété des sous-groupes distingués de* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *(Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1300 – *Conjugaison d'une rotation par une symétrie orthogonale en dimension 3 (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1301 – *Matrice antisymétrique construite à partir d'une matrice orthogonale* 0

Correction de l'exercice 1302 – *Inégalité entre coefficients pour une matrice orthogonale* 0

Correction de l'exercice 1303 – *Simplification d'une expression liée à un élément de* $SO_3(\mathbb{R})$ *(Mines-Ponts PSI 08)* 3

Correction de l'exercice 1304 – *Matrices orthogonales à coefficients entiers* 0

Correction de l'exercice 1305 – *Matrice d'une symétrie orthogonale* 0

Correction de l'exercice 1306 – *Expressions analytiques d'isométries de l'espace* 0

1 Première méthode : par changement de base.

Trouvons une base orthonormée dans laquelle la matrice de r (la rotation en question) est réduite : on pose $u = 1/\sqrt{2}(1,0,-1)$, que l'on veut compléter en une BOND (e_1, e_2, u) de $\mathbb{R}^3$. On prend $e_1 = (0,1,0)$, et donc $e_2 = u \wedge e_1$ afin que la base soit directe ($\det(e_1, e_2, u) = \det(u, e_1, e_2) = \|u \wedge e_1\|^2$ où det désigne le déterminant dans la base canonique $\mathcal{C}$ et car un 3-cycle est de signature paire).

On a donc $e_2 = 1/\sqrt{2}(1,0,1)$.

Dans cette base $\mathcal{B}$, la matrice de u est $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par changement de base, et puisque les base $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormées :

$$M_{\mathcal{C}}(r) = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(r) P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'expression analytique de r est donnée par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, r(x,y,z) =$$

Deuxième méthode : Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Si v est colinéaire à u, alors $r(v) = v$. Si v est unitaire orthogonal à u, alors $(v, u \wedge v, u)$ est orthonormée directe, donc

$$r(v) = \cos(2\pi/3)v + \sin(2\pi/3)u \wedge v$$

Cette formule reste valable si v est orthogonal à u (non nécessairement unitaire).

Maintenant, soit $v \in \mathbb{R}^3$: en écrivant $v = (v|u)u + (v - (v|u)u)$, on obtient, par linéarité de r :

$$r(v) = (v|u)u + \cos(2\pi/3)(v - (v|u)u) + \sin(2\pi/3)u \wedge (v - (v|u)u) = (1 - \cos(2\pi/3))(v|u)u + \cos(2\pi/3)v + \sin(2\pi/3)u \wedge v$$

Correction de l'exercice 1307 – *Transformations de l'espace* 0

Correction de l'exercice 1308 – *Équivalences de propriétés d'un automorphisme orthogonal* 2

On peut observer que $(x,y) \mapsto (f(x)|y)$ est une forme bilinéaire sur E, donc elle est antisymétrique si et seulement si elle est alternée, d'où l'équivalence entre (2) et (3) (indépendamment d'ailleurs du fait que f soit orthogonal).

(1) $\Rightarrow$(2) : supposons (1). Soit $x \in E$:

$$(f(x)|x) = (f(f(x))|f(x)) = (-x|f(x)) = -(x|f(x)),$$

car f est orthogonal et d'après (1). Ceci donne bien (2).

Réciproquement, supposons (2) (ou (3), qui lui est équivalent). Soit $x \in E$. Il s'agit de montrer que $f^2(x) = -x$, *i.e.* $f^2(x) + x = 0_E$. On peut montrer que $f^2(x) + x$ est nul en montrant qu'il est de norme nulle :

$$\left\|f^2(x) + x\right\|^2 = \left\|f^2(x)\right\|^2 + 2(f^2(x)|x) + \|x\|^2 = \left\|f^2(x)\right\|^2 - 2(f(x)|f(x)) + \|f(x)\|^2 = 0,$$

car f conserve la norme, et d'après (3).

Remarque : alternativement, on aurait pu montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $(f^2(x) + x|y) = 0$.

Correction de l'exercice 1309 – *Matrice circulaire de rotation* 3

Correction de l'exercice 1310 – *Matrices orthogonales préservant* $\mathbb{R}_+^n$ *(ENS MP 10)* 3

Correction de l'exercice 1311 – *Chemin dérivable dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$* 3

Correction de l'exercice 1312 – *Matrices égales à leur comatrices* 4

Correction de l'exercice 1313 – *Polynôme d'une rotation (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1314 – *Étude d'orthogonalité d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (Mines MP 2015)* 3

5. Projecteurs orthogonaux, distance à un sous-espace

5.1. Projecteurs orthogonaux

Correction de l'exercice 1315 – *Une autre caractérisation des projecteurs orthogonaux* 1

L'implication directe provient du théorème de Pythagore, puisque, dans le cas où p est un projecteur orthogonal, pour tout $x \in E$, $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux, et donc :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$$

Réciproquement, supposons que p « réduise la norme » (au sens de (2)). Il s'agit de montrer que p est orthogonal, *i.e.* que $\operatorname{Im}(p)(= \ker(p - \operatorname{Id}_E))$ et $\ker(p)$ sont orthogonaux. Soit $(x, y) \in \operatorname{Im}(p) \times \ker(p)$. On introduit l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \lambda & \mapsto & \|x + \lambda\, y\|^2 \end{array}$$

Par hypothèse, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|p(x + \lambda\, y)\|^2 \leqslant \varphi(\lambda)$.

Or $p(x + \lambda\, y) = x$ car $x \in E_1(p)$ et $y \in \ker(p)$. Comme $\varphi(0) = \left\|x^2\right\|$, on en déduit que φ est minimale en 0.

Elle est en outre dérivable en 0, donc $\varphi'(0) = 0$, *i.e.* $(x|y) = 0$.

Remarque : comment avoir l'idée d'introduire φ ? En visualisant un projecteur non orthogonal, et en cherchant à comprendre géométriquement pourquoi il ne réduit pas toujours la norme.

Correction de l'exercice 1316 – *Banque CCP 2016 80* 2

Correction de l'exercice 1317 – *Expression matricielle d'un projecteur orthogonal* 2I

Correction de l'exercice 1318 – *Image d'un vecteur par un projecteur ou une symétrie* 0

Correction de l'exercice 1319 – *Détermination de projeté orthogonal (ENSEA MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1320 – *Projeté orthogonal sur un plan* 0

Correction de l'exercice 1321 – *Matrice d'une projection orthogonale* 0

Correction de l'exercice 1322 – *Encore une matrice d'une projection orthogonale* 0

Correction de l'exercice 1323 – *Une expression du rang d'un projecteur orthogonal (ENSAM PSI 08)* 2

Correction de l'exercice 1324 – *Étude d'invariants d'un endomorphisme en bases orthonormées (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1325 – *Quand la composée de deux projecteurs orthogonaux est un projecteur ?* 4

5.2. Distance à un sous-espace

Correction de l'exercice 1326 – *Un calcul de distance* 2

Correction de l'exercice 1327 – *Banque CCP 2016 81* 2

Correction de l'exercice 1328 – *Banque CCP 2016 82* 2

Correction de l'exercice 1329 – *Distance au sous-espace des fonctions polynomiales (Petites Mines MP 2015)* 2I

Correction de l'exercice 1330 – *Distance à un hyperplan (Petites Mines MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1331 – *Calcul de distance à un hyperplan (TPE-EIVP MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1332 – *Calculs de distances* 0

Correction de l'exercice 1333 – *Calcul de distance (Mines MP 2015)* 1

6. Endomorphismes symétriques

Correction de l'exercice 1334 – *Éléments propres d'un endomorhisme symétrique (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1335 – *Inégalité entre traces (Télécom Sud Paris)* 3

Correction de l'exercice 1336 – *Image et noyau d'un endomorphisme symétrique* 2I

On travaille en dimension finie. On sait déjà que $\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$ (théorème du rang), donc pour prouver la supplémentarité de $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$, il suffit de montrer qu'ils sont en somme directe (ou que leur somme est égale à E). Comme l'orthogonalité de $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ entraîne le fait que leur somme soit directe, on est ramené à montrer que pour tout $(x, y) \in \mathrm{Im}(u) \times \ker(u)$, $(x|y) = 0$.

Or il existe $z \in E$ tel que $x = u(z)$, et on a donc, par symétrie de u :

$$(x|y) = (u(z)|y) = (z|u(y)) = 0$$

car $y \in \ker(u)$.

Cela établit bien le résultat.

Correction de l'exercice 1337 – *Quand un endomorphisme est-il à la fois orthogonal et symétrique ?* 4

Correction de l'exercice 1338 – *Existence d'un vecteur propre positif associé à une valeur propre positive pour une matrice symétrique à coefficients positifs* 3I

Correction de l'exercice 1339 – *Une application combinatoire du théorème spectral (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1340 – *La composée de deux projecteurs orthogonaux est diagonalisable (Centrale MP 2015)* 3I

Correction de l'exercice 1341 – *Étude d'un endomorphisme symétrique sur $\mathbb{R}_n[X]$ (Mines MP 2015)*	3
Correction de l'exercice 1342 – *Un théorème de la limite monotone pour les suites de matrices symétriques (Mines MP 2015)*	3I
Correction de l'exercice 1343 – *Étude d'une matrice symétrique réelle définie positive (Mines MP 2015)*	3I
Correction de l'exercice 1344 – *Équation d'inconnue matricielle*	0
Correction de l'exercice 1345 – *Détermination du spectre d'un endomorphisme symétrique*	0
Correction de l'exercice 1346 – *Réduction d'un endomorphisme symétrique*	0
Correction de l'exercice 1347 – *Spectre d'une matrice symétrique*	2
Correction de l'exercice 1348 – *Matrice symétrique à coefficients positifs*	2
Correction de l'exercice 1349 – *Matrice réelle commutant avec sa transposée (ENSAM PSI 08)*	0
Correction de l'exercice 1350 – *Réduction d'un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$*	0
Correction de l'exercice 1351 – *Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique*	0
Correction de l'exercice 1352 – *Réduction d'un endomorphisme symétrique obtenu à partir de colonnes*	0
Correction de l'exercice 1353 – *Réflexion envoyant un vecteur sur un autre*	0
Correction de l'exercice 1354 – *Résolution d'une équation matricielle avec trace et transposition*	0
Correction de l'exercice 1355 – *Matrices symétriques admettant un certain polynôme annulateur*	0
Correction de l'exercice 1356 – *Trace du produit d'éléments respectifs de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$*	2
Correction de l'exercice 1357 – *$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \max(\mathrm{Sp}(A))$ est convexe (ENS MP 10)*	4
Correction de l'exercice 1358 – *Étude du spectre de la composée de deux projecteurs orthogonaux*	5
Correction de l'exercice 1359 – *Décomposition polaire (Centrale MP 2015)*	1
Correction de l'exercice 1360 – *Image d'une matrice et de sa transposée (Petites Mines MP 2015)*	3
Correction de l'exercice 1361 – *Une équation matricielle avec transposition (X MP 2015)*	3
Correction de l'exercice 1362 – *Équation matricielle avec la transposée*	0

Correction de l'exercice 1363 – *Matrice de taille 2 dont le carré est la transposée* 0

Correction de l'exercice 1364 – *Matrice commutant avec sa transconjuguée (Centrale MP 2015)* 3HP

Correction de l'exercice 1365 – *Étude du groupe unitaire complexe (Centrale MP 2015)* 3HP

Correction de l'exercice 1366 – *Sur les matrices réelles commutant avec leur transposée (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1367 – *Sur l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien* 3HP

CHAPITRE XLIX

Équations différentielles linéaires (corrections)

Dans tous les exercices, sauf mention contraire, on demande de trouver des solutions réelles.

1. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Correction de l'exercice 1368 – *Ordre un sans problème de raccord* 0

On note à chaque fois $\mathcal{E}$ l'équation étudiée, $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ son ensemble de solutions, $\mathcal{H}$ son équation homogène associée $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ son ensemble de solutions.

1 $\mathcal{S}_\mathcal{H} = \{x \mapsto C\sqrt{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\}$.

On utilise le principe de superposition. Pour le second membre $\frac{1}{1+x^2}$, on trouve $x \mapsto x$ pour solution évidente.

Pour le second membre $\frac{3}{\sqrt{1+x^2}}$, on utilise la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution de la forme $x \mapsto C(x)\sqrt{1+x^2}$. On trouve $x \mapsto 3\arctan(x)\sqrt{1+x^2}$ pour solution particulière.

On a donc

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto x + 3\arctan(x)\sqrt{1+x^2} + C\sqrt{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\}$$

2

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{C}{\sin(x)}, C \in \mathbb{R}\}$$

3

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \left(\frac{4}{17}x - \frac{15}{289}\right)e^{3x}\cos(x) + \left(\frac{1}{17}x - \frac{8}{289}\right)e^{3x}\sin(x) + \left(\frac{x^2}{2} - x + C\right)e^{-x}, C \in \mathbb{R}\}$$

4

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{4x} + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C\right)e^{2x}\}, C \in \mathbb{R}$$

5

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \sin(x) + Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\}$$

Correction de l'exercice 1369 – *Ordre un avec des coefficients non constants* 0

1

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \mathrm{ch}(x) + Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}\}$$

2

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto 2(1+\cos(x)) + Ce^{\cos(x)}, C \in \mathbb{R}\}$$

Correction de l'exercice 1370 – *Équation différentielle et DSE (CCP MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1371 – *Équations différentielles de MPSI* 0

Correction de l'exercice 1372 – *Une équation différentielle de MPSI et ses solutions bornées* 0

Correction de l'exercice 1373 – *Aspects structurels d'ensembles de solutions d'une EDL* 0

Correction de l'exercice 1374 – *Résolution d'un problème de Cauchy et étude asymptotique* 2

2. EDL scalaires d'ordre 2

2.1. EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Correction de l'exercice 1375 – *Banque CCP 2016 31* 2

Correction de l'exercice 1376 – *Ordre deux à coefficients constants* 0

Résoudre

1 Si $m \neq 0$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto -\frac{\cos(mx)}{m^2}e^x + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si $m = 0$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto 1 + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

2

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto \frac{x^5}{20}e^x - \cos(x) - \sin(x) - x\sin(x) + x^3 + 6x^2 + 18x + 27 + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

3

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{\frac{3}{16}x^2\sin(x) + \frac{3}{128}\sin(x) + \frac{3}{16}x\cos(x) - \frac{1}{32}x\cos(3x) + \frac{3}{128}\sin(3x) + A\sin(x) + B\cos(x), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Correction de l'exercice 1377 – *Exemple de problème de Cauchy pour l'ordre deux* 2

Remarque : l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de Cauchy est attestée par le cours (il n'y a donc pas de synthèse à effectuer).

L'équation caractéristique associée à l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos(mx)$$

admet 1 pour unique solution lorsque $m = 0$, et les complexes distincts $1 + im$ et $1 - im$ lorsque $m \neq 0$.

On observe immédiatement que la solution au problème de Cauchy considéré est, dans le cas où $m = 0$, la $\boxed{\text{fonction constante de valeur 1.}}$

On se place désormais dans le cas où $m \neq 0$. On cherche d'abord une solution particulière de

$$(\mathcal{E}') \quad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)e^{imx},$$

sous la forme $x \mapsto \lambda e^{imx}$ pour un certain complexe λ (puisque $im \notin \{1 + im, 1 - im\}$, m étant supposé réel), que l'on détermine par identification.

On trouve $\lambda = 1 + 2im$: une solution particulière de $\mathcal{E}'$ est donc $x \mapsto (1 + 2im)e^{imx}$.

Les coeffficients 1, -2 et $1 + m^2$ devant y'', y' et y étant réels (car m l'est), une solution particulière de $\mathcal{E}$ est $x \mapsto \cos(mx) - 2m\sin(mx)$. La solution générale de $\mathcal{E}$ est donc

$$x \mapsto \cos(mx) - 2m\sin(mx) + (a\cos(mx) + b\sin(mx))e^x,$$

où a et b décrivent $\mathbb{R}$. En cherchant f sous cette forme, on constate que les conditions initiales conduisent à l'unique choix $(a, b) = (0, 2m)$. L'unique solution au problème de Cauchy considéré est donc :

$$\boxed{x \mapsto \cos(mx) + 2m\sin(mx)(e^x - 1).}$$

Correction de l'exercice 1378 – $f(x) + f(x + \pi/2) \geqslant 0$ *guidé* 3

Correction de l'exercice 1379 – *Wronskien inhomogène surdimensionné* 2

Correction de l'exercice 1380 – *Autour de l'équation* $y'' + y = f(t)$ 1

1 Les solutions de l'équation homogène associée à $\mathcal{E}$ étant bornées, il suffit de montrer qu'une solution particulière de $\mathcal{E}$ est bornée.

On sait que

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \int_0^t \sin(t - s)f(s)\mathrm{d}s \end{array}$$

est une solution de g.

Pour montrer que g est bornée, la majoration

$$|g(t)| \leqslant \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

est trop grossière. L'idée consiste à intégrer par parties (et le fait que f soit supposée de classe $\mathcal{C}^1$ une incitation) : pour tout $t > 0$ fixé,

$$g(t) = [\cos(s-t)f(s)]_{s=0}^{s=t} - \int_0^t \cos(s-t)f'(s)\mathrm{d}s = \cos(t)f(t) - f(0) - \int_0^t \cos(s-t)f'(s)\mathrm{d}s$$

or f est bornée car continue sur $\mathbb{R}_+$ et admettant une limite finie en $+\infty$.

De plus, si par exemple f est croissante, alors

$$\left|\int_0^t \cos(s-t)f'(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^t f'(s)\mathrm{d}s = f(t) - f(0) \leqslant \lim_{+\infty} f - f(0)$$

donc $t \mapsto \int_0^t \cos(s-t)f'(s)\mathrm{d}s$ est bornée (de même si f est décroissante).

Comme une somme de fonctions bornées est bornée, g est bien bornée.

2 Comme les solutions de l'équation homogène associée à $\mathcal{E}$ sont 2π-périodique,$\mathcal{E}$ admet au moins une solution 2π-périodique si et seulement si toutes ses solutions sont 2π-périodiques.

L'une de ces solutions est donnée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_0^t \sin(t-s)f(s)\mathrm{d}s = \sin(t)\int_0^t \cos(s)f(s)\mathrm{d}s - \cos(t)\int_0^t \sin(s)f(s)\mathrm{d}s$$

Pour que cette fonction soit 2π-périodique, il faut que $g(0) = g(2\pi)$, et que $g(\pi/2) = g(5\pi/2)$, *i.e.*

$$\int_0^{2\pi} \sin(s)f(s)\mathrm{d}s = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \cos(s)f(s)\mathrm{d}s = 0$$

soit encore, par 2π-périodicité de f et de cos (et donc de leur produit) :

$$\int_0^{2\pi} \sin(s)f(s)\mathrm{d}s = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \cos(s)f(s)\mathrm{d}s = 0$$

Réciproquement, si ces relations sont satisfaites, on montre que g est bien 2π-périodique.
Remarque : par exemple, si $f = \cos$ ou $f = \sin$, aucune solution de $\mathcal{E}$ n'est 2π-périodique, mais s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tel que pour tout t, $f(t) = \cos(nt)$ (ou pour tout t, $f(t) = \sin(nt)$), alors toutes les solutions de $\mathcal{E}$ sont périodiques.

3 Posons $f \overset{def}{=} h + h''$. Ainsi, h est l'une des solutions de $y'' + y = f$. À nouveau, tout élément de $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est π-antipériodique, il suffit donc d'établir l'inégalité pour une solution particulière de $\mathcal{E}$. On sait que

$$g \ : t \mapsto \int_0^t \sin(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

est une solution de $\mathcal{E}$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t+\pi) = \int_0^{t+\pi} \sin(t+\pi-s)f(s)\mathrm{d}s = -\int_0^{t+\pi} \sin(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

de sorte que

$$g(t+\pi) - g(t) = \int_t^{t+\pi} \sin(s-t)f(s)\mathrm{d}s$$

puis $g(t+\pi) - g(t) \geqslant 0$ car $f \geqslant 0$ et sin est positive sur $[0, \pi]$.

Correction de l'exercice 1381 – *Autour de l'équation $y'' - \omega^2 y = g$* 1

Correction de l'exercice 1382 – *Variation de la constante (Mines MP 06)* 0

Correction de l'exercice 1383 – *Encore $y'' + y = g$ (Centrale PSI 10)* 2

2.2. EDL scalaire d'ordre 2 à coefficients non constants

Correction de l'exercice 1384 – *EDL scalaire d'ordre 2 (CCP MP 13)* 3

Correction de l'exercice 1385 – *EDL scalaire d'ordre 2 non résolue* 3

Correction de l'exercice 1386 – *Une EDL scalaire d'ordre 2 à coefficients non constants* 2

Il s'agit d'une EDL scalaire d'ordre 2 non homogène à coefficients non constants. Une solution évidente est $g\ : t \mapsto -\frac{t}{2}$, ce qui nous ramène à la résolution de l'équation homogène associée $\mathcal{H}$.

Si on ne repère pas la solution évidente $t \mapsto t^2+1$, on peut comme l'indique l'énoncé chercher une solution polynomiale de $\mathcal{H}$ sous la forme $f\ : t \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$, où la suite (a_n) est presque nulle.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f''(t) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$, de sorte que

$$(t^2+1)f''(t)-2f(t) = \sum_{n\geqslant 0}(n(n-1)a_n+(n+2)(n+1)a_{n+2}-2a_n)t^n = \sum_{n\geqslant 0}\left((n^2-n-2)a_n+(n+2)(n+1)a_{n+2}\right)t^n$$

or $X^2-X-2=(X+1)(X-2)$, donc f est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2}a_n$$

Si on choisit $a_0=1$ et $a_1=0$, la suite (a_n) ainsi définie est bien presque nulle, puisque $a_0=a_2=1$, et que pour $n\notin\{0,2\}$, $a_n=0$, d'où la solution particulière $f_1\ : t\mapsto 1+t^2$ de $\mathcal{H}$.

Reste à trouver une solution de $\mathcal{H}$ linéairement indépendante de f_1 : on utilise pour ce faire la méthode de l'abaissement de l'ordre (dite aussi méthode de Lagrange), en cherchant une solution de $\mathcal{H}$ sous la forme $h\ : t\mapsto C(t)(1+t^2)$, où C est une fonction deux fois dérivable (on ne perd en généralité à chercher une solution sous cette forme, puisque f_1 ne s'annule pas).

Pour tout réel t, $h''(t) = C''(t)(1+t^2)+4tC'(t)+2C(t)$ (par calcul direct ou d'après la formule de Leibniz), donc

$$(1+t^2)h''(t)-2h(t) = (1+t^2)(C''(t)(1+t^2)+4tC'(t))$$

donc h est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si C' est solution de

$$(1+t^2)y'+4ty=0$$

(l'ordre a bien été abaissé).

Une solution non nulle de cette équation est $t\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$.

Or

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} &= \int \frac{(1+t^2-t^2)\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\\ &= \arctan(t) - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t\\ &= \arctan(t) + \left[t\frac{1}{2(1+t^2)}\right] - \int \frac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)}\\ &= \frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{t}{2(1+t^2)} + K\end{aligned}$$

On peut donc choisir pour C la fonction $t\mapsto \frac{1}{2}\arctan(t)+\frac{t}{2(1+t^2)}$, donc

$$f_2\ : t\mapsto \frac{1}{2}((1+t^2)\arctan(t)+t)$$

est une solution de $\mathcal{H}$, non colinéaire à f_1 : (f_1,f_2) est bien un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$. De même d'ailleurs pour $(f_1,2f_2)$.

En conclusion, la solution générale de $\mathcal{E}$ est

$$t\mapsto -\frac{t}{2}+\lambda(1+t^2)+\mu((1+t^2)\arctan(t)+t),$$

où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1387 – *Centrale MP 07* 2

1 On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on ait :

$$f''(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 0.$$

Pour cela, on utilise le changement de variable, en considérant $g = f \circ \exp$ (et donc $f = g \circ \ln$).

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{g'(\ln(x))}{x}$$

puis

$$f''(x) = \frac{g''(\ln(x))}{x^2} - \frac{g'(\ln(x))}{x^2}$$

de sorte que

$$f''(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{g''(\ln(x))}{x^2} - \frac{g'(\ln(x))}{x^2} + \frac{g(\ln(x))}{x^2}$$

Ainsi, f est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si g est solution de

$$y'' - y' + y = 0,$$

i.e. il existe des réels λ et μ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \left(\lambda \cos(\sqrt{3}t/2) + \mu \sin(\sqrt{3}t/2)\right) e^{t/2}$$

Les solutions de $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe des réels λ et μ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \left(\lambda \cos(\sqrt{3}\ln(x)/2) + \mu \sin(\sqrt{3}\ln(x)/2)\right) \sqrt{x}$$

2 La seule solution bornée est la fonction identiquement nulle.

Correction de l'exercice 1388 – *Problème de raccord et DSE* 0

Correction de l'exercice 1389 – *EDL homogène à coefficients non constants* 0

Correction de l'exercice 1390 – *Une EDL d'ordre 2 à paramètre* 0

Correction de l'exercice 1391 – *EDL d'ordre 2 à coefficients non constants (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1392 – *Équations d'ordre 2* 0

1 Une solution évidente de $\mathcal{E}$ est $g : t \mapsto -1$.

Une solution évidente de $\mathcal{H}$ est $f_1 : t \mapsto t$.

Pour trouver une solution f_2 de $\mathcal{H}$ non colinéaire à f_1, on applique la méthode de Lagrange, en cherchant une solution de la forme $h : t \mapsto C(t)t$, où C est deux fois dérivable. Cela ne nuit pas à la généralité de la recherche, puisque f_1 ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude $\mathbb{R}_+^*$.

On a, pour tout réel t :

$$h'(t) = C'(t)t + C(t) \quad \text{et} \quad h''(t) = C''(t)t + 2C'(t)$$

de sorte que

$$t^2 h''(t) + t h'(t) - h(t) = t^2(C''(t)t + 2C'(t)) + t^2 C'(t)$$

donc h est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si C' est solution de

$$ty' + 3y = 0$$

équation dont la solution générale est $t \mapsto \lambda \frac{1}{t^3}$, qui admet $t \mapsto -\frac{\lambda}{2t^2}$ pour primitive. Le choix $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ pour C convient donc, ce qui fournit la solution $f_2 : t \mapsto \frac{1}{t}$ de $\mathcal{H}$, qui est bien non colinéaire à f_1.

Ainsi, la solution générale de $\mathcal{E}$ est :

$$t \mapsto -1 + \lambda t + \frac{\mu}{t},$$

où λ et μ parcourent $\mathbb{R}$.

Remarque : la solution f_2 trouvée est plus ou moins évidente. Si on a la chance d'y penser, on évite le recours à la méthode de l'abaissement de l'ordre.

2 Méthode standard. Ici, on peut avec un peu d'astuce trouver deux solutions évidentes non colinéaires, à savoir $f_1 : t \mapsto t + 2$ et $f_2 : t \mapsto e^t$: l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

Remarque : si on ne pense pas à f_2, on peut la trouver en appliquant la méthode de Lagrange connaissant f_1 (vraiment évidente).

Correction de l'exercice 1393 – *Équation différentielle et série entière* 0

Correction de l'exercice 1394 – *Banque CCP 2016 32* 2

Correction de l'exercice 1395 – *Une EDL d'ordre* 2 *à coeff non constants* 0

3. EDL vectorielles, systèmes différentiels

Correction de l'exercice 1396 – *Système différentiel* 0

Correction de l'exercice 1397 – *Expression du wronskien* 1

Correction de l'exercice 1398 – *Équation différentielle linéaire d'ordre trois* 0

Correction de l'exercice 1399 – *Une EDL d'ordre* 3 0

Correction de l'exercice 1400 – *Résolution d'un système différentiel* 0

Correction de l'exercice 1401 – *Conservation de la positivité des composantes* 3

Correction de l'exercice 1402 – *Sous-groupe à un paramètre de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 3

Correction de l'exercice 1403 – *Une équation différentielle matricielle (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1404 – *Systèmes différentiels linéaires* 2

Correction de l'exercice 1405 – *Banque CCP 2016 74* 2

Correction de l'exercice 1406 – *Système différentiel (CCP MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1407 – *Système différentiel et symétrie (CCP MP 2015)* 2

Correction de l'exercice 1408 – *Banque CCP 2016 75* 2

4. Étude qualitative

Correction de l'exercice 1409 – *Comportement asymptotique d'un système fondamental de solutions* 3

Correction de l'exercice 1410 – *Lieu d'annulation d'une solution d'une EDL (Mines MP 15)* 3

Correction de l'exercice 1411 – *Zéros d'une solution de* $y'' - qy = 0$ *(Mines MP 10)* 3

Correction de l'exercice 1412 – *Étude d'intégrabilité d'une solution d'une EDL (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1413 – *Unicité d'une solution d'une EDL avec annulations imposées (Mines MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1414 – *Solutions $y'' + qy = 0$ où q est périodique (ENS MP 10)* 4

Correction de l'exercice 1415 – *Zéros d'une solution de $y'' + e^t y = 0$ (X MP 10)* 4

Correction de l'exercice 1416 – *Solution d'une EDL particulière s'annulant au moins deux fois* 2

5. EDL scalaires non résolues

Correction de l'exercice 1417 – *Problèmes de raccord* 0

Correction de l'exercice 1418 – *Banque CCP 2016 42* 2

Correction de l'exercice 1419 – *EDL avec problème de raccord (Télécom Sud Paris MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1420 – *Problème de raccord d'ordre* 1 0

Correction de l'exercice 1421 – *EDL d'ordre 2 et intégrale à paramètre (ENSAM 2015)* 3

6. Équations fonctionnelles et équations différentielles, divers

Correction de l'exercice 1422 – *Équations pseudo différentielles* 2

Correction de l'exercice 1423 – *Équation fonctionnelle avec deux variables* 2

Analyse : considérons une telle solution, et soit $\star$ la relation que f vérifie par hypothèse.

Pour y fixé, en dérivant $\star$ par rapport à x, on obtient que, pour tous réels x et y :

$$f'(x+y) + f'(x-y) = 2f'(x)f(y)$$

puis, en dérivant à nouveau

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$

En reprenant ce raisonnement mais en fixant x et en dérivant deux fois par rapport à y dans $\star$, on obtient, pour tous réels x et y :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

On a donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x)f''(y) = f''(x)f(y)$, donc, s'il existe y en lequel f ne s'annule pas, f est solution d'une équation différentielle de la forme

$$z'' - \alpha z = 0$$

En reprenant $\star$, en faisant $y = 0$, on constate que si $f(0) \neq 1$, alors f est identiquement nulle.

Dans le cas où $f(0) = 1$, on obtient, en faisant $x = 0$ dans $\star$, que f est paire.

Pour résumer f doit être identiquement nulle, ou paire, solution d'une équation de la forme $z'' - \alpha z = 0$, et prenant la valeur 1 en 0.

Synthèse : la fonction nulle est évidemment solution, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto \cos(\lambda x)$ et $x \mapsto \operatorname{ch}(\lambda x)$ sont bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et vérifient la relation $\star$.

Remarque : la technique usuelle de production d'autres relations fonctionnelles à partir de celle qui nous est donnée était efficace, et l'hypothèse de régularité sur une solution de cette équation nous y invitait.

Remarque : pour une fois, s'intéresser à la stabilité de l'ensemble Ω des solutions de cette équation fonctionnelle apportait peu, car Ω n'est pas stable par les opérations usuelles. La seule stabilité pertinente était celle par composition à droite par une application linéaire (*i.e.* de la forme $x \mapsto \lambda x$), mais son utilité était limitée (tout au plus aurait-elle permis dans la synthèse de seulement vérifier que cos et ch sont dans Ω).

Correction de l'exercice 1424 – *Équation fonctionnelle avec intégrale* 2

Correction de l'exercice 1425 – *Endomorphisme et EDL* 3

Correction de l'exercice 1426 – *Endomorphisme sans sous-espace stable de dimension finie non nulle* 3

Le fait que Φ soit un endomorphisme résulte de la linéarité de l'intégrale. Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, et stable par Φ. L'endomorphisme Φ induit donc un endomorphisme ψ sur F. De plus, ψ est injectif, puisque si $\Phi(f) = 0$, alors, en dérivant, $f = 0$: ψ est un automorphisme de F.

Comme la dérivation est un inverse à gauche de ψ, c'est son inverse, donc F est stable par dérivation. De plus, soit $f \in F$: f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, et nécessairement nulle en 0, ainsi que ses dérivées : elle est l'unique solution à un problème de Cauchy dont les conditions initiales sont toutes nulles : c'est la fonction identiquement nulle.

Correction de l'exercice 1427 – *EDL et équation fonctionnelle (Centrale MP 10)* 3

CHAPITRE L

Calcul différentiel (corrections)

1. Limite, régularité

Correction de l'exercice 1428 – *Banque CCP 2016 33*	2
Correction de l'exercice 1429 – *Banque CCP 2016 52*	2
Correction de l'exercice 1430 – *Banque CCP 2016 57*	2
Correction de l'exercice 1431 – *Continuité des fonctions de deux variables*	2
Correction de l'exercice 1432 – *Limite d'un taux d'accroissement à deux bornes mobiles (Centrale PC 10)*	1I
Correction de l'exercice 1433 – *Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$*	2

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 1434 – *Régularité jusqu'à la classe $\mathcal{C}^1$*	2
Correction de l'exercice 1435 – *Limite en l'origine à paramètres*	3
Correction de l'exercice 1436 – *Fonction de classe $\mathcal{C}^1$*	3
Correction de l'exercice 1437 – *Existence d'une dérivée partielle seconde croisée (Centrale PC 10)*	2
Correction de l'exercice 1438 – *Étude de régularité (Centrale PC 10)*	3
Correction de l'exercice 1439 – *Prolongement par continuité et régularité*	0
Correction de l'exercice 1440 – *Étude d'une fonction de deux variables définie comme somme d'une série*	3
Correction de l'exercice 1441 – *Dérivées partielles secondes croisées*	2
Correction de l'exercice 1442 – *Fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$* (Mines MP 08)	3

2. Différentiabilité

Correction de l'exercice 1443 – *Banque CCP 2016 58*	2

Correction de l'exercice 1444 – *Différentiabilité d'une fonction de deux variables* 2

Correction de l'exercice 1445 – *De la topologie matricielle par une différentielle (Mines MP 2015)* 3DI

Correction de l'exercice 1446 – {*Etude de différentiabilité (Mines-Ponts PSI 10)* 2

Correction de l'exercice 1447 – *Différentielle du déterminant* 1D

Le déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomial en les coefficients de la matrice. On a

$$\det(I_n + H) = \det(I_n) + \operatorname{tr}(H) + \operatorname{o}(\|H\|),$$

donc $D(\det)(I_n) = \operatorname{tr}$.

Supposons X inversible :

$$\det(X+H) = \det(X)\det(I_n + X^{-1}H) = \det(X)(1+\operatorname{tr}(X^-1H) + \operatorname{o}(\|H\|) = \det(X) + \operatorname{tr}({}^t\operatorname{com}(X)H) + \operatorname{o}(\|H\|),$$

d'où le résultat lorsque X est inversible.

La différentielle $X \mapsto D(\det)(X)$ étant continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce résultat s'étend par densité à toute matrice.

Correction de l'exercice 1448 – *Différentielle, gradient* 2

Correction de l'exercice 1449 – *Différentielle de l'inverse matriciel* 1

U est ouvert, en tant qu'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue déterminant.
Comme $(I_n - H)(I_n + H) = I_n - H^2$, $D(\varphi)(I_n) = -\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
Dans le cas général, en $X \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$(X+H)^{-1} = X^{-1}(I_n - HX^{-1})^{-1} = X^{-1} - X^{-1}HX^{-1} + \operatorname{o}(\|H\|),$$

donc $D(\varphi)(X)(H) = -X^{-1}HX^{-1}$.

3. Extrema

Correction de l'exercice 1450 – *Étude de minimum dans un cadre euclidien (CCP MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1451 – *Recherche d'extrema (ENSEA MP 2015)* 2T

Correction de l'exercice 1452 – *Extrema d'une fonction de deux variables* 0

Correction de l'exercice 1453 – *Extrema* 0

Correction de l'exercice 1454 – *Points critiques et extrema locaux* 2

Correction de l'exercice 1455 – *Extrema d'une fonction* 0

Les points critiques sont $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Pas d'extremum local en l'origine.
f réalise un minimum local, et même global, en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 1456 – *Détermination de maximum du produit de coordonnées dans un hyperplan* 3

Correction de l'exercice 1457 – *Les moindres carrés* 1

Correction de l'exercice 1458 – *Points critiques d'une fonction convexe* 2

Correction de l'exercice 1459 – *Extrema d'une certaine fonction sur un espace euclidien* 0

Prendre une base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ de E telle que $f(x) = \lambda x_1$.

Correction de l'exercice 1460 – *Aire maximale d'un triangle inscit dans un cercle* 4

Correction de l'exercice 1461 – *Minimum de la somme des distances à trois points* 5

Correction de l'exercice 1462 – *Prolongement par continuité, extrema (Mines-Ponts PSI 10)* 0

4. EDP

Correction de l'exercice 1463 – *EDP* 3

Correction de l'exercice 1464 – *Famille d'opérateurs de dérivées partielles (Centrale MP 2015)* 3

Correction de l'exercice 1465 – *EDP d'ordre* 1 0

Correction de l'exercice 1466 – *Une équation aux dérivées partielles* 3

Correction de l'exercice 1467 – *Passage en polaires* 2

Correction de l'exercice 1468 – *EDP d'ordre* 2 *avec changement linéaire* 0

Correction de l'exercice 1469 – *EDP d'ordre* 2 *avec changement de variables non linéaire* 2

5. Divers

Correction de l'exercice 1470 – *Règle de la chaîne* 0

Correction de l'exercice 1471 – *Plan tangent horizontal* 2

Correction de l'exercice 1472 – *Gradient en polaires* 1

Correction de l'exercice 1473 – *Une méthode de Newton matricielle pour le calcul d'inverse* 5I

1 F est de classe $\mathcal{C}^1$ car les coefficients de $F(X)$ sont polynomiaux en les coefficients de X.
Bien sûr, $F(A^{-1}) = A^{-1}$.
$F(A^{-1}+H) = 2A^{-1} + 2H - (A^{-1}+H)A(A^{-1}+H) = F(A^{-1}) + A^{-1}H^2$, donc $DF(A^{-1}) = 0$.

2 $\left\|F(X) - A^{-1}\right\| \leqslant M\left\|X - A^{-1}\right\|^2$ pour un certain $M > 0$, donc

$$\left\|X_p - A^{-1}\right\| \leqslant M\left\|X_0 - A^{-1}\right\|^{2^p},$$

d'où le résultat.

3 On cherche à calculer a^{-1} étant donné un réel a fixé, *i.e.* on cherche le zéro de $f : x \mapsto a - \frac{1}{x}$. La méthode de Newton appliquée à cette fonction donne l'itératrice

$$N_f : x \mapsto 2x - a^2x.$$

Dans notre exercice, nous choisissons $f : X \mapsto A - X^{-1}$, et nous considérons l'itératrice

$$N_f : X \mapsto X - (D(f)(X))^{-1}(f(X)),$$

et on retombe bien sur F.

Correction de l'exercice 1474 – *Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique par le calcul différentiel*

2I