# Cours de mathématiques de MPSI (2012-2013)

Stéphane Flon

# Table des matières

Première partie

# Programme de prédébut d'année

CHAPITRE I

# Logique

## Sommaire



## 1. Quelques notions de logique

Il ne s'agit pas ici de faire un véritable cours de logique, mais de comprendre les mécanismes de raisonnement autorisés tout au cours de l'année. Cette brève introduction utilisera un certain formalisme (connecteurs logiques, quantificateurs), qu'il est bon de connaître pour sa culture générale, mais qu'il n'est pas toujours impératif d'employer dans ses copies, loin de là même. En fait, leur utilisation est plus subtile qu'il n'y paraît, et je préciserai quelques précautions d'emploi à connaître.

Il est recommandé de revenir sur ce chapitre tout au long de l'année si des fautes de logique subsistent dans vos copies. Bien qu'il ne puisse faire l'objet d'une évaluation directe, il est d'une importance cruciale pour la suite de l'année.

### 1.1. Assertions

Commençons par une définition informelle :

**Définition (Assertion)** 1.a

Une *assertion* (ou *proposition* ou *formule*) mathématique est une phrase (un ensemble de symboles syntaxiquement correct) à laquelle on peut assigner une valeur de vérité (dire que la phrase est vraie ou fausse a un sens).

Une assertion peut être fausse

Cette définition, bien que floue, montre que l'on accorde une importance toute relative à la valeur de vérité d'une assertion. Ce qui compte, c'est que lui en attribuer une ait un sens. Par convention, on attribue la valeur 0 à une assertion fausse, 1 à une assertion vraie. Soit par exemple $x$ un réel, la phrase « $(x = 2) \Rightarrow (x = 4)$ » est une assertion fausse, ou encore de valeur 0. Une majeure partie de votre travail consiste à prouver –ou démontrer– une assertion, *i.e.* montrer qu'elle est vraie.

1.1

Une assertion doit donc respecter une certaine syntaxe, que nous présenterons sur quelques exemples. On peut généralement énoncer une assertion dans deux registres différents : le français, qui est préférable, et le registre formel.

Outre les chiffres arabes, les lettres des alphabets latin et grec (qu'il faut absolument connaître), les symboles plus usités sont :
– les connecteurs logiques : $\vee$ (*disjonction*, se lit « ou »), $\wedge$ (*conjonction*, se lit « et »), $\neg$ (*négation*, se lit « non »), $\Rightarrow$ (*implication*), $\Leftrightarrow$ (*équivalence*) ;
– les quantificateurs logiques : $\forall$ (« quel que soit »), $\exists$ (« il existe »), $\exists!$ (« il existe un/une unique ») ;
– les parenthèses et symboles apparentés ;
– les symboles ensemblistes $\in$ (« appartient à ») et $\notin$ (« n'appartient pas à »), $\subset$ (« est inclus dans ») et $\not\subset$ (« n'est pas inclus dans »), $\cap$ (« intersection »), $\cup$ (« union »), la différence ensembliste $\setminus$ ;
– les ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ;
– les lois (addition, multiplication, etc.) ou relations ($=$, $<$, $\leqslant$, etc.) dont ces ensembles sont munis.

Exemple (Reformulation d'une assertion)

En arithmétique, la phrase « Tout multiple entier naturel de 4 est pair. » est une assertion, que l'on peut prouver facilement, et reformuler ainsi :
– « Tout multiple entier naturel de 4 est multiple de 2. »
– $\forall n \in \mathbb{N},\ (4|n) \Rightarrow (2|n)$.
– $4\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N}$.

i

### 1.2. Les connecteurs logiques

1.2.1. *Définitions.* Dans la suite, les lettres $A, B, \ldots$ désignent des *variables propositionnelles*, c'est-à-dire des assertions qui prennent librement les valeurs 0 et 1 (signifiant respectivement « faux » et « vrai »). Elles nous permettent de donner les *tables de vérité* des connecteurs logiques et, partant, de définir ces derniers.

Définition (Connecteurs logiques)

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

1.b

**Exemple (Construction de nouvelles assertions)**

Les connecteurs logiques, les variables propositionnelles et les parenthèses permettent de construire de nouvelles assertions. Par exemple, la phrase « $(A \vee B) \wedge C$ » est une assertion dont la valeur de vérité dépend de celles des variables $A$, $B$ et $C$. Le tableau de vérité de cette assertion est

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee B) \wedge C$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

ii

**Exercice (Construire une table de vérité)**

Donner le tableau de vérité de $(\neg A) \vee B$. Qu'observez-vous ?

1

**Mise en garde sur les connecteurs logiques**

L'emploi de ces symboles n'a rien d'obligatoire, et est même *déconseillé*, tant ils sont souvent très mal employés, *surtout le symbole d'implication*. D'une manière générale, il vaut mieux éviter le formalisme radical, plutôt indigeste à lire : n'oubliez pas que vous vous adressez à un humain !

1.2

1.2.2. *Assertions logiquement équivalentes.*

**Définition (Assertions logiquement équivalentes)**

Deux assertions $p$ et $q$ ayant les mêmes tables de vérité (et les mêmes variables propositionnelles) sont dites *logiquement équivalentes*. On note alors ce fait $p \equiv q$.

1.c

**Exemple (Loi du tiers-exclu)**

Les assertions $A$ et $\neg(\neg A)$ sont logiquement équivalentes. Cette propriété est appelée *loi du tiers-exclu.*

iii

**Exercice (Assertions logiquement équivalentes)**

Montrer que les assertions $(A \vee B) \wedge C$ et $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ sont également logiquement équivalentes. On dit qu'il y a *distributivité* du « et logique » par rapport au « ou logique ». Y a-t-il distributivité du « ou logique » par rapport au « et logique » ?

2

**Assertions logiquement équivalentes**

Concrètement, des assertions logiquement équivalentes peuvent se substituer l'une à l'autre, elle ne diffèrent que par la forme (la *syntaxe*) et non la signification (la *sémantique*). Cela permet parfois d'effectuer des simplifications ou des manipulations algébriques sur une assertion donnée. Par exemple, on pourra simplifier $\neg(\neg A)$ en $A$ sans crainte dans une assertion.

1.3

**Importance du parenthésage**

J'ai spontanément ajouté des parenthèses dans certaines assertions, telles que $(A \vee B) \wedge C$. La raison en est simple : l'écriture sans parenthèses $A \vee B \wedge C$ est ambiguë, car elle peut tout aussi bien signifier $(A \vee B) \wedge C$ que $A \vee (B \wedge C)$. Cette ambiguïté serait supportable si ces deux assertions étaient logiquement équivalentes, mais il est facile de constater qu'elles ne le sont pas, comme on peut le constater en considérant le cas suivant :

1.4

1.2.3. *Le symbole d'équivalence.* C'est peut-être le symbole le plus simple : il exprime l'équivalence logique entre deux assertions. L'expression « $p \Leftrightarrow q$ est vraie » signifie que $p$ et $q$ sont logiquement équivalentes. L'assertion $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ est donc toujours vraie, peu importe la valeur de vérité de $A$ (on dit que cette assertion est une *tautologie*). Nous ne donnerons pas toutes les tautologies classiques, de peur de lasser le lecteur, mais nous en verrons certaines en TD, voir l'exercice 4.

**Équivalence et reformulation**

Cette notion d'équivalence est bien sûr liée à celle de reformulation, puisque, lorsque $B$ est une reformulation de $A$, l'assertion $A \Leftrightarrow B$ est vraie. Cependant, la notion de reformulation n'a pas la précision et l'universalité de l'équivalence. Considérons par exemple les deux assertions $p\ : e^{i\pi} = -1$ et $q$ : « la fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ ». Ces deux assertions sont vraies : en examinant le tableau de vérité du symbole d'équivalence, on peut donc affirmer que : $p \Leftrightarrow q$ (ou que $p \Leftrightarrow q$ est vraie). Pourtant, il ne viendrait pas à l'idée de prétendre que $p$ soit une reformulation de $q$. Nous touchons là un point important, que nous reverrons dans le cas du symbole d'implication, voir la remarque 1.12

1.5

1.2.4. *Le symbole de négation.*

**Définition (Assertion contraire)**

L'assertion $\neg A$ s'appelle l'*assertion contraire* ou *négation* de $A$

1.d

**Sur l'assertion contraire**

$\neg A$ s'appelle assertion contraire de $A$, mais elle n'en est ni l'assertion opposée, ni l'assertion inverse. En fait, ces adjectifs seront bien employés plus tard, mais ne s'appliqueront pas à des assertions, et auront un sens tout à fait différent.
Soit par exemple un réel $x$. L'assertion $x = 2$ a pour contraire [a] $x \neq 2$, ou, puisque $x$ est supposé réel, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. L'assertion $x = -2$ n'est absolument pas le contraire de $x = 2$.
De même, et c'est un peu plus subtil, si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le contraire de l'assertion « $f$ est croissante » n'est absolument pas « $f$ est décroissante » mais « $f$ n'est pas croissante ». D'ailleurs, une fonction peut très bien être à la fois croissante et décroissante.
Nous verrons également en topologie qu'être fermé n'est pas le contraire d'être ouvert, qu'un ensemble peut très bien être ouvert et fermé, ou n'être ni l'un ni l'autre.
De nombreuses erreurs de rédaction proviennent de ce genre de confusions.

*a.* son assertion contraire est $\neg(x = 2)$ au sens strict, mais on s'est permis de la reformuler.

1.6

1.2.5. *La conjonction et la disjonction.* Le symbole de conjonction « $\wedge$ » ne pose pas de problème, puisqu'il a le même sens que dans le langage courant. Intéressons-nous plutôt au symbole de disjonction :

**Ou logique et ou usuel**

En français courant, l'emploi de la disjonction « ou » indique implicitement une incompatiblité. Si par exemple au restaurant on vous demande « Fromage ou dessert ? », vous devrez choisir entre fromage et dessert, excluant ainsi l'autre possibilité : vous ne pourrez pas prendre des deux. En mathématiques et en logique en revanche, l'assertion $A \vee B$ est vraie si $A$ et $B$ le sont toutes les deux : on dit que le « ou logique » est *inclusif* (et le « ou usuel » est généralement *exclusif*). Si on veut utiliser « ou » au sens commun en mathématiques [a], il faudra le préciser expressément, ou alors employer la construction « Soit ..., soit ... ».
On peut comprendre ce parti-pris inclusif en observant que les symboles « $\vee$ » et « $\wedge$ » sont *duaux par négation* en certain sens, voir 1.21 et les lois de Morgan. Nous comprendrons mieux ce parti-pris du ou inclusif en 1.6 et 1.10.

*a.* c'est peu fréquent

1.7

**Exercice (Construction du XOR)**

Proposer une assertion, construite avec les connecteurs logiques cités, dépendant de $A$ et $B$, dont le tableau de vérité est celui du ou exclusif XOR.

3

**Exercice (Le ou logique à partir de la négation et de la conjonction)**

Trouver une assertion logiquement équivalente à $A \vee B$ en utilisant seulement les symboles $A$, $B$, $\wedge$, $\neg$ et les parenthèses.

4

1.2.6. *L'implication.* C'est de loin le symbole le moins bien employé.

### Tableau de vérité de l'implication

1.8

Essayons de comprendre comment le tableau de vérité de l'implication est construit : l'implication $A \Rightarrow B$ se lit « si $A$, alors $B$ », soit encore, « si $A$ est vraie, alors $B$ l'est également ». Nous déduisons de cette implication une information sur $B$ *dans le seul cas où $A$ est vraie*, cette information étant que $B$ est également vraie. Nous n'avons aucune information sur $B$ lorsque $A$ est fausse. Ceci explique que, lorsque $A$ est fausse, tout soit possible pour $B$ : $B$ peut être vraie comme fausse, nous devons accepter que $A \Rightarrow B$ soit vraie dès que $A$ est fausse !
Prenons un exemple concret. Soit $x$ un réel. L'assertion « Si $x \geqslant 3$, alors $x \geqslant 0$ » est clairement vraie : pour $x = 1$ (resp. $x = -1$) en particulier, cela illustre le fait que le faux entraîne le vrai (resp. le faux).

### Reformulations de l'implication

1.9

Pour exprimer une implication $A \Rightarrow B$, on dit indifféremment (outre « Si $A$, alors $B$ ») que

- $A$ implique (ou entraîne) $B$ ;
- $B$ est une *condition nécessaire* de $A$ ;
- $A$ est une *condition suffisante* de $B$ ;
- Pour que $B$ soit vraie, il suffit que $A$ le soit ;
- Pour que $A$ soit vraie, il faut que $B$ le soit.

À l'exercice 4, nous avons vu également une reformulation formelle de $A \Rightarrow B$, à savoir $(\neg A) \vee B$. Il faut aussi savoir que l'implication $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$, appelée *contraposée* (ou *contraposition*) de $A \Rightarrow B$, est logiquement équivalente à cette dernière.

### Définition (Réciproque d'une implication)

1.e

L'*implication réciproque* de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$.

### Exercice (Implication, réciproque, équivalence)

5

Donner les tableaux de vérité de $A \Rightarrow B$, de $B \Rightarrow A$, de $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ et de $A \Leftrightarrow B$. Que remarquez-vous ?

### Implication et réciproque

1.10

Attention ! Il ne faut surtout pas confondre une implication et sa réciproque [a] : elles ne sont pas du tout logiquement équivalentes. Proposez des valeurs de vérité pour $A$ et $B$ pour lesquelles $A \Rightarrow B$ est fausse, et $B \Rightarrow A$ est vraie.

*a.* ni d'ailleurs contraposée et réciproque.

**Exemple (Implication à sens unique)**

Soit $x$ un réel. Notons $A$ l'assertion $x = 1$, $B$ l'assertion $x > 0$. Nous ne pouvons pas déterminer si $A$ et $B$ sont vraies ou fausses (puisque $x$ n'est pas suffisamment précisé), mais nous pouvons affirmer que $A$ entraîne $B$, ou encore que $A$ est une condition suffisante pour que $B$ soit vraie. Cependant, la réciproque est fausse, car si par exemple $x = 2$, $B$ est vraie sans que $A$ le soit.
Voici d'autres exemples d'implications à « sens unique » :
- Étant donné un réel $x$, $(x = 2) \Rightarrow (x^2 = 4)$ [a] ;
- $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$ ;

a. si $x$ est plus précisément supposé réel positif, alors on a l'équivalence.

iv

**Exercice (Implications à sens unique)**

Trouver des exemples d'implications à sens unique.

6

**Reformulations de l'équivalence**

D'après ce qui précède, pour exprimer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on dit indifféremment que
- $B$ est vraie si et seulement si $A$ l'est ;
- $B$ est une condition nécessaire et suffisante de $A$ ;
- Pour que $A$ soit vraie, il faut et il suffit que $B$ le soit.

1.11

**Implication et causalité**

De même que l'on ne peut pas confondre l'équivalence logique « $\Leftrightarrow$ » et la reformulation (voir 1.5), il convient de distinguer entre l'implication « $\Rightarrow$ » et la *causalité*.
Soit $x$ un réel. Si pour l'implication $(x = 2) \Rightarrow (x^2 = 4)$ (clairement vérifiée), on peut affirmer que $x = 2$ est cause de ce que $x^2 = 4$, ou que $x^2 = 4$ est conséquence de ce que $x = 2$, on n'emploierait pas ces expressions pour l'implication $(x = 2) \Rightarrow (\sin^2 + \cos^2 = 1)$, qui est pourtant également vérifiée.
N'oubliez-pas que la rédaction mathématique consiste en grande partie à faire comprendre le cheminenement de votre pensée au lecteur. À ce titre, les phrases exprimant la causalité valent bien mieux qu'une suite d'implications logiques.

1.12

Causalité et reformulation

Bien entendu, il ne faut pas confondre implication et équivalence. Dans le même ordre d'idée, vous ne devez pas confondre la causalité et la reformulation : la seconde garantit la *conservation de l'information*, tandis que la première peut [a] induire une *perte d'information*. Considérons par exemple un entier naturel $n$. Si par exemple $n = 5$, alors il existe des entiers tous deux non nuls $p$ et $q$ tels que

$$n^2 = p^2 + q^2$$

(les choix $p = 3$ et $q = 4$ conviennent en effet).
En termes formels, on a donc :

$$(n = 5) \Rightarrow (\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ n^2 = p^2 + q^2).$$

1.13

Savoir que $n = 5$ fournit une information intéressante (le carré de $n$ est somme de deux carrés d'entiers tous deux non nuls). Cependant, le fait de savoir qu'il existe de tels entiers ne permet pas d'affirmer que $n = 5$, puisque par exemple 13 vérifie aussi cette propriété ($13^2 = 12^2 + 5^2$).
Il est très important en mathématiques de prendre conscience de ces pertes ou conservations de l'information. La phase de résolution d'un exercice s'en retrouve facilitée.

*a.* il se peut qu'après examen, l'implication soit une équivalence.

Implication et donc

Dans de nombreuses copies, on trouve souvent le symbole $\Rightarrow$ employé dans le sens de « donc ». C'est une grave erreur. Tout d'abord, « donc » exprime une causalité, et non seulement une implication au sens logique : vous ne diriez pas « $x = 3$ donc la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ ». Toutefois, là n'est pas l'essentiel.

1.14

La grande différence entre les phrases « Si $A$, alors $B$ » et « $A$, donc $B$ » provient du fait que dans le premier cas, vous ne savez absolument pas si $A$ (ou $B$) est vraie, vous savez seulement que si d'aventure $A$ l'est (ce qui n'est pas garanti), alors $B$ l'est également. Dans la phrase « $A$, donc $B$ » en revanche, vous exprimez d'abord que $A$ est vrai (c'est établi), et vous en déduisez que $B$ l'est également.

## 1.3. Les quantificateurs

L'emploi des quantificateurs est relativement délicat. Il est toutefois essentiel de les avoir rencontrés avant de passer les concours, notamment pour la concision qu'ils peuvent apporter. De plus, il donnent un moyen mécanique d'écrire la négation d'une assertion (voir la méthode 1.21).

1.3.1. *Symbole universel.* Le quantificateur logique $\forall$ se lit « pour tout », ou « quel que soit », $\forall n$ signifie que l'on considère tous les $n$ satisfaisant les conditions demandées. Il permet de créer une conjonction d'un nombre arbitraire d'assertions.

**Exemple (Lecture du symbole universel)**

L'expression « $\forall n \in \mathbb{N}$ » indique que l'on considère tous les éléments de $\mathbb{N}$, ou encore que $n$ désigne un entier naturel quelconque : aucune information –autre que son appartenance à $\mathbb{N}$– n'est connue sur $n$. L'assertion (clairement vraie)

$$\forall n \in \mathbb{N}, (4|n) \Rightarrow (2|n),$$

se lit d'abord « Pour tout entier naturel $n$, si 4 divise $n$, alors 2 divise $n$ », puis par exemple « Tout entier naturel $n$ divisible par 4 est divisible par 2 ». En fait, on se rend compte qu'il n'est pas nécessaire de nommer l'entier naturel dont on parle, de sorte qu'une reformulation possible de l'assertion initiale est « Tout entier naturel multiple de 4 est pair », ce qui est quand même beaucoup plus fluide. Il vous faudra apprendre à passer ainsi du registre formel au registre français, notamment en colles.

v

**Symbole universel et conjonction**

En définitive, le symbole universel permet d'exprimer une conjonction d'assertions. Par exemple l'assertion

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n = (\sqrt{n})^2,$$

signifie que l'assertion $n = (\sqrt{n})^2$ est vraie pour tout entier naturel $n$ : pour 0, pour 1, pour 2, etc.

1.15

**Symbole universel et implication**

Revenons à l'assertion

$$\forall n \in \mathbb{N}, (4|n) \Rightarrow (2|n),$$

qui est comme on l'a indiqué clairement vraie. D'après la remarque précédente, cela sigifie qu'une conjonction d'implications est vraie, *i.e.* que chacune d'entre elles l'est : l'assertion $(4|n) \Rightarrow (2|n)$ est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, etc.
En particulier, voyons ce que cela donne lorsque $n$ vaut 1 puis 2 :
– Si 1 est divisible par 4, alors 1 est pair ;
– Si 2 est divisible par 4, alors 2 est pair.
En admettant ces assertions, on comprend pourquoi le faux entraîne le faux, et le faux entraîne le vrai.

1.16

1.3.2. *Symbole existentiel.* Le quantificateur logique $\exists$ se lit « il existe », et « $\exists x$, blabla » annonce l'existence d'au moins un $x$ (peut-être plusieurs) tel que « blabla ».

**Exemple (Utilisation du symbole existentiel)**

L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R}, x > 0$ » se lit « Il existe (au moins) un réel qui soit strictement positif » : elle est vraie.

vi

L'expression $\exists!$ impose de plus l'unicité, et $\exists! x$ annonce l'existence et l'unicité d'un $x$ : par exemple, $\exists! x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ est fausse, car il existe plusieurs réels strictement positifs.

Symbole d'existence et d'unicité

L'expression « $\exists!$ » ne sera pour ainsi dire jamais employée en cours d'année. Cependant, l'ajout de l'unicité à une existence déjà établie sera très importante dans la construction du cours et dans les exercices, car un résultat d'existence *et* d'unicité permet la *définition* d'un objet mathématique. 1.17

Exemple (Utilisation d'un résultat d'existence et d'unicité)

Cherchons à définir la fonction cosinus en supposant la fonction sinus déjà construite : la fonction cosinus est

(1) la dérivée de la fonction sinus ;

(2) une primitive de l'opposée de la fonction sinus ;

(3) une fonction solution de l'équation fonctionnelle $f^2 + \sin^2 = 1$ d'inconnue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ;

(4) la fonction $\sin \circ t$, où $t$ est l'application envoyant tout réel $x$ sur $x + \frac{\pi}{2}$. vii

Parmi ces propriétés de la fonction cosinus, quelles sont celles qui permettent de définir la fonction cosinus ? Toutes celles qui comprennent en elles, outre un résultat d'existence, un résultat d'unicité, c'est-à-dire la première et la dernière. La fonction cosinus n'est pas l'unique primitive de la fonction $-\sin$, et elle n'est pas non plus l'unique solution de l'équation fonctionnelle mentionnée. D'ailleurs, cette unicité (ou son absence) se traduit grammaticalement : j'ai employé tantôt l'article *défini* « la » (résultat d'unicité), tantôt l'article indéfini « une » (pas d'unicité *a priori*).

Importance de l'unicité

Un résultat d'existence et d'unicité permet d'introduire une définition, c'est entendu. En quoi l'unicité, si elle venait à manquer, nous gênerait-elle ? Tout simplement, nous ne saurions pas précisément de quoi nous parlerions. Par exemple, il existe au moins un réel strictement positif : soit $x$ un tel réel. Que dire de l'assertion $x = 5$ ? Pas grand chose, puisqu'elle peut très bien être vraie comme fausse ... 1.18

Existence et unicité

L'existence (resp. l'unicité) d'un élément $x$ d'un ensemble $\Omega$ vérifiant la proposition $\mathcal{R}(x)$ affirme qu'il existe au moins (resp. au plus) un tel élément. Une affirmation d'existence et d'unicité affirme donc qu'il existe un et un seul tel élément. 1.19

**Importance du sens de lecture** — 1.20

Bien sûr, une assertion se lit de gauche à droite. Que se passe-t-il si on change perturbe l'ordre d'apparition des quantificateurs ? Cela peut radicalement changer le sens et la valeur de vérité de l'assertion. Par exemple, l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y < x$$

est vraie, mais

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, y < x$$

est fausse : dans le premier cas, on affirme l'existence, pour tout réel $x$ *préalablement fixé*, d'un réel $y$ (dépendant *a priori* de $x$) qui lui soit strictement inférieur. Dans le second, on affirme l'existence d'un réel $y$, *que l'on peut se donner indépendamment de* $x$, strictement inférieur à tout réel $x$. Il faut donc exclure la permutation des quantificateurs $\exists$ et $\forall$. En revanche, deux quantificateurs de même type et consécutifs peuvent s'échanger librement : les assertions $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geqslant 0$ et $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geqslant 0$ sont rigoureusement équivalentes, et peuvent d'ailleurs se reformuler sous la forme $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \geqslant 0$, ou encore [a], $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2 \geqslant 0$

*a.* certains n'acceptent pas cette syntaxe un peu relâchée.

### 1.4. Savoir écrire la négation d'une assertion

Pour écrire la négation d'une assertion formelle $p$, il suffit d'écrire $\neg p$. Certes, mais encore ? Comment nier efficacement une assertion formelle ? Les règles à suivre sont très simples :

**Méthode (Écriture formelle d'une négation)** — 1.21

(1) On ne change rien à l'ordre des symboles ;
(2) $(\neg (\forall x \in \Omega,\ A(x))) \equiv (\exists x \in \Omega,\ \neg A(x))$ ;
(3) $(\neg (\exists x \in \Omega,\ A(x))) \equiv (\forall x \in \Omega,\ \neg A(x))$ ;
(4) $(\neg (A \wedge B)) \equiv ((\neg A) \vee (\neg B))$ ;
(5) $(\neg (A \vee B)) \equiv ((\neg A) \wedge (\neg B))$.

**Exemple (Négation d'une assertion formelle)** — viii

Soit $x$ un nombre réel. Le contraire de l'assertion $-2 \leqslant x < 3$ est $((x < -2) \vee (3 \leqslant x))$.

**Exemple (Négation d'une implication)** — ix

La négation formelle de l'implication $p \Rightarrow q$ peut s'écrire $p \wedge (\neg q)$, ce qui peut se lire « $p$ et *pourtant* non $q$ ».

**Exercice (Négation d'une assertion formelle)** — 7

Quel est le contraire de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z},\ y \leqslant x < y + 1$ ?

**Négation d'un résultat d'existence et d'unicité**

La négation d'un résultat d'existence et d'unicité est relativement compliquée. Elle s'écrit en exprimant le fait que l'existence *ou* l'unicité tombe en défaut.

1.22

**Exercice (Négation d'un résultat d'existence et d'unicité)**

Quel est le contraire de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{Z},\ y \leqslant x < y+1$ ?

8

## 2. Quelques principes de démonstration

### 2.1. La démonstration par l'absurde

La démonstration par l'absurde, consiste, pour prouver une assertion $p$, à montrer que supposer $\neg p$ conduit à une contradication, *i.e.* à montrer que $\neg p$ est fausse : d'après le principe du tiers-exclu, $p$ est vraie. Il est donc important de savoir nier une assertion donnée, voir 1.21.

**Exercice (Une preuve historique par l'absurde)**

Voir l'exercice de TD 7.

9

### 2.2. Montrer une implication

Voici diverses pistes pour démontrer une implication $p \Rightarrow q$ :

(1) Démonstration directe : « Supposons $p$ ... Ainsi, $q$ est vérifiée » ;

(2) Démonstration par contraposition : « Supposons $\neg q$ ... Ainsi, $\neg p$ est vérifiée » ;

(3) Démonstration par l'absurde : « Supposons $p$ et (pourtant) $\neg q$ ... Ceci est absurde, on a donc bien $p \Rightarrow q$ ».

**Ne pas partir de ce que l'on veut montrer**

Attention ! Lorsque vous voulez démontrer l'implication $p \Rightarrow q$, vous pouvez supposer $p$, supposer $\neg q$, voire supposer ces deux assertions, mais ne supposez jamais $q$, que vous devez montrer sachant $p$. Cette erreur est incompréhensible et pourtant fréquente.

2.1

**Chaîne d'implications**

Comment remplacer les pointillés ? On effectue une suite de conclusions successives, en partant par exemple de $p$ pour arriver à la conclusion $q$. De manière sous-jacente, la règle de logique employée est celle du *syllogisme*.

2.2

**Implication et absurde**

Pourquoi aimez-vous les démonstrations par l'absurde ? Tout simplement parce que vos hypothèses de départ sont plus fortes (vous supposez $p$ *et* $\neg q$) que dans les autres types de démonstrations. Cependant, la démonstration par l'absurde n'est pas un passage obligé, et vous pouvez vous entraîner à ne pas l'employer pour rendre votre rédaction plus élégante.

2.3

### 2.3. Montrer qu'une implication est fausse

Comme nous l'avons vu précédemment, pour montrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est fausse, on montre que $A$ est vraie et $B$ pourtant fausse.

**Rupture de chaîne d'implications**

Attention ! Supposons que vous ayez montré, dans un certain contexte (par exemple $x$ réel) une implication $A \Rightarrow B$ à partir d'une suite d'implications $A \Rightarrow A_1$, $A_1 \Rightarrow A_2$, …, $A_n \Rightarrow B$. Supposons maintenant que le contexte change (par exemple que $x$ soit désormais complexe), et que l'une des implications de la chaîne tombe en défaut. Que peut-on en déduire sur l'implication de départ $A \Rightarrow B$ : rigoureusement rien ! En effet, le raisonnement que vous avez tenu dans le cas réel n'est plus valide dans le cas complexe, mais rien ne dit qu'il n'existe pas de raisonnement alternatif permettant néanmoins de contourner l'obstacle. On peut comparer une suite d'implications à un chemin [a] : si le chemin que vous aviez trouvé pour aller de $A$ à $B$ est maintenant obstrué, rien ne dit qu'il n'en existe pas un autre.
Trouvez un exemple d'implication valable dans un contexte réel, puis dans un contexte $x$ complexe, mais en utilisant d'arguments différents.

*a.* à sens unique, on ne peut pas « remonter le courant »

2.4

**Invalidité de preuve**

On peut résumer et étendre la remarque précédente sous la morale suivante : « une invalidité de preuve n'est pas une preuve d'invalidité ».

2.5

### 2.4. Montrer une équivalence

**Méthode (Montrer une équivalence)**

Pour montrer une équivalence, on peut :
– procéder par double implication : on montre une implication et sa réciproque ;
– procéder en raisonnant par équivalences.

2.6

**Rupture de chaîne d'équivalences**

On peut comparer une suite d'équivalences comme un chemin que l'on parcourt librement, dans un sens comme dans l'autre. Comme pour une chaîne d'implications, une rupture de chaîne de plusieurs équivalences ne permet pas de dire que l'équivalence initiale tombe en défaut. Cependant, et c'est un peu subtil, dans le cas où une équivalence et une seule est fausse, on peut affirmer que l'équivalence initiale est fausse.

2.7

**Démonstration d'équivalence entre plusieurs assertions**

Si vous voulez montrer l'équivalence entre plusieurs assertions, mettons entre les trois assertions $A$, $B$, $C$ pour fixer les idées, vous pouvez procéder par implications cycliques, par exemple en prouvant les trois implications $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $C \Rightarrow A$.

2.8

**Négation d'une équivalence**

Montrer qu'une équivalence est fausse revient à montrer que l'une (au moins) des deux implications qui la forment tombe en défaut. Il se peut fort bien que l'une des implications soit vraie.

2.9

## 2.5. Montrer un résultat universel

**Méthode (Montrer un résultat universel)**

Pour montrer un résultat universel du type $\forall x \in \Omega, \mathcal{R}(x)$, on procède
- Par sens direct : « Soit $x$ un élément (quelconque) de $\Omega$. On a donc bla bla bla ... L'élément $x$ de $\Omega$, (arbitrairement choisi), vérifie donc $\mathcal{R}(x)$ ». Il faut bien comprendre que $x$ désigne un élément « générique » de $\Omega$, il n'est pas question d'en choisir un en particulier.
- Par l'absurde : « Supposons l'existence d'un élément $x$ de $\Omega$ tel que $\neg(\mathcal{R}(x))$. On a alors ... Ceci est absurde : tout élément $x$ de $\Omega$ vérifie $\mathcal{R}(x)$ ».

2.10

## 2.6. Montrer un résultat existentiel

Pour montrer un résultat existentiel $\exists x \in \Omega, \mathcal{R}(x)$, on procède le plus souvent en exhibant un élément pertinent de $\Omega$ : « L'élément $x_0 = \ldots$ de $\Omega$ vérifie $\mathcal{R}(x)$ ». On a ici déterminé explicitement un $x_0$ convenable. On dit que cette preuve d'existence est *constructive*.

**Résultat d'existence implicite**

Il arrive parfois qu'on montre un résultat d'existence sans expliciter un élément convenable, mais en utilisant un argument transversal. Nous verrons de nombreux résultats dans le cours affirmant une existence de manière non constructive (théorèmes des valeurs intermédiaires, de la base incomplète, de Bolzano-Weierstrass, etc.). On peut en voir un exemple (un peu anecdotique) dans l'exercice 9

2.11

Négation d'un résultat universel

Pour montrer qu'un résultat universel $\forall\, x \in \Omega, \mathcal{R}(x)$ tombe en défaut, nous exhiberons donc souvent un contre-exemple $x_0 \in \Omega$ (tel que $\neg(\mathcal{R}(x))$).

2.12

### 2.7. Montrer un résultat d'unicité

Outre des arguments beaucoup trop sophistiqués pour nous pour l'instant, un résultat d'unicité « il existe au plus un $x \in \Omega$ tel que $\mathcal{R}(x)$ » se montre souvent de la manière suivante : « Soit $x$ et $x'$, éléments de $\Omega$, tels que $\mathcal{R}(x)$ et $\mathcal{R}(x')$. On a alors ... Finalement, $x = x'$. », qui admet la variante (par l'absurde) : « Soit $x$ et $x'$ deux éléments *distincts* de $\Omega$, tels que $\mathcal{R}(x)$ et $\mathcal{R}(x')$. On a alors ... Ceci est absurde. »

### 2.8. Montrer un résultat d'existence et d'unicité

Pour montrer l'existence et l'unicité, on peut raisonner par équivalence pour trouver un unique $x_0$ convenable, ou prouver séparément existence et unicité. Dans ce dernier cas, on peut commencer par étudier l'unicité : en travaillant sur les contraintes imposées à un tel $x$, on peut arriver à un unique candidat convenable et explicite $x_0$. La phase d'existence s'en trouve grandement simplifiée, puisqu'il suffit alors de vérifier que ce candidat $x_0$ (explicite) vérifie bien les contraintes imposées. On dit que l'on a effectué un *raisonnement par analyse-synthèse*.

Importance de la synthèse

Attention ! La phase de synthèse, bien que souvent facile, est essentielle dans ce type de raisonnement. En effet, un résultat d'unicité n'impose aucunement l'existence. Prenons un exemple très simple : cherchons les réels $x$ tels que $((x = 2) \wedge (x < 0))$. Dans une première phase d'analyse, on suppose disposer d'au moins un $x$ convenable, et on trouve une seule valeur possible pour $x$ (ici, la valeur 2) : on peut dire qu'il y a unicité, ou « unicité en cas d'existence ». Dans la phase de synthèse, on teste le candidat trouvé : dans cet exemple, 2 ne vérifie pas l'assertion de départ. **C'est pourquoi, même quand la synthèse est évidente, on prendra garde à bien la faire figurer dans sa rédaction.**

2.13

Généralisation du raisonnement par analyse-synthèse

On peut généraliser le raisonnement par analyse-synthèse de la manière suivante : on cherche à décrire l'ensemble $\{x \in \Omega, \mathcal{R}(x)\}$. Dans une phase d'analyse, on commence par prendre un tel $x$, puis à cerner, à force de déductions, la ou les valeurs possibles de $x$. Dans la phase de synthèse, on vérifie quelles valeurs, parmi celles imposées par la phase d'analyse, vérifient bien $\mathcal{R}(x)$.

2.14

Exercice (Raisonnement par analyse synthèse)

Résoudre le système d'inconnue complexe $x$ : $(x^2 + x + 1 = 0) \wedge (x^2 + 2x + 2 = 0)$. Même question avec le système $(x^2 - 2x = 0) \wedge (x^2 + 2x - 8 = 0)$.

10

## 3. Feuille de TD 1 : Logique

### 3.1. Logique

**Exercice 1 (Valeur de vérité)** 0

Donner, lorsque cela est possible, la valeur de vérité des assertions suivantes :

(1) $(4 = 2 + 2) \wedge (4 = 2 + 1)$ ;
(2) $(4 = 2 + 2) \vee (4 = 2 + 1)$ ;
(3) $(4 = 2 + 2) \vee (4 = 3 + 1)$ ;
(4) $(4 = 2 + 2) \Rightarrow (4 = 2 + 1)$ ;
(5) $(4 = 2 + 1) \Rightarrow (4 = 3 + 1)$ ;
(6) $(4 = 2 + 1) \Rightarrow (4 = 1 + 1)$ ;
(7) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0$ ;
(8) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists z \in \mathbb{R},\ ((x < z < y) \vee (y < z < x))$ ;
(9) $\forall\, x \in \mathbb{R}, ((x^2 \geqslant 1) \Rightarrow (x \geqslant 1))$ ;
(10) La fonction inverse de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ est décroissante.

**Exercice 2 (Reformulations formelles et négations)** 0

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire dans le langage formel (le cas échéant), puis donner la négation (améliorée) de chacune des assertions suivantes

(1) $f$ est croissante ;
(2) $f$ est strictement monotone ;
(3) $f$ s'annule au moins une fois ;
(4) $f$ s'annule au moins deux fois ;
(5) $f$ est constante ;
(6) $f$ est minorée ;
(7) $\forall\, M \in \mathbb{R}, \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, ((t \geqslant t_0) \Rightarrow (f(t) \geqslant M))$.

**Exercice 3 (Nier l'injectivité)** 0

**1** Soient $R$ et $S$ des assertions. Donner la négation de $R \Rightarrow S$, sans symbole d'implication.
**2** Soit $f : E \to E'$ une application ($E$ et $E'$ étant deux ensembles non vides). L'*injectivité* de $f$ peut s'exprimer ainsi :

$$\forall\, x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x'),$$

Exprimer la non injectivité.

**Exercice 4 (Quelques tautologies célèbres (et utiles))** 0

Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies :

(1) $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ (*principe du tiers-exclu*)

(2) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ (*idempotence de la conjonction*)

(3) $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ (*idempotence de la disjonction*)

(4) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (*commutativité de la conjonction*)

(5) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ (*commutativité de la disjonction*)

(6) $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (*associativité de la conjonction*)

(7) $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ (*associativité de la disjonction*)

(8) $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B), \quad (\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (*lois de Morgan*)

(9) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (règle du *modus ponens*)

(10) $((A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$ (*distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction*)

(11) $((A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$ (*distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction*)

(12) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (*syllogisme*)

(13) $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$ (*disjonction des cas*)

(14) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow ((A \vee B) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge (\neg B)))$

(15) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (((\neg A) \vee B) \wedge ((\neg B) \vee A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))$

**Exercice 5 (Tous non nuls et non tous nuls)** 2

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels, où $n \geqslant 2$. Traduire en langage formel les deux assertions suivantes : « Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont non tous nuls », « Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont tous non nuls ».
Dans le cas où $n = 2$, trouver des formules mathématiques (sans connecteurs) équivalentes à ces assertions. Trouver de telles formules si $x_1$ et $x_2$ sont supposés complexes.

**Exercice 6 (Valeur de vérité et négation)** 3

Donner la valeur de vérité et la négation des assertions suivantes :

$$(a) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0\,;$$
$$(c) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x.$$

## 3.2. Principes de démonstration

**Exercice 7 (Irrationalité de $\sqrt{2}$)** 1

Montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On pourra raisonner par l'absurde, en supposant pouvoir écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où $p$ et $q$ sont des entiers premiers entre eux ($q$ non nul).

**Exercice 8 (Raisonnement par analyse-synthèse)** 2

En effectuant un raisonnement par analyse-synthèse, résoudre les systèmes d'inconnues réelles $x, y, z$ :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 0 \\ x+2y+2z & = & -1 \\ 2x+y+3z & = & -3 \\ 2x-3y+z & = & -3 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 0 \\ x+2y+2z & = & -1 \\ 2x+y+3z & = & -3 \\ 3x-y+4z & = & -2 \end{array}\right.$$

**Exercice 9 (Exemple astucieux de disjonction des cas)** 2 et 5

En utilisant l'éventuel caractère rationnel du nombre réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, montrer qu'il existe un nombre irrationnel $x$ tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.

CHAPITRE II

# Ensembles, relations binaires, applications

## Sommaire



## 1. Notions ensemblistes

### 1.1. Ensembles, éléments, parties

Nous considérons la notion d'ensemble comme *première*, c'est-à-dire que l'on ne va pas chercher à la définir. Un ensemble est une collection d'objets, qui sont appelés *éléments* de l'ensemble. Si un objet $x$ est un élément d'un ensemble $X$, on dit que $x$ *appartient à* $X$, ou que $X$ *possède* (ou *comprend*, ou, mais c'est une mauvaise habitude, *contient*) $x$, et on note : $x \in X$.

Si $x$ n'appartient pas à $X$, on note : $x \notin X$.

Nous dirons que deux ensembles $X$ et $X'$ sont *égaux*, et on notera $X = X'$, s'ils ont les mêmes éléments, *i.e.*

$$(\forall x \in X, x \in X') \wedge (\forall x' \in X', x' \in X).$$

Dans le cas contraire, $X$ et $X'$ seront dits *distincts*, et on notera $X \neq X'$.

Étant donné un ensemble $X$, on peut choisir une sous-collection de ses éléments, ce qui donne un *sous-ensemble* $X'$ de $X$ (on dit aussi *partie* de $X$). On dit que $X'$ est *inclus dans* $X$ (ou encore que $X$ *contient* $X'$), et on note : $X' \subset X$.

Dans le cas où une partie $Y$ de $X$ est distincte de $X$, on dit que $Y$ est une *partie stricte* de $X$, et on note : $Y \subsetneq X$.

Ainsi, étant donné deux ensembles $X$ et $X'$, $X'$ est inclus dans $X$ si et seulement si tout élément de $X'$ est élément de $X$, soit encore :

$$\forall x \in X', x \in X.$$

Si un ensemble $X'$ n'est pas inclus dans un autre $X$, on note : $X' \not\subset X$.

L'ensemble correspondant à une collection vide, *i.e.* sans élément, est appelé *ensemble vide*, et est noté $\emptyset$. L'ensemble vide est donc inclus dans n'importe quel ensemble, et cette propriété le caractérise.

Un ensemble constitué d'un seul élément (resp. d'exactement deux éléments) est appelé *singleton* (resp. *paire*).

**Ensemble en extension, ensemble en compréhension** — 1.1

On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en énumérant ses différents éléments, comme $\{0, 1, -1\}$, qui est également égal à $\{-1, 0, 1\}$ ou à $\{-1, 0, 1, 1, 0, 0, -1, 1\}$, ou en *compréhension*, *i.e.* par une propriété qui caractérise ses éléments. Par exemple, l'ensemble précédent peut aussi s'écrire $\{x \in \mathbb{R}, x^3 = x\}$.

**L'inclusion est une relation d'ordre** — 1.2

Soit $X, Y, Z$ trois ensembles quelconques. Nous avons les propriétés suivantes :

**Élément ou partie** — 1.3

Attention, il ne faut pas confondre l'élément $x$ de $X$ et le sous-ensemble $\{x\}$ de $X$ : la différence se lit déjà dans la formalisation de leur relation à $X$ : « $x \in X$ », mais « $\{x\} \subset X$ ». Elle s'entend aussi dans le registre français : $x$ appartient à $X$ tandis que $\{x\}$ est inclus dans $X$, $X$ comprend $x$, $X$ contient $\{x\}$.

**Notation (Ensemble des parties d'un ensemble)** — 1.a

On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de $X$.

**Ensemble des parties d'un ensemble** — 1.4

L'ensemble $X$ est maintenant *élément* de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ : $X \in \mathcal{P}(X)$. De même, $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$.

**Exercice (Parties d'un ensemble)** — 1

Décrire en extension $\mathcal{P}(\{0\})$, $\mathcal{P}(\{0, 1\})$.

**Définition (Ensembles disjoints)** — 1.b

Deux ensembles $A$ et $B$ sont dits *disjoints* s'ils n'ont aucun élément en commun.

**Ensembles disjoints, ensembles distincts** (1.5)

Deux ensembles distincts ne sont pas nécessairement disjoints :

Deux ensembles disjoints sont-ils toujours distincts ?

### 1.2. Création d'ensembles à partir de deux ensembles

On se donne deux sous-ensembles $A$ et $B$ d'un ensemble $X$.

**Définition (Union)** (1.c)

On note $A \cup B$ et appelle *union* de $A$ et de $B$ l'ensemble :

$$A \cup B := \{x \in X, ((x \in A) \vee (x \in B))\}.$$

**Ou logique et union** (1.6)

Surtout, ne pas oublier que le « ou logique » (noté $\vee$) est inclusif en mathématiques. Par exemple, $A \cup A = A$.

**Définition (Intersection)** (1.d)

On note $A \cap B$ et on appelle *intersection* de $A$ et de $B$ l'ensemble :

$$A \cap B := \{x \in X, ((x \in A) \wedge (x \in B))\}.$$

**Union disjointe** (1.7)

Ainsi, deux ensembles $A$ et $B$ sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. Si tel est le cas, on dit que $A \cup B$ est la *réunion disjointe* de $A$ et $B$, et on note cet ensemble $A \sqcup B$.

**Définition (Complémentaire d'une partie dans un ensemble)** (1.e)

On note par $\complement_X A$ (ou $\overline{A}$), et on appelle *complémentaire* de $A$ dans $X$ l'ensemble :

$$\complement_X A := \{x \in X, (x \notin A)\}.$$

**Complémentaire d'une partie dans un ensemble** (1.8)

La notion de complémentaire fait intervenir deux ensembles : un ensemble $X$ et une de ses parties $A$. Si vous changez l'ensemble contenant $X$, vous allez aussi changer le complémentaire. C'est pourquoi la notion $\overline{A}$ ne s'emploie que si l'ensemble $X$ dans lequel on prend le complémentaire a été précisé préalablement.

**Définition (Différence ensembliste)** 1.f

On note par $B \setminus A$ (ou $B - A$), et on appelle *différence (ensembliste)* de $B$ par $A$ l'ensemble :

$$B \setminus A := \{x \in X, ((x \in B) \wedge (x \notin A))\}.$$

**Exercice (Différence ensembliste)** 2

Pour $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, donner $A \setminus A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

**Différence ensembliste et complémentaire** 1.9

Ainsi, $\complement_X A = X \setminus A$, mais la notion de complémentaire n'a de sens que pour la partie d'un ensemble donné, alors que la différence ensembliste est beaucoup plus souple et générale.

**Connecteurs logiques et opérations ensemblistes** 1.10

On peut faire une analogie entre les connecteurs logiques et les opérations ensemblistes : préciser à quoi correspondent la réunion, l'intersection, le passage au complémentaire, l'égalité et l'inclusion.

Cette correspondance permet de passer d'assertions logiques à des relations ensemblistes, et réciproquement. Par exemple, l'associativité de la conjonction correspond à celle de l'intersection : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

**Exercice (Transcription des tautologies en termes ensemblistes)** 3

Transcrire les tautologies de l'exercice 4 du chapitre I en termes ensemblistes.

**Définition (Produit Cartesien)** 1.g

On note $A \times B$, et on appelle *produit (cartésien)* de $A$ et de $B$ l'ensemble :

$$A \times B := \{(x, y),\ ((x \in A) \wedge (y \in B))\}.$$

Les éléments d'un tel ensemble produit sont appelés des *couples*.

**Couple et paire**

Attention, il ne faut pas confondre un couple et une paire : un couple est un élément d'un ensemble produit comme $A \times B$. Si le couple $(x, y)$ appartient à $A \times B$ (*i.e.* $x \in A$ et $y \in B$), alors il n'est pas sûr que $(y, x)$ appartienne à $A \times B$, et, quand bien même ce serait le cas, on a $(x, y) \neq (y, x)$ si $y \neq x$. Une paire est un ensemble constitué de deux éléments, la paire comprenant $x$ et $y$ est $\{x, y\}$ (ou $\{y, x\}$, ou $\{y, x, x, y\}$).
Le couple $(x, x)$ de $A \times B$ n'a de sens que pour un élément $x$ de $A \cap B$, tandis qu'il est impossible de parler de la paire $\{x, x\}$ (il s'agit en fait du singleton $\{x\}$).

1.11

**Définition (Puissance d'un ensemble)**

Comme exemple particulier de produit cartésien, il y a celui d'un ensemble avec lui-même : $A \times A$, que l'on note aussi $A^2$. Dans la syntaxe formelle, on accepte les deux tournures suivantes :

$$\forall x, y \in A, \dots$$
$$\forall (x, y) \in A^2, \dots$$

La première se lit « Pour tous éléments $x$ et $y$ de $A$, ... », la seconde se lit « Pour tout couple $(x, y)$ d'éléments de $A$, ... ».

1.h

On définit également par récurrence $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $A^1 = A$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $A^{n+1} = A \times A^n$.

On considère $n$ ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$, où $n \geqslant 2$. Un élément du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ correspond à la donnée, pour tout entier $k$ entre 1 et $n$, et *dans cet ordre*, d'un élément $x_k$ de l'ensemble $E_k$, et est appelé un $n$-uplet. Il est noté $(x_1, \dots, x_n)$. L'élément $x_k$ est appelé $k$-ième *composante* (ou projection, ou coordonnée) du $n$-uplet.

Si $E_1 = \cdots = E_n$, on note l'ensemble produit $E^n$.

**$n$-uplet et ensemble**

Le $n$-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ est ordonné (comme un mot), alors que l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ est « en vrac ».

1.12

## 2. Relations binaires

### 2.1. Premières définitions

Soit $E$ un ensemble.

**Définition (Relation binaire)**

On appelle *relation (binaire)* toute partie $\mathcal{R}$ du produit cartésien $E^2 = E \times E$. Pour tout couple $(x, y)$ d'éléments de $E$, on dit que $x$ *est en relation* avec $y$, et on note $x\mathcal{R}y$, lorsque $(x, y) \in \mathcal{R}$.

2.a

**La symétrie ne va pas de soi**

Si $x$ est en relation avec $y$, $y$ n'est pas nécessairement en relation avec $x$

2.1

**Deux éléments ne sont pas forcément en relation** 2.2

Il se peut que deux éléments de $E$ ne soient pas en relation (ni dans un sens, ni dans l'autre). Il se peut même qu'un élément ne soit pas en relation avec lui-même.

**Exemple (Relations)** i

Voici quelques relations très classiques :
- Si $\mathcal{R} = E \times E$, la relation binaire obtenue est dite universelle (deux éléments quelconques de $E$ sont en relation).
- Relation d'égalité $=$.
- Relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.
- Relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.
- Relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{Z}$ :
- Relation de congruence modulo un entier naturel non nul $a$ dans $\mathbb{Z}$ :

**Définition (Propriétés d'une relation)** 2.b

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $E$ est dite *réflexive* si chaque élément de $E$ est en relation avec lui-même, *symétrique* si

$$\forall\, x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

*transitive* si

$$\forall\, x, y, z \in E, \quad ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

*antisymétrique* si

$$\forall\, x, y \in E, \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$$

**Réécriture de l'antisymétrie** 2.3

La relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$ :

$$((x\mathcal{R}y) \wedge (x \neq y)) \Rightarrow (\neg(y\mathcal{R}x)).$$

**Éléments en relation** 2.4

Si $\mathcal{R}$ est symétrique, on peut dire sans ambiguïté que $x$ et $y$ sont ou ne sont pas en relation.
Si $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique, on convient le plus souvent que $x$ et $y$ sont en relation si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.
Trouvez une relation non symétrique classique pour laquelle on emploie ce vocabulaire :

**Symétrie et antisymétrie**

Il existe des relations non symétriques et non antisymétriques, et la relation d'égalité est à la fois symétrique et antisymétrique. Est-ce la seule ?

2.5

**Définition (Relation d'équivalence)**

Une relation est dite d'*équivalence* lorsqu'elle est réflexive, symétrique, transitive.

2.c

**Exemple (de relations d'équivalence)**

C'est le cas de la relation de congruence modulo $a \in \mathbb{N}^*$, du parallélisme de deux droites.
Soit $f, g : \{0,1\} \to \{0,1\}$. On pose $f \mathcal{R} g$ si et seulement si $f(0) = g(0)$ ou $f(1) = g(1)$. Est-ce une relation d'équivalence sur l'ensembles des applications de $\{0,1\}$ dans $\{0,1\}$ ?

ii

**Relation d'équivalence**

Une relation d'équivalence permet de regrouper les éléments équivalents en *classes d'équivalence*, formant ainsi une *partition* de $E$.

2.6

### 2.2. Relations d'ordre

Il s'agit d'un cas particulier important de relation binaire.

**Définition (Relation d'ordre)**

Une *relation d'ordre* est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

2.d

**Relation d'ordre et d'équivalence**

L'unique relation d'ordre et d'équivalence est la relation d'égalité (plus finement, l'unique relation réflexive, symétrique et antisymétrique est la relation d'égalité).

2.7

**Ordre strict**

Étant donné une relation d'ordre $\leqslant$ sur un ensemble $E$, on définit l'*ordre strict* associé, noté $<$, par

$$x < y \Leftrightarrow ((x \leqslant y) \wedge (x \neq y)),$$

pour tous $(x, y) \in E^2$.
On notera qu'un ordre strict [a] n'est pas un ordre.

a. sauf dans un cas pathologique

2.8

**Exemple (Ordre)**

L'ordre naturel (ou usuel) dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ : cet ordre est si naturel qu'il est parfois sous-entendu. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$, la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$. Si $F$ est une partie d'un ensemble $E$ ordonné pour $\leqslant$, cette relation induit une relation d'ordre sur $F$.

iii

**Définition (Éléments comparables)**

Soit $\leqslant$ une relation d'ordre sur $E$. Deux éléments $x$ et $y$ de $E$ sont dits *comparables* si $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.
Si deux éléments quelconques de $E$ sont toujours comparables, on dit que $\leqslant$ est une relation d'ordre *total*, et que l'ensemble $E$ est *totalement ordonné* par (ou pour) $\leqslant$.
Sinon, on dit $\leqslant$ est une relation d'ordre *partiel*.

2.e

**Exemple (Relations d'ordre total ou partiel)**

(1) La relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est bien sûr totale ;
(2) La relation d'inclusion sur un ensemble d'au moins deux éléments est une relation d'ordre partiel ;
(3) On peut définir un ordre sur $\mathbb{R}^2$, en posant :

$$(x, y) \leqslant (x', y') \Leftrightarrow ((x \leqslant x') \wedge (y \leqslant y'))$$

(ordre partiel) mais aussi en posant

$$(x, y) \leqslant (x', y') \Leftrightarrow ((x < x') \vee ((x = x') \wedge (y \leqslant y')))$$

Ce dernier ordre est total, et se généralise à $\mathbb{R}^n$, et qui est appelé *ordre lexicographique*.

iv

**Définition (Majorant, minorant, ensemble borné)**

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Soit $A$ une partie non vide de $E$.
On dit qu'un élément $x$ de $E$ est un *majorant* de $A$ dans $E$ (ou qu'il *majore* $A$) si, pour tout élément de $A$, on a $a \leqslant x$.
On dit qu'un élément $x$ de $E$ est un *minorant* de $A$ dans $E$ (ou qu'il *minore* $A$) si, pour tout élément de $A$, on a $x \leqslant a$.
On dit que $A$ est *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe un majorant (resp. un minorant) de $A$. On dit que $A$ est *bornée* si elle est majorée et minorée.

2.f

**Majorant et minorant** 2.9

En particulier, un majorant ou minorant de $A$ dans $E$ est comparable à tout élément de $A$, et n'est pas forcément élément de $A$. Un majorant (ou un minorant) n'a aucune raison d'être unique. On peut aussi observer que la notion de majorant (par exemple) est relative à l'ensemble ordonné $E$ dans lequel on se place.

**Définition (Plus grand ou plus petit élément)** 2.g

Dans le même contexte, un élément de $A$ est appelé *plus grand élément* (ou élément *maximum*) de $A$ s'il majore $A$. Un élément de $A$ est appelé *plus petit élément* (ou élément *minimum*) de $A$ s'il minore $A$. Ces éléments sont notés (s'ils existent) $\max A$ et $\min A$, respectivement.

**Plus grand ou plus petit élément** 2.10

$A$ possède au plus un plus grand élément (et au plus un plus petit élément).

**Exemple (Plus grand ou plus petit élément)** v

- $[1;+\infty[$ admet un plus petit élément, et pas de majorant dans $\mathbb{R}$ ;
- Dans $\mathbb{R}$, $]-\infty;2[$ n'admet pas de minorant, admet des majorants, mais pas de plus grand élément ;
- Dans $(\mathbb{N},\leqslant)$, toute partie non vide admet un minimum (mais pas forcément de maximum) ;
- Dans $\mathbb{N}^*$ ordonné par la divisibilité, le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$ est 1, mais ne possède pas de plus grand élément ;
- Toute partie $A$ de $\mathcal{P}(E)$ admet un majorant $E$ (pour l'inclusion) et un minorant $\emptyset$, alors que ses éléments ne sont pas forcément comparables.

**Notion d'éléments minimal et maximal (hors programme)** 2.11

Si $E=\{a,b,c,d\}$ [a] et $A=\{\{a\},\{b,d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,c,d\}\}\subset\mathcal{P}(E)$, alors $A$ ne possède pas de plus grand élément, ni de plus petit élément. Pourtant le singleton $\{a\}$ est inclus dans tous les autres éléments de $A$, sauf $\{b,d\}$, qui ne lui est pas comparable. Pour exprimer cette propriété, on dit que $\{a\}$ est un élément *minimal* de $A$ (pour l'inclusion). Cela dit $\{b,d\}$ est aussi minimal, et les éléments maximaux sont $\{b,d\}$, $\{a,b\}$ et $\{a,c,d\}$, et $\{a,c\}$ n'est ni minimal ni maximal.
Dans le cas où l'ordre est total, maximum=maximal et minimum=minimal.
Quels sont les éléments minimaux de $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ pour la relation d'ordre de divisibilité ?

[a] où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont distincts deux à deux

**Définition (Bornes supérieure et inférieure)** 2.h

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et $A$ une partie de $E$ admettant un majorant. On dit que $A$ admet une *borne supérieure dans $E$* si l'ensemble des majorants de $A$ dans $E$ admet un plus petit élément. Dans ce cas, ce plus petit élément est appelé la *borne supérieure de $A$ dans $E$*, et noté $\sup(A)$.
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et $A$ une partie de $E$ admettant un minorant. On dit que $A$ admet une *borne inférieure dans $E$* si l'ensemble des minorants de $A$ dans $E$ admet un plus grand élément. Dans ce cas, ce plus grand élément est appelé la *borne inférieure de $A$ dans $E$*, et noté $\inf(A)$.

**Exemple (Bornes supérieure et inférieure)** vi

- Si $A$ admet un plus grand élément $\max(a)$, cet élément est bien sûr la borne supérieure de $A$. La réciproque est fausse en général, comme le montre l'exemple $[0, 1[$ ;
- $\{x \in \mathbb{Q}, |x| < \sqrt{2}\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ mais en a une dans $\mathbb{R}$. En fait, $\mathbb{R}$ possède la propriété fondamentale (que nous ne démontrerons pas) que toute partie de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure ;
- Soit $m_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ des entiers strictement positifs. Donner les bornes supérieure et inférieure de $\{m_i, i \in [\![1, n]\!]\}$ dans $\mathbb{N}$ pour la relation de divisibilité :

**Caractérisation de la borne supérieure dans le cas de l'ordre total** 2.12

On suppose $E$ totalement ordonné. Pour que $b \in E$ soit la borne supérieure de $A$ dans $E$, il faut et il suffit qu'il vérifie simultanément les deux conditions :

(1) $\forall\, a \in A, a \leqslant b$, *i.e.* $b$ est un majorant de $A$ ;

(2) $\forall\, c \in E, (c < b) \Rightarrow \exists a \in A, a > c$, *i.e.* $b$ est le premier majorant de $A$.

## 3. Généralités sur les applications

Dans ce paragraphe, $E$, $F$, $G$ désignent trois ensembles.

### 3.1. Applications : définition et premiers exemples

**Définition (Application)**

Une *application* $f$ est la donnée d'un triplet $(E, F, \Gamma)$, où $E$ et $F$ sont deux ensembles, $\Gamma$ une partie de $E \times F$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in \Gamma.$$

Cette application $f$ va de son *ensemble de départ* (ou *source*) $E$ vers (ou dans) son *ensemble d'arrivée* (ou *but*) $F$.
$\Gamma$ s'appelle le *graphe* de $f$.
Pour $x \in E$, l'unique $y$ de $F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$ est appelé *image* (ou *valeur*) de $f$ en $x$, et on note : y=f(x). On dit aussi que $x$ est un *antécédent* de $y$ par $f$.
Une telle application se note schématiquement

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Deux applications $f$ et $g$ sont dites *égales* si elles ont même ensemble de départ $E$, même ensemble d'arrivée $F$, et :

$$\forall x \in E,\ f(x) = g(x.)$$

L'ensemble des applications de $E$ dans $F$ est noté $\mathcal{F}(E, F)$, ou $F^E$.

3.a

On a donc $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$.

**Distinction entre source et but**

Il y a donc une dissymétrie profonde entre les ensembles $E$ et $F$. De chaque élément de $E$ part une unique flèche, mais il peut n'arriver aucune ou plusieurs flèches sur un élément donné de $F$. On entend d'ailleurs cette dissymétrie dans l'emploi d'un article défini pour *l'image*, et d'un article indéfini pour *un (éventuel) antécédent*.

3.1

**Importance de la source et du but**

La donnée d'une application doit comprendre but et source. Dans certains cas, l'un ou l'autre est (abusivement) oublié, mais dans d'autres, il est essentiel de les préciser (par exemple pour la notion de surjectivité).

3.2

**Exemple (Applications classiques)**

– On définit l'application *identité* (ou *identique*) de $E$ (dans $E$), notée $\mathrm{Id}_E$, par : $\mathrm{Id}_E(x) = x$, pour tout $x \in E$ ;
– Une application $f : E \to F$ est dite *constante* si elle ne prend qu'une valeur, *i.e.* s'il existe $\alpha \in F$ tel que $f(x) = \alpha$, pour tout $x \in E$, ou encore [a] si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x) = f(y).$$

*a.* en fait, ces deux assertions ne sont pas tout à fait équivalentes, voyez-vous pourquoi ?

i

**Définition (Restriction et prolongement à la source)**

Soit $f : E \to F$ une application, soit $E' \subset E$.
La *restriction* de $f$ (au départ) au sous-ensemble $E'$ de $E$ est l'application, notée $f_{|E'}$, de $E'$ dans $F$, vérifiant : $f_{|E'}(x') = f(x')$ pour tout $x' \in E'$.
On dit aussi que $f$ est un *prolongement* à $E$ de $f_{|E'}$.

3.b

### 3.2. Composition des applications

**Définition (Composée de deux applications)**

Soit deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit l'application *composée* de $f$ par $g$, l'application, notée $g \circ f$, de $E$ dans $G$, qui envoie $x$ sur $g(f(x))$, pour tout $x \in E$.

3.c

**Associativité de la composition**

Pour trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$, on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Il est donc inutile de préciser les parenthèses lorsque l'on compose trois fonctions ou plus. On peut considérer qu'il s'agit d'une forme d'associativité de la composition.

3.3

**Puissances $n$-ièmes d'une fonction**

En particulier, si $f$ est une application d'un ensemble $E$ dans lui-même et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n$ la composée $f \circ \cdots \circ f$ (où $f$ apparaît $n$ fois). Par convention, $f^0 = Id_E$.
Ainsi, pour tous entiers naturels $p$ et $q$, $f^{p+q} = f^p \circ f^q$.
Attention ! Dans certains cas, $f^n$ désigne une composée, dans d'autres, un produit. Le contexte permet souvent de lever l'ambiguïté. S'il ne le permet pas, le plus probable est le produit.

3.4

**Exemple (L'identité est neutre pour la composition)**

Si $f$ est une application de $E$ dans $F$, on a $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$.

ii

### 3.3. Injectivité, surjectivité

Dans la suite, $f$ est une application de $E$ dans $F$.

**Définition (Injectivité, surjectivité, bijectivité)**

On dit que $f$ est *injective* (ou que $f$ est une *injection*) si tout élément de $F$ admet au plus un antécédent dans $E$ par $f$ :

$$\forall\, x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x').$$

On dit que $f$ est *surjective* (ou que $f$ est une *surjection*) si tout élément de $F$ admet au moins un antécédent :

$$\forall\, y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

On dit que $f$ est *bijective* (ou que $f$ est une *bijection*) si tout élément de $F$ admet un unique antécédent, *i.e.* $f$ est injective et surjective :

$$\forall\, y \in F, \exists ! x \in E, \quad y = f(x).$$

3.d

**Exercice (Compatibilité entre injectivité et surjectivité)**

Injectivité et surjectivité ne sont pas contraires : donner des exemples variés des quatre cas possibles

4

**Définition (Bijection réciproque)**

Soit $f$ une bijection de $E$ sur $F$. On définit une application de $F$ dans $E$ en associant à tout $y$ de $F$ son unique antécédent par $f$. Cette application est appelée *bijection réciproque* de $f$, et notée $f^{-1}$.

3.e

**Propriétés élementaires de la bijection réciproque**

Soit $f$ une bijection de $E$ sur $F$.
- L'application $f^{-1}$ est bijective, de bijection réciproque $f$ : $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $f^{-1} \circ f = Id_E$, et $f \circ f^{-1} = Id_F$ ;
- On définit naturellement $f^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et, pour tous entiers relatifs $p$ et $q$, on a : $f^{p+q} = f^p \circ f^q$.

3.5

**Proposition (Composition et injectivité, surjectivité, bijectivité)**

On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

(1) Si $f$ et $g$ sont injectives (resp. surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective) ;

(2) Si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ;

(3) Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective ;

(4) Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.

3.a

Démonstration

□

### 3.4. Image directe d'une partie

**Définition (Image directe)** 3.f

Soit $A \subset E$. On appelle *image (directe)* de $A$ par $f$ et on note $f(A)$ le sous-ensemble suivant de $F$ :

$$\{f(x),\ x \in A\}.$$

L'image $f(E)$ de $E$ par $f$ est appelée l'*image de $f$*.
On définit ainsi une application $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$, notée abusivement $f$.

**Caractérisation de l'image d'une partie** 3.6

Soit $A$ une partie de $E$. On a :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x).$$

Retenir cette notion d'image, que nous utiliserons beaucoup en algèbre linéaire.

**Caractérisation de la surjectivité par l'image** 3.7

$f : E \to F$ est surjective si et seulement si l'image de $f$ est $F$, *i.e.* $f(E) = F$.

**Exemple (Images directes de parties)** iii

– $f(\emptyset) = \emptyset$. Si $a \in E$, alors $f(\{a\}) = \{f(a)\}$ ;
– L'image de la fonction sinus est $[-1, 1]$. L'image de la fonction exponentielle est $\mathbb{R}_+^*$, celle de la fonction tangente est $\mathbb{R}$.

**Propriétés de l'image directe** 3.8

Si $E_1$ et $E_2$ sont deux parties quelconques de $E$, on a :

$$(E_1 \subset E_2) \Rightarrow (f(E_1) \subset f(E_2)),$$
$$f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2),$$
$$f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2).$$

Les inclusions mentionnées peuvent être strictes (illustrez-le).

**Définition (Corestriction)** 3.g

Si $f : E \to F$ est une application et si $f(E) \subset F' \subset F$, alors on peut définir la *corestriction* de $f$ à $F'$ (ou *restriction à l'arrivée* de $f$ à $F'$), application de $E$ dans $F'$, notée $f^{|F'}$, vérifiant : $\forall x \in E, f^{|F'}(x) = f(x)$.

Il faut faire attention lorsqu'on restreint à l'arrivée, alors qu'on peut restreindre au départ sans précaution.

### 3.5. Image réciproque d'une partie

**Définition (Image réciproque)** 3.h

Soit $B \subset F$. On appelle *image réciproque* de $B$ par $f$ et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble $\{x \in E, f(x) \in B\}$ de $E$.
Ceci définit donc une application $\mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$, notée *abusivement* $f^{-1}$.

**Caractérisation de l'image réciproque** 3.9

On a donc $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

**Confusion entre image réciproque et bijection réciproque** 3.10

Attention, la notion d'image réciproque ne permet pas, en général, de définir une application de $F$ dans $E$. Seul le cas où $f$ est bijective le permet. Par ailleurs, il peut y avoir confusion des notations.

**Proposition (Propriétés de l'image réciproque)** 3.b

L'image réciproque se comporte bien avec les opérations ensemblistes : pour toutes parties $F_1$ et $F_2$ de $F$,

$$f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2),$$
$$f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2),$$
$$f^{-1}(F - F_1) = E - f^{-1}(F_1).$$

Démonstration

□

### 3.6. Ordre et applications

**Définition (Partie majorée, minorée, bornée, monotonie)** 3.i

Si $F$ est ordonné, une fonction $f : E \to F$ est *majorée* (resp. *minorée*, *bornée*) si $f(E)$ l'est dans $F$. Si en outre $E$ est ordonné, on peut définir la (stricte) croissance, la (stricte) décroissance, la (stricte) monotonie de la fonction $f : E \to F$.
Par exemple, $f$ est croissante si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \leqslant f(y)),$$

et $f$ est strictement décroissante si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x < y) \Rightarrow (f(y) < f(x)).$$

**Composée d'applications monotones** 3.11

La composée (licite) de deux applications de même monotonie (resp. de monononies contraires) est croissante (resp. décroissante). Qu'en est-il pour la stricte monotonie ?

**Stricte monotonie et ordre total** 3.12

Dans le cas où les ordres sont totaux et $f$ est strictement monotone, alors l'implication est une équivalence. En particulier, si $f$ est bijective (il ne manque que la surjectivité), sa bijection réciproque est de même monotonie stricte.

**Exemple (Stricte décroissance du passage au complémentaire)**

Soit $E$ est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ est muni de la relation d'ordre d'inclusion. On définit l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad A \mapsto E \setminus A$ (passage au complémentaire dans $E$). Cette application est strictement décroissante.

iv

## 4. Familles

Soit $I$ et $E$ deux ensembles.

**Définition (Famille)**

On appelle *famille d'éléments de $E$ indicée (ou indexée) par $I$* toute application $x$ de $I$ dans $E$. Pour $i \in I$, l'*élément* (ou *terme*) d'indice $i$ de cette famille est $x(i)$, plus souvent noté $x_i$. La famille est notée $(x_i)_{i \in I}$. On note $E^I$ l'ensemble des familles d'éléments de $E$ indicées par $I$.
La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *finie* ou *infinie*, selon que $I$ est fini ou infini.

4.a

**Exemple ($n$-uplet)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, nous noterons $[\![1, n]\!]$ pour l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, et tout $n$-uplet sera considéré comme une famille indexée par $[\![1, n]\!]$. Par exemple, $(123, 34, 21)$ est une famille indexée par $\{1, 2, 3\}$. Son terme d'indice 1 (resp. 2, 3) est 123 (resp. 34, 21). On pourra parler de terme en position $i$, ou même de $i$-ième terme.
L'ensemble des familles d'éléments de $E$ indexées par $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathbb{R}^{[\![1,n]\!]}$. On a donc identifié cet ensemble avec $\mathbb{R}^n$.

i

**Familles et applications**

$E^I$ est donc également l'ensemble des applications de $I$ dans $E$. Nous donnerons une explication à cette notation plus tard.

4.1

**Image d'une famille**

Comme c'est le cas de toute application, la famille $x = (x_i)_{i \in I}$ ne se confond pas avec son image $\{x_i, i \in I\}$. Par exemple, la famille $((-1)^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est infinie, mais son image est la paire $\{-1, 1\}$.

4.2

**Composée de termes d'une famille finie**

Si $E$ est muni d'une loi de composition interne $\bigoplus$ (*i.e.* une application $\bigoplus : E \times E \to E$), associative et commutative, et si $I$ est fini non vide, on note leur composition

$$\bigoplus_{i \in I} x_i.$$

On utilise les symbole $\Sigma$ et $\Pi$ pour la somme et le produit respectivement.
Si $E$ admet un élément neutre $e$ pour $\bigoplus$, on peut étendre cette notation lorsque $I$ est vide (la composée vaut alors $e$).

4.3

**Exemple (Familles et suites)**

Une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels indicée par $\mathbb{N}$. C'est donc une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, et un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

ii

**Exemple (Famille et ensemble)**

$\{1, 2, 3\}$ n'est pas une famille. En revanche, c'est par exemple l'image de la famille $(1, 2, 3)$, mais aussi de $(3, 2, 1)$, de $(1, 2, 1, 3)$, ou de $(3, 3, 3, 2, 1, 2)$.
La notion de famille est différente de celle d'ensemble : par exemple, les éléments d'une famille peuvent être ordonnés, comme dans le cas des couples par exemple, et il peut y avoir redondance (toujours comme dans le cas des couples), ce qui peut être utile pour les suites constantes à partir d'un certain rang par exemple.

iii

**Exemple (Famille de parties)**

$(\{0, \dots, n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ indicée par $\mathbb{N}$, *i.e.* un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$,*i.e.* une suite de parties de $\mathbb{N}$.
Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$ indexée par $I$. Donner les bornes supérieure et inférieure de $\{E_i, i \in I\}$ dans $\mathcal{P}(E)$ (ordonné par l'inclusion) :

iv

**Famille et étiquetage**

Une des utilités des familles est qu'elles permettent d'étiqueter : un élément de $E^I$, c'est un étiquetage de certains éléments de $E$ par les éléments de $I$. L'application correspondant à cette famille est injective (resp. surjective) si aucun élément n'a été étiqueté deux fois (resp. tout élément a été étiqueté).

4.4

**Définition (Famille de partie)**

Toute application de $I$ vers $\mathcal{P}(E)$ est appelée une *famille de parties de $E$ indexée par $I$*.

4.b

**Exemple (Famille de parties, suite)**

$(n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de parties de $\mathbb{Z}$, indicée par $\mathbb{N}$, donc un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

v

**Définition (Réunion et intersection d'une famille)**

4.c

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties de l'ensemble $E$ (chaque $E_i$ est une partie de $E$). La *réunion* de cette famille est la partie suivante de $E$, notée $\bigcup_{i\in I} E_i$ :

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in E_i\}.$$

L'*intersection* de cette famille est la partie suivante de $E$, notée $\bigcap_{i\in I} E_i$ :

$$\bigcap_{i\in I} E_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in E_i\}.$$

**Exemple (Réunion et intersection de familles)**

vi

$\cup_{x\in\mathbb{R}}\{x\} = \mathbb{R}$ et

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[ = \{0\}.$$

**Définition (Produit d'une famille de parties)**

4.d

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble $E$. On appelle *produit (cartésien)* de cette famille et on note $\prod_{i\in I} E_i$ l'ensemble des familles $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de $E$ telles que, pour tout $i \in I$, $a_i \in E_i$.

## 5. Feuille de TD 2 : Ensembles, relations binaires, applications

### 5.1. Ensembles

**Exercice 1 (Description d'ensembles)** 0

Décrire simplement les ensembles suivants : $\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, x \leqslant \varepsilon\}$, $\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| \leqslant \varepsilon\}$, $\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| < \varepsilon\}$.

**Exercice 2 (Ensemble des parties d'un ensemble)** 2

Décrire en extension $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ (où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des réels fixés), $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$. Combien ces ensembles ont-ils d'éléments ?

**Exercice 3 (Relations ensemblistes entre ensembles de parties)** 3

Soit $A$ et $B$ deux ensembles. Montrer que

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B),$$

mais que l'on peut avoir

$$\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

**Exercice 4 (Manipulations ensemblistes)** 3

Soit $E$ un ensemble et $A, B, C$ trois parties de $E$ telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.
**Indication :** dans ce type d'exercice, vous pouvez rester au niveau des ensembles (ne manipuler que les ensembles, sans mentionner leurs éléments), ou revenir à leurs (éventuels) éléments.

### 5.2. Relations binaires

**Exercice 5 (Structure de corps ordonné et nombres complexes)** 1

**1** Donner une relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$.

**2** Montrer que $\mathbb{C}$ n'admet pas de *structure de corps totalement ordonné*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps des nombres complexes.

**3** Donner un ordre partiel sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 6 (Une relation d'ordre sur un ensemble de fonctions)** 2

Soit $E$ un ensemble, $F = \mathbb{R}^E$. On introduit une relation $\preccurlyeq$ sur $F$ par

$$\forall (f,g) \in F^2, \quad (f \preccurlyeq g) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)) .$$

**1** Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
**2** L'ordre défini est-il total ?
**3** Soit $f \in F$. Les assertions « $f$ est majorée » et « $\{f\}$ est majorée » sont-elles équivalentes ?
**4** Soit $f, g \in F$. L'ensemble $\{f, g\}$ admet-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?
**5** Montrer que toute partie non vide et majorée de $F$ admet une borne supérieure.

**Exercice 7 (Relations d'équivalence)** 3

On rappelle qu'une *relation d'équivalence* sur un ensemble $E$ est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur $E$. Pour une telle relation $\sim$, et $x$ élément de $E$, on appelle *classe d'équivalence* de $x$ (pour la relation $\sim$) l'ensemble des éléments de $E$ équivalents à $x$.
**1** Montrer que la relation sur $\mathbb{R}$ définie par

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y),$$

pour tous réels $x$ et $y$, est une relation d'équivalence, et déterminer les classes d'équivalence pour cette relation.
**2** Montrer que la relation $\sim$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$(f \sim g) \Leftrightarrow \left(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_{|[-\varepsilon,\varepsilon]} = g_{|[-\varepsilon,\varepsilon]}\right) ,$$

pour tout $(f,g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2$, est une relation d'équivalence.
**3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la relation de congruence modulo $n$ est une relation d'équivalence. Dénombrer les classes d'équivalence. pour cette relation.
**4** Soit $\nabla$ la relation définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \nabla y) \Leftrightarrow \left((x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)\right) .$$

Montrer que $\nabla$ est une relation d'équivalence, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver le cardinal de la classe d'équivalence de $x$.

**Exercice 8 (Un calcul de borne supérieure)** 4

On introduit une relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall ((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad ((x,y) \preccurlyeq (x',y')) \Leftrightarrow (|x'-x| \leqslant y'-y) .$$

**1** Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
**2** L'ordre défini est-il total ?
**3** Montrer que le disque unité fermé admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}^2$, et déterminer celle-ci. Ce disque admet-il un plus grand élément ?

### 5.3. Généralités sur les applications

Les lettres $E, F, G$ désignent des ensembles.

### Exercice 9 (Composition, injectivité, surjectivité) — 0

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

**1** Montrer que si $g \circ f$ est injective et $f$ surjective, alors $g$ est injective.

**2** Montrer que si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective, alors $f$ est surjective.

### Exercice 10 (Inverse à droite, inverse à gauche) — 1

On dit qu'une application $f : E \to F$ est *inversible à gauche* (resp. *inversible à droite*) s'il existe une fonction $g : F \to E$ (resp. $h : F \to E$) telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (resp. $f \circ h = \mathrm{Id}_F$). On dit que $f$ est *inversible* si elle est inversible à gauche et à droite.

**1** Montrer que si $f$ est inversible à gauche d'inverse $g$ et inversible à droite d'inverse $h$, alors $g = h$.

**2** Montrer que $f$ est bijective si et seulement si elle est inversible.

**3** Montrer que si $f : E \to E$ est une involution (*i.e.* $f \circ f = \mathrm{Id}_E$), alors elle est bijective, et donner sa bijection réciproque.

**4** Montrer plus généralement que si $f : E \to E$ vérifie $f^n = \mathrm{Id}_E$ ($f$ composée $n$ fois) pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$, alors $f$ est bijective, et donner sa bijection réciproque.

**5** Donner un exemple d'application admettant un inverse à droite mais pas à gauche (resp. un inverse à gauche mais pas à droite).

### Exercice 11 (Parties paire et impaire d'une fonction) — 1

Soit $I$ un intervalle centré en 0, $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$.

**1** Montrer que $f$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire $f_p$ et d'une fonction impaire $f_i$, appelées respectivement *partie paire* et *partie impaire de $f$*.

**2** Que dire des applications partie paire et partie impaire ainsi définies de $\mathbb{R}^I$ dans lui-même ?

### Exercice 12 (Produit cartésien, injectivité, surjectivité) — 2

Soit $f : E \to F$, $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application $h$ de $E$ dans $F \times G$, définie par : $h(x) = (f(x), g(x))$, pour tout $x \in E$.

**1** Montrer que si $f$ ou $g$ est injective, alors $h$ est injective.

**2** On suppose $f$ et $g$ surjectives. L'application $h$ est-elle nécessairement surjective ?

### Exercice 13 (Caractérisations de la surjectivité) — 3

Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Établir l'équivalence des assertions suivantes :

(1) $f$ est surjective ;

(2) $\forall y \in F, \quad f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$ ;

(3) $\forall Y \in \mathcal{P}(F), \quad f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$ ;

(4) $\forall Y \in \mathcal{P}(F), \quad (f^{-1}(Y) = \emptyset) \Rightarrow (Y = \emptyset)$.

Deuxième partie

# Programme de début d'année

CHAPITRE III

# Nombres complexes

## Sommaire



Les nombres complexes sont essentiellement les nombres que l'on peut former, à l'aide des opérations algébriques usuelles, à partir des nombres réels et d'un hypothétique nombre de carré $-1$. Contrairement à ce que l'on aurait pu penser, l'introduction d'un tel nombre ne soulève pas de contradiction, et les calculs s'effectuent de manière standard.

On suppose connues les définitions et propriétés élémentaires des fonctions sinus, cosinus et tangente (continuité, dérivabilité, formules d'addition). Voir le chapitre IV à ce sujet.

Ce chapitre donne l'occasion de reprendre le cours de Terminale (que je vous invite à relire), mais de manière plus abstraite, notamment en insistant sur la notion de morphisme.

Les exercices sur les nombres complexes ne diffèrent pas de ceux posés l'année dernière. La plus grande difficulté provenant sans doute des diverses manières de représenter un nombre complexe : l'algébrique, l'exponentielle, la géométrique, et la « neutre ». Je vous invite à bien réfléchir, au long du cours et surtout des TD, aux avantages et inconvénients de ces diverses représentations selon la situation rencontrée.

# 1. Le corps des nombres complexes

## 1.1. Premières définitions

**Définition (Corps des nombres complexes)**

On appelle *corps des nombres complexes* tout surcorps $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ possède (au moins) un élément dont le carré vaut $-1$. Nous choisissons un tel élément, et le notons $i$ ;
- Tout nombre complexe $z$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :
$$a + ib,$$
où $a$ et $b$ sont des nombres réels, respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* du nombre complexe $z$, et respectivement notés $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$. Cette écriture est appelée la *notation algébrique* (ou *cartésienne*) du nombre complexe $z$.

1.a

**Définition (Nombre imaginaire pur)**

Un nombre complexe de partie réelle nulle est dit *imaginaire pur*. Leur ensemble est noté $i\mathbb{R}$, de sorte que :
$$i\mathbb{R} = \{i \cdot r,\ r \in \mathbb{R}\}.$$

1.b

Il existe (au moins) un corps des nombres complexes, la preuve est donnée en 5.

## 1.2. Image d'un nombre complexe dans le plan

L'unicité d'écriture d'un nombre complexe sous la forme algébrique $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ fournit immédiatement une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$ (c'est d'ailleurs en partant de cette bijection que nous avons défini le corps des nombres complexes). On munit le plan euclidien d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Étant donné deux points $A$ et $B$ du plan, on notera $AB$ ou $d(A, B)$ la longueur du segment $[AB]$, qui est aussi la norme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**Définition (Image et affixe)**

Pour tout nombre complexe $z$, on appelle *image* de $z$ le point du plan euclidien de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Si $M$ (resp $\vec{v}$) est un point (resp. un vecteur) du plan de couple de coordonnées $(a, b)$, alors l'*affixe* de $M$ (resp. de $\vec{v}$) est le nombre complexe $a + ib$.

1.c

En particulier, si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes quelconques, d'images respectives $M$ et $M'$, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est le nombre complexe $z' - z$.

Illustration

### 1.3. La conjugaison complexe

**Définition (Conjugaison complexe)**

Pour tout nombre complexe $z = a+ib$ mis sous forme algébrique, on note $\bar{z}$ et appelle *conjugué* de $z$ le nombre complexe $a - ib$. On définit ce faisant une application de $\mathbb{C}$ dans lui-même, appelée *conjugaison complexe*.

1.d

**Proposition (La conjugaison est un automorphisme)**

La conjugaison est un automorphisme du corps des nombres complexes, laissant $\mathbb{R}$ invariant, *i.e.* la conjugaison définit une application de $\mathbb{C}$ dans lui-même, bijective, laissant fixe tout réel, et vérifiant, pour tous complexes $z$ et $z'$ :

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \text{et} \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

1.a

Démonstration

□

On déduit de la proposition précédente, et de calculs élémentaires :

**Proposition (Propriétés de la conjugaison complexe)**

Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ :
- $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$ ;
- si $z'$ est non nul, alors : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ ;
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ ;
- $z$ est réel si et seulement si $z = \bar{z}$ ;
- $z$ est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

1.b

La transformation géométrique du plan euclidien correspondant à la conjugaison est la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{i})$ :

**Illustration**

**Exercice (Demi-plan de Poincaré)**

Le *demi-plan de Poincaré* est l'ensemble $\mathbb{H}$ des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$.

**1** Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$, $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$.

**2** Soit $\mathbb{H}^-$ l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement négative. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}^-$, $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}^-$.

1

## 1.4. Module d'un nombre complexe

**Définition (Module d'un nombre complexe)**

Pour tout nombre complexe $z$ de forme algébrique $a + ib$, le *module* de $z$ est le nombre réel $\sqrt{a^2 + b^2}$. Il est noté $|z|$.

1.e

Le module d'un nombre complexe $z$ d'image $M$ est donc la distance $OM$.

Plus généralement, pour tous nombres complexes $z$, $z'$, d'images respectives $M$ et $M'$, on a : $|z' - z| = MM' = d(M, M') = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$ ;

Pour tout nombre réel $x$, le module de $x$ est égal à la valeur absolue de $x$, et il n'y a donc pas de conflit de notations.

Pour tout nombre complexe $z$, on a : $|\bar{z}| = |z|$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$. On a l'égalité $|\mathrm{Re}(z)| = |z|$ si et seulement si $z$ est réel, et l'égalité $\mathrm{Re}(z) = |z|$ si et seulement si $z$ est un réel positif ou nul.

**Exemple** (Cercles et disques en complexes)

Soit $A$ un point du plan euclidien d'affixe $a$, et $R$ un réel strictement positif. Les images des trois ensembles $\{z \in \mathbb{C},\ |z-a| = R\}$, $\{z \in \mathbb{C},\ |z-a| < R\}$ et $\{z \in \mathbb{C},\ |z-a| \leqslant R\}$ dans le plan euclidien sont respectivement le cercle, le disque ouvert, et le disque fermé, de centre $A$ et de rayon $R$.

i

**Proposition** (Propriétés multiplicatives du module)

Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a :

(1) $|z|^2 = z\bar{z}$ ;

(2) $|zz'| = |z||z'|$ ;

(3) Si $z' \neq 0$, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ;

(4) Si $z$ est non nul, alors, pour tout entier relatif $n$ : $|z|^n = |z^n|$.

1.c

**Démonstration**

□

On utilise la première formule pour donner la forme algébrique d'un quotient (technique de la multiplication par la quantité conjuguée).

**L'application module définit un morphisme**

L'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui à $z$ associe son module $|z|$ est donc un morphisme de groupes (multiplicatifs), *i.e.* :

1.1

**Proposition** (Propriétés additives du module)

Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a :

(1) $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ (*(première) inégalité triangulaire*) ;

(2) Cette inégalité est une égalité si et seulement si $z$ et $z'$ sont positivement liés, *i.e.* il existe un réel positif ou nul $\lambda$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$ ;

(3) On a aussi : $||z| - |z'|| \leqslant |z+z'|$ (seconde inégalité triangulaire).

1.d

Une autre version de la seconde inégalité triangulaire est : $||z| - |z'|| \leqslant |z-z'|$.

Démonstration

Soit $z$ et $z'$ deux complexes quelconques. Pour prouver la première inégalité triangulaire, il faut et il suffit de prouver :

$$|z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2$$

(puisque $|z+z'|$ et $|z|+|z'|$ sont des réels positifs ou nuls). D'une part :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2,$$

et, d'autre part :

$$(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2.$$

Or $\mathrm{Re}(\bar{z}z') \leqslant |\bar{z}z'| = |z||z'|$, et l'inégalité triangulaire est prouvée. De plus, il y a égalité si et seulement si

$$\mathrm{Re}(\bar{z}z') = |z||z'|,$$

c'est-à-dire $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.
Supposons que ce soit le cas : si $z \neq 0$, on peut exprimer $z'$ comme multiple de $z$ par un réel positif ou nul ($z' = \frac{\bar{z}z'}{|z|^2} z$), et, si $z = 0$, alors on a $z = 0z'$. Dans tous les cas, on a l'existence d'un réel positif $\lambda$ comme annoncé.
Réciproquement, si on a cette condition, il y a clairement égalité (ou, si on préfère, clairement $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$).
La seconde inégalité triangulaire résulte de la première en écrivant $z = z + z' - z'$, et $z' = z + z' - z$.

□

Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire

Cette inégalité tire son nom de sa reformulation en termes géométriques.

Illustration

1.2

Exercice (Ensemble décrit par des égalités de modules)

Décrire l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $z$, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

2

**Exercice (Ensemble stable par produit)** 3

On considère le sous-ensemble $\Lambda$ de $\mathbb{N}$ suivant :

$$\Lambda = \{n \in \mathbb{N}, \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ n = a^2 + b^2\}$$

Montrer que $\Lambda$ est stable par multiplication, *i.e.* :

$$\forall (n,n') \in \Lambda^2,\ nn' \in \Lambda.$$

L'ensemble $\Lambda$ est-il stable par addition ?

## 2. L'exponentielle complexe

### 2.1. Le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

**Définition (Groupe des nombres complexes de module 1)** 2.a

L'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$, muni de la multiplication complexe, est un groupe commutatif, appelé *groupe des nombres complexes de module 1*.
L'image de $\mathbb{U}$ dans le plan est appelé *cercle unité* (ou *cercle trigonométrique*).

**Démonstration**

$\square$

### 2.2. Une notation commode

**Notation (Exponentielle complexe)** 2.b

Pour tout nombre réel $\theta$, on pose

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta).$$

**Exemple (Calculs d'exponentielles complexes)** i

$e^{i\pi} = -1$ (formule d'Euler) ; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ; $e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$ ; $e^{2i\pi} = 1$ ; $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$ ; $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

En mathématiques, on note souvent $j$ le nombre $e^{2i\pi/3} (= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

**Proposition (Le morphisme exponentiel complexe)**

L'application $\mathcal{E} : \theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{U}, \cdot)$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ :

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \left|e^{i\theta}\right| = 1$ ;
- $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \ e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}\, e^{i\theta'}$.
- $\forall z \in \mathbb{U}, \exists \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = z$ ;
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (e^{i\theta} = 1) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, \ \theta = 2k\pi)$.

2.a

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Formule de Moivre)**

Pour tout réel $\theta$, et tout entier relatif $n$ :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \left(e^{in\theta}\right),$$

soit encore :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

2.b

**Démonstration**

$\square$

### 2.3. Applications de la notation exponentielle à la trigonométrie

Rappel (Formule du binôme de Newton)

si $a$ et $b$ sont deux nombres complexes, alors on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Relations d'Euler

Pour tout réel $\theta$ :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2.1

Méthode (Linéarisation)

Pour linéariser un polynôme en cosinus et sinus, on peut partir des relations d'Euler (et de la formule du binôme de Newton).

2.2

Exercice (Un exemple de linéarisation)

Linéariser $\cos^3$ (réponse : $x \mapsto \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$).

4

Méthode (Opération inverse de la linéarisation)

Pour exprimer un cosinus ou un sinus d'un angle multiplié sous forme d'un polynôme en cosinus et sinus, on peut partir de la formule de Moivre (et de la formule du binôme de Newton).

2.3

Exercice (Exemples de délinéarisation)

Exprimer $x \mapsto \cos(5x)$ et $x \mapsto \sin(5x)$ comme polynômes de cosinus et sinus.

5

Plus généralement, la notation exponentielle permet de retrouver les formules de trigonométrie données au chapitre IV, notamment en utilisant l'« astuce de l'angle moitié ».

Méthode (Astuce de l'angle moitié)

Quand on étudie une expression de la forme $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta}$, on a souvent intérêt à factoriser par $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

2.4

Exercice (Somme de deux cosinus)

Retrouver les formules avec $\cos x + \cos y$ et $\sin x + \sin y$ en appliquant l'astuce de l'angle moitié à $e^{ix} + e^{iy}$.

6

Exercice (Calculs de sommes trigonométrique)

Faire l'exercice 16.

7

### 2.4. Arguments d'un nombre complexe non nul

Définition (Arguments d'un nombre complexe non nul)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *argument* du nombre complexe non nul $z$ tout réel $\theta$ tel que : $z = |z|e^{i\theta}$. Si $\theta_0$ est un argument de $z$, alors on note :

$$\arg z \equiv \theta_0\ [2\pi].$$

L'unique argument de $z$ appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est l'*argument principal* de $z$.

2.c

Tout nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments, mais 0 n'en a pas.
Soit $z$ un nombre non nul. Si $\theta_0$ est un argument de $z$, alors l'ensemble des arguments de $z$ est :

$$\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $\vec{v}$ est le vecteur d'affixe $z$, alors un argument de $z$ n'est rien d'autre qu'une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{i}, \vec{v})}$ ;

Définition (Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul)

Soit $z$ un nombre complexe non nul. L'écriture de $z$ sous la forme $\rho e^{i\theta}$, où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est la *forme exponentielle* (ou *forme trigonométrique*) du nombre complexe non nul $z$.

2.d

Illustration

Tout nombre complexe non nul admet une forme exponentielle, unique au choix de l'argument près. Dans le contexte de la définition précédente, on a $\rho = |z|$, et $\theta$ est un argument de $z$ (et réciproquement). Ce n'est pas parce que l'on a une écriture sous la forme $z = ae^{ix}$, où $(a, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, qu'il s'agit de la forme trigonométrique de $z$. En effet, ceci n'est pas le cas si $a < 0$. Dans ce dernier cas, on obtient la forme trigonométrique en écrivant : $z = (-a)e^{i(x+\pi)}$. 0 n'a pas de forme exponentielle.

**Proposition (Propriétés des arguments)**

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls, d'arguments respectifs $\theta$ et $\theta'$.

(1) Un argument de $\overline{z}$ est $-\theta$ ;

(2) Un argument de $zz'$ est $\theta + \theta'$ ;

(3) Un argument de $\frac{z}{z'}$ est $\theta - \theta'$ ;

(4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, un argument de $z^n$ est $n\theta$.

2.c

**Démonstration**

$\square$

**Formules abusives pour les arguments**

On écrira, de manière abusive, des formules telles que :

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \; [2\pi].$$

2.5

**Exercice (Caractérisation d'une égalité de modules)**

Montrer que deux nombres complexes $z$ et $z'$ distincts ont même module si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \; z + z' = \lambda i \, (z - z') \, .$$

8

### 2.5. La fonction exponentielle complexe

**Définition (Exponentielle complexe)**

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ mis sous sa forme algébrique, on pose :

$$e^z := e^a \, e^{ib}$$

La fonction ainsi définie, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, est appelée *fonction exponentielle complexe*.

2.e

Proposition (Propriétés fondamentales de l'exponentielle complexe)

La fonction exponentielle complexe est un morphisme surjectif du groupe additif $\mathbb{C}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$, de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$ :

(1) $\forall\, z \in \mathbb{C},\ e^z \in \mathbb{C}^*$ ;

(2) $\forall\, z, z' \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ ;

(3) $\forall\, u \in \mathbb{C}^*, \exists z \in \mathbb{C},\ u = e^z$ ;

(4) $\forall\, z \in \mathbb{C}, e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2i\pi\,\mathbb{Z}$.

De plus, l'application exponentielle est périodique, de période $2i\pi$, *i.e.*

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ e^{z+2i\pi} = e^z,$$

et commute avec la conjugaison, *i.e.*

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

2.d

Démonstration

□

Antécédents d'un nombre complexe non nul par l'exponentielle

Si $u = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe non nul mis sous sa forme trigonométrique, alors $z_0 = \ln(\rho) + i\,\theta$ est un antécédent de $u$ par la fonction exponentielle. Les autres antécédents sont les nombres $z$ tels que $z - z_0 \in 2i\pi\mathbb{Z}$, noyau de l'application exponentielle.

2.6

## 3. Nombres complexes et géométrie

Nous avons vu que la conjugaison complexe correspondait géométriquement à la symétrie othogonale d'axe celui des abscisses.

**Distances, angles, et complexes**

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Soit $z \in \mathbb{C} - \{a, b\}$, et $A, B, M$ les images respectives de $a, b, z$. Alors :

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{MA}{MB}$$

$$\arg \frac{z-a}{z-b} = (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}})$$

En particulier :
- $A, B, M$ sont alignés si et seulement si $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$ ;
- $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.

On généralise aisément ces formules au cas de quatre points $A$, $B$, $C$, $D$.

3.1

**Descriptions paramétriques complexes des droites et des segments**

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, d'images respectives $A$ et $B$. L'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in \mathbb{R}\}$ correspond à la droite $(AB)$ (la droite $(AB)$ est l'ensemble des barycentres des points $A$ et $B$). L'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in [0, 1]\}$ correspond au segment $[AB]$ (le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points $A$ et $B$ affectés de poids positifs).

3.2

**Proposition (Similitudes directes et nombres complexes)**

L'application $\varphi : z \mapsto az + b$, correspond, selon les valeurs des complexes $a$ et $b$, à la transformation géométrique $\Phi$ suivante :
- Si $a = 0$, tout point du plan est envoyé sur un même point d'affixe $b$ (application constante) ;
- Si $a = 1$, $\Phi$ est la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $b$ ;
- Si $a \notin \{0, 1\}$, $\Phi$ est la similitude directe de centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$, et d'angle $\arg a$.

3.a

**Démonstration**

□

En particulier, dans le dernier cas :
- Si $b = 0$ la similitude directe est de centre $O$ ;
- Si $a \in \mathbb{R}$, $\Phi$ est une homothétie ;
- Si $|a| = 1$, alors $\Phi$ est une rotation ;

$\Phi$ est une symétrie centrale si et seulement si $a = -1$.

**Exercice (Composée de deux symétries centrales)** 9

Montrer que la composée de deux symétries centrales est une translation.

**Application inverse géométrique** 3.3

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On obtient l'image de $\frac{1}{z}$ en effectuant une symétrie orthogonale par rapport l'axe des abscisses, puis ce que l'on appelle une *inversion* de centre $O$.

**Illustration**

## 4. Équations polynomiales complexes

### 4.1. Le théorème fondamental de l'algèbre

On admet :

**Théorème fondamental de l'algèbre (ou de d'Alembert-Gauss)** 4.a

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.

**Corollaire (Décomposition en produit d'irréductibles d'un polynôme complexe)** 4.b

Tout polynôme non constant à coefficients complexes se décompose en produit de polynômes de degré 1.

**Nombre de racines d'un polynôme complexe** 4.1

Un polynôme complexe non nul de degré $n$ admet au plus $n$ racines (en fait exactement $n$ si on les compte avec multiplicité).

On « rappelle » que si $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ est un polynôme unitaire de degré $n$ à coefficients complexes, alors $a_{n-1}$ est l'opposé de la somme de ses racines, et $a_0$ est le produit de ces racines si $n$ est pair, l'opposé sinon.

Par exemple (à connaître), les racines du polynôme $X^2 - SX + P$ ont pour somme $S$ et pour produit $P$.

### 4.2. Racines carrées d'un nombre complexe

Nous savons déjà exprimer les racines carrées d'un nombre complexe non nul mis sous sa forme trigonométrique. L'objet de ce paragraphe est de montrer comment procéder dans le cas où le nombre est donné sous sa forme algébrique.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ $(a, b \in \mathbb{R})$. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, $z$ admet deux racines carrées distinctes.

**Méthode (Racines carrées d'un nombre complexe non nul)** 4.2

On cherche $u, v$ réels tels que $(u + iv)^2 = a + ib$, équation équivalente au système :

$$\begin{cases} u^2 - v^2 & = & a \\ 2uv & = & b \end{cases}$$

Plutôt que de partir de ce système, on ajoute l'équation obtenue en égalant les modules :

$$u^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nous résolvons d'abord le système de deux équations à deux « inconnues » $u^2$ et $v^2$, et nous déterminons les valeurs possibles de $u$ et $v$ avec l'équation restante (qui donne le signe de $uv$).

**Racine carrée d'un complexe** 4.3

Attention ! La notation $\sqrt{z}$ n'a de sens que si $z$ est un *nombre réel positif*.

**Exercice (Exemple de recherche de racines carrées)** 10

Déterminer par cette méthode les racines carrées de $3 - 4i$.

### 4.3. Équations du second degré

On sait que toute équation du second degré à coefficients complexes admet deux racines (éventuellement confondues). Voyons comment les calculer :

**Méthode (Résolution d'une équation du second degré)** 4.4

La mise sous la forme canonique d'une équation du second degré est toujours possible dans $\mathbb{C}$. Le discriminant de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (où $a \neq 0$) est

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta = 0$, l'unique solution de l'équation est $-\frac{b}{2a}$ ;
- Si $\Delta \neq 0$, on introduit alors $\delta$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Les deux solutions de l'équation sont alors $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.

**Exercice (Exemple de factorisation d'un polynôme complexe)** 11

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme : $X^4 + 6X^2 + 25$.

### 4.4. Racines $n$-ièmes de l'unité

**Définition** (Racines $n$-ième de l'unité)

Pour tout entier naturel non nul $n$, on appelle *racine $n$-ième de l'unité* tout nombre complexe $z$ vérifiant $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ leur ensemble.

4.a

Il y a donc au plus $n$ racines $n$-ièmes de l'unité, toute racine $n$-ième de l'unité est élément de $\mathbb{U}$. De plus, si $z$ (resp. $z'$) est racine $n$-ième (resp. $m$-ième) de l'unité, alors $zz'$ est racine $\operatorname{ppcm}(n, m)$ de l'unité (et peut-être bien mieux). Si $z$ est une racine $n$-ième de l'unité, il en est de même pour son inverse.

**Exemple** (Racines de l'unité)

- Les racines cubiques de l'unité sont $1$, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$. On remarque par simple calcul que $1 + j + j^2 = 0$ ;
- l'unique nombre à être racine $n$-ième de l'unité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est 1 (autrement dit $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n = \{1\}$), et $-1$ est racine $n$-ième de l'unité pour tout $n$ pair (non nul) ;
- Les racines quatrièmes de l'unité sont $1, -1, i, -i$.

i

**Proposition** (Description des racines $n$-ièmes de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Pour tout entier naturel positif $n$, il existe exactement $n$ racines $n$-ièmes de l'unité. On a :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{1, \dots, n\}\}$$

(2) $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

4.c

**Démonstration**

$\square$

Les images des éléments de $\mathbb{U}_n$ forment un polygone régulier à $n$ côtés.

Illustration

Autres description de l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité

On peut également écrire, entre autres :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.5

Exercice (Somme et produit des racines de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer somme et produit des racines $n$-ièmes de l'unité.

12

## 4.5. Résolution de l'équation $z^n = a$

Définition (Racine $n$-ième de $a$)

Soit $a$ un nombre complexe non nul, et $n$ un entier naturel non nul. On appelle *racine $n$-ième de $a$* tout nombre complexe $z$ tel que : $z^n = a$.

4.b

Proposition (Description des racines $n$-ièmes de $a$)

Soit $a = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul mis sous sa forme trigonométrique.

(1) Le nombre $\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine $n$-ième de $a$.

(2) Il existe exactement $n$ racines $n$-ièmes de $a$. Elles s'obtiennent en multipliant une racine $n$-ième donnée $z_0$ de $a$ par les différentes racines $n$-ièmes de l'unité ;

(3) L'ensemble des racines $n$-ièmes de $a$ peut s'écrire :

$$\{\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{1, \dots, n\}\}$$

4.d

Images des racines $n$-ièmes de $a$

Les images des racines $n$-ièmes de $a$ forment un polygone régulier à $n$ côtés.

4.6

**Factorisation de $X^n - a$**

Le polynôme $X^n - a$ se factorise en $\prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$, où $z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$.

4.7

## 5. Une construction de $\mathbb{C}$

La construction suivante permet d'exhiber un modèle du corps des nombres complexes, modèle défini (« trouvé ») de manière à satisfaire les propriétés algébriques souhaitées de ce corps.

On introduit l'ensemble $\Omega = \mathbb{R}^2$, muni des lois d'addition et de multiplication suivantes :

$$\forall \left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \in \Omega^2,\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\ (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

5.0.1. $(\Omega, +)$ *est un groupe commutatif.*

**Démonstration**

**La loi $+$ est une loi de composition interne sur $\Omega$.** En effet, si $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ sont deux éléments quelconques de $\Omega$, alors leur somme $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ est encore élément de $\Omega$.

**La loi $+$ est associative.** Soit $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ et $(x_3, y_3)$ trois éléments quelconques de $\Omega$. D'une part,

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3), \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3). \end{aligned}$$

**La loi $+$ est commutative.** Soit $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ deux éléments quelconques de $\Omega$ :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

**$\Omega$ admet un élément neutre pour $+$.** En effet, pour tout élément $(x, y)$ de $\Omega$, on a : $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$.

**Chaque élément de $\Omega$ admet un symétrique pour $+$.** Pour tout élément $(x, y)$ de $\Omega$, on a : $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$.

$\square$

**Intérêt de montrer si tôt la commutativité**

Il peut paraître surprenant de montrer la commutativité de l'addition dans $\Omega$ avant l'existence d'un élément neutre par exemple. En réalité, cette connaissance préalable de la commutativité permet de simplifier la preuve de certaines assertions. Dans ma démonstration, j'ai montré que $(0, 0)$ était élément neutre à droite pour l'addition dans $\Omega$ : par commutativité, il est également élément neutre à gauche. De même pour l'existence d'un symétrique, et plus tard, pour la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

5.1

**Structure de groupe produit**

L'exercice 8 sur la structure de groupe produit du chapitre XI permet de généraliser les calculs menés ici : $\Omega$ est un groupe abélien car il a une structure de groupe abélien produit.

5.2

5.0.2. $(\Omega, +, *)$ *est un anneau commutatif non nul.*

Démonstration

$*$ **est une loi de composition interne sur $\Omega$.** En effet, si $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ sont deux éléments quelconques de $\Omega$, alors

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

est encore élément de $\Omega$ (par structure d'anneau de $\mathbb{R}$).

**La loi $*$ est associative.** Soit $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ et $(x_3, y_3)$ trois éléments quelconques de $\Omega$. D'une part,

$$\begin{aligned}
& ((x_1, y_1) * (x_2, y_2)) * (x_3, y_3) \\
= \quad & (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) * (x_3, y_3) \\
= \quad & ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3) \\
= \quad & (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)
\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
& (x_1, y_1) * ((x_2, y_2) * (x_3, y_3)) \\
= \quad & (x_1, y_1) * (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) \\
= \quad & (x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3), x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)) \\
= \quad & (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3, x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3).
\end{aligned}$$

La loi $*$ est donc bien associative.

**La loi $*$ est commutative.** Soit $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ deux éléments quelconques de $\Omega$.

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

et

$$(x_2, y_2) * (x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

La loi $*$ est donc commutative.

**La loi $*$ admet un élément neutre, différent de $(0, 0)$.** On vérifie que pour tout élément $(x, y)$ de $\Omega$, on a :

$$(x, y) * (1, 0) = (1x - 0y, 1y + 0x) = (x, y).$$

$(1, 0)$ est bien élément unité de $(\Omega, *)$, et est différent de $(0, 0)$.

**La loi $*$ est distributive par rapport à la loi $+$.** Soit $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ et $(x_3, y_3)$ trois éléments quelconques de $\Omega$. D'une part,

$$\begin{aligned}
& (x_1, y_1) * ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\
= \quad & (x_1, y_1) * (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
= \quad & (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\
= \quad & (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3),
\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
& (x_1, y_1) * (x_2, y_2) + (x_1, y_1) * (x_3, y_3) \\
= \quad & (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\
= \quad & (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3).
\end{aligned}$$

□

5.0.3. *Dernières vérifications.*

Démonstration

$(\Omega, +, *)$ **est un corps.** Soit $(x, y)$ un élément non nul de $\Omega$, c'est-à-dire différent de $(0, 0)$. Le nombre réel $x^2 + y^2$ est alors non nul, et on vérifie que :

$$\begin{aligned}(x, y) * \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) &= \left(x\frac{x}{x^2+y^2} - y\frac{-y}{x^2+y^2}, x\frac{-y}{x^2+y^2} + y\frac{x}{x^2+y^2}\right) \\ &= (1, 0).\end{aligned}$$

$(\Omega, +, *)$ **est un surcorps de** $\mathbb{R}$. $\Omega$ ne contient pas le corps des réels au sens strict, mais il contient $\mathbb{R} \times \{0\}$, que l'on peut identifier à $\mathbb{R}$ par la bijection $x \mapsto (x, 0)$, cette identification étant compatible avec les lois des objets considérés.

$\Omega$ **possède bien un élément donc le carré vaut** $-1$. L'élément $(0, 1)$ convient en effet. Notons le $i$.

**Existence de l'écriture algébrique** Un élément $(x, y)$ quelconque de $\Omega$ peut s'écrire sous la forme :

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) * (y, 0) = x + iy$$

grâce à l'identification de $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R} \times \{0\}$.

□

Proposition (Unicité du corps des nombres complexes)

Deux corps des nombres complexes sont isomorphes.

5.a

Démonstration

□

Proposition (Automorphismes du corps des nombres complexes)

Le corps des nombres complexes admet deux automorphismes laissant $\mathbb{R}$ invariant : l'application identique, et la conjugaison complexe.

5.b

Démonstration

$\square$

## 6. Questionnaire 1 : Complexes

**1** Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.
**2** Aucun nombre complexe n'est égal à sa partie imaginaire.
**3** Pour tout $(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \, \mathrm{Im}(z)$.
**4** L'application module est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, \cdot)$ vers $(\mathbb{R}, \cdot)$.
**5** Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $\bar{z}$ et $1/z$ ont les mêmes arguments.
**6** Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $\theta$ et $\theta'$ des arguments respectifs de $z$ et de $1/\bar{z}$. On a : $\theta = \theta'$.
**7** Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b)$ de réels tels que $z = a + bz_0$.
**8** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|1 + iz| = \sqrt{1 + |z|^2}$.
**9** Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $||z'| - |z|| \leqslant |z' - z|$.
**10** Soit $(a, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$. $a$ admet $n$ racines $n$-ièmes.
**11** La somme des racines 26-ièmes de l'unité qui ne sont pas des racines 13-ièmes de l'unité est nulle.
**12** Les seuls groupes multiplicatifs finis inclus dans $\mathbb{C}$ sont les $\mathbb{U}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
**13** Tout nombre complexe de module 1 est une racine $n$-ième de l'unité pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

# 7. Feuille de TD 3 : Nombres complexes

## 7.1. Nombres complexes et géométrie

**Exercice 1 (Donner les expressions complexes de similitudes)** 0

Donner les expressions complexes de la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $3+i$, de la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $2-i$, d'angle de mesure $\pi/3$, de la similitude directe de centre $\Omega'$ d'affixe $1+3i$, d'angle de mesure $\pi/4$, de rapport $\sqrt{2}$.

**Exercice 2 (Transformation donnée par son expression analytique)** 0

Reconnaître la transformation du plan complexe donnée par son expression analytique
$$z \mapsto (\sqrt{3}-i)z - 2 + 2i(1-\sqrt{3}).$$

**Exercice 3 (Ligne de niveau complexe)** 2

Soit $a$ et $b$ deux complexes distincts, et soit $\lambda$ un réel strictement positif. Décrire l'ensemble $C_\lambda$, où :
$$C_\lambda = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z-b| = \lambda |z-a|\}.$$

**Exercice 4 (Caractérisations des triangles équilatéraux)** 4

Soit $a, b, c$ des nombres complexes distincts deux à deux, d'images respectives A,B,C. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) ABC est un triangle équilatéral ;
(2) $j$ ou $j^2$ est solution de $az^2 + bz + c = 0$ ;
(3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ;
(4) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

**Exercice 5 (Points à coordonnées entières sur un cercle)** 4 et 5

Montrer qu'il existe des cercles du plan contenant un nombre arbitrairement grand de points à coordonnées entières.

## 7.2. Module, argument, forme exponentielle

**Exercice 6 (Inégalités de modules)** 0

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|z| = 1$, alors $|1+z| \geqslant 1$ ou $|1+z^2| \geqslant 1$.

**Exercice 7 (Ensemble d'entiers déterminé par une condition complexe)** 0

Déterminer l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}, \left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n \in \mathbb{R}_+\right\}$.

Exercice 8 (X MP 08) 2

Soit $a$, $b$, $c$ trois éléments distincts de $[0, 2\pi[$. Calculer l'argument de $\frac{e^{ic}-e^{ib}}{e^{ic}-e^{ia}}$. Interprétation géométrique ?

Exercice 9 (X MP 08) 2

Soit $a$, $b$, $c$, $d$ des complexes distincts. On suppose que $\frac{d-a}{b-c}$ et $\frac{d-b}{a-c}$ sont imaginaires purs.
**1** Montrer que $\frac{d-c}{a-b}$ est imaginaire pur.
**2** On suppose que $|a| = |b| = |c| = 1$. Exprimer $d$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.

Exercice 10 (X MP 05) 3

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $|a| = |b| = |c| = 1$ et $a \neq c$. Montrer : $\frac{a}{b}\frac{(c-b)^2}{(c-a)^2} \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 11 (Mines MP 07) 3

Condition nécessaire et suffisante pour que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$ ?

### 7.3. Trigonométrie

Exercice 12 (Exemples de linéarisation) 0

Linéariser les expressions suivantes, dépendant de la variable réelle $x$ : $\cos(x)^4$, $\sin(x)^5$, $\cos(x)^3 \sin^2(x)$.

Exercice 13 (Équation trigonométrique) 0

Résoudre l'équation $\cos(3x) - 2\cos(2x) = 0$, d'inconnue réelle $x$.

Exercice 14 (Polynôme de la fonction cosinus) 0

Exprimer comme un polynôme de la fonction cosinus la fonction $f$ définie par $f(2k\pi) = 6$ et $f((2k+1)\pi) = -6$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout réel $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par

$$f(x) = \frac{\sin 6x}{\sin x}.$$

Exercice 15 (Changement d'écriture d'une combinaison de cosinus et sinus) 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Déterminer un réel $A > 0$ et un réel $\theta_0$ de sorte que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad a\cos\theta + b\sin\theta = A\cos(\theta - \theta_0).$$

**Exercice 16 (Calculs de sommes trigonométrique)** 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel $x$, calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

**Exercice 17 (Sommes trigonométriques à coefficients binomiaux)** 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

**Exercice 18 (X MP 07)** 2

Calculer $\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cdots + \cos \frac{11\pi}{13}$.

## 7.4. Racines de l'unité

**Exercice 19 (Calculs de racines cubiques)** 0

Déterminer les racines cubiques de $\sqrt{3} - i$ et de $\frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$.

**Exercice 20 (Somme de distances entre racines de l'unité)** 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right|$.

**Exercice 21 (Équation complexe à paramètre)** 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^{2n} - 2z^n \cos(na) + 1 = 0.$$

**Exercice 22 (Mines MP 08)** 2

Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n})$ où $n \geqslant 2$.

**Exercice 23 (X MP 07)** 3

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z$ et ses racines cubiques forment dans le plan un parallélogramme.

### Exercice 24 (Centrale PC 08) — 3

Soit

**1** Montrer que $\mathbb{U}_{12} = \mathbb{U}_3\mathbb{U}_4 = \{zz', (z, z') \in \mathbb{U}_3 \times \mathbb{U}_4\}$.

**2** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi\ : z \in \mathbb{U}_{12} \mapsto z^p \in \mathbb{U}_{12}$. À quelle condition $\varphi$ réalise-t-il une bijection ?

## 7.5. Équations algébriques

### Exercice 25 (Calculs de racines carrées) — 0

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants : $2i$, $3 - 4i$, $16 + 30i$.

### Exercice 26 (Équations algébriques complexes) — 0

(1) Résoudre l'équation $z^2 - (4 + 2i)z + (11 + 10i) = 0$.

(2) Résoudre l'équation $(1 + i)z^2 - 4iz + 26 - 2i = 0$.

### Exercice 27 (Équations algébriques complexes plus compliquées) — 2

(1) Résoudre l'équation
$$(1 - i)z^3 + (-4 + 8i)z^2 + (3 - 25i)z + 30i = 0,$$
sachant qu'elle admet une solution réelle.

(2) Résoudre l'équation
$$z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = 0,$$
sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

(3) Résoudre l'équation
$$z^6 + (2i - 1)z^3 - 1 - i = 0.$$

CHAPITRE IV

# Fonctions usuelles

## Sommaire



Ce chapitre rappelle et introduit des fonctions classiques et utiles en mathématiques comme en physique. Ce cours ne pose pas de difficulté et pourrait être traité en Terminale. Le plus difficile est de bien connaître les courbes représentatives des fonctions usuelles, ainsi que de savoir retrouver les formules (notamment celles donnant les dérivées).

## 1. Préliminaires et rappels

### 1.1. Résultats utiles d'analyse

Nous ne connaissons pas encore les véritables définitions de nombreuses notions fondamentales d'analyse. Cependant, nous allons utiliser dans ce chapitre et à de nombreuses reprises quelques résultats d'analyse que je « rappelle » ici.

On considère ici un intervalle $I$ d'intérieur non vide.

**Théorème de la bijection continue (fonctions usuelles)**

Soit $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f$ continue sur $I$, strictement monotone. La fonction $f$ admet alors des limites $m$ et $M$ aux bornes de $I$, l'image $J = f(I)$ de $f$ est un intervalle d'extrémités $m$ et $M$.
De plus, $f^{|J}$ est bijective, et sa bijection réciproque, notée abusivement $f^{-1}$, est continue, strictement monotone, de même monotonie que $f$. 1.a

**Théorème de dérivabilité de la réciproque (fonctions usuelles)**

Soit $f$ une application continue de $I$ dans $\mathbb{R}$, strictement monotone. On note $f^{-1}$ sa bijection réciproque (avec un léger abus). Soit $a \in I$, $b = f(a) \in J = f(I)$. Si $f$ est dérivable en $a$, et si $f'(a) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $b$, et : 1.b

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

La condition $f'(a) \neq 0$ permet d'éviter une tangente verticale pour le graphe de $f^{-1}$ en son point d'abscisse $b$. Cette formule se « retrouve » facilement graphiquement :

**Illustration**

**Dérivabilité globale de la réciproque**

Si $f$ est une application dérivable de $I$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne s'annule pas, alors sa bijection réciproque est dérivable en tout point, et 1.1

$$(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}).$$

Si $f$ est en outre indéfiniment dérivable, alors $f^{-1}$ l'est aussi.

**Théorème fondamental de l'analyse (fonctions usuelles)**

Soit $f$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a$ un point de $I$. La fonction $f$ admet une unique primitive $F$ s'annulant en $a$. Cette application est donnée par la formule :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

pour tout $x \in I$.
Deux primitives de $f$ sur $I$ diffèrent d'une constante.

1.c

## 1.2. Rappels sur les fonctions trigonométriques

### 1.3. Domaine de définition et régularité

Les fonctions cosinus, sinus sont définies, continues et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles sont $2\pi$-périodiques. Leur image commune est le segment $[-1;1]$. L'ensemble d'annulation de la fonction cosinus est $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, celui de sinus est $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est continue et indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et $\pi$-périodique. Sa restriction à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction cotangente, quotient de la fonction cosinus par la fonction sinus, est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est continue et indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et $\pi$-périodique. Sa restriction à $]0;\pi[$ réalise une bijection strictement décroissante de $]0;\pi[$ sur $\mathbb{R}$.

### 1.4. Équations simples

On considère deux réels $x$, $y$, et on donne les solutions d'équations simples sous forme de tableaux.

| $x$ vérifie | $\cos(x) = 1$ | $\cos(x) = 0$ | $\cos(x) = \cos(y)$ |
|---|---|---|---|
| $\exists k \in \mathbb{Z},$ | $x = 2k\pi$ | $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ | $x = \pm y + 2k\pi$ |

Par exemple, $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

| $x$ vérifie | $\sin(x) = 1$ | $\sin(x) = 0$ | $\sin(x) = \sin(y)$ |
|---|---|---|---|
| $\exists k \in \mathbb{Z},$ | $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ | $x = k\pi$ | $x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$ |

Par exemple, $\sin(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

| $x$ vérifie | $\tan(x) = 1$ | $\tan(x) = 0$ | $\tan(x) = \tan(y)$ |
|---|---|---|---|
| $\exists k \in \mathbb{Z},$ | $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ | $x = k\pi$ | $x = y + k\pi$ |

### 1.5. Relations fonctionnelles

Les relations suivantes sont valables pour tous réels $x$ et $y$, sauf mention expresse du contraire.
Les fonctions cosinus et sinus vérifient la relation fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1,$$

dont découle la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

1.5.1. *Relations issues de transformations géométriques.* Les fonctions sinus et cosinus sont respectivement impaire et paire. Il en résulte que tangente et cotangente sont impaires.

Retenir que l'application $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ intervertit fonctions sinus et cosinus :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

De ceci découlent les formules suivantes :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x),$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x), \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x),$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

1.5.2. *Images trigonométriques d'une somme ou d'une différence.*

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \text{ (lorsque tous ces termes ont un sens)}$$

En particulier,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \text{ (lorsque tous ces termes ont un sens)}$$

1.5.3. *Produit de fonctions sinus et cosinus.*

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

1.5.4. *Somme de fonctions sinus et cosinus.*

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

### 1.6. Représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de $-1$

Soit $x \in ]-\pi;\pi[$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ceci permet de donner une représentation paramétrique du cercle trigonométrique privé de $-1$, à l'aide des fonctions rationnelles $t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$, où le paramètre $t$ parcourt $\mathbb{R}$.

### 1.7. Dérivées successives des fonctions sinus et cosinus

Les formules

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x),$$

permettent d'écrire $\sin' = \sin \circ t$ et $\cos' = \cos \circ t$, où $t$ est la translation dans $\mathbb{R}$ de $\frac{\pi}{2}$ (*i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}$, $t(x) = x + \frac{\pi}{2}$). On en déduit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

### 1.8. Dérivées de tangente et cotangente

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}, \quad \operatorname{cotan}'(x) = -1 - \operatorname{cotan}^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

### La notation exponentielle

*Formules d'Euler.* Pour tout réel $\theta$ :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

*Formule de Moivre.* Pour tout réel $\theta$, et tout entier relatif $n$ :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \left(e^{in\theta}\right),$$

soit encore :

$$\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

Ces formules permettent de retrouver des relations trigonométriques. On retiendra notamment que

- La formule de Moivre permet d'écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynômes en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- Les formules d'Euler (et la formule de Moivre) permettent de « linéariser » les polynômes en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Illustration

Illustration

### 1.9. Partie paire, partie impaire

Ici, $I$ désigne un intervalle réel centré en 0.

**Proposition (Parties paire et impaire)** 1.d

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. La fonction $f$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire $f_p$ et d'une fonction impaire $f_i$.

**Définition (Parties paire et impaire)** 1.a

Dans ce contexte, $f_p$ et $f_i$ sont respectivement les *parties paire et impaire* de $f$.

Démonstration

$\square$

## 2. Exponentielles, logarithmes, puissances

### 2.1. Fonction logarithme

**Définition (Fonction logarithme)**

L'application *logarithme (népérien)*, notée ln (ou log), est la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1 de l'application inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Autrement dit,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

2.a

La fonction logarithme est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et, pour tout réel strictement positif $x$ :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

**Proposition (La fonction logarithme est un morphisme)**

La fonction logarithme est un morphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ vers $(\mathbb{R}, +)$ : pour tous réels strictement positifs $x$ et $y$, on a :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

2.a

**Démonstration**

Fixons $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On étudie la fonction auxiliaire $g : x \mapsto \ln(xy_0) - \ln(y_0)$. On vérifie que $g$ est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1 de la fonction inverse, *i.e.* $g = \ln$. $\square$

En conséquence, on a, pour tous réels strictement positifs $x$ et $y$, tout entier relatif $n$ :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \quad \ln(x^n) = n\ln(x).$$

Si $x$ et $y$ sont deux réels non nuls de même signe, alors $\ln xy = \ln|x| + \ln|y|$ ;

L'application $x \mapsto \ln|x|$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est la fonction inverse.

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. On appelle *dérivée logarithmique* de $f$ la dérivée de l'application $\ln|f|$, *i.e.* l'application $\frac{f'}{f}$.

**Proposition (Propriétés analytiques de la fonction logarithme)**

(1) La fonction logarithme est strictement croissante, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ;

(3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ ;

(4) La fonction logarithme réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

2.b

**Démonstration**

(1) La fonction inverse est à valeurs stictement positives, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Par croissance, ln admet une limite $l$ en $+\infty$, finie ou égale à $+\infty$. En considérant la quantité $\ln(2x)$ (où $x \in \mathbb{R}_+^*$), on vérifie que nécessairement $l = +\infty$ (supposer $l$ finie conduirait à l'absurdité $\ln(2) = 0$) ;

(3) Par croissance, ln admet une limite, valant éventuellement $-\infty$, en $0^+$. De plus, on a : $\lim\limits_{x \to 0+} \ln(x) = -\lim\limits_{x \to 0+} \ln \frac{1}{x} = -\lim\limits_{y \to +\infty} \ln y = -\infty$ ;

(4) L'application logarithme est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et de limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ en 0 et $+\infty$ : ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

□

La fonction logarithme est donc un morphisme bijectif du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$ : on dit que c'est un *isomorphisme de groupes*.

**Illustration**

## 2.2. Fonction exponentielle

**Définition (Fonction exponentielle)** 2.b

L'application *exponentielle* est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, notée exp. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il résulte des propriétés de la fonction ln les propriétés suivantes de la fonction exponentielle :

**Proposition (Propriétés de la fonction exponentielle)**

2.c

La fonction exponentielle est :

(1) Un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ ;

(2) Continue, strictement croissante, de limites respectives 0 et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ ;

(3) Indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa propre dérivée.

**Démonstration**

$\square$

Pour tous réels $x$ et $y$, tout entier relatif $n$ on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$(\exp(x))^n = \exp(nx).$$

**Illustration**

## 2.3. Fonctions exponentielle et logarithme de base $a$

**Définition (Exponentielle de base $a$)**

Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel $x$, on pose $a^x = \exp(x \ln a)$. L'application $x \mapsto a^x$ ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est appelée *fonction exponentielle de base $a$*.

2.c

On a donc, pour tout réel $x$ : $\exp(x) = e^x$, où $e = \exp(1)$, d'où la notation standard de la fonction exponentielle.

La fonction exponentielle de base $a$ est la composée de l'application linéaire de multiplication par $\ln(a)$ par la fonction exponentielle. Son étude est donc très facile, et on donne sans preuve ses propriétés les plus remarquables.

**Proposition (Propriétés de l'exponentielle de base $a$)**

Soit $a$ un réel strictement positif.

(1) L'application $x \mapsto a^x$ est définie, continue, et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est l'application $x \mapsto (\ln(a))a^x$. Elle est strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) si $a > 1$ (resp. $a < 1$, resp. $a = 1$) ;

(2) Pour tous réels $x$ et $y$, on a :

$$a^{x+y} = a^x\, a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

(3) Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

(4) Si $a > 1$, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Si $a \in ]0, 1[$, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

(5) Si $a \neq 1$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

2.d

**Définition (Fonction logarithme de base $a$)**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ est appelée fonction *logarithme de base $a$*. C'est la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base $a$.

2.d

Encore une fois, l'exponentielle et le logarithme de base $a$ sont des morphismes de groupes (de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ pour l'exponentielle, de $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ vers $(\mathbb{R}, +)$ pour le logarithme).

Illustration

### 2.4. Fonctions puissances

**Définition (Fonction puissance)**

Soit $\alpha$ un nombre réel quelconque, et $x$ un réel strictement positif (on a donc déjà défini l'expression $x^\alpha$). On appelle *fonction puissance d'exposant $\alpha$* l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

2.e

Il se peut que l'expression $x^\alpha$ ait un sens sur un domaine plus large pour $x$ : si par exemple $\alpha = 1$, l'expression a un sens pour tout réel $x$. Si plus généralement $\alpha$ est un entier naturel, l'expression $x^\alpha$ a un sens pour tout réel $x$ (en convenant que $0^0 = 1$). Si $\alpha$ est un entier négatif, $x^\alpha$ a un sens pour tout réel non nul, et si par exemple $\alpha = \frac{1}{2}$, $x^\alpha$ a un sens lorsque $x$ vaut 0.

**Proposition (Propriétés des fonctions puissances)**

(1)
- Si $\alpha > 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ a pour limites respectives 0 et $+\infty$ en 0 et $+\infty$, et l'application $x \mapsto x^\alpha$ est notamment prolongeable par continuité en 0, en lui donnant la valeur 0.
- Si $\alpha < 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ a pour limites respectives $+\infty$ et 0 en 0 et $+\infty$.
- Si $\alpha = 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est constante, de valeur 1.

(2) Pour $\alpha \neq 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection continue, indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, sa bijection réciproque étant $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$, et son nombre dérivé en $x$ est : $\alpha x^{\alpha-1}$.

2.e

Illustration

Exercice (Dérivée de $u^v$)

Faire l'exercice 8.

1

### 2.5. Comparaison des fonctions

Il est très utile en analyse de pouvoir « mesurer les forces en présence », c'est-à-dire savoir qui de deux fonctions l'emporte (si quelqu'un l'emporte bien) là où on les étudie. On peut résumer la proposition suivante, en notant que l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances, qui l'emportent sur les fonctions logarithmes.

Proposition (Comparaison des fonctions usuelles)

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^-$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^+$ ;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x \exp x = 0.$ ;

(3) $\forall\, \alpha, \beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$ ;

(4) $\forall\, \alpha, \beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\exp^\beta x}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha \exp^\beta x = 0$ ;

(5) Pour $a > 1$ et $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha a^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

(6) Pour $a \in ]0, 1[$ et $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha a^x = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{a^x}{|x|^\alpha} = +\infty.$$

2.f

**Démonstration**

(1) La fonction $\varphi \ : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est positive sur $[1, +\infty[$, dérivable sur cet intervalle, et $\varphi'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Cette fonction est donc décroissante et minorée par 0 sur $[e, +\infty[$, et, partant, admet une limite finie $l \in \mathbb{R}_+$ en $+\infty$. En faisant tendre $x$ vers $+\infty$ dans l'expression $\varphi(2x) = \frac{\ln(2)+\ln(x)}{2x}$, il vient $l = l/2$, donc $l = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En écrivant $x\ln(x) = -\frac{\ln(1/x)}{1/x}$, et en faisant tendre $x$ vers 0, on obtient : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ : $\frac{\exp(x)}{x} = \frac{\exp(x)}{\ln(\exp(x))}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, d'après ce qui précède.

Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$ : en notant que $x\exp(x) = -\frac{-x}{\exp(-x)}$, puis en faisant tendre $x$ vers $-\infty$, il vient bien : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\exp(x) = 0$.

(3) Fixons $\alpha, \beta > 0$. De la première formule, et du fait que $x^{\alpha/\beta}$ tende vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, on tire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^{\alpha/\beta})}{x^{\alpha/\beta}} = 0,$$

puis, grâce aux propriétés du logarithme :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha/\beta}} = 0,$$

La fonction puissance d'exposant $\beta(> 0)$ étant de limite nulle en 0, on obtient bien :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

De même pour les autres limites.

□

**Exercice (Comparaison de fonctions)** 2

Faire l'exercice 7.

## 3. Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

### 3.1. Fonctions hyperboliques

**Définition (Fonctions hyperboliques)** 3.a

On définit la fonction *cosinus hyperbolique*, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée ch, par $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, pour tout réel $x$.
On définit la fonction *sinus hyperbolique*, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée sh, par $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, pour tout réel $x$.
On définit la fonction *tangente hyperbolique*, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée th, par $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$, pour tout réel $x$.

La fonction cosinus hyperbolique ne s'annulant pas, la fonction tangente hyperbolique est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions ch et sh sont respectivement les parties paire et impaire de la fonction exponentielle. En particulier, pour tout réel $x$ :

$$\boxed{\exp(x) = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \exp(-x) = \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x).}$$

**Proposition (Propriétés des fonctions cosinus et sinus hyperboliques)** 3.a

(1) Les applications cosinus et sinus hyperboliques sont continues et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction ch (resp. sh) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (resp. sur $\mathbb{R}$).

(2) On a $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ (et donc $\mathrm{ch}'' = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{sh}'' = \mathrm{sh}$).

(3) ch est paire, sh impaire.

(4) $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{ch} = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$.

(5) ch est d'image $[1, +\infty[$, sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

(6) Les applications ch et sh vérifient la relation fondamentale : $\boxed{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1.}$

(7) L'application $t \mapsto (\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t))$ est un paramétrage de l'arc d'hyperbole $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, x^2 - y^2 = 1\}$.

**Démonstration**

Montrons seulement les deux derniers points, les autres étant évidents.
Soit $x \in \mathbb{R}$ : $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)) = \exp(-x)\exp(x) = 1$.
Pour tout réel $t$, $(\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t))$ appartient bien à $\mathcal{H}$ (grâce à ce qui précède et la positivité de la fonction ch).
Si, réciproquement, $(x, y)$ est un point de $\mathcal{H}$, alors on peut trouver un réel $t$ tel que $y = \mathrm{sh}(t)$. On a alors $\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{sh}^2(t) = 1 + y^2 = x^2$. Comme $\mathrm{ch}(t)$ et $x$ sont positifs, on a $x = \mathrm{ch}(t)$ :

$$(x, y) = (\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t)).$$

□

**Proposition (Propriétés de tangente hyperbolique)** 3.b

L'application th est impaire, strictement croissante, indéfiniment dérivable, et $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$. De plus, $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{th} = 1$, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{th} = -1$

**Démonstration**

Les vérifications sont immédiates.

□

Comme en trigonométrie circulaire, on a des formules pour les fonctions hyperboliques. On peut par exemple linéariser une puissance de ch ou de sh, ou inversement exprimer $x \mapsto \mathrm{ch}(nx)$ et $x \mapsto \mathrm{sh}(nx)$ sous forme de polynôme en ch et sh.

**Exercice (Linéarisation d'une puissance de sinus hyperbolique)** 3

Linéariser $\mathrm{sh}^5$ (réponse : $x \mapsto \frac{1}{16}(\mathrm{sh}(5x) - 5\,\mathrm{sh}(3x) + 10\,\mathrm{sh}(x))$).

Illustration

Exercice (Sommes de fonctions hyperboliques)

Faire l'exercice 9.

4

Illustration

### 3.2. Fonctions hyperboliques réciproques

Définition (Fonctions hyperboliques réciproques)

La fonction *argument sinus hyperbolique*, notée argsh est la bijection réciproque de la fonction sh.
ch définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. La bijection réciproque de cette application est la fonction *argument cosinus hyperbolique*, notée argch.
L'application th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. La bijection réciproque de cette application est la fonction *argument tangente hyperbolique*, notée argth.

3.b

**Proposition (Régularité des fonctions hyperboliques réciproques)**

(1) argsh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, continue, strictement croissante, impaire, indéfiniment dérivable, et, pour tout réel $x$ : $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ :

(2) argch est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$, continue, strictement croissante, indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$, et, pour tout $x \in ]1, +\infty[$ : $\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ;

(3) argth est une bijection de $]-1; 1[$ sur $\mathbb{R}$, continue, strictement croissante, impaire, indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$, et, pour tout $x \in ]-1, 1[$ : $\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

3.c

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Expressions logarithmiques des fonctions hyperboliques réciproques)**

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ ;

(2) Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ ;

(3) Pour tout $x \in ]-1; 1[$, on a : $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

3.d

Démonstration

$\square$

Illustration

Exercice (Dérivées d'argth)

Faire l'exercice 10 de TD.

5

## 4. Fonctions circulaires réciproques

### 4.1. Définition, propriétés

**Définition (Fonctions circulaires réciproques)**

4.a

La restriction à $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction sinus est une bijection de $I$ sur $J = [-1, 1]$. La bijection réciproque de cette fonction est appelée *fonction arc sinus*, notée arcsin.
La restriction à $I = [0, \pi]$ de la fonction cosinus est une bijection de $I$ sur $J = [-1, 1]$. La bijection réciproque de cette fonction est appelée *fonction arc cosinus*, notée arccos.
La restriction à $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente est une bijection de $I$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque de cette fonction est appelée *fonction arc tangente*, notée arctan.

**Explication sur les fonctions circulaires réciproques**

4.1

Soit $x \in [-1, 1]$. Le nombre $\arcsin(x)$ (resp. $\arccos(x)$) est le réel compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (resp. entre 0 et $\pi$), dont le sinus (resp. le cosinus) vaut $x$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Le nombre $\arctan(y)$ est l'unique réel compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut $y$.

**Illustration**

**Exemple (Valeurs des fonctions circulaires réciproques)**

i

(1) $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arccos(1) = 0$.

(3) $\arctan(0) = 0$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

**Proposition (Régularité des fonctions circulaires réciproques)** 4.a

(1) L'application arcsin est une bijection continue, strictement croissante, de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. De plus, arcsin est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$, et, pour tout $x\in]-1,1[$ : $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) L'application arccos est une bijection continue et strictement décroissante de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$. De plus, arccos est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$, et, pour tout $x\in]-1,1[$ : $\arccos'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) L'application arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, continue, strictement croissante, et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel $x$ : $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Propriétés de symétrie des fonctions circulaires réciproques)** 4.b

Les fonctions arcsin et arctan sont impaires, et, pour tout $x\in[-1,1]$ :

$$\arcsin(x)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad\arccos(x)+\arccos(-x)=\pi.$$

Démonstration

□

Cette dernière relation exprime le fait que le graphe d'arccosinus admette le point de coordonnées $(0, \pi/2)$ pour centre de symétrie.

Proposition (Relation fonctionnelle pour arctangente)

La fonction arctangente vérifie, pour tout réel non nul $x$ :

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \mathrm{sg}(x)\frac{\pi}{2},$$

où $\mathrm{sg}(x)$ vaut 1 (resp. $-1$) si $x > 0$ (resp. $x < 0$).

4.c

Démonstration

□

### 4.2. Simplifier une expression trigonométrique

Composée d'arcsinus et de sinus

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$, et n'a pas de sens si $x \notin [-1, 1]$.
Pour tout $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(y)) = y$, mais cette composée a un sens pour tout $y \in \mathbb{R}$. En fait, la fonction $y \mapsto \arcsin(\sin(y))$ de $\mathbb{R}$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la fonction qui à $y$ associe l'unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = \sin(y)$. Pour trouver $\theta$, on peut d'abord chercher l'unique $\alpha \in [-\pi/2, 3\pi/2[$, congru à $y$ modulo $2\pi$.
- Si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\theta = \alpha$.
- Si $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}[$, alors $\theta = \pi - \alpha$.

4.2

**Composée d'arccosinus et de cosinus**

Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos \arccos(x) = x$, et n'a pas de sens si $x \notin [-1,1]$.
Pour tout $y \in [0,\pi]$, $\arccos \cos(y) = y$, mais cette composée a un sens pour tout $y \in \mathbb{R}$. En fait, la fonction $y \mapsto \arccos \cos(y)$ de $\mathbb{R}$ dans $[0,\pi]$ est la fonction qui à $y$ associe l'unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos(\theta) = \cos(y)$. Pour trouver $\theta$, on peut d'abord chercher l'unique $\alpha \in ]-\pi,\pi]$, congru à $y$ modulo $2\pi$.

– Si $\alpha \in [0,\pi]$, alors $\theta = \alpha$.
– Si $\alpha \in ]-\pi,0]$, alors $\theta = -\alpha$.

4.3

**Composée d'arctangente et de tangente**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$.
Pour tout $y \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\arctan \tan(y) = y$, mais cette composée a un sens pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. En fait, la fonction $y \mapsto \arctan \tan(y)$ de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est la fonction qui à $y$ associe l'unique $\theta \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = \tan(y)$. $\theta$ est donc l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ congru à $y$ modulo $\pi$

4.4

**Exercice (Simplifications)**

Traiter des questions des exercices 3, 5 et 6.

6

## 5. Fonction exponentielle complexe

$I$ désigne un intervalle d'intérieur non vide (*i.e.* comprenant au moins deux points), $f$ et $g$ sont des applications de $I$ dans $\mathbb{C}$.

**Définition (Parties réelle et imaginaire d'une fonction à valeurs complexes)**

La fonction *partie réelle* (resp. *partie imaginaire*) de $f$, notée $\mathrm{Re}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$), est l'application de $I$ dans $\mathbb{R}$ valant $\mathrm{Re}(f(x))$ (resp. $\mathrm{Im}(f(x))$) en tout $x \in I$.

5.a

**Définition (Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes)**

On dit que $f$ est *continue* (resp. *dérivable*) si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
Si $f$ est dérivable, sa dérivée, notée $f'$, est par définition : $f' = \mathrm{Re}(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)'$.

5.b

**Dérivation et parties réelle et imaginaire**

On suppose $f$ dérivable. On a $\mathrm{Re}(f)' = \mathrm{Re}(f')$ et $\mathrm{Im}(f)' = \mathrm{Im}(f')$.

5.1

**Proposition (Opérations sur les fonctions dérivables à valeurs complexes)**

5.a

On suppose $f$ et $g$ dérivables sur $I$.

(1) $f+g$ est dérivable sur $I$, de dérivée $f'+g'$ :

(2) $fg$ est dérivable sur $I$, de dérivée $f'g+fg'$ ;

(3) Pour tout nombre complexe $\lambda$, $\lambda f$ est dérivable sur $I$, de dérivée $\lambda f'$.

**Démonstration**

Notons $f_r$ et $f_i$ (resp. $g_r$ et $g_i$) les parties réelle et imaginaire de $f$ (resp. de $g$).

(1) On a $f+g=(f_r+g_r)+i(f_i+g_i)$, donc $f+g$ est dérivable sur $I$, et

$$(f+g)'=(f_r+g_r)'+i(f_i+g_i)'=f'+g'.$$

(2) En notant que $fg=(f_rg_r-f_ig_i)+i(f_rg_i+f_ig_r)$, on constate que $fg$ est dérivable sur $I$, et que

$$\begin{aligned}(fg)' &= (f_rg_r-f_ig_i)'+i(f_rg_i+f_ig_r)'\\ &= (f_r'g_r+f_rg_r'-f_i'g_i-f_ig_i')+i(f_r'g_i+f_rg_i'+f_i'g_r+f_ig_i')\\ &= (f_r'g_r-f_i'g_i)+i(f_r'g_i+f_i'g_r)+(f_rg_r'-f_ig_i')+i(f_rg_i'+f_ig_r')\\ &= f'g+fg'.\end{aligned}$$

(3) On applique le résultat précédent dans le cas où $g$ est constante de valeur $\lambda$.

□

**Proposition (Dérivation de l'exponentielle d'une fonction)**

5.b

On suppose $f$ dérivable sur $I$. L'application $e^f$ est alors dérivable sur $I$, et :

$$\left(e^f\right)'=f'\,e^f.$$

**Démonstration**

En notant $f_r$ (resp. $f_i$) la partie réelle (resp. imaginaire) de $f$, on a :

$$e^f=e^{f_r}e^{if_i}=e^{f_r}\left(\cos(f_i)+i\,\sin(f_i)\right).$$

D'après le résultat précédent (sur le produit), on constate que $e^f$ est dérivable sur $I$, et que

$$\begin{aligned}(e^f)' &= f_r'e^{f_r}\left(\cos(f_i)+i\,\sin(f_i)\right)+f_i'e^{f_r}\left(-\sin(f_i)+i\,\cos(f_i)\right)\\ &= (f_r'+if_i')e^{f_r}\left(\cos(f_i)+i\,\sin(f_i)\right)=f'e^f.\end{aligned}$$

□

## 6. Questionnaire 2 : Fonctions usuelles

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.
**1** $\ln(\sqrt{ab}) = \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$.
**2** $\ln(a^b) = b\ln(a)$.
**3** $\exp((ln(a))^2) = a^2$.
**4** $\forall\, x \in [0,\pi], \arcsin(\sin(x)) = x$.
**5** $\forall\, x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$.
**6** $\forall\, x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(-x) = \exp(-x)$.
**7** Donner la valeur de $\arccos(\cos(11\pi/3))$, de $\arcsin(\sin(11\pi/3))$, et de $\arctan(\tan(11\pi/3))$.
**8** Les graphes de arctan et de th sont homothétiques.
**9** $\arcsin(\sin(\pi/12)) = \pi/12$.
**10** $\sin(\arcsin(\pi/12)) = \pi/12$.
**11** $\{x \in \mathbb{R}, \arccos(\cos(x)) = x\} = [0,\pi]$.
**12** $\{x \in \mathbb{R}, \arcsin(\sin(x)) = \arccos(\cos(x))\} = [0,\pi/2]$.
Soit $f \in F^E$, $g \in G^F$.
**13** Pour toute partie $A$ de $E$, on a $A = f^{-1}(f(A)))$.
**14** Pour toute partie $B$ de $F$, on a $B = f(f^{-1}(B))$.
**15** Pour toute partie $A$ de $E$, $f(A) = f(f^{-1}(f(A)))$.
**16** Pour toute partie $B$ de $F$, $f(B) = f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
**17** Si $g \circ f$ est surjective ou injective, alors $f$ ou $g$ est surjective ou injective.
**18** Si $g \circ f$ est surjective et injective, alors $f$ et $g$ sont surjectives et injectives.

# 7. Feuille de TD 4 : Fonctions usuelles

## 7.1. Équations

**Exercice 1 (Équations de puissances, logarithmes, exponentielles)** 0

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle $x$ :

**1** $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

**2** $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$.

**3** $\ln(x^2 - 1) = 2\ln(x - 2)$.

**4** $e^x + e^{-x} = \sqrt{13}$.

**5** $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$.

**Exercice 2 (Équations trigonométriques)** 0

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle $x$ :

**1** $\cos(x) = \frac{1}{2}, \quad \tan(x) = 1, \quad \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

**2** $\tan(x)\tan(2x) = 1$.

**3** $\arcsin(x + 1) - \arcsin(x) = \frac{\pi}{6}$.

**4** $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

## 7.2. Formules

**Exercice 3 (Formules particulières avec arctangente)** 0

Montrer les formules suivantes :

**1** $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.

**2** $\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$.

**3** $3\arctan(2 - \sqrt{3}) = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.

**Exercice 4 (Somme de deux arctangentes)** 2

Soit $a$ et $b$ des réels tels que $ab \neq 1$. Montrer l'existence de $\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}$ tel que :

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right) + \varepsilon\pi.$$

## 7.3. Simplifications

**Exercice 5 (Simplifications d'expressions constantes)** 0

Simplifier les expressions suivantes :

**1** $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$.

**2** $\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13) + \arcsin(16/65)$.

Exercice 6 (Simplifications d'expressions fonctionnelles) 2

Simplifier, quand elles ont un sens, les expressions suivantes :
**1** $\tan(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$, $\cos(2\arccos(x))$, $\cos(2\arcsin(x))$, $\tan(2\arcsin(x))$.
**2** $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$, $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, $\arccos(4x^3-3x)$, $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.
**3** Simplifier, pour $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{sh}(\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})))$.
**4** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos(1/\operatorname{ch}(x))$.

## 7.4. Divers

Exercice 7 (Limite et puissances) 0

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercice 8 (Dérivation d'une fonction s'écrivant comme puissance) 0

On considère deux fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$. Calculer $(u^v)'$.

Exercice 9 (Sommes de fonctions hyperboliques) 1

Pour $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$, calculer :

$$C_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+bk) \quad \text{et} \quad S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+bk).$$

Exercice 10 (Dérivées successives d'argument tangente hyperbolique) 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner $\operatorname{argth}^{(n)}$.

Exercice 11 (Graphe d'une fonction pas si compliquée) 3

Représenter le graphe de la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

Exercice 12 (Une suite avec arctangente) 3

**1** Soit $p \in \mathbb{N}$. Simplifier $\arctan(p+1) - \arctan(p)$.
**2** En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

CHAPITRE V

# Équations différentielles

## Sommaire



Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les intervalles considérés seront d'intérieur non vide, c'est-à-dire non réduits à un point, et $I$ désignera un tel intervalle. Par défaut, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

## 1. Introduction aux équations différentielles linéaires

Une équation différentielle est une équation fonctionnelle $\mathcal{E}$ d'inconnue $f : I \to \mathbb{K}$, reliant $f$ à une ou plusieurs de ses dérivées. Si $\mathcal{E}$ relie $f$ à $f'$ (resp. $f$ à $f'$ et/ou $f''$), on dit que $\mathcal{E}$ est d'ordre 1 (resp. d'ordre 2).

Les équations différentielles apparaissent dans la plupart des branches de la physique, en biologie, en économie, etc. Ces équations sont en général très difficiles à résoudre, et nous nous contenterons d'étudier des cas simples.

En cours, nous étudierons surtout des équations différentielles dites *linéaires*. Une particularité remarquable de ces équations linéaires (et pas des autres), et que nous reverrons plus tard dans un cadre géométrico-algébrique, réside en la structure de l'ensemble de leurs solutions.

La structure algébrique associée à la notion de linéarité est celle d'*espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{K}$. Cette notion, compliquée en apparence, nous occupera d'ailleurs une bonne partie de l'année. Plutôt que d'en donner une définition précise, je préfère la présenter de manière informelle : un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ consiste en la donnée d'un ensemble $E$, muni d'une loi d'addition lui conférant une structure de groupe abélien, et d'une loi externe de $\mathbb{K} \times E$ dans $E$, dite de multiplication par un scalaire, vérifiant en outre certaines conditions naturelles de compatibilité. Les éléments de $E$ sont appelés *vecteurs*, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Comme pour toute structure algébrique, on dispose d'une notion de morphisme, « respectant » les lois de la structure (ici, l'addition et la multiplication par un scalaire) et les éléments distingués (éléments neutres, ici le vecteur nul). Une *application linéaire* n'est rien d'autre qu'un morphisme d'espaces vectoriels.

**Exemple (Premiers exemples d'applications linéaires)**

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, l'échange $(x, y) \mapsto (y, x)$ des composantes d'un vecteur est linéaire, mais pas la translation par un vecteur non nul. L'application partie réelle $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais pas du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Les applications partie paire et partie impaire sont linéaires.

i

L'intérêt de la linéarité apparaît clairement dans la résolution d'équations linéaires. Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, $b \in F$, $\varphi$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On cherche à résoudre l'équation linéaire $\mathcal{E} \ : \ \varphi(a) = b$ d'inconnue $a \in E$, *i.e.* on cherche à décrire l'ensemble des antécédents du second membre $b$ par $\varphi$ dans $E$ (autrement dit, on veut expliciter $\varphi^{-1}(\{b\})$). Supposons disposer d'une solution particulière $a_0$. Un élément $a$ de $E$ est alors solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\varphi(a) = \varphi(a_0)$, soit encore, par linéarité de $\varphi$ : $\varphi(a - a_0) = 0_F$. Autrement dit, la solution générale de $\mathcal{E}$ s'écrit $a_0 + h$, où $h$ est la solution générale de l'équation

$$\mathcal{H} \ : \quad \varphi(a) = 0_F,$$

d'inconnue $a \in E$, appelée *équation homogène associée* (ou *sans second membre*) à $\mathcal{E}$.

Soit $N$ un entier naturel non nul, $\alpha_0, \dots, \alpha_N, \beta$ des fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{K}$.

Une fonction $f$ de $I$ dans $\mathbb{K}$ est dite *solution* de l'équation différentielle (d'ordre $N$ si $\alpha_N$ n'est pas identiquement nulle)

$$\mathcal{E} \ : \quad \alpha_N(x)y^{(N)} + \alpha_{N-1}(x)y^{(N-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \beta(x)$$

si $f$ est $N$ fois dérivable sur $I$, et si

$$\alpha_N(x)f^{(N)}(x) + \alpha_{N-1}(x)f^{(N-1)}(x) + \dots + \alpha_1(x)f'(x) + \alpha_0(x)f(x) = \beta(x),$$

pour tout point $x$ de $I$.

La dérivation est linéaire, de même que la multiplication par une fonction donnée, et que la somme d'applications linéaires, de sorte que l'application

$$\varphi \ : f \mapsto \alpha_N f^{(N)} + \alpha_{N-1} f^{(N-1)} + \dots + \alpha_1 f' + \alpha_0 f$$

est linéaire : l'équation différentielle $\mathcal{E}$ est donc également linéaire. Pour résoudre une telle équation, nous résoudrons l'équation homogène associée, et nous en chercherons une solution particulière, obtenant ainsi sa solution générale.

Dans ce cours, nous nous contenterons d'une étude très modeste : nous nous limiterons en effet aux équations différentielles linéaires du premier ordre, et aux équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants, et avec un second membre simple.

## 2. Équations linéaires du premier ordre

### 2.1. Définition

**Définition (Équation différentielle linéaire d'ordre un)**

On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur $I$* une équation du type :

$$\mathcal{E} \ : \quad \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x),$$

où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des fonctions continues sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
$\gamma$ (ou $\gamma(x)$) est appelé *second membre* de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{E}$ est *homogène* si son second membre est nul.
On dit qu'une fonction $f$, de $I$ dans $\mathbb{K}$, est une solution de $\mathcal{E}$ (sur $I$) si :

(1) $f$ est dérivable sur $I$ ;

(2) $\forall x \in I, \quad \alpha(x)f'(x) + \beta(x)f(x) = \gamma(x)$.

On appelle *équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $\mathcal{E}$* l'équation

$$\mathcal{H} \ : \quad \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$$

2.a

On se place dans cette section dans le cas particulier où $\alpha$ est la fonction constante égale à 1. Noter que si $\alpha$ ne s'annule pas sur $I$, on peut toujours se ramener à une équation de ce type en posant $a = \frac{\beta}{\alpha}$ et $b = \frac{\gamma}{\alpha}$. Si $\alpha$ s'annule, l'équation est bien plus compliquée à résoudre, et on dit qu'il y a *problème de raccord*, voir la partie 5.

Pour résoudre $\mathcal{E}\ :\quad y' + a(t)y = b(t)$, on résout d'abord l'équation homogène associée $\mathcal{H}\ :\quad y' + a(t)y = 0$.

### 2.2. Résolution de l'équation homogène associée

**Proposition (Équation différentielle d'ordre un sans problème de raccord)** 2.a

Soit $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de la fonction $a$ sur l'intervalle $I$. L'ensemble $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ des solutions de l'équation homogène $\mathcal{H}$ est :

$$\mathcal{S}_\mathcal{H} = \{t \mapsto Ce^{-A(t)},\ C \in \mathbb{K}\}.$$

**Démonstration**

On montre d'abord, par un calcul simple, que toute fonction de la forme $t \mapsto Ce^{-A(t)}$, où $C \in \mathbb{K}$, est solution de $\mathcal{H}$, prouvant une première inclusion.
Réciproquement, on montre que toute solution $\varphi$ de $\mathcal{H}$ est de ce type, en introduisant la fonction auxiliaire :

$$\Phi : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \varphi(t)e^{A(t)} \end{array}$$

On vérifie que $\Phi$ est dérivable, de dérivée nulle sur l'intervalle $I$, et qu'elle est donc constante.

□

Notons pour la suite que la seule solution de $\mathcal{H}$ s'annulant au moins une fois est la fonction identiquement nulle.

**Ordre un homogène sans problème de raccord** 2.1

On vérifie que $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. En fait, on peut aisément montrer que, pour toute solution non nulle $\varphi_0$ de $\mathcal{H}$, on a :

$$\mathcal{S}_\mathcal{H} = \mathbb{K}\varphi_0\,(= \{\lambda\varphi_0, \lambda \in \mathbb{K}\})\,.$$

On dit que $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ est une *droite vectorielle*.

**Exercice (Équations différentielles d'ordre 1)** 1

Résoudre, sur l'intervalle précisé :

**1** $y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

**2** $y' + y\,\text{cotan}(x) = 0$ sur $]0, \pi[$.

**Exercice (Une première équation fonctionnelle)** 2

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$\mathcal{E}\ :\quad \forall (u,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)f(u)$$

d'inconnue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable.

### 2.3. Recherche d'une solution particulière

Comment faire pour trouver une solution particulière, si on n'en trouve pas d'évidente ?

**Méthode (Méthode de la variation de la constante)**

Pour chercher une solution particulière $f$ de $\mathcal{E}$, connaissant une solution particulière non nulle $\varphi_0$ de $\mathcal{H}$, on la cherche sous la forme :

$$f \ : t \mapsto C(t)\varphi_0(t),$$

où $C$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$ que l'on détermine pour que $f$ soit solution de $\mathcal{E}$.

2.2

**Méthode de variation de la constante**

(1) On trouvera $C$ comme primitive d'une certaine fonction. Il s'agit en l'occurence de la fonction $t \mapsto \frac{b(t)}{\varphi_0(t)}$, mais, plutôt que d'apprendre cette formule par cœur, il faut savoir la retrouver par un calcul immédiat.

(2) Le nom de cette méthode provient de ce que si $C$ était une constante, $f$ serait solution de $\mathcal{H}$ : nous avons remplacé la constante $C$ paramétrant les solutions de $\mathcal{H}$ en une fonction. En retenant ce fait, on peut déterminer très rapidement $f'(t) + a(t)f(t)$, puisque les termes où nous ne dérivons pas $C$ vont nécessairement s'annuler.

(3) Si la résolution est trop difficile, on pourra toujours exprimer les solutions sous forme intégrale.

(4) Certains oublient, lorsqu'ils donnent la solution trouvée, de multiplier $C$ avec $\varphi_0$ !

2.3

**Exercice (Ordre un avec second membre)**

**1** Trouver une solution particulière de $y' + y\,\mathrm{cotan}(x) = \sin x$ sur $]0, \pi[$.

**2** Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3

**Proposition (Principe de superposition, ordre un)**

Si $b_1$ et $b_2$ sont des fonctions continues sur $I$ telles que $b = b_1 + b_2$, et si $f_1$ et $f_2$ sont respectivement solutions de

$$y' + a(x)y = b_1(x) \text{ et } y' + a(x)y = b_2(x),$$

alors $f_1 + f_2$ est solution de $\mathcal{E}$.

2.b

Démonstration

La vérification est facile, et provient de la linéarité de l'équation différentielle considérée :

□

Plus généralement, si $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, où $b_1, \dots, b_n$ sont continues de $I$ dans $\mathbb{K}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires, et si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i$ est une solution de $y' + a(x)y = b_i$, alors $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est une solution de $\mathcal{E}$.

Proposition (Passage d'une solution complexe à une solution réelle, ordre un)

Si $a$ est une fonction à valeurs réelles, et si $f$ est une solution de $\mathcal{E}$, alors $\mathrm{Re}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$) est une solution de $y' + a(x)y = \mathrm{Re}(b)(x)$ (resp. de $y' + a(x)y = \mathrm{Im}(b)(x)$).

2.c

Démonstration

□

Cette méthode est surtout pratique lorsque figurent des termes trigonométriques dans le second membre.

Proposition (Second membre en exponentielle-polynôme, ordre un)

On se place dans le cas particulier d'une équation différentielle de la forme $y' - \mu y = P(x)e^{\lambda x}$, où $\mu$ et $\lambda$ sont deux complexes, et $P$ un polynôme de degré $n$.

(1) Si $\mu \neq \lambda$, cette équation admet une unique solution de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où $Q$ est un polynôme de degré $n$.

(2) Si $\mu = \lambda$, alors $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ est une solution de cette équation, où $Q$ est un polynôme tel que $Q' = P$.

2.d

En pratique, pour le premier cas, on procède par « identification ».

Nous admettons (provisoirement) ce résultat, mais on peut observer que la seconde situation est un cas particulier de variation de la constante.

**Exercice** (Ordre un et second membre en exponentielle-polynôme) 4

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles de :
**1** $y' - 2y = (x^2+1)e^{4x} + (x^3 - x^2 + x + 1)e^{2x}$.
**2** $y' + y = xe^{3x}\cos(x) + (x-1)e^{-x}$.

### 2.4. Résolution générale

La résolution pratique d'une équation du type

$$\mathcal{E} \quad : \quad y' + a(x)y = b(x)$$

se déroule donc de la façon suivante :
**Étape 1 :** résolution de l'équation homogène asssociée $\mathcal{H}$ ;
**Étape 2 :** recherche d'une solution particulière :
**Étape 2.1 :** recherche d'une solution particulière évidente ;
**Étape 2.2 (si 2.1 échoue) :** recherche d'une solution particulière à l'aide des méthodes exposées ci-dessus, la méthode de la variation de la constante ne venant en principe qu'en dernier recours ;
**Étape 3 :** solution générale de $\mathcal{E}$, exprimée comme somme de la solution particulière trouvée, et de la solution générale de $\mathcal{H}$.

### 2.5. Problème de Cauchy pour l'ordre 1

De manière informelle, on appelle *problème de Cauchy* la donnée d'une équation différentielle sur $I$ d'ordre $n$, et de valeurs imposées pour la fonction ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ en un point donné $x_0$ de $I$. Dans les cas « favorables », il y aura existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy.

**Définition** (Problème de Cauchy pour l'ordre un) 2.b

Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. On appelle *solution au problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle

$$\mathcal{E} \quad : \quad y' + a(t)y = b(t)$$

et la condition initiale $y(x_0) = y_0$ toute solution $f$ de $\mathcal{E}$ sur $I$ telle que $f(x_0) = y_0$.

**Proposition** (Problème de Cauchy pour l'ordre un) 2.e

Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution $f$ de $\mathcal{E}$ sur $I$ telle que $f(x_0) = y_0$.

**Démonstration**

□

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le graphe de toute solution de $\mathcal{E}$ est appelé *courbe intégrale*. L'assertion précédente montre que par un point quelconque de $I \times \mathbb{R}$ passe une unique courbe intégrale.

Illustration

## 3. Équations linéaires du second ordre

### 3.1. Définition

**Définition** (Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants)

3.a

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre* une équation du type :

$$\mathcal{E} \quad : \quad \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = \delta(x),$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ sont des fonctions continues sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
$\delta$ (ou $\delta(x)$) est appelé *second membre* de $\mathcal{E}$, et on dit que $\mathcal{E}$ est *homogène* si son second membre est nul.
Une fonction $f$ de $I$ dans $\mathbb{K}$ est une *solution* de $\mathcal{E}$ si :

(1) $f$ admet une dérivée seconde sur $I$ ;

(2) $\forall\, x \in I, \quad \alpha(x)f''(x) + \beta(x)f'(x) + \gamma(x)f(x) = \delta(x)$.

On appelle *équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $\mathcal{E}$* l'équation

$$\mathcal{H} \quad : \quad \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = 0.$$

Ces équations sont en général trop difficiles à résoudre. On se contentera d'étudier le cas où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont des fonctions constantes (égales respectivement à $a$, $b$, $c$, où $a \neq 0$). De même, on ne résoudra $\mathcal{E}$ que dans le cas de seconds membres d'un type particulier.

Dans toute la suite, on s'intéresse aux équations

$$\mathcal{E} \quad : \quad ay'' + by' + cy = \delta(x)$$

et

$$\mathcal{H} \quad : \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

### 3.2. Résolution de l'équation homogène

**Définition (Équation caractéristique)** 3.b

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (d'inconnue complexe $z$) est appelée *équation caractéristique de $\mathcal{H}$ (et $\mathcal{E}$)*, et sera notée $\mathcal{C}$ dans la suite. Le polynôme $aX^2 + bX + c$ est appelé *polynôme caractéristique* de $\mathcal{E}$.

Pourquoi introduire cette équation caractéristique ? On montre aisément que pour tout $r \in \mathbb{C}$, l'application $t \mapsto e^{r\,t}$ est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si $r$ est solution de $\mathcal{C}$.
La résolution diffère selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Proposition (Résolution de l'équation homogène pour l'ordre 2, cas complexe)** 3.a

(1) si $\mathcal{C}$ admet deux solutions distinctes $r_1$ et $r_2$, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de $\mathcal{H}$ est :
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2\}$$
(2) si $\mathcal{C}$ admet une solution double $r$, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de $\mathcal{H}$ est :
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

**Démonstration**

Soit $r$ une solution de $\mathcal{C}$. On cherche les solutions de $\mathcal{H}$ sous la forme $f\ : t \mapsto C(t)e^{rt}$, où $C$ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (toute solution peut bien s'écrire sous cette forme, car $t \mapsto e^{rt}$ est deux fois dérivable et ne s'annule pas).
La fonction $f$ est deux fois dérivable, et, pour tout réel $t$ :
$$\begin{cases} f'(t) &= (C'(t) + rC(t))e^{rt}, \\ f''(t) &= (C''(t) + 2rC'(t) + r^2C(t))e^{rt}, \end{cases}$$
de sorte que
$$\begin{aligned} af''(t) + bf'(t) + cf(t) &= (aC''(t) + (2ra + b)C'(t) + (ar^2 + br + c)C(t))e^{rt} \\ &= (aC''(t) + (2ra + b)C'(t))e^{rt}. \end{aligned}$$
Ainsi, $f$ est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si $C'$ est solution de :
$$ay' + (2ra + b)y = 0.$$

(1) Supposons que $\mathcal{C}$ admette deux solutions distinctes $r = r_1$ et $r_2$ (telles que $r_1 + r_2 = -b/a$), *i.e.* $2ra + b \neq 0$.
  $f$ est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si il existe un complexe $A$ tel que, pour tout réel $t$ : $C'(t) = A\exp\left(-(2ra + b)t/a\right)$, ce qui revient, en intégrant, à l'existence de complexes $A'$ et $B'$ tels que :
$$C(t) = A' \exp\left(-(2r + b/a)t\right) + B',$$
pour certains complexes $A'$ et $B'$.
  Finalement, la solution générale de $\mathcal{H}$ est bien
$$t \mapsto \left(A' \exp\left(-(2r + b/a)t\right) + B'\right) e^{rt} = A'e^{r_2 t} + B'e^{r_1 t},$$
où $A'$ et $B'$ décrivent $\mathbb{C}$.

(2) Supposons que $\mathcal{C}$ admette une unique solution $r$ : la condition sur $C$ signifie que $C$ est affine, et on trouve donc bien la solution générale voulue.

□

En pratique, le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique permet de déterminer le type de l'ensemble des solutions. Le premier cas se produit lorsque $\Delta = 0$, le second lorsque $\Delta \neq 0$.

**Exercice (Ordre deux homogène, cas complexe)** 5

Donner les solutions complexes de : $y'' - 6y' + 25y = 0$

**Proposition (Résolution de l'équation homogène pour l'ordre 2, cas réel)** 3.b

(1) si $\mathcal{C}$ admet deux solutions réelles distinctes $r_1$ et $r_2$, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de $\mathcal{H}$ est :
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$
(2) si $\mathcal{C}$ admet une solution double $r$, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de $\mathcal{H}$ est :
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
(3) si $\mathcal{C}$ admet deux solutions complexes non réelles et conjuguées $r$ et $\bar{r}$ (écrivons $r = \gamma + i\omega$ sous sa forme algébrique), l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de $\mathcal{H}$ est :
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto e^{\gamma t}(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

**Démonstration**

Montrons seulement le dernier cas, qui est le plus compliqué. Tout d'abord, on constate que toute fonction de cet ensemble est bien solution de $\mathcal{H}$, d'après le cas complexe et la formule d'Euler, et à valeurs réelles.
Réciproquement, soit $f$ une solution de $\mathcal{H}$ à valeurs réelles. D'après le cas complexe, il existe des nombres réels $A, B, C, D$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :
$$f(t) = (A + iB)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))e^{\gamma t} + (C + iD)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))e^{\gamma t}$$
La fonction $f$ étant à valeurs réelles, $f = \mathrm{Re}(f)$, et il vient alors
$$f(t) = ((A + C)\cos(\omega t) + (-B + D)\sin(\omega t))e^{\gamma t}.$$
La fonction $f$ s'écrit donc bien sous la forme souhaitée.

$\square$

Encore une fois, le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique permet de déterminer dans quelle situation on se trouve. Le premier cas se produit lorsque $\Delta > 0$, le deuxième lorsque $\Delta = 0$, le dernier lorsque $\Delta < 0$.

Dans le troisième cas, la solution générale de $\mathcal{H}$ peut également s'écrire
$$t \mapsto A\cos(\omega(t - t_0))e^{\gamma t},$$
où $A$ et $t_0$ décrivent $\mathbb{R}$.

**Exercice (Ordre deux homogène, cas réel)** 6

Donner les solutions réelles de : $y'' - 6y' + 25y = 0$.

**Exercice (Équations différentielles physiques)** 7

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$ et $y'' - \omega^2 y = 0$.

**Ensemble des solutions et plan vectoriel**

Dans tous les cas, une solution générale de $\mathcal{H}$ s'écrit donc

$$t \mapsto C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t),$$

où $h_1$ et $h_2$ sont deux solutions particulières non proportionnelles de $\mathcal{H}$, et $C_1$ et $C_2$ sont des scalaires quelconques.
On dit que toute solution est *combinaison linéaire* des deux fonctions $h_1$ et $h_2$, et que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un *plan vectoriel* de base $(h_1, h_2)$.

3.1

### 3.3. Recherche d'une solution particulière de $\mathcal{E}$

Comme dans le cas d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, une solution générale de $\mathcal{E}$ s'écrira comme la somme d'une solution particulière de $\mathcal{E}$, et d'une solution générale de l'équation homogène associée $\mathcal{H}$. Comment faire pour trouver une solution particulière, si on n'en trouve pas d'évidente ?

**Proposition (Principe de superposition, ordre deux )**

Si $\delta_1$ et $\delta_2$ sont des fonctions continues sur $I$ telles que $\delta = \delta_1 + \delta_2$, et si $f_1$ et $f_2$ sont respectivement solutions de

$$ay'' + by' + cy = \delta_1(x) \quad \text{et} \quad ay'' + by' + cy = \delta_2(x),$$

où $\delta_1$ et $\delta_2$ sont des fonctions continues, alors $f_1 + f_2$ est solution de $\mathcal{E}$.

3.c

**Démonstration**

□

**Proposition (Passage d'une solution complexe à une solution réelle)**

Si $a, b, c$ sont réels, et si $f$ est solution de $\mathcal{E}$, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont respectivement solutions de

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{Re}(\delta(x)) \quad \text{et} \quad ay'' + by' + cy = \mathrm{Im}(\delta(x))$$

3.d

Si on emploie cette méthode, bien penser à préciser que les coefficients $a$, $b$ et $c$ sont réels.
On admet[1] le résultat suivant, souvent utile :

1. on peut cependant aisément montrer à la main la dernière affirmation

Méthode (Second membre en exponentielle-polynôme, ordre deux)

On se place dans le cas où $\delta$ est de la forme $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$, pour un certain polynôme $P$ de degré $n$, et un certain nombre complexe $\alpha$.

(1) si $\alpha$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, $\mathcal{E}$ admet une unique solution de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$, où $Q$ est de degré $n$ ;

(2) si $\alpha$ est l'une des deux solutions de l'équation caractéristique, $\mathcal{E}$ admet une unique solution de la forme $f : t \mapsto tQ(t)e^{\alpha t}$, où $Q$ est un polynôme de degré $n$ ;

(3) si $\alpha$ est l'unique solution de l'équation caractéristique, alors $f : t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ tel que $aQ'' = P$ est solution de $\mathcal{E}$,

3.2

Combiné au principe de superposition et au passage d'une solution complexe à une solution réelle, cette méthode permet de résoudre une équation où le second membre est du type $\delta : t \mapsto e^{\nu t}\left(P_1(t)\sin(\omega t) + P_2(t)\cos(\omega t)\right)$.

### 3.4. Résolution de $\mathcal{E}$

Proposition (Résolution pour l'ordre deux)

Soit $\phi$ une solution particulière de $\mathcal{E}$, et soit $h_1$ et $h_2$ deux solutions non multiples de $\mathcal{H}$. L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ des solutions de $\mathcal{E}$ sur $I$ est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{t \mapsto \phi(t) + C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t), C_1, C_2 \in \mathbb{K}\}.$$

3.e

Démonstration

□

Nous admettons le résultat suivant d'algèbre linéaire :

Lemme Système de Cramer d'ordre deux

Si $a, b, c, d$ sont quatre scalaires vérifiant $ad - bc \neq 0$, alors, pour tout choix préalable de scalaires $\alpha$ et $\beta$, le système linéaire

$$\begin{cases} ax + by &= \alpha \\ cx + dy &= \beta \end{cases}$$

admet un unique couple solution de $\mathbb{K}^2$.

3.f

**Proposition (Problème de Cauchy pour l'ordre 2)**

Soit $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution $f$ de $\mathcal{E}$ telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.

3.g

**Démonstration**

Traiter d'abord le cas complexe, en prenant $h_1$ et $h_2$ comme dans 3.a page 114 :

Expliquer pourquoi le cas complexe permet de traiter le cas réel :

$\square$

**Problème de Cauchy pour l'ordre 2, cas réel**

Pour toute donnée d'un point $(x_0, y_0)$ du plan et d'un réel $m$, il passe une unique courbe intégrale passant en $(x_0, y_0)$ avec une pente $m$.

**Illustration**

3.3

**Exercice (Équations d'ordre deux, second membre en exponentielle-polynôme)**

Résoudre sur $\mathbb{R}$

**1** $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$.

**2** $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + t\cos(2t) + 1)e^{2t}$.

8

Nous avons donc un plan de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, analogue à celui donné plus haut dans le cas de l'ordre un.

## 4. Méthode d'Euler

De nombreuses équations différentielles rencontrées en physique par exemple ne sont pas linéaires, ce qui les rend bien plus difficiles à résoudre que celles que nous avons étudiées précédemment. En fait, nous ne savons pas toujours donner les solutions exactes d'une équation différentielle donnée $\mathcal{E}$. Dans ce cas, il peut être intéressant d'en chercher des solutions *approchées*. La méthode d'Euler propose une piste d'étude dans le cas d'une équation différentielle d'ordre un sur un intervalle (d'intérieur non vide) $I$, et à valeurs réelles.

Soit donc $\mathcal{E}$ une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = \Phi(x, y)$, où $\Phi$ est une application (suffisamment régulière) de $I \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ une condition initiale.

Si $\Phi$ est suffisamment régulière, un puissant résultat d'analyse montre l'existence et l'unicité d'une solution $\psi$ de $\mathcal{E}$, telle que $\psi(x_0) = y_0$ (*i.e.* l'existence et l'unicité à un problème de Cauchy donné). Notons $\Gamma$ le graphe de $\psi$. Nous ne connaissons qu'un point de $\Gamma$, à savoir $(x_0, y_0)$.

La méthode d'Euler consiste à approcher la courbe intégrale $\Gamma$ en se reposant sur l'approximation locale du graphe d'une fonction avec sa tangente. Cette méthode permet de trouver une suite de fonctions qui admet comme limite la fonction $\psi$ (du moins on l'espère).

**Méthode (Méthode d'Euler)**

On cherche à approcher l'unique solution au problème de Cauchy considéré, sur $[x_0, x_0']$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On subdivise cet intervalle en $n$ intervalles de même longueur, en posant $x_k = x_0 + kh$, où $h = \frac{x_0' - x_0}{n}$, $k \in [\![0, n]\!]$. On définit par récurrence les nombres $y_1, \dots, y_n$ par

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k), \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

On trace alors les segments d'extrémités $(x_k, y_k)$ et $(x_{k+1}, y_{k+1})$, $k$ allant de 0 à $n-1$, pour obtenir une approximation de $\Gamma$.

4.1

Comment obtient-on cette formule ? Nous avons d'un côté la formule exacte

$$\psi'(x_k) = \Phi(x_k, \psi(x_k))$$

D'un autre côté, $\frac{\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)}{h}$ est une approximation de $\psi'(x_k)$. On peut donc écrire

$$\psi(x_{k+1}) \simeq \psi(x_k) + h\Phi(x_k, \psi(x_k))$$

La fonction $\psi$ n'est cependant pas toujours explicite (nous cherchons même justement à en donner une approximation), et nous ne connaissons pas $\Phi(x_k)$, sauf lorsque $k = 0$. Cela nous donne donc une idée pour donner une valeur approchée $y_1$ de $\psi(x_1)$, puis, de proche en proche, une valeur approchée $y_k$ de tous les $\psi(x_k)$.

**Exemple (Application de la méthode d'Euler à $y' = y$)** i

Pour illustrer le fonctionnement de cette méthode, on l'applique dans un cas où on sait effectivement calculer $\psi$.
Fixons $x > 0$. On cherche à approcher sur $[0, x]$ l'unique solution $\psi$ de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\psi(0) = 1$ ($\psi$ est en fait la fonction exponentielle). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend $h = \frac{x}{n}$.
On a, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ : $y_{k+1} = (1+h)y_k$.
Une récurrence immédiate donne $y_k = (1+h)^k$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Nous relions donc les points $(\frac{kx}{n}, (1+\frac{x}{n})^k)$, pour $k$ allant de 0 à $n$.
En particulier à la borne $x$, on approche $e^x (= \psi(x))$ par $(1+\frac{x}{n})^n$, ce qui n'est pas si mal, car on peut montrer que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $(1+\frac{x}{n})^n$ tend vers $e^x$.

**Généralisation de la méthode d'Euler** 4.2

Bien entendu, on peut procéder de manière analogue dans le cas d'un intervalle $[x_0', x_0]$, et même dans le cas où $x_0$ se trouve dans l'intérieur de $I$.

**Illustration**

## 5. Problème de raccord pour l'ordre 1 (hors-programme)

On revient ici au cas d'une équation linéaire d'ordre 1 :

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x).$$

La grande différence est que cette fois ci, le coefficient devant $y'$, à savoir $\alpha(x)$, peut s'annuler pour certaines valeurs de $x$, ce qui fait qu'on perd le fil conducteur en un tel point. On dit qu'il y a *problème de raccord*.

Pour résoudre une telle équation, on la résout d'abord sur tout intervalle où $\alpha$ ne s'annule pas, puis on étudie les problèmes de raccord, en prenant notamment garde à la condition de dérivabilité.

**Exercice (Problèmes de raccord)** 9

Faire l'exercice 2.

## 6. Questionnaire 3 : Équations différentielles

**1** Le principe de superposition stipule que si $f_1$ et $f_2$ sont des solutions respectives de $a_1y'' + b_1y' + c_1y = 0$ et $a_2y'' + b_2y' + c_2y = 0$, alors $(f_1 + f_2)$ est solution de $(a_1 + a_2)y'' + (b_1 + b_2)y' + (c_1 + c_2)y = 0$.

**2** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tel que $b^2 - 4ac < 0$. La seule solution réelle de $ay'' + by' + cy = 0$ est la fonction identiquement nulle.

**3** Une base de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' - y = 0$ est $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$.

**4** Une équation différentielle linéaire admettant deux solutions distinctes sur $I$ en admet une infinité.

**5** Soit $f$ et $g$, solutions d'équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants. Il existe une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, dont $f$ et $g$ sont solutions.

**6** Une équation différentielle linéaire inhomogène (*i.e.* dont le second membre est non nul) n'admet pas la fonction nulle pour solution.

**7** Soit $a, b$ des applications continues de $I$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions sur $I$ et à valeurs réelles de $\mathcal{E}\ : a(t)y' + b(t)y = 0$ est une droite vectorielle, *i.e.* est l'ensemble des multiples par un scalaire de l'une des solutions non nulles de $\mathcal{E}$.

**8** Si $\lambda$ et $\mu$ sont deux scalaires distincts, et si $\delta$ est une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$, alors les équations $y' - \lambda y = \delta(t)$ et $y' - \mu y = \delta(t)$ ont une unique solution commune (sur $I$).

**9** Si $J$ est un intervalle inclus dans $I$, alors toute solution sur $J$ d'une équation différentielle $\mathcal{E}$ est la restriction d'une solution sur $I$ de $\mathcal{E}$.

**10** Soit $x_0, x_1$ deux réels distincts, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Soit $a, b, c$ des réels, $a \neq 0$. L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution valant $y_0$ en $x_0$ et $y_1$ en $x_1$.

**11** Expliquer pourquoi l'équation différentielle $y' - y^2 = 1$ n'est pas linéaire. Donner une solution réelle de cette équation sur un intervalle.

# 7. Feuille de TD 5 : Équations différentielles

Dans tous les exercices, on demande de trouver des solutions réelles. On pourra utiliser Maple si les calculs sont trop compliqués.

## 7.1. Équations différentielles linéaires d'ordre un

**Exercice 1 (Ordre un sans problème de raccord)** 0

Résoudre :

**1** $y' - \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}$.

**2** $y' + y\ \operatorname{cotan}(x) = \sin x$.

**3** $y' + y = xe^{3x}\cos(x) + (x-1)e^{-x}$.

**4** $y' - 2y = (x^2+1)e^{4x} + (x^3 - x^2 + x + 1)e^{2x}$.

**5** $y' + y = \cos x + \sin x$

**6** $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$

**7** $y' + y \sin x = \sin 2x$.

**Exercice 2 (Problèmes de raccord)** 0

Résoudre sur $\mathbb{R}$ :

**1** $xy' + y = x^3$.

**2** $xy' - y = 0$.

**3** $x^2 y' + y = 0$.

**4** $xy' - 2y = 0$.

**Exercice 3 (Toujours des problèmes de raccord)** 3

Résoudre sur $\mathbb{R}$

**1** $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.

**2** $xy' - 2y = x^4$.

**3** $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

## 7.2. Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants

**Exercice 4 (Ordre deux à coefficients constants)** 0

Résoudre

**1** $y'' - 2y' + y = \cos(mx)e^x$, où $m \in \mathbb{R}$.

**2** $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2x\cos(x) + x^3 + 3$.

**3** $y'' + y = x\cos(x)^3$.

Exercice 5 (Exemple de problème de Cauchy pour l'ordre deux) 2

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution $f$ de l'équation :

$$y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos(mx)$$

qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 6 (Centrale MP 08) 2

Résoudre l'équation différentielle $x'' + x = \sin(t)$, puis l'équation différentielle $x'' + x = |\sin(t)|$.

### 7.3. Équations différentielles d'un autre type

Exercice 7 (Une équation de Bernoulli) 2

Résoudre l'équation de Bernoulli $x^2y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que $y$ ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 8 (Centrale MP 07) 2

**1** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + \frac{1}{x^2}y = 0.$$

**Indication :** on pourra utiliser le changement de variable $t = \ln(x)$.

**2** L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ possède-t-elle des solutions non bornées ? Déterminer les solutions bornées de $(\mathcal{E})$.

Exercice 9 (Équation différentielle linéaire d'ordre trois) 2

Résoudre l'équation $y''' = y$.

Exercice 10 (Équation différentielle non linéaire d'ordre 2) 3

Trouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy' = y + \sin(x)y^2$ ne s'annulant pas.
**Indication :** on pourra poser $z = 1/y$.

Exercice 11 (Équation différentielle à variables séparées) 3

Résoudre l'équation $y' = e^{x+y}$.

**Exercice 12 (Équations pseudo différentielles)** 2

**1** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f'(x) + f(-x) = e^x,$$

pour tout réel $x$.

**2** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f''(x) + f(-x) = 0,$$

pour tout réel $x$.

**Exercice 13 (Équation fonctionnelle avec deux variables)** 2

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

pour tous réels $x$ et $y$.

**Exercice 14 (Équation fonctionnelle avec intégrale)** 2

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t) f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

CHAPITRE VI

# Géométrie élémentaire du plan

## Sommaire



Ce chapitre prolonge l'étude effectuée en Terminale, et donne l'occasion de travailler sur des espaces vectoriels « simples ». La difficulté réside dans la variété des exercices, de la particularité des raisonnements géométriques, auxquels les étudiants sont souvent rétifs, et dans le fait que certains exercices nécessitent des connaissances dépassant le cadre du programme.

On suppose connues les notions de distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormé, angles, angles orientés dans le plan euclidien.

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, ce qui permet de l'identifier à $\mathbb{R}^2$, et donc à $\mathbb{C}$.

## 1. Modes de repérage dans le plan

### 1.1. Coordonnées cartésiennes

**Définition (Colinéarité)** 1.a

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace. Le vecteur $\vec{u}$ est dit *colinéaire* au vecteur $\vec{v}$ s'il est multiple de $\vec{v}$ par un scalaire, *i.e.* :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, mais le seul vecteur colinéaire au vecteur nul est le vecteur nul lui-même. En particulier, la relation « est colinéaire à » n'est pas symétrique. En revanche, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, il est équivalent de dire que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ ou de dire que $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Deux vecteurs du plan ou de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ ou si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$, *i.e.* si l'un peut s'écrire comme multiple de l'autre. D'après la remarque précédente, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si (($\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul) ou (($\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$) et ($\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$))).

Soit $\mathcal{D}$ une droite. Un *vecteur directeur* de $\mathcal{D}$ est un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$ tel que, pour tous points $A$ et $B$ de $\mathcal{D}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{u}$. En particulier, un vecteur directeur n'est jamais nul.

La *direction* de la droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des vecteurs dirigeant $\mathcal{D}$, auquel on adjoint le vecteur nul. C'est ce qu'on appelle une *droite vectorielle*. C'est aussi l'ensemble des vecteurs que l'on peut former en prenant des extrémités dans $\mathcal{D}$.

Un vecteur $\vec{u}$ est dit *unitaire* (ou *normé*) s'il est de norme 1.

**Définition (mesure algébrique)** 1.b

Une *droite orientée* est la donnée d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un de ses deux vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}$. Si $A$ et $B$ sont deux points de $\mathcal{D}$, la *mesure algébrique* $\overline{AB}$ (pour cette orientation de $\mathcal{D}$) est l'unique réel $\lambda$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{u}$.

On a une relation de Chasles pour les mesures algébriques : si $A, B, C$ sont trois points d'une même droite orientée, alors $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

**Définition (Angle orienté entre deux droites)** 1.c

L'*angle* de la droite $\mathcal{D}_1$ (par $\vec{u}_1$) avec la droite $\mathcal{D}_2$ (par $\vec{u}_2$) est la classe de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$ modulo $\pi$.

Cet angle est bien défini, car on l'a pris modulo $\pi$. La relation de Chasles est encore valable.

**Définition (Repère du plan)** 1.d

Un *repère cartésien (du plan)* de $\mathcal{P}$ est la donnée d'un point du plan $O$, et d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}$. On le note $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout point $M$ du plan, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose de façon unique sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

où $x$ et $y$ sont deux nombres réels, appelés les *coordonnées* du point $M$ (ou *composantes* du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et unitaires, on dit que la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est *orthonormée*, et que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est *orthonormal*.

**Définition (Orientation dans le plan)**

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ deux bases orthonormées du plan. On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ a *même orientation* que $(\vec{i}, \vec{j})$ s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}.$$

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O', \vec{u}, \vec{v})$ deux repères orthonormaux. On dit que $(O', \vec{u}, \vec{v})$ a *même orientation* que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ si $(\vec{u}, \vec{v})$ a même orientation que $(\vec{i}, \vec{j})$.

1.e

Intuitivement, $(\vec{u}, \vec{v})$ a même orientation que $(\vec{i}, \vec{j})$ si on peut l'obtenir à l'aide d'une rotation à partir de $(\vec{i}, \vec{j})$ :

**Illustration**

**Proposition (Orientation dans le plan)**

Écrivons $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}'$ lorsqu'un repère $\mathcal{R}$ a même orientation que $\mathcal{R}'$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

1.a

**Démonstration**

$\square$

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ deux bases orthonormées, $(\vec{u}, \vec{v})$ ayant même orientation que $(\vec{i}, \vec{j})$. La relation « avoir même orientation que » étant symétrique, nous dirons désormais que $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ ont *même orientation* (de même pour les repères).

**Définition (Orientation du plan)** 1.f

Une *orientation* est la donnée d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$ (ou d'une base orthonormée $\mathcal{B}$), que l'on décrète direct(e). Tous les repères (bases) ayant même orientation que $\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{B}$) sont dit(e)s *direct(e)s*, les autres sont dit(e)s *indirect(e)s*.

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire du plan orienté. Il existe deux vecteurs, opposés, complétant $\vec{u}$ en une base orthonormée. L'une de ces bases est directe, et l'autre indirecte.

**Définition (Mesure d'angle orienté)** 1.g

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires. Soit $\vec{u}'$ l'unique vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{u}')$ soit une base orthonormale directe. On appelle *mesure de l'angle orienté* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout réel $\theta$ tel que $\vec{v} = (\cos\theta)\,\vec{u} + (\sin\theta)\,\vec{u}'$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle *mesure de l'angle orienté* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ toute mesure $\theta$ de l'angle orienté des vecteurs unitaires $\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ et $\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$.
On note alors

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \theta\,[2\pi].$$

Si $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) non nul est d'affixe $z_u = \rho_u e^{i\theta_u}$ (resp. $z_v = \rho_v e^{i\theta_v}$) sous forme exponentielle, alors $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \theta_v - \theta_u\,[2\pi]$ (c'est donc un argument de $\frac{z_v}{z_u}$).
Ceci permet en particulier de prouver la relation de Chasles angulaire pour trois vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{w})}\,[2\pi]$$

Plutôt que d'apprendre une formule de changement de repère, il faut savoir la retrouver, par le calcul vectoriel.

**Exercice (Changement de repère)** 1

Choisir deux repères du plan, et donner les formules de changement de repère.

## 1.2. Coordonnées polaires

**Définition (Coordonnées polaires)** 1.h

On identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$, et le repère choisi est $(O, e_1, e_2)$, où $O = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
Pour tout réel $\theta$, on pose $\vec{u}(\theta) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$ et $\vec{v}(\theta) = -(\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2$.
Soit $M$ un point de $\mathcal{P}$. Considérons l'équation d'inconnues $r, \theta \in \mathbb{R}$ :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta)$$

Cette équation admet au moins une solution. Si $M$ est différent de $O$, et si $(r_0, \theta_0)$ est un tel couple, alors l'ensemble des couples solutions $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ est

$$\{(r_0, \theta_0 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-r_0, \theta_0 + (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Un tel couple est appelé *couple (ou système) de coordonnées polaires* de $M$ (par rapport au repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$).
Le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est appelé *repère polaire*. Le point $O$ est appelé *pôle* et la droite orientée $(O, e_1)$ l'*axe polaire*.

Le repère polaire dépend donc du paramètre $\theta$ et donc du point $M$ considéré (contrairement au cas d'un repère cartésien). $\vec{v}(\theta)$ est le vecteur dérivé de $\vec{u}(\theta)$ par rapport à $\theta$. L'affixe de $\vec{u}(\theta)$ est $e^{i\theta}$, celle de $\vec{v}(\theta)$ est $ie^{i\theta}$.

$(r, \theta)$ est un système de coordonnées polaires de $M$ si et seulement si $M$ est d'affixe $re^{i\theta}$, donc cette notion est liée à (mais ne se confond pas avec) celle de forme trigonométrique.

Une équation $F(r, \theta) = 0$ (où $F$ est une fonction réelle de deux variables réelles) est une *équation polaire* d'une partie $\Omega$ du plan lorsqu'un point $M$ appartient à $\Omega$ si et seulement si l'un (au moins) de ses couples $(r_0, \theta_0)$ de coordonnées polaires vérifie $F(r_0, \theta_0) = 0$.

On demande seulement qu'un des couples de coordonnées polaires d'un point vérifie l'équation. Expliquez pourquoi on ne demande pas que tous le vérifient :

**Exemple (Équations polaires classiques)**

Équation polaire d'une droite $\mathcal{D}$ : soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, et soit $\theta_0$ et $\theta_1$ des mesures respectives de $\widehat{(e_1, \vec{u})}$ et $\widehat{(e_1, \overrightarrow{OH})}$, où $H$ est le projeté orthogonal de $O$ sur $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}$ ne passe pas par $O$.

- Si $\mathcal{D}$ passe par $O$, $\theta = \theta_0$ est une équation de $\mathcal{D}$.
- Si $\mathcal{D}$ ne passe pas par $O$, soit $d$ la distance de $\mathcal{D}$ à l'origine : $r\cos(\theta - \theta_1) = d$ est une équation de $\mathcal{D}$.

Équation d'un cercle passant par $O$ : le cercle de centre $\Omega$ d'affixe $Re^{i\theta_0}$ sous forme trigonométrique de rayon $R$ (passant donc par $O$) admet l'équation polaire :

$$r = 2R\cos(\theta - \theta_0).$$

i

**Démonstration**

Prouver tout ceci avec les complexes.

□

**Exercice (Équations polaires)**

Décrire les ensembles définis par ces équations polaires :

**1** $r = \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta}$.

**2** $r = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)$.

2

### 1.3. Lien entre coordonnées cartésiennes et polaires

Pour passer des coordonnées polaires $(r, \theta)$ aux coordonnées cartésiennes $(x, y)$, il suffit de projeter la relation $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta)$ :

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta$$

Pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires ($O$ étant le centre du repère cartésien et le pôle du repère polaire), il suffit de calculer le module et un argument de l'affixe $m$ de $M$ : si $M \neq O$,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{r}$$

## 2. Produit scalaire

### 2.1. Définition. Expression complexe

**Définition (Produit scalaire dans le plan)**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right)$$

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le *produit scalaire* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul.

2.a

On peut interpréter le produit scalaire à l'aide de projections :

**Illustration**

Le produit scalaire ne dépend pas de l'orientation choisie du plan.

**Proposition (Expression complexe du produit scalaire)**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes respectives $z_u$ et $z_v$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathrm{Re}(\bar{z}_u z_v).$$

2.a

Démonstration

□

### 2.2. Propriétés du produit scalaire. Expression en base orthonormée

**Proposition (Bilinéarité et symétrie du produit scalaire plan)** 2.b

Le produit scalaire est bilinéaire et symétrique.

Démonstration

□

**Corollaire (Produit scalaire plan en base orthonormée)** 2.c

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{P}$. Soient $x_u, y_u$ et $x_v, y_v$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$$

Démonstration

□

**Corollaire** (Composantes d'un vecteur dans une base orthonormée du plan)

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$ et toute base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$,

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j}.$$

2.d

**Démonstration**

□

**Proposition** (Inégalité de Cauchy-Schwarz dans le plan)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$ :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, .$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2.e

**Démonstration**

□

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (égalité utile pour passer d'une relation entre des distances à une relation entre des vecteurs).

Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul. De plus, il est orthogonal à tout vecteur.

## 3. Déterminant

### 3.1. Définition. Expression complexe

**Définition** (Déterminant dans le plan)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le *déterminant* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right)$$

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le *déterminant* $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est nul.

3.a

**Proposition** (Expression complexe du déterminant plan)

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes respectives $z_u$ et $z_v$, alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \operatorname{Im}(\bar{z_u} z_v).$$

3.a

Démonstration

□

### 3.2. Propriétés du déterminant. Expression en base orthonormée directe

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Cela permet de tester l'alignement de trois points : $A, B, C$ sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. Le déterminant exprimant bien la colinéarité, il sera très utile pour déterminer des équations de droites.

On peut interpréter $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$ comme l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ :

Illustration

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$,

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\det(\vec{u}, \vec{v}))^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$$

Contrairement au cas du produit scalaire, un changement d'orientation du plan modifie la valeur du déterminant en son opposé.

Proposition (Bilinéarité et antisymétrie du déterminant plan) 3.b

Le déterminant est bilinéaire et antisymétrique.

Démonstration

□

**Corollaire** (Déterminant plan en base orthonormée directe)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{P}$. Soient $x_u, y_u$ et $x_v, y_v$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v$$

3.c

**Démonstration**

$\square$

## 4. Droites

### 4.1. Équations de droites

On se donne une droite $\mathcal{D}$. La plupart du temps, une droite est donnée par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, ou par un point et un vecteur normal (non nul). On se fixe un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$, deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, et un vecteur normal non nul $\vec{n}(a, b)$.

4.1.1. *Équations cartésiennes.* **Droite donnée par un vecteur directeur $\vec{u}$ et un point $A$ :** $M(x, y)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, soit encore :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc

$$\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

**Droite donnée par deux points $A$ et $B$ :** On prend tout simplement $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur. $M(x, y)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, soit encore :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0.$$

**Droite donnée par un point $A$ et un vecteur normal non nul $\vec{n}$ :** $M(x, y)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, soit encore :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

**Définition (Équation normale d'une droite dans le plan)** 4.a

Si $\vec{n}$ est de norme 1, l'équation cartésienne ci-dessus est appelée *équation normale* de $\mathcal{D}$, et peut s'écrire :

$$(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = p$$

pour certains réels $\theta$ et $p$.

Si $ax + by + c = 0$ est une équation de la droite $\mathcal{D}$, alors $a'x + b'y + c' = 0$ est une équation de $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$.

Deux droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles (resp. perpendiculaires) si et seulement si $ab' - a'b = 0$(resp. $aa' + bb' = 0$).

Il est facile de décrire des demis-plans à l'aide d'équations cartésiennes de droites.

4.1.2. *Équations paramétriques.* Une équation paramétrique correspond à la donnée d'un point $A$ de $\mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}$, et à la caractérisation suivante d'appartenance d'un point $M$ à $\mathcal{D}$ :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$$

et s'écrit donc :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$$

**Exercice (Équations paramétriques)** 3

Donner une représentation paramétrique d'une droite donnée par $A$ et $B$ (resp. par $A$ et $\vec{n}$). On pourra notamment penser aux barycentres.

4.1.3. *Équations en polaires.* Nous avons déjà vu les équations polaires d'une droite. Mentionnons seulement les équations sous la forme :

$$r = \frac{1}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$, qui correspondent à une équation cartésienne $ax + by = 1$.

## 4.2. Lignes de niveau

**Définition (Ligne de niveau)** 4.b

Soit $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ une fonction. Une *ligne de niveau* de $f$ est un ensemble du type :

$$\{M \in \mathcal{P}, f(M) = \lambda\},$$

où $\lambda$ est un réel fixé.

**Lignes de niveau** $M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$

**Lignes de niveau** $M \mapsto \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$

### 4.3. Distance d'un point à une droite

**Définition (Distance)**

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $A$ un point du plan. Soit $A'$ le projeté orthogonal de $A$ sur $\mathcal{D}$ (*i.e.* $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{D}$, et $A' \in \mathcal{D}$). La *distance* de $A$ à $\mathcal{D}$, notée $d(A, \mathcal{D})$, est la longueur $AA'$.

4.c

Ne pas oublier qu'une distance est positive (n'oubliez pas les valeurs absolues dans les formules à suivre).

**Proposition (Caractérisation de la distance)**

La distance de $A$ à $\mathcal{D}$ est la plus petite distance possible entre $A$ et un point de $\mathcal{D}$.

4.a

**Illustration**

**Démonstration**

Conséquence du théorème de Pythagore :

$\square$

**Proposition (Distance d'un point à une droite dans le plan (vecteur normal))**

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal non nul de $\mathcal{D}$, $A$ un point du plan, et $B$ un point quelconque de la droite $\mathcal{D}$. Alors :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

4.b

Démonstration

$\square$

Corollaire (Distance d'un point à une droite dans le plan (équation))

Soit $ax + by + c = 0$ une équation de $\mathcal{D}$, et soient $x_A$ et $y_A$ les coordonnées de $A$. Alors :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4.c

Démonstration

$\square$

La formule est donc particulièrement agréable dans le cas où l'équation de $\mathcal{D}$ est normale.

Corollaire (Distance d'un point à une droite dans le plan (déterminant))

Soit $A$ un point du plan. Si une droite $\mathcal{D}$ est donnée par un point $B$ et un vecteur directeur $\vec{u}$, alors :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{\left|\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u})\right|}{\|\vec{u}\|}$$

4.d

Démonstration

$\square$

## 5. Cercles

**Définition (Cercle)**

Soit $\Omega \in \mathcal{P}$, et $R \geqslant 0$. On appelle *cercle* et on note $\mathcal{C}(\Omega, R)$ de *centre* $\Omega$ et de *rayon* $R$ l'ensemble :

$$\left\{M \in \mathcal{P}, \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = R\right\}$$

Le nombre $2R$ est appelé *le diamètre* du cercle.
Si $M$ et $M'$ sont deux points du cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$ symétriques par rapport à $\Omega$, alors le segment $[MM']$ est appelé *un diamètre* de $\mathcal{C}(\Omega, R)$.

5.a

Parfois, un singleton n'est pas considéré comme un cercle (attention à la convention). Un singleton est parfois appelé *cercle-point*. Par trois points non alignés passe un unique cercle (son centre est le point d'intersection des trois médiatrices).

### 5.1. Équations de cercles

5.1.1. *Équations cartésiennes.* Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormal. Un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$ admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$x^2 + y^2 - 2x_\Omega x - 2y_\Omega y + x_\Omega^2 + y_\Omega^2 - R^2 = 0.$$

Réciproquement, une équation du type

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, définit un cercle $\mathcal{C}$ si $a^2 + b^2 - c \geqslant 0$ (un cercle-point si $a^2 + b^2 - c = 0$), et l'ensemble vide si $a^2 + b^2 - c < 0$.

5.1.2. *Équations polaires.* En reprenant les notations ci-dessus, et en remplaçant $x, y$ par $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$ respectivement, on obtient une première équation polaire pour $\mathcal{C}$ :

$$r^2 - 2r(a\cos\theta + b\sin\theta) + c = 0$$

Si $\Omega = O$, une équation plus simple est $r = R$. Si le cercle passe par $O$, on peut remplacer l'équation par

$$r = 2a\cos\theta + 2b\sin\theta$$

qui peut s'écrire

$$r = 2R\cos(\theta - \theta_0),$$

où $(R, \theta_0)$ est un couple de coordonnées polaires de $\Omega$ (comme nous l'avons déjà vu).

5.1.3. *Équations paramétriques.* $\mathcal{C}(\Omega, R)$ admet pour équation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_\Omega + R\cos\theta \\ y = y_\Omega + R\sin\theta \end{array}\right. \quad (\theta \in ]-\pi, \pi]).$$

$\mathcal{C}(\Omega, R) - \{(x_\Omega - R, y_\Omega)\}$ admet aussi un paramétrage rationnel :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_\Omega + R\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = y_\Omega + R\frac{2t}{1+t^2} \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

### 5.2. Intersection d'un cercle et d'une droite. Intersection de deux cercles

**Proposition (Intersection d'un cercle et d'une droite)**

Soit $\mathcal{C}(\Omega, R)$ un cercle non réduit à un point, et $\mathcal{D}$ une droite :
– Si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}(\Omega, R) = \emptyset$ ;
– Si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, alors on dit que $\mathcal{D}$ est (une) *tangente* à $\mathcal{C}(\Omega, R)$, et leur intersection est réduite à un singleton ;
– Si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}(\Omega, R)$ se croisent en deux points distincts.

5.a

Illustration

Démonstration

□

Proposition (Intersection de deux cercles non concentriques)

Soient $\mathcal{C}(\Omega, R)$ et $\mathcal{C}(\Omega', R')$ deux cercles non concentriques et non réduits à un point. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants si et seulement si $|R - R'| \leqslant \Omega\Omega' \leqslant R + R'$. En deux points si on a des inégalités strictes, et en un seul point si on a une égalité. Si $|R - R'| = \Omega\Omega'$ (resp. si $\Omega\Omega' = R + R'$), on dit que les deux cercles sont tangents intérieurement (resp. extérieurement). 5.b

Illustration

Démonstration

$\square$

Lorsque l'intersection est constituée de deux points distincts, on appelle *axe radical* de ces cercles la droite passant par ces points. Pour obtenir une équation de cet axe, on peut combiner des équations cartésiennes des deux cercles considérés.

### 5.3. Propriétés angulaires

**Proposition (Angle au centre)**

Soit $\mathcal{C}(\Omega, R)$ un cercle non réduit à un point, et $A$ et $B$ deux points quelconques de ce cercle. Pour tout point $M$ du cercle, distinct de $A$ et $B$, on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \equiv 2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}[2\pi]$$

5.c

Démonstration

$\square$

Illustration

On en déduit immédiatement :

Corollaire (Condition nécessaire de cocyclicité)

Si $M$, $N$, $A$, $B$ sont quatre points distincts, cocycliques ou alignés, alors :

$$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}})[\pi]$$

5.d

Proposition (Lieu angulaire)

Soient $A, B, C$ trois points non alignés du plan. L'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M$ (distincts de $A$ et $B$) tels que :

$$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})[\pi]$$

est le cercle circonscrit au triangle $ABC$, privé des points $A$ et $B$.

5.e

Démonstration

□

La congruence modulo $2\pi$ permet de distinguer deux arcs de cercles.

Illustration

On en déduit immédiatement :

**Corollaire (Caractérisation de cocyclicité ou d'alignement)**

Quatre points distincts $A, B, C, D$ du plan sont cocycliques ou alignés si et seulement si :

$$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})[\pi]$$

5.f

### 5.4. Exemples de lieux

Ensemble des points $M$ tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \alpha[\pi]$.

L'ensemble considéré est aussi $\{M, (\widehat{(MA), (MB)}) \equiv \alpha[\pi]\}$

**Corollaire (Lieu et orthogonalité)**

Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan. Alors l'ensemble

$$\{M, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$$

est le cercle de diamètre $[AB]$.

5.g

Démonstration

□

Ensemble des points $M$ tels que $MB = kMA$.

Écartons le cas où $k = 1$ (médiatrice de $[AB]$). Il est équivalent d'écrire $MB^2 = k^2MA^2$, soit encore $(\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MA}) = 0$. L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre $[\Omega_k, \Omega'_k]$, où $\Omega_k$ (resp. $\Omega'_k$) est le barycentre de $(A, k)$ et $(B, 1)$ (resp. $(A, -k)$ et $(B, 1)$), même si $k = 0$.

# 6. Compléments

## 6.1. Vocabulaire d'algèbre linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $E$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de scalaires. On appelle *combinaison linéaire* de cette famille de vecteurs pour cette famille de scalaires l'expression :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k.$$

On dit cette combinaison linéaire à *résultat nul* si

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}.$$

On la dit *triviale* si tous les scalaires sont nuls (elle est alors à résultat nul).

La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est dite *libre* si la seule combinaison linéaire à résultat nul est la triviale. On dit également dans ce cas que $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ sont (linéairement) indépendants.

La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est dite *génératrice (de E)* si tout vecteur de $E$ est combinaison linéaire de cette famille.

On dit que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une *base* de $E$ si elle est libre et génératrice.

Plus simplement, $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille libre (resp. génératrice, resp. une base) de $E$ si et seulement si tout vecteur de $E$ s'écrit d'au plus une manière (resp. d'au moins une manière, resp. d'une unique manière) comme combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

Dans le cas du plan, il revient d'écrire :

**Définition (Base du plan)** — 6.a

Une *base* de $\mathcal{P}$ est la donnée d'un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires.

Attention cependant, trois vecteurs peuvent être non colinéaires deux à deux, sans être indépendants.

Une application $\varphi$ d'un espace vectoriel $E$ vers un espace vectoriel $F$ est dite *linéaire* si, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tout scalaire $\lambda$ :

$$\varphi(\lambda \vec{u}) = \lambda \varphi(\vec{u}) \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

Cela revient à ce que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tous scalaires $\lambda$ et $\mu$,

$$\varphi(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \varphi(\vec{u}) + \mu \varphi(\vec{v}).$$

Une application $\psi$ de $E^2$ dans $F$ est dite *bilinéaire* si, pour tous vecteurs $\vec{u}_0$ et $\vec{v}_0$, les applications $\vec{u} \mapsto \psi(\vec{u}, \vec{v}_0)$ et $\vec{v} \mapsto \psi(\vec{u}_0, \vec{v})$ (de $E$ dans $F$) sont linéaires.

On définit de manière analogue la notion d'application trilinéaire de $E^3$ dans $F$.

## 6.2. Rappels sur les barycentres

Ces notions se généralisent à d'autres dimensions, et notamment 1 et 3.

**Définition (barycentre)** — 6.b

Soit $((A_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de $n$ éléments de $\mathcal{P} \times \mathbb{R}$ (*i.e.* une application de $[\![1, n]\!]$ dans $\mathcal{P} \times \mathbb{R}$, ou encore un élément de $(\mathcal{P} \times \mathbb{R})^n$), telle que $m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.
Le point $G$ défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

est appelé *barycentre* de $((A_i, \lambda_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$.
Chaque couple $(A_i, \lambda_i)$ est appelé *point pondéré* $A_i$ de poids $\lambda_i$, $m$ est appelé *poids total* de la famille $((A_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points pondérés.
Dans le cas où chaque $\lambda_i$ vaut 1, le barycentre de la famille des points pondérés est appelé *isobarycentre* de la famille de points $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Toujours par définition, le poids total est *non nul*. Il faut vérifier que $m \neq 0$ avant d'utiliser le (et même de parler du) barycentre d'une famille de points pondérés [1].

Si l'on change l'ordre d'apparition des points pondérés $(A_i, \lambda_i)$ dans la famille $((A_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, le barycentre reste inchangé : on peut dire qu'il y a « commutativité » du barycentre.

Par définition du barycentre, on connaît très facilement ses coordonnées lorsqu'on connaît celles des points le définissant.

**Proposition (Barycentre)** 6.a

(1) Pour tout point $M$ du plan, on a :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

(2) *(Caractérisation du barycentre)* Le barycentre de la famille des points pondérés $(A_i, \lambda_i)$ est l'unique point solution de l'équation suivante (d'inconnue $M$) :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$$

(3) *(Homogénéité du barycentre)* Si l'on multiplie tous les poids par un même réel non nul, le barycentre est inchangé ;

(4) *(Associativité du barycentre)* Soit $m \in [\![2, n]\!]$ tel que $\mu_m := \sum_{k=m}^{n} \lambda_k \neq 0$, et soit $G_m$ le barycentre de $((A_i, \lambda_i))_{m \leqslant i \leqslant n}$ d'au moins deux éléments. $G$ est alors le barycentre de

$$((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_{m-1}, \lambda_{m-1}), (G_m, \mu_m)).$$

(5) Si $A_i$ est d'affixe $a_i$, alors $G$ est d'affixe $g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$.

**Démonstration**

$\square$

La première propriété montre que la définition d'un barycentre ne dépend pas de l'origine du repère.

1. on pourra omettre de le signaler pour le barycentre d'un couple de points pondérés $((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$, où $\lambda \in \mathbb{R}$

**Exercice (Les médianes sont concourantes)** 4

Montrer que les médianes d'un (vrai) triangle sont concourantes.

### 6.3. Convexité

Ces notions se généralisent à d'autres dimensions, notamment 1 et 3.

**Définition (segment)** 6.c

Soit $A$ et $B$ deux points du plan. Le *segment* $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de $((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$, où $\lambda$ décrit $[0, 1]$.

**Définition (Partie convexe)** 6.d

Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ est dite *convexe* si elle contient le segment joignant deux quelconques de ses points.

**Illustration**

**Illustration**

**Proposition (Enveloppe Convexe)** 6.b

Soit $\Omega$ une partie de $\mathcal{P}$. Il existe une plus petite partie convexe $\mathcal{C}$ du plan contenant $\Omega$, pour la relation d'ordre d'inclusion, *i.e.* :

(1) $\Omega \subset \mathcal{C}$ ;

(2) $\mathcal{C}$ est convexe ;

(3) Si $\mathcal{C}'$ est un convexe contenant $\Omega$, alors $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$.

De plus, on a :

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\substack{\mathcal{C}' \text{ convexe} \\ \Omega \subset \mathcal{C}'}} \mathcal{C}',$$

*i.e.* l'enveloppe convexe de $\Omega$ est l'intersection de tous les convexes contenant $\Omega$.

**Démonstration**

$\square$

**Définition (Enveloppe Convexe)** 6.e

Dans le contexte de la proposition précédente, $\mathcal{C}$ est appelée *enveloppe convexe* de $\Omega$.

Bien entendu, tout ensemble convexe est sa propre enveloppe convexe. L'enveloppe convexe d'un cercle est le disque fermé qu'il délimite.

Illustration

Proposition (Enveloppe convexe d'un nombre fini de points)

6.c

L'enveloppe convexe de $p$ points coplanaires $A_1, \dots, A_p$ est la plaque délimitée par le plus petit polygone convexe contenant ces $p$ points.
C'est l'ensemble des barycentres de $A_1, \dots, A_p$ affectés de poids positifs.

Démonstration

□

### 6.4. Déterminants d'ordre 2 et 3

Ici, on considère des tableaux de nombres réels de deux lignes et deux colonnes, ou de trois lignes et trois colonnes, que l'on place entre parenthèses (que l'on généralisera, et appelera *matrices* plus tard). On va définir une application, l'application *déterminant*, qui, à un tel tableau, associe un nombre réel. Les déterminants d'ordre $i$ nous seront utiles pour la géométrie en dimension $i$ ($i = 2, 3$). Tous les résultats ici évoqués seront démontrés et étendus plus tard dans l'année.

Ils n'ont d'intérêt à ce stade que pour la résolution de systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues (ou trois équations à trois inconnues) et les interprétations géométriques correspondantes (intersections de droites ou de plans, par exemple).

**Définition (Déterminant en tailles 2 et 3)** 6.f

Soit $a, b, c, d$ des réels. On appelle *déterminant* du tableau d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et on note

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

le nombre réel $ad - bc$.

Soit $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ des réels. On appelle *déterminant* du tableau d'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

et on note

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

le nombre réel

$$a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

On donne ici des opérations simples sur les lignes ou colonnes d'un tableau $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de réels $a$, $b$, $c$, $d$, et leurs effets respectifs sur le déterminant de celui-ci (on généralisera au cas d'un tableau de trois lignes et colonnes) :

(1) *(Invariance par transposition)*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

(2) *(Linéarité par rapport à la seconde colonne)* Pour tous réels $\lambda, \lambda', b', d'$ :

$$\begin{vmatrix} a & \lambda b + \lambda' b' \\ c & \lambda d + \lambda' d' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda' \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$$

De même pour la linéarité par rapport à la première colonne, et pour la linéarité par rapport aux lignes ;

(3) Un déterminant est changé en son opposé si l'on échange deux de ses colonnes ;

(4) Un déterminant est changé en son opposé si l'on échange deux de ses lignes ;

(5) On ne change pas la valeur d'un déterminant si l'on ajoute à une colonne un multiple d'une autre colonne ;

(6) On ne change pas la valeur d'un déterminant si l'on ajoute à une ligne un multiple d'une autre ligne ;

(7) Un déterminant d'ordre 3 est nul si et seulement si une de ses colonnes est combinaison linéaire des deux autres.

**Définition (Système carré de taille 2)** 6.g

Soit $a, b, c, d, \alpha, \beta$ des réels, et $\mathcal{S}$ le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & \alpha \\ cx & + & dy & = & \beta \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S})$$

Le *second membre* (ou la *colonne second membre*) de $\mathcal{S}$ est la colonne $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Le *déterminant* de $\mathcal{S}$ est le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

On définit des notions analogues pour un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

**Théorème Systèmes de Cramer en dimensions 2 et 3**

Soit $\mathcal{S}$ un système de $k$ équations à $k$ inconnues ($k \in \{2,3\}$), et soit $\Delta$ son déterminant. Si $\Delta \neq 0$, alors le système admet une unique solution, donnée par $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ (et $z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ le cas échéant), où $\Delta_x$ (resp. $\Delta_y$, $\Delta_z$) est le déterminant obtenu en remplaçant la colonne des coefficients de $x$ (resp. $y, z$) par la colonne second membre.

6.d

**Exercice (Système de Cramer en taille 3)**

Résoudre

$$\begin{cases} 3x - y + 2z &= a \\ -x + 2y - 3z &= b \\ x + 2y + z &= c \end{cases}$$

**Réponse :** l'unique triplet solution est $\left(\frac{8a+5b-c}{18}, \frac{-2a+b+7c}{18}, \frac{-4a-7b+5c}{18}\right)$.

5

## 7. Feuille de TD 6 : Géométrie élémentaire du plan

On se place implicitement dans un repère orthonormal direct.

### 7.1. Droites, segments

**Exercice 1 (Équations de droites)** 0

On considère les droites $D : x + 2y = 5$ et $D' : 3x - y = 1$. On note $A$ l'intersection des deux droites et $B$ le point de coordonnées $(5, 2)$. Donner une équation cartésienne de la droite $(AB)$, de la perpendiculaire à $D$ passant par $B$, de la parallèle à $D'$ passant par $B$. Soit $C$ le point de coordonnées $(2, 7)$. Donner une équation cartésienne de la médiatrice $\Delta$ du segment $[BC]$. La droite $\Delta$ est-elle parallèle à $D$ ? à $D'$ ?

**Exercice 2 (Faisceau de droites)** 1

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan, d'équations respectives

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

Pour tout couple $(\lambda, \mu)$ de réels, soit $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ la partie du plan d'équation

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + \lambda c + \mu c' = 0.$$

**1** Cette partie est-elle toujours une droite ?

**2** On considère l'ensemble dont les éléments sont les droites de la forme $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$. Cet ensemble est appelé *faisceau des droites* $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Montrer que si les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point $I$ (resp. parallèles non confondues), alors le faisceau des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est l'ensemble des droites passant par $I$ (resp. l'ensemble des droites parallèles à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$).

**3** Déduisez-en le corollaire suivant : les trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ d'équations respectives : $ax+by+c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

**Exercice 3 (Équations de bissectrices)** 2

Trouver des équations cartésiennes des deux bissectrices de $D : 5x-12y+7 = 0$ et $D' : 3x+4y-7 = 0$.

**Exercice 4 (Équations de symétriques)** 3

Soit $A = (-2, 4)$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations respectives $x + 2y + 3 = 0$ et $3x + 2y + 1 = 0$.

**1** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $A$ sur $\mathcal{D}$.

**2** Déterminer une équation cartésienne de la droite symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à $A$.

**3** Déterminer une équation cartésienne de la droite symétrique de $\mathcal{D}'$ par rapport à $\mathcal{D}$.

**Exercice 5 (Carrés construits sur un quadrilatère convexe)** 4

Soit un quadrilatère convexe $ABCD$. On construit les carrés extérieurs $C_1, C_2, C_3$ et $C_4$ à $ABCD$ de côtés respectifs $AB, BC, CD$ et $DA$. Montrer que les segments joignant les centres de $C_1$ à $C_3$ et $C_2$ à $C_4$ sont orthogonaux et de même longueur.

## 7.2. Triangles

**Exercice 6 (Caractérisation des triangles rectangles)** 0

Montrer que le (vrai) triangle $ABC$ est rectangle si et seulement si :

$$\cos^2((\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})) + \cos^2((\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})) + \cos^2((\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})) = 1.$$

**Exercice 7 (Orthocentre d'un triangle)** 1

**1** Soit $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan. Montrer la *relation d'Euler* :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

**2** Soit $ABC$ un triangle non aplati. Déduire de la relation d'Euler que les trois hauteurs de $ABC$ sont concourantes.

**3** Retrouver ce résultat en montrant d'abord que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

**Exercice 8 (Barycentres célèbres d'un triangle)** 1

Soit $ABC$ un triangle non aplati.

**1** Montrer que le centre du cercle inscrit dans $ABC$ est le barycentre de $((A, BC), (B, AC), (C, AB))$.

**2** On suppose $ABC$ non rectangle. Montrer que l'orthocentre $H$ de $ABC$ est le barycentre de $((A, \tan((\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}))), (B, \tan((\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}))), (C, \tan((\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}))))$.

## 7.3. Cercles

**Exercice 9 (Équations polaires de cercles)** 0

Soit $A = (2, 3)$ et $B = (-2, 1)$.

**1** Donner une équation polaire du cercle circonscrit au triangle $ABO$.

**2** Donner une équation polaire du cercle de diamètre $[AB]$.

**Exercice 10 (Droites passant par un point tangentes à un cercle)** 2

Déterminer les droites passant par $A = (3, 4)$ et tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Exercice 11 (Point commun à une famille de cercles) 3

Soit $O, A, B$ un triangle rectangle en $O$. À toute droite $D$ issue de $O$ on associe le cercle de diamètre $[A'B']$, où $A'$ et $B'$ sont les projetés orthogonaux de $A$ et $B$ sur $D$. Montrer que tous les cercles passent par un même point fixe.

Exercice 12 (Tangentes communes à deux cercles) 3

Déterminer des équations des tangentes communes aux deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives $x^2 + y^2 = 100$ et $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$.

Exercice 13 (Familles de cercle orthogonaux) 3

Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan, $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\mathcal{C}$ le cercle $\{M \in \mathcal{P}, BM = \lambda AM\}$.
**1** Montrer que $\mathcal{C}$ est orthogonal à tout cercle passant par $A$ et $B$.
**2** Faire un dessin en Maple.

## 7.4. Distances

Exercice 14 (Distance d'un point à une droite) 0

Calculer la distance du point $A$ à la droite $\mathcal{D}$ dans les cas suivants :
**1** $A = (0,0)$ et $\mathcal{D}$ passe par $B = (5,3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{u} = (1,2)$.
**2** $A = (1,-1)$ et $\mathcal{D}$ passe par $C = (-1,1)$ et est orthogonale à $\overrightarrow{n} = (2,3)$.
**3** $A = (4,-1)$ et $\mathcal{D}$ est d'équation cartésienne $x + 2y + 3 = 0$.

Exercice 15 (Contrainte de distance pour une droite) 0

On considère le point $\Omega = (1,2)$. Parmi toutes les droites passant par $\Omega$, déterminer celles dont $A = (-1,4)$ est à une distance 1.

Exercice 16 (Point équidistant à une famille de droites) 0

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite $\mathcal{D}_\lambda$ d'équation :
$$(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2.$$
Montrer qu'il existe un point $\Omega$ à même distance de toutes les droites $\mathcal{D}_\lambda$.

Exercice 17 (Point intérieur à un triangle équilatéral) 5

Soit $ABC$ un triangle équilatéral, et $M$ un point intérieur à $ABC$. Montrer que la somme des distances de $M$ aux trois côtés de $ABC$ ne dépend pas de $M$.

**Exercice 18 (Lieu d'intersection de cercles)** 0

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on considère le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ de centre $(\lambda, 0)$ tangent à l'axe $(Oy)$ et $\Gamma_\lambda$ le cercle de centre $(\lambda, \lambda)$ tangent à $(Ox)$. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de ces cercles, puis le lieu de ces points lorsque $\lambda$ varie.

**Exercice 19 (Exemples de fonctions scalaires de Leibniz)** 1

Soient $A, B, C$ les sommets d'un triangle équilatéral de côté $a$.

**1** Déterminer l'ensemble des points $M$ qui vérifient : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

**2** Déterminer l'ensemble des points $M$ qui vérifient : $MA^2 + a^2 = 2(MB^2 + MC^2)$.

**Exercice 20 (Un lieu (Centrale MP 06))** 2

Soit $A, B, C$ trois points du plan tels que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 7$. Déterminer les points $M$ du plan tels que :

$$\left\| 7\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\| .$$

## 7.6. Convexité

**Exercice 21 (Intersection et union de deux convexes)** 0

Montrer que l'intersection de deux convexes est un convexe. Qu'en est-il de l'union ?

**Exercice 22 (Parties convexes dont le complémentaire est convexe)** 4

Trouver les parties convexes $C$ du plan tel que le complémentaire $\mathcal{P} \backslash C$ soit aussi convexe.

CHAPITRE VII

# Géométrie élémentaire de l'espace

## Sommaire



Dans tout ce chapitre, on notera $\mathcal{E}$ (resp. $E$) l'espace $\mathbb{R}^3$ dont les éléments seront considérés comme des points (resp. des vecteurs). Il apparaît déjà en filigrane, dans ce chapitre et dans le précédent, des outils et techniques d'algèbre linéaire et multilinéaire (vecteurs indépendants, bases, coordonnées, déterminant, produit mixte, produit vectoriel). Il pourra être utile de revenir à ces chapitres lorsqu'on abordera l'algèbre linéaire : d'une part, pour se remémorer ces exemples intuitifs, afin de mieux assimiler cette théorie abstraite, et, d'autre part, pour mieux saisir le parti-pris dans ces chapitres, et les compléter (notamment les propriétés des déterminants de tableaux de nombres).

# 1. Modes de repérage dans l'espace

## 1.1. Coordonnées cartésiennes

**Définition (Base de l'espace)** 1.a

Une *base* de $E$ est la donnée d'un triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de vecteurs *indépendants* de $E$. Cela signifie que les trois vecteurs ne sont pas coplanaires (ou encore, qu'aucun ne s'écrit comme une combinaison linéaire des deux autres).
Un *repère (cartésien)* est la donnée d'un point $O$ de $\mathcal{E}$, et d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $E$.
Pour tout point $M$ de $\mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose de façon unique sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

où $x, y, z$ sont des réels, et sont appelés *coordonnées* du point $M$ (ou *composantes* du vecteur $\overrightarrow{OM}$).
Si $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, et de norme 1, on dit que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est *orthonormée* (ou orthonormale), et que le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est *orthonormal* (ou orthonormé).

Soit $\mathcal{R} = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $\mathcal{R}' = (O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ deux repères de $\mathcal{E}$. On suppose connaître les expressions des vecteurs de $\mathcal{B}' = (\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \vec{i}' & = & x_{\vec{i}'}\vec{i} & + & y_{\vec{i}'}\vec{j} & + & z_{\vec{i}'}\vec{k} \\ \vec{j}' & = & x_{\vec{j}'}\vec{i} & + & y_{\vec{j}'}\vec{j} & + & z_{\vec{j}'}\vec{k} \\ \vec{k}' & = & x_{\vec{k}'}\vec{i} & + & y_{\vec{k}'}\vec{j} & + & z_{\vec{k}'}\vec{k} \end{array}\right.$$

et les coordonnées $(a, b, c)$ de $O'$ dans $\mathcal{R}$.

**Proposition (Formule de changement de repère dans l'espace)** 1.a

Soit $M$ un point de $\mathcal{E}$, de coordonnées $x, y, z$ dans $\mathcal{R}$, et de coordonnées $x', y', z'$ dans $\mathcal{R}'$. On a alors les relations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x-a & = & x'x_{\vec{i}'} & + & y'x_{\vec{j}'} & + & z'x_{\vec{k}'} \\ y-b & = & x'y_{\vec{i}'} & + & y'y_{\vec{j}'} & + & z'y_{\vec{k}'} \\ z-c & = & x'z_{\vec{i}'} & + & y'z_{\vec{j}'} & + & z'z_{\vec{k}'} \end{array}\right.$$

Il ne faut pas apprendre ces formules par cœur : il vaut mieux savoir les retrouver très vite par le calcul. On peut cependant retenir que lorsqu'on connaît bien les vecteurs de $\mathcal{R}'$ en fonction de ceux de $\mathcal{R}$, on connaît bien les coordonnées d'un point dans $\mathcal{R}$ en fonction de ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$.

**Définition (Orientation dans l'espace)** 1.b

On dit que $\mathcal{B}'$ a *même orientation* que $\mathcal{B}$ si

$$\begin{vmatrix} x_{\vec{i}'} & x_{\vec{j}'} & x_{\vec{k}'} \\ y_{\vec{i}'} & y_{\vec{j}'} & y_{\vec{k}'} \\ z_{\vec{i}'} & z_{\vec{j}'} & z_{\vec{k}'} \end{vmatrix}$$

est strictement positif.
On dit que $\mathcal{R}'$ a *même orientation* que $\mathcal{R}$ si $\mathcal{B}'$ a *même orientation* que $\mathcal{B}$.
Une *orientation de l'espace* correspond au choix d'une base (ou d'un repère) que l'on décrète direct(e). Comme dans le cas de la géométrie plane, tous les bases ou repères ayant même orientation que cette base ou ce repère seront décrétés *directs*, les autres seront décrétés *indirects*.

Nous admettons que l'on définit ainsi une relation d'équivalence (seule la réflexivité est évidente à ce stade de l'année).

La plupart du temps, on oriente $\mathcal{E}$ avec la *base canonique* $(e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ (on rappelle qu'on a identifié $\mathcal{E}$ à $\mathbb{R}^3$). C'est ce que nous faisons dans la suite, sauf précision contraire.

Exercice (Orientation dans l'espace)

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base. La base $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ est-elle directe ?

1

Définissons maintenant d'autres systèmes de coordonnées (qui sont deux extensions possibles des coordonnées polaires dans le plan), surtout utiles en physique.

### 1.2. Coordonnées cylindriques

On munit $\mathcal{E}$ d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et du repère de base sous-jacente $\mathcal{B}$, et d'origine $O \in \mathcal{E}$.

Si $\theta$ est un réel, on note

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}.$$

Soit $M$ un point de coordonnées $x, y, z$ dans $\mathcal{R}$, et soit $P$ son projeté orthogonal sur le plan $(Oxy)$. Ce point admet dans ce plan un système de coordonnées polaires $(r, \theta)$, pour lequel : $\overrightarrow{OP} = r\,\vec{u}(\theta)$.

On a alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta) + z\,\vec{k}$$

Définition (Coordonnées cylindriques)

Soit $M \in \mathcal{E}$. On appelle *(triplet ou système de) coordonnées cylindriques* de $M$ par rapport à $\mathcal{R}$ tout triplet $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + z\vec{k}.$$

1.c

On a donc les relations suivantes entre coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}$ et coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Illustration

Ces coordonnées sont donc très proches des coordonnées polaires : on rajoute seulement une troisième coordonnée (que l'on pourrait appeler l'altitude), qui n'est pas mêlée aux deux premières. Le système de coordonnées suivant est plus compliqué, car aucune coordonnée n'est « épargnée » par le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques.

### 1.3. Coordonnées sphériques

Soit $M$ un point de coordonnées $(x, y, z)$ dans $\mathcal{R}$. Soit $(\rho, \varphi, z)$ un système de coordonnées cylindriques de $M$, où $\rho \geqslant 0$. On a, en posant $r = OM$ :

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

et il existe donc un réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $z = r\cos\theta$ et $\rho = r\sin\theta$.

**Définition (Coordonnées sphériques)** 1.d

On appelle *système* de *coordonnées sphériques* tout triplet $(r, \theta, \varphi)$ de réels tel que $r \geqslant 0$, $\theta \in [0; \pi]$ et :

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

$r$ est appelé *rayon*, $\varphi$ *longitude*, $\theta$ *colatitude* (et $\theta - \frac{\pi}{2}$ la *latitude*).

**Illustration**

## 2. Produit scalaire

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de produit scalaire dans l'espace (notre parti-pris est toujours géométrique : la définition est donc assez naturelle, mais a pour principal défaut de cacher la bilinéarité du produit scalaire). L'étude est comparable à celle qu'on a menée dans le plan. La seule différence notable est l'impossibilité d'orienter les angles dans l'espace (ce qui ne nous dérange pas pour le produit scalaire).

### 2.1. Définition. Expression dans une base orthonormée

**Définition (Angle dans l'espace)** 2.a

On appelle *mesure* de l'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $(\vec{u}, \vec{v})$ l'unique réel $\theta \in [0; \pi]$ tel que, pour toute orientation du plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (tout plan vectoriel contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sinon) :

$$\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \cos(\theta)$$

**Illustration**

La relation de Chasles angulaire n'est plus valable.

**Définition (Produit scalaire)** 2.b

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\left((\vec{u},\vec{v})\right)$$

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le *produit scalaire* $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est nul.

Ne pas oublier qu'ici, le terme *scalaire* signifie *réel*, et que l'application produit scalaire va de $E^2$ dans $\mathbb{R}$, d'où son nom.

### 2.2. Propriétés du produit scalaire

**Proposition (bilinéarité et symétrie du produit scalaire dans l'espace)** 2.a

Le produit scalaire est bilinéaire symétrique.

**Démonstration**

La symétrie est évidente, et permet de déduire la bilinéarite de la linéarité par rapport à la première variable.

Pour cette dernière, soit $\vec{u},\vec{u}',\vec{v}$ trois vecteurs de $E$, $\lambda,\lambda'\in\mathbb{R}$. On cherche à montrer :

$$(\lambda\vec{u}+\lambda'\vec{u}')\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})+\lambda'(\vec{u}'\cdot\vec{v}).$$

On écarte le cas évident où $\vec{v}$ est nul.

L'idée consiste à se ramener à un produit scalaire dans un plan, cas pour lequel la formule a déjà été prouvée.

Notons $p$ le projecteur orthogonal sur la droite vectorielle dirigée par $\vec{v}$ (voir page 175). Il est clair que pour tout $\vec{w}\in E$ : $p(\vec{w})\cdot\vec{v} = \vec{w}\cdot\vec{v}$. Comme $p$ est en outre linéaire, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{u}+\lambda'\vec{u}')\cdot\vec{v} &= (p(\lambda\vec{u}+\lambda'\vec{u}'))\cdot\vec{v}\\ &= (\lambda p(\vec{u})+\lambda' p(\vec{u}'))\cdot\vec{v}\\ &= \lambda(p(\vec{u})\cdot\vec{v})+\lambda'(p(\vec{u}')\cdot\vec{v})\\ &= \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})+\lambda'(\vec{u}'\cdot\vec{v}),\end{aligned}$$

d'où la linéarité par rapport à la première variable, puis le résultat demandé.

□

**Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace)**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $E$ :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, .$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2.b

**Démonstration**

Conséquence immédiate de la définition. □

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $E$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

**Proposition (Expression du produit scalaire en base orthonormée dans l'espace)**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $E$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $E$. Soient $x_u, y_u, z_u$ et $x_v, y_v, z_v$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

2.c

**Démonstration**

Cela résulte de la bilinéarité du produit scalaire, et du fait que $\mathcal{B}$ soit orthonormée : □

Ne pas oublier que ces formules ne sont *a priori* valables que dans le cas d'une base orthonormée. Remarquer qu'il est inutile de supposer la base directe (la valeur d'un produit scalaire ne dépend pas de l'orientation).

**Corollaire (Décomposition dans l'espace en BON)**

Soit $\vec{u} \in E$, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée. On a :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}$$

2.d

**Démonstration**

Soit $(x, y, z)$ le triplet de composantes de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}$ :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

En prenant le produit scalaire avec $\vec{i}$, on obtient, puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée : $(\vec{u} \cdot \vec{i}) = x$. De même pour $y$ et $z$. □

## 3. Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une notion propre à l'espace orienté $E$ (nous n'avons pas parlé de produit vectoriel dans le plan), en tout cas à ce stade du cours. Comme son nom l'indique, le résultat de ce produit est un vecteur, ce qui fait de l'application produit vectoriel une loi de composition interne sur $E$.

### 3.1. Définition

**Définition (Vecteur directement orthogonal à un couple de vecteurs non colinéaires)**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
Un vecteur $\overrightarrow{t}$ est dit *directement orthogonal* au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ s'il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, et si $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{t})$ est une base directe.

3.a

Le vecteur $\overrightarrow{t}$ est donc directement orthogonal au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si $-\overrightarrow{t}$ est directement orthogonal au couple $(\vec{v}, \vec{u})$, si et seulement si $-\overrightarrow{t}$ est directement orthogonal au couple $(-\vec{u}, \vec{v})$.

**Définition (Produit vectoriel)**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, on appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ou de $\vec{u}$ par $\vec{v}$), et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur de norme $\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin((\vec{u}, \vec{v}))$, directement orthogonal au couple $(\vec{u}, \vec{v})$. Sinon, le produit vectoriel est nul.

3.b

Il apparaît ainsi dès la définition le lien entre colinéarité et produit vectoriel : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul.

On montre également facilement l'antisymétrie du produit vectoriel à l'aide de cette définition :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

**Illustration**

**Exemple (Produit vectoriel et BOND)**

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe, alors :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

i

**Illustration**

### 3.2. Propriétés du produit vectoriel. Expression dans un repère orthonormal direct

Comme nous l'avons dit, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{0}$. En particulier, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{0}$

Trois points $A, B, C$ sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

Le produit vectoriel peut donc être utilisé pour déterminer des équations de droites.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{E}$,

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|)^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 .$$

**Proposition (Bilinéarité et antisymétrie du produit vectoriel)** 3.a

Le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique.

**Démonstration**

Voir la démonstration en fin de chapitre. □

**Proposition (Expression du produit vectoriel en base orthonormée directe)** 3.b

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}$, et si $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ sont les composantes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont

$$\begin{vmatrix} y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix}$$

**Démonstration**

C'est une conséquence facile de la bilinéarité, de l'antisymétrie, et de l'exemple page 161. □

Comme le produit vectoriel est une notion dépendant de l'orientation, il n'est pas étonnant d'obtenir une formule valable en base orthonormée *directe* et non quelconque.

**Exercice (Produit vectoriel)** 2

Faire un ou deux exercices de TD sur le produit vectoriel.

## 4. Déterminant ou produit mixte

Dans l'espace, seul le déterminant de trois vecteurs a un sens. Comme dans le plan, le résultat d'un déterminant est un nombre réel. Le déterminant dans l'espace exprime bien le caractère coplanaire de trois vecteurs (ou de quatre points).

### 4.1. Définition. Expression en repère orthonormal direct

**Définition (Produit mixte)** — 4.a

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $E$. Le *déterminant* (ou *produit mixte*) des trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ [a], noté $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, ou $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, est le nombre réel défini par : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

*a*. Il vaudrait mieux dire du triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

**Proposition (Expression du produit mixte en base orthonormée directe)** — 4.a

Soient $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$, $\vec{w}(x_w, y_w, z_w)$ trois vecteurs du plan donnés avec leurs composantes dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

**Démonstration**

$\square$

### 4.2. Propriétés du déterminant

**Proposition (Trilinéarité et antisymétrie du produit mixte)** — 4.b

Le déterminant est trilinéaire et antisymétrique.

Démonstration

□

Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs de $E$, alors $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ s'interprète comme le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ :

Illustration

Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul : le déterminant dans l'espace sera utile pour déterminer des équations de plans.

Exercice (Determinant dans l'espace)

Faire des exercices de TD sur le déterminant.

3

## 5. Droites et plans

### 5.1. Plans

Le plus souvent, un plan est donné par un point et un vecteur normal non nul (*i.e.* un vecteur (non nul) orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où $A$ et $B$ sont deux points du plan), un point et deux vecteurs indépendants (on dit que le plan est *dirigé* par ces deux vecteurs), ou trois points non alignés.

On se fixe pour la suite un vecteur normal non nul $\vec{n}(a, b, c)$, deux vecteurs indépendants $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$ et $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$, et trois points $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$, donnés avec leurs coordonnées dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si $\mathcal{P}$ est donné par $\vec{n}$ et $A$, une équation de $\mathcal{P}$ est donnée par la caractérisation suivante d'appartenance à $\mathcal{P}$ : $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, d'où l'équation :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

Réciproquement, une équation du type

$$ax + by + cz + d = 0$$

dans laquelle les trois réels $a, b, c$ ne sont pas tous nuls, définit un plan, dont un vecteur normal est $(a, b, c)$.

**Définition (Équation normale de plan)** 5.a

On appelle *équation normale* de $\mathcal{P}$ une équation du type

$$ax + by + cz = p$$

dans laquelle $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Une équation normale correspond donc à la donnée d'un vecteur normal unitaire de $\mathcal{P}$.

Si $\mathcal{P}$ est donné par $A$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, une équation de $\mathcal{P}$ est donnée par la caractérisation suivante d'appartenance à $\mathcal{P}$ : $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, d'où l'équation :

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & x - x_A \\ y_u & y_v & y - y_A \\ z_u & z_v & z - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Si $\mathcal{P}$ est donné par $A$, $B$ et $C$, une équation de $\mathcal{P}$ est donnée par la caractérisation suivante d'appartenance à $\mathcal{P}$ : $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$, ce qui nous ramène au cas précédent.

La donnée de $A$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ permet de donner une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda x_u + \mu x_v \\ y = y_A + \lambda y_u + \mu y_v \\ z = z_A + \lambda z_u + \mu z_v \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

**Exercice (Équation de plan)** 4

Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, 1)$ et $C(2, 1, -2)$.

### 5.2. Droites

Le plus souvent, une droite est donnée par un point et un vecteur directeur, deux points distincts (ce qui revient essentiellement au même), ou encore comme intersection de deux plans sécants.

Si une droite $\mathcal{D}$ est donnée par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, on en obtient directement une équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \\ z = z_A + \lambda\gamma \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Pour en obtenir une équation cartésienne, c'est-à-dire comme intersection de deux plans sécants, il suffit de caractériser l'appartenance d'un point $M$ de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{D}$ par : $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{0}$, ce qui donne au moins deux équations non proportionnelles, et donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

**Exercice (Équation de droite)** 5

Donner un système d'équations cartésiennes pour la droite passant par $A(1, 2, 0)$ et $B(-2, -2, 1)$.

**Définition (Droite parallèle à un plan)** 5.b

On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ est *parallèle* à $\mathcal{P}$ si et seulement si tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$.

**Proposition (Droite parallèle à un plan)** 5.a

Une droite parallèle à un plan est contenue dans le plan, ou en est disjointe.

**Démonstration**

Si l'intersection n'est pas vide, et possède donc un point $M$, alors tout point de la droite s'écrira $M + \lambda \vec{u}$, où $\lambda$ est un réel et $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite. Comme $\lambda \vec{u}$ est dans la direction du plan, la droite est contenue dans le plan.

$\square$

**Proposition (Droite non parallèle à un plan)** 5.b

L'intersection d'un plan et d'une droite non parallèle à ce plan est un singleton.

**Démonstration**

*Première démonstration* : soit $\mathcal{D}$ une droite, non parallèle à un plan $\mathcal{P}$. Prenons un plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}$. Ce plan n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$, car $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$. L'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est donc une droite $\mathcal{D}'$. Cette droite n'est pas parallèle à $\mathcal{D}$ puisque cette dernière n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$. Comme ce sont deux droites du plan $\mathcal{P}'$, elles sont sécantes, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est un singleton. Or

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = (\mathcal{D} \cap \mathcal{P}') \cap \mathcal{P} = \mathcal{D} \cap (\mathcal{P}' \cap \mathcal{P}) = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}',$$

et le résultat est prouvé.

$\square$

Donnons deux autres démonstrations, plus constructives, mais plus calculatoires. On se place dans un repère orthonormal $\mathcal{R}$. Dans la suite, $ax + by + cz + d = 0$ est une équation de $\mathcal{P}$. Un vecteur non nul de $\mathcal{P}$ est donc $\vec{n}(a, b, c)$.

**Démonstration**

*Deuxième démonstration* : supposons $\mathcal{D}$ est donnée par une équation paramétrique, c'est-à-dire par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$, l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de $\mathcal{P}$ tels qu'il existe un réel $\lambda$, avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + \lambda x_u \\ y & = & y_A + \lambda y_u \\ z & = & z_A + \lambda z_u \end{array} \right.$$

Or les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}(a, b, c)$ ne sont pas orthogonaux, car $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$. Par conséquent, le nombre $ax_u + by_u + cz_u$ n'est pas nul, et l'unique valeur convenable de $\lambda$ est donc :

$$\frac{-d - ax_A - by_A - cz_A}{ax_u + by_u + cz_u}$$

L'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est bien un singleton (dont nous pouvons expliciter les coordonnées).

$\square$

**Démonstration**

*Troisième démonstration* : supposons $\mathcal{D}$ est donnée par une équation cartésienne, *i.e.* comme intersection de deux plans :

$$\begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' &= 0 \end{cases}$$

Un point $M(x, y, z)$ est commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' &= 0 \end{cases}$$

Si l'on définit les deux vecteurs $\vec{n}'(a', b', c')$ et $\vec{n}''(a'', b'', c'')$, on constate que $\vec{n}' \wedge \vec{n}''$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, et n'est donc pas dans la direction de $\mathcal{P}$. Ainsi,

$$\det(\vec{n}, \vec{n}', \vec{n}'') = \det(\vec{n}', \vec{n}'', \vec{n}) = (\vec{n}' \wedge \vec{n}'') \cdot \vec{n} \neq 0$$

Le système considéré est donc de Cramer, et l'intersection est bien un singleton.

□

À retenir :
- comment déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan (prendre une équation paramétrique pour la droite, cartésienne pour le plan) ;
- comment obtenir un vecteur directeur d'une droite donnée par un système d'équations cartésiennes.

**Exercice (Vecteur directeur d'une droite)** 6

Donner une équation paramétrique de la droite, intersection des plans $\mathcal{P} : x+y+z = 1$ et $\mathcal{P}' : x - 2y + 3z = 2$.

## 5.3. Distance d'un point à un plan, à une droite

**Définition (Distance d'un point à un plan)** 5.c

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $M$ un point de $\mathcal{E}$. Soit $M'$ le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{P}$. La *distance* de $M$ à $\mathcal{P}$, notée $d(M, \mathcal{P})$, est la longueur $MM'$.

**Caractérisation de la distance d'un point à un plan** 5.1

La distance de $M$ à un plan $\mathcal{P}$ est la plus petite distance possible entre $M$ et un point de $\mathcal{P}$.

Illustration

Proposition (Formules de distance d'un point à un plan)

Soit $\mathcal{P}$ un plan donné par un point $A$ et un vecteur normal non nul $\vec{n}$ :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}$$

En particulier, si $ax+by+cz+d=0$ est une équation de $\mathcal{P}$, et si $(x_M, y_M, z_M)$ est le triplet de coordonnées de $M$, alors :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

5.c

Démonstration

□

Exercice (Distance d'un point à un plan)

Calculer la distance de $M(1,2,1)$ au plan passant par $A(1,1,0)$, $B(-1,1,2)$ et $C(1,0,3)$.

7

La formule est donc particulièrement agréable dans le cas où l'équation de $\mathcal{P}$ est normale.

**Définition (Distance d'un point à une droite dans l'espace)**

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $M$ un point de $\mathcal{E}$. Soit $M'$ le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{D}$. La *distance* de $M$ à $\mathcal{D}$, notée $d(M, \mathcal{D})$, est la longueur $MM'$.

5.d

**Proposition (Distance d'un point à une droite dans l'espace)**

La distance de $M$ à $\mathcal{D}$ est la plus petite distance possible entre $M$ et un point de $\mathcal{D}$.

5.d

**Illustration**

**Proposition (Formule de distance d'un point à une droite dans l'espace)**

Soit $\mathcal{D}$ une droite donnée par un point $A$ et un vecteur directeur $\vec{u}$. Alors :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|}$$

5.e

**Démonstration**

$\square$

**Exercice (Distance d'un point à une droite)** 8

Calculer la distance de $M(1,-1,2)$ à la droite passant par $A(2,1,4)$ et $B(-1,2,3)$.

### 5.4. Perpendiculaire commune

**Définition (Droites perpendiculaires)** 5.e

Deux droites sont dites *orthogonales* si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, et *perpendiculaires* si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient deux droites $D$ et $D'$ non parallèles, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, passant respectivement par $A$ et $A'$.

**Proposition (Perpendiculaire commune)** 5.f

Il existe une unique droite perpendiculaire à $D$ et à $D'$.

Nous notons $\Delta$ cette unique droite.

**Définition (Perpendiculaire commune)** 5.f

Dans ce contexte, $\Delta$ est la perpendiculaire commune à $D$ et $D'$.

**Démonstration**

$\Delta$ est nécessairement dirigée par $\vec{u} \wedge \vec{u}'$, et est donc intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, contenant respectivement $A$ et $A'$, et de directions respectives $(\vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}')$ et $(\vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}')$. Réciproquement, on vérifie que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont pour intersection une droite, perpendiculaire à $D$ et à $D'$.

□

Illustration

Définition (Distance entre deux droites)

Soit $H$ (resp. $H'$) le point de concours de $D$ et $\Delta$ (resp. de $D'$ et $\Delta$). La *distance* $d(D, D')$ entre les deux droites $D$ et $D'$ est la longueur $HH'$.

5.g

Caractérisation de la distance entre deux droites

C'est la plus petite distance entre deux points de $D$ et $D'$. (De plus, c'est en ces deux points uniquement que l'on atteint cette distance minimale, car $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'} = \overrightarrow{0}$ implique $H = M$ et $H' = M'$ par non colinéarité).

5.2

Illustration

Proposition (Formule pour la distance entre deux droites)

$$d(D, D') = \frac{|\det(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|} = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

5.g

Exercice (Perpendiculaire commune)

Trouver une équation de la perpendiculaire commune à

$$(D) : \begin{cases} 2x - y - z & = & 3 \\ x + y - 3z & = & -2 \end{cases} \text{ et } (D') : \begin{cases} 3x - y + z & = & -1 \\ x - y + 4z & = & 2 \end{cases}$$

Calculer la distance entre $(D)$ et $(D')$.

9

## 6. Sphères

Définition (Sphère)

Soit $\Omega \in \mathcal{E}$, et $R > 0$. On appelle *sphère* et on note $\mathcal{S}(\Omega, R)$ de *centre* $\Omega$ et de *rayon* $R \geqslant 0$ l'ensemble :

$$\left\{M \in \mathcal{E}, \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = R\right\}$$

Le nombre $2R$ est appelé *le diamètre* de la sphère.
Si $M$ et $M'$ sont deux points de la sphère $\mathcal{S}(\Omega, R)$, symétriques par rapport à $\Omega$, alors le segment $[MM']$ est appelé *un diamètre* de $\mathcal{S}(\Omega, R)$.

6.a

Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormal, notons $(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ le triplet de coordonnées de $\Omega$ dans $\mathcal{R}$ :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

est une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}(\Omega, R)$.

**Équation cartésienne de sphère**

Toute sphère admet une équation cartésienne du type :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Réciproquement, une telle équation définit une sphère, un singleton, ou $\emptyset$.

6.1

**Proposition (Intersection d'une sphère et d'un plan)**

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre $\Omega$, de rayon non nul $R$. Soit $\mathcal{P}$ un plan. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{P}$ est :

- vide si $d(\Omega, \mathcal{P}) > R$ ;
- un unique point si $d(\Omega, \mathcal{P}) = R$ (on dit que $\mathcal{P}$ est *tangent* à $\mathcal{S}$) ;
- un cercle non réduit à un point si $d(\Omega, \mathcal{P}) < R$ (de centre $H$, projeté orthogonal de $\Omega$ sur $\mathcal{P}$, de rayon $\sqrt{R^2 - d(\Omega, \mathcal{P})^2}$).

6.a

**Démonstration**

Notons $d$ la distance de $\Omega$ à $\mathcal{P}$.
On peut se placer dans un repère orthonormal direct dans lequel $\mathcal{P}$ est d'équation $z = 0$, et $\mathcal{S}$ est d'équation $x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2$.
L'intersection est d'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & R^2 - d^2 \end{array} \right. ,$$

d'où le résultat.

$\square$

**Proposition (Intersection d'une sphère et d'une droite)**

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre $\Omega$, de rayon non nul $R$. Soit $\mathcal{D}$ une droite. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{D}$ est :

- vide si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$ ;
- un unique point si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$ ;
- deux points distincts si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$.

6.b

**Démonstration**

En se plaçant dans un plan comprenant $\Omega$ et contenant $\mathcal{D}$, on obtient le résultat voulu.

$\square$

**Proposition (Intersection de deux sphères non concentriques)**

Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux sphères non concentriques de centres $\Omega$ et $\Omega'$, de rayons non nuls $R$ et $R'$. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{S}'$ est :

- vide si $\Omega\Omega' > R + R'$ ou si $|R - R'| > \Omega\Omega'$ ;
- un unique point si $\Omega\Omega' = R + R'$ (sphères *tangentes extérieurement*), ou si $|R - R'| = \Omega\Omega'$ (sphères *tangentes intérieurement*) ;
- un cercle si $|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R'$.

6.c

**Démonstration**

On se place dans un repère orthonormal dans lequel $\mathcal{S}$ est d'équation $x^2+y^2+z^2=R^2$ et $\mathcal{S}'$ est d'équation $(x-d)^2+y^2+z^2=(R')^2$. L'intersection cherchée est d'équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2xd & = & R^2+d^2-(R')^2 \\ x^2+y^2+z^2 & = & R^2 \end{array}\right.,$$

l'intersection est donc vide, un singleton, ou un cercle de centre $((R^2+d^2-(R')^2)/(2d),0,0)$. En se plaçant dans un plan contenant $(\Omega\Omega')$, par exemple celui d'équation $z=0$, on obtient le résultat voulu.

□

**Exercice** (Intersection d'une sphère et d'un plan) 10

Faire l'exercice 15.

## 7. Linéarité des projecteurs orthogonaux dans $E$

Soit $P$ un plan vectoriel dans $E$ (*i.e.* un ensemble de combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires donnés). Soit $\vec{v}$ un vecteur de $E$. On appelle *projeté orthogonal* de $\vec{v}$ sur $P$ l'unique vecteur $\vec{w}$ du plan $P$ tel que $\vec{v}-\vec{w}$ soit orthogonal à tout vecteur de $P$. L'application de $E$ dans lui-même qui à un vecteur de $E$ associe son projeté orthogonal sur $P$ est appelée *projecteur orthogonal sur $P$*. Notons-la $p$.

**Lemme (Linéarité de $p$)** 7.a

L'application $p$ est linéaire.

**Démonstration**

Soient en effet deux vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ de $\mathcal{E}$, et deux scalaires $\lambda_1, \lambda_2$. Le vecteur $\lambda_1 p(\vec{v}_1)+\lambda_2 p(\vec{v}_2)$ est un vecteur de $P$ (puisque c'est une combinaison linéaire de tels vecteurs), et, pour tout vecteur $\vec{k}$ de $P$ :

$$\begin{aligned}
\vec{k}\cdot((\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2)-(\lambda_1 p(\vec{v}_1)+\lambda_2 p(\vec{v}_2)) &= \vec{k}\cdot(\lambda_1(\vec{v}_1-p(\vec{v}_1))+\lambda_2(\vec{v}_2-p(\vec{v}_2))) \\
&= \lambda_1\vec{k}\cdot(\vec{v}_1-p(\vec{v}_1))+\lambda_2\vec{k}\cdot(\vec{v}_2-p(\vec{v}_2)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda_1 p(\vec{v}_1)+\lambda_2 p(\vec{v}_2)$ est le projeté orthogonal de $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2$ sur $\mathcal{P}$ :

$$p(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2)=\lambda_1 p(\vec{v}_1)+\lambda_2 p(\vec{v}_2)$$

L'application $p$ est bien linéaire.

□

On définit de même un projecteur orthogonal sur une droite vectorielle, qui est également linéaire.

## 8. Bilinéarité du produit vectoriel

**Lemme (Linéarité d'une rotation vectorielle dans le plan)** 8.a

Une rotation vectorielle dans un plan est linéaire.

**Démonstration**

Une telle rotation $r$ s'exprime, de manière complexe, comme multiplication par $e^{i\theta}$ (où $\theta$ est une mesure de l'angle de $r$). Si $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$, et si $\lambda_1$, $\lambda_2$ sont deux réels, alors l'affixe de $r(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2)$ est

$$e^{i\theta}(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)=\lambda_1 e^{i\theta}z_1+\lambda_2 e^{i\theta}z_2,$$

et l'on a donc :

$$r(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2)=\lambda_1 r(\vec{v}_1)+\lambda_2 r(\vec{v}_2).$$

L'application $r$ est bien linéaire.

□

**Démonstration**

Du fait que l'application produit vectoriel soit bilinéaire et antisymétrique.
Nous avons déjà établi l'antisymétrie. Pour prouver la bilinéarité, il suffit de montrer la linéarité du produit vectoriel par rapport à sa seconde variable, c'est-à-dire que, étant donné un vecteur $\vec{u}$ de $E$, l'application $\varphi_{\vec{u}} : \vec{v} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est linéaire.

(1) Le résultat est clair si $\vec{u}$ est le vecteur nul, car alors l'application $\varphi_{\vec{u}}$ est nulle.

(2) Fixons un vecteur $\vec{u}$ unitaire, et montrons la linéarité de $\varphi_{\vec{u}}$ dans ce cas. Notons $P$ le plan vectoriel constitué des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de ce plan, telle que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{u})$ soit orthonormée directe. Nous orientons ce plan $P$ par la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Supposons que $\vec{v}$ soit un vecteur non nul de $P$. Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$, et de même norme que $\vec{v}$ (car $\vec{u}$ est supposé unitaire, et l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est de mesure $\frac{\pi}{2}$). Il s'obtient donc à partir de $\vec{v}$ en lui appliquant une rotation vectorielle $r$, de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan orienté $P$. Notons que si $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, il demeure que $\vec{u} \wedge \vec{v} = r(\vec{v}) (= \overrightarrow{0})$.

Si maintenant $\vec{v}$ est un vecteur quelconque de $E$, notons $p$ le projecteur orthogonal sur $P$. Il est clair que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge p(\vec{v})$ :

(a) si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les deux termes valent $\overrightarrow{0}$ ;

(b) si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et que $\theta$ est la mesure d'angle entre ces deux vecteurs, alors $p(\vec{v})$ est de norme $\|\vec{v}\| \sin(\theta)$, et un vecteur est directement orthogonal au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si il est directement orthogonal au couple $(\vec{u}, p(\vec{v}))$. Les deux produits vectoriels ont donc même norme, même direction, et même sens : ils sont égaux.

Ainsi, d'après les lemmes, nous pouvons écrire, pour tous vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ de $E$, tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\vec{u}}(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) &= \vec{u} \wedge (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) \\
&= \vec{u} \wedge (p(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2)) \\
&= \vec{u} \wedge (\lambda_1 p(\vec{v}_1) + \lambda_2 p(\vec{v}_2)) \\
&= r(\lambda_1 p(\vec{v}_1) + \lambda_2 p(\vec{v}_2)) = \lambda_1 r(p(\vec{v}_1)) + \lambda_2 r(p(\vec{v}_2)) \\
&= \lambda_1 \vec{u} \wedge p(\vec{v}_1) + \lambda_2 \vec{u} \wedge p(\vec{v}_2) \\
&= \lambda_1 \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{u} \wedge \vec{v}_2 \\
&= \lambda_1 \varphi_{\vec{u}}(\vec{v}_1) + \lambda_2 \varphi_{\vec{u}}(\vec{v}_2)
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $\varphi_{\vec{u}}$ est bien linéaire [a].

(3) Supposons maintenant $\vec{u}$ non nul, mais plus nécessairement unitaire. Remarquons que pour tout vecteur $\vec{v}$ (par définition du produit vectoriel) :

$$\varphi_{\vec{u}}(\vec{v}) = \|\vec{u}\| \, \varphi_{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}}(\vec{v})$$

Il est alors facile de déduire la linéarité de $\varphi_{\vec{u}}$ de celle de $\varphi_{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}}$.

Finalement, le produit vectoriel est bien linéaire en sa seconde variable.
Comme il est en outre antisymétrique, il est bien bilinéaire.

[a] plus généralement, la composée licite d'applications linéaires est linéaire

□

## 9. Feuille de TD 7 : Géométrie élémentaire de l'espace

$E$ désigne l'espace euclidien (de dimension 3), $\mathcal{E}$ l'espace affine de dimension 3. Ils sont implicitement munis du repère et de la base canoniques, définissant une orientation de l'espace.

### 9.1. Produit vectoriel, produit mixte

**Exercice 1 (Droit à la paresse)** 0

Montrer, pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $E$ :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

**Exercice 2 (Relation vectorielle dans l'espace)** 0

Montrer, pour tous points $A, B, C, M$ de $\mathcal{E}$ :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

**Exercice 3 (Division vectorielle)** 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $E$. Résoudre l'équation $\vec{u} \wedge \overrightarrow{x} = \vec{v}$ d'inconnue $\overrightarrow{x}$ vecteur de $E$.

**Exercice 4 (Formule du double produit vectoriel)** 1

Montrer, pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $E$ la *formule du double produit vectoriel* :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

En déduire, pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathcal{E}$, la formule suivante :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \overrightarrow{0}$$

**Indication :** afin d'éviter de fastidieux calculs, on peut tenter de réduire au maximum la vérification, en remarquant que la première assertion affirme l'égalité de deux applications *trilinéaires*.

**Exercice 5 (Formule vectorielle dans un triangle de l'espace)** 2

Soit $ABC$ un vrai triangle, $I, J, K$ les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Montrer, pour tout point $M$ de $\mathcal{E}$ :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}.$$

et

$$[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}].$$

**Indication :** $I$ est l'isobarycentre de $B$ et $C$, on peut donc réexprimer le vecteur $\overrightarrow{IA}$. De même pour $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{KC}$. Utiliser alors la bilinéarité (et l'antisymétrie) du produit vectoriel.

### 9.2. Droites, distances, aires, volumes

**Exercice 6 (Aires et volumes dans l'espace)** 0

**1** Calculer l'aire du triangle de $\mathcal{E}$ de sommets $A(1,2,-1)$, $B(-1,1,0)$, $C(0,1,2)$.
**2** Calculer le volume du tétraèdre de $\mathcal{E}$ de sommets $A(1,2,3)$, $B(3,-1,-1)$, $C(2,0,1)$, $D(1,1,2)$.
**Indication :** on rappelle que le volume d'un tétraèdre de base $\mathcal{A}$ et de hauteur $h$ est $\frac{1}{3}\mathcal{A}h$.

**Exercice 7 (Distance d'un point à une droite dans l'espace)** 0

Calculer la distance du point $A(1,1,1)$ à la droite

$$(D): \quad \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y+z &= -1 \end{cases}$$

**Exercice 8 (Équation de perpendiculaire commune, distance entre deux droites)** 0

**1** Trouver une équation de la perpendiculaire commune à

$$(D): \begin{cases} x-y+z+1 &= 0 \\ 2x+y-z &= 0 \end{cases} \quad \text{et } (D'): \begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ 2x-2y-2z-1 &= 0 \end{cases}$$

**2** Calculer la distance entre $(D)$ et $(D')$.

**Exercice 9 (Droite à équidistance de deux points (X MP 08))** 3

Soit $M$ et $N$ deux points distincts de $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$ une droite équidistante de $M$ et $N$. Soit $\Delta$ la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $(MN)$. Montrer que $\Delta$ est une médiatrice de $[MN]$.

**Exercice 10 (Bimédianes d'un tétraèdre (X MP 08))** 4

Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite passant par les milieux de deux arêtes opposées.
**1** Montrer que les trois bimédianes d'un tétraèdre sont concourantes.
**2** Réciproquement, soient trois droites concourantes de l'espace. Étudier l'existence de tétraèdres tels que ces trois droites joignent les milieux des arêtes opposées.

### 9.3. Plans

**Exercice 11 (Équations de plans)** 0

Vérifier que les points $A(3,2,-1)$, $B(4,-1,3)$ et $C(-1,3,2)$ ne sont pas alignés. Former une équation cartésienne du plan affine qui les contient.

**Exercice 12 (Famille de plans dans l'espace)** 0

On considère la famille de plans

$$(P_m : m^2x + (2m-1)y + mz = 3)_{m\in\mathbb{R}}.$$

Déterminer le plan ou les plans $P_m$ dans chacun des cas suivants :
(a) $A(1,1,1) \in P_m$ ;
(b) $B(-1,-2,6) \in P_m$ ;
(c) $C(-1,0,1) \in P_m$ ;
(d) $\vec{v}(1,1,1)$ est dans la direction de $P_m$ ;
(e) $\vec{n}(0,1,0)$ est normal à $P_m$.
Montrer qu'il existe un unique point $R$ appartenant à tous les plans $P_m$.

**Exercice 13 (Symétrie orthogonale dans l'espace)** 3

Donner une expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-z=1$.

**Exercice 14 (Paramètre pour que trois plans contiennent une même droite)** 4

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $m$ pour que les trois plans suivants contiennent une même droite : $(P) : x+my-z+1=0$, $(P') : (m+1)x+3y+4z-2=0$ et $(P'') : y+(2m+4)z-(2m+2)=0$.

## 9.4. Sphères, cercles

**Exercice 15 (Intersection d'une sphère et d'un plan)** 0

Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+5=0$ et du plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x-y+3z-2=0$.

**Exercice 16 (Bases orthonormées d'un certain type)** 2

Montrer que l'ensemble des triplets $(a,b,c)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $((a,b,c),(b,c,a),(c,a,b))$ soit orthonormée est la réunion de deux cercles.

**Exercice 17 (Plans tangents à une sphère)** 3

Calculer la plus petite distance entre un point de la sphère $S : x^2+y^2+z^2=1$ et un point du plan $P : 3x+2y-z=9$. Trouver des équations des deux plans tangents à $S$ et parallèles à $P$.

### Exercice 18 (Sphère contenant deux cercles) — 3

Trouver la sphère contenant les cercles

$$\mathcal{C}:\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y^2+z^2-4y & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \mathcal{C}':\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ x^2+y^2-2x-4y+2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

### Exercice 19 (Sphère avec contraintes de tangence) — 4

Former une équation cartésienne de la sphère tangente en $A(1,2,1)$ à $\mathcal{D}:\left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z & = & 1 \\ 2x-y-3z & = & -3 \end{array}\right.$ et tangente en $A'(1,-1,-2)$ à $\mathcal{D}':\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+2z & = & -3 \\ x-y-z & = & 4 \end{array}\right.$ .

CHAPITRE VIII

# Courbes paramétrées

## Sommaire



Le but de ce chapitre est d'introduire un formalisme pour définir et étudier des trajectoires dans un plan. Il est donc d'un intérêt physique – et plus précisément cinématique– évident. Pour cette raison, nous emploierons très souvent des termes issus de cette branche (mobile, vitesse, accélération). Loin d'être nuisible, cet aspect cinématique permet d'éclairer les notions et propriétés ici étudiées.

Pour motiver l'introduction des courbes paramétrées, on peut constater l'insuffisance des fonctions réelles d'une variable réelle pour décrire une trajectoire. Le graphe d'une telle fonction ne peut pas se « croiser lui-même », deux points distincts ne peuvent avoir même abscisse, etc.

Pour pallier ces défauts, on utilise des fonctions vectorielles. Nous en avons vu quelques exemples, lors des paramétrages de droites, de segments, de cercles, et même d'arcs d'hyperboles. Avant d'entrer dans le vif du sujet, je voudrais insister sur la différence entre un arc et son support : l'arc est une fonction (du temps), ce qui permet d'y lire le parcours d'un point mobile et les notions qui y sont liées (vitesse, accélération, point de départ, etc.), tandis que le support est la visualisation directe du lieu de parcours du point mobile : on ne sait pas où la trajectoire commence, ni même si elle s'arrête en temps fini, par exemple.

Dans tout ce chapitre les intervalles considérés seront d'intérieur non vide, et $I$ désignera un intervalle. Physiquement, $I$ est un intervalle temporel. Le plan euclidien est identifié à $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un repère orthonormal.

## 1. Préliminaires sur les fonctions vectorielles

**Définition (Fonction vectorielle)** 1.a

Une fonction définie sur $I$ et à valeurs dans le plan $\mathbb{R}^2$ est appelée *fonction vectorielle*. On peut donc écrire une telle fonction $f$ sous la forme

$$f = (f_x, f_y),$$

où $f_x$ et $f_y$ sont deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$. Les fonctions $f_x$ et $f_y$ sont appelées *fonctions coordonnées* de $f$ (respectivement *première* et *seconde*).

Dans la suite, $f = (f_x, f_y)$ désigne une fonction vectorielle de $I$ dans $\mathbb{R}^2$, $l = (l_x, l_y) \in \mathbb{R}^2$ et $t_0$ est un point de $I$ ou une extrémité de $I$.

**Définition (Limite d'une fonction vectorielle)**

On dit que $f$ *tend vers le vecteur $l$* en $t_0$ (ou qu'elle admet $l$ pour limite en $t_0$) si $\|f-l\|$ tend vers 0 en $t_0$.
Dans le cas où $t_0 \in I$, et si $f$ admet $l$ pour limite en $t_0$, on a nécessairement $l = f(t_0)$, et on dit alors dans ce cas que $f$ est *continue en $t_0$*.
On dit que $f$ est *continue sur $I$* si elle est continue en chaque point de $I$.

1.b

La fonction vectorielle $f$ tend vers $l$ en $t_0$ si et seulement si $f_x$ et $f_y$ tendent respectivement vers $l_x$ et $l_y$ en $t_0$ :

**Définition (Dérivabilité d'une fonction vectorielle)**

$f$ est dite *dérivable en $t_0 \in I$* si ses deux fonctions coordonnées le sont. La *dérivée* $f'(t_0)$ de $f$ en $t_0$ est alors :

$$f'(t_0) = (f'_x(t_0), f'_y(t_0)).$$

$f$ est dite *dérivable sur $I$* si elle l'est en tout point de $I$. Dans ce cas, on peut définir la fonction dérivée de $f$, notée $f'$.

1.c

Si on identifie le plan à $\mathbb{C}$, la fonction $f$ peut être vue comme une fonction de $I$ dans $\mathbb{C}$. Les notions de limite coïncident bien. De même pour les notions de continuité et de dérivabilité.

**Dérivées successives d'une fonction vectorielle**

On définit par récurrence la dérivabilité de $f$ à l'ordre $k \in \mathbb{N}$ et la dérivée $f^{(k)}$ de $f$ à l'ordre $k$ :

1.1

**Définition (Classe d'une fonction à valeurs réelles ou vectorielles)**

Pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction définie sur $I$ et à valeurs réelles ou vectorielles est de *classe $\mathcal{C}^k$* si elle est $k$ fois dérivable, et si sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est continue sur $I$.
On la dit de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est indéfiniment dérivable, c'est-à-dire dérivable à tout ordre $k \in \mathbb{N}$.

1.d

$f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si $f_x$ et $f_y$ le sont.

**Proposition (Dérivation d'un produit scalaire)**

Notons le produit scalaire de deux vecteurs $U$ et $V$ de $\mathbb{R}^2$ par $< U, V >$. Soit $f$ et $g$ deux fonctions vectorielles sur $I$, dérivables sur $I$. L'application

$$t \mapsto < f(t), g(t) >$$

de $I$ dans $\mathbb{R}$ est alors dérivable sur $I$, et :

$$\forall t \in I, \quad (< f, g >)'(t) = < f'(t), g(t) > + < f(t), g'(t) >$$

1.a

**Démonstration**

□

**Corollaire (Dérivée de la norme)**

On suppose $f$ dérivable et ne s'annulant pas. L'application

$$\|f\| \ : t \mapsto \|f(t)\|$$

est alors dérivable sur $I$, et $\|f\|' = \frac{< f, f' >}{\|f\|}$.

1.b

**Démonstration**

□

**Exemple (Mouvement circulaire)**

Si $\|f\|$ est constant, alors, pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

i

**Proposition (Dérivée du déterminant)** 1.c

Soit $f$ et $g$ deux fonctions vectorielles sur $I$, dérivables sur $I$. L'application

$$\det(f,g) \;: t \mapsto \det(f(t), g(t))$$

de $I$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable, et :

$$\forall t \in I, \quad (\det(f,g))'(t) = \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))$$

**Démonstration**

□

## 2. Courbes planes paramétrées

### 2.1. Définition et premières propriétés

**Définition (Courbe paramétrée)** 2.a

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On appelle *courbe (plane) paramétrée (ou arc paramétré)* de classe $\mathcal{C}^k$ toute fonction vectorielle $f$ sur $I$ de classe $\mathcal{C}^k$ (on le note parfois $(I, f)$).
Soit $t \in I$, $M(t)$ le point de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM(t)} = f(t)$. Le point $M(t)$ est appelé *point de paramètre (ou d'instant)* $t$ de la courbe paramétrée $f$.
L'image $f(I) = \{M(t), t \in I\}$ de $f$ est appelée *support* de la courbe paramétré $f$.

Dans le cadre du cours, on supposera l'arc de classe $\mathcal{C}^2$ au moins, $f$ désignera un tel arc, et on notera, conformément à l'usage, $x$ et $y$ ses fonctions coordonnées.

**Exemple (Supports d'arcs)** i

(1) Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Le support de l'arc

$$t \mapsto (tx_B + (1-t)x_A, ty_B + (1-t)y_A)$$

sur $[0,1]$ (resp. sur $\mathbb{R}$) est le segment $[AB]$ (resp. la droite $(AB)$).

(2) Le support de $([0, 2\pi], (\cos, \sin))$ est le cercle unité.

Il est souvent éclairant d'interpréter une courbe paramétrée comme la trajectoire, sur un intervalle de temps $I$, d'un point mobile $M(t)$. Pour tout $t \in I$, les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ s'interprètent (et se nomment) respectivement *vecteur vitesse* et *vecteur accélération* du point mobile $M(t)$ à l'instant $t$.

On ne confondra pas la courbe paramétrée et son support [1] (sur lequel on perd toute la cinématique). Par exemple, les deux courbes de paramètres réels $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$ ont même support (le cercle unité), et sont pourtant différentes.

On introduit pour la suite l'arc

$$f_0 : t \mapsto \left( \frac{t^3}{t^2 - 1}, \frac{t^2 - 2t}{t - 1} \right)$$

sur $I \in \{]-\infty, -1[, ]-1, 1[, ]1, +\infty[\}$.

1. De même, on ne confond pas la fonction sinus et son image $[-1, 1]$

**Exercice (Classe de $f_0$)**

Montrer que l'arc $f_0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle où il est défini, et dresser le tableau de variations de ses fonctions coordonnées.

1

**Définition (Arc simple)**

Un arc paramétré $(I, f)$ est dit *simple* s'il est injectif.

2.b

Du point de vue cinématique, un arc est simple si et seulement si le point mobile ne revient jamais au même endroit.

**Exemple (Arcs simples ou non)**

(1) Bien sûr, un arc périodique ne saurait être simple ;
(2) Compléter : pour qu'un arc soit simple, il                                        que ses fonctions coordonnées le soient, et donner un exemple montrant que la réciproque est fausse :

ii

.

**Distinction entre point mobile et point physique**

Implicitement, lorsqu'on étudie le point mobile de paramètre $t$ (noté $M(t)$), on considère le point mobile à l'instant $t$. Même s'il existe un autre instant $t'$ pour lequel $M(t) = M(t')$, on s'autorise donc à parler par exemple de la vitesse au point $M(t)$ (il serait plus correct et moins ambigü de parler de vitesse à l'instant $t$). Il faut donc bien comprendre que l'on effectue une distinction (abusive) entre point mobile et point physique. L'expression point $M(t)$ renvoie donc, sauf mention contraire, au point mobile $M(t)$ à l'instant $t$, et non au point physique du plan.

2.1

**Exemple (Les graphes vus comme des supports)**

Soit $\varphi$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$. L'application $t \mapsto (t, \varphi(t))$ est une fonction vectorielle, dont l'image est le graphe de $\varphi$ (ou la courbe représentative de $\varphi$). Un des objectifs de ce chapitre est de généraliser cet exemple, mais en s'autorisant un panel plus large de première fonction coordonnée. Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$, le graphe de $\varphi$ est le support de $t \mapsto (t, \varphi(t))$.

iii

## 2.2. Étude locale élémentaire

### 2.2.1. *Points multiples.*

**Définition (Multiplicité d'un point)** 2.c

On dit qu'un point $M$ du support d'un arc paramétré $f : I \to \mathbb{R}^2$ est *simple* s'il n'existe qu'un seul instant $t_0$ pour lequel $M(t_0) = M$. S'il existe au moins deux instants (resp. exactement deux instants) en lesquels le point mobile est en $M$, on dit que $M$ est un *point multiple* (resp. un *point double*) de l'arc.

Un arc est donc simple si et seulement si tous les points de son support le sont.

**Points multiples par périodicité** 2.2

Nous supposerons toujours que $f$ est localement injective, c'est-à-dire qu'à tout instant $t_0$, on peut restreindre l'intervalle de temps en un intervalle centré en $t_0$, sur lequel $f$ est injective. Ce faisant, tout point du support est (localement) simple, ce qui justifiera plusieurs définitions et propositions dans la suite. En particulier, le point mobile n'est jamais immobile pendant un intervalle de temps donné.

Pour la recherche de points multiples d'un arc dont les fonctions sont rationnelles, c'est-à-dire des quotients de fonctions polynomiales, on pourra chercher deux instants distincts $t_1$ et $t_2$ en lesquels les points physiques coïncident, simplifier par $t_1 - t_2$ les égalités obtenues (des abscisses et des ordonnées), puis introduire $s = t_1 + t_2$ et $p = t_1 t_2$.

**Exercice (Points multiples de $f_0$)** 2

$f_0$ admet-il des points multiples ? Réponse : oui, pour $t_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{3}$, $t_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{3}$ ($s = \frac{2}{3}$ et $p = -\frac{4}{3}$), les coordonnées du point double sont $\frac{8}{3}$ et $-\frac{4}{3}$.

2.2.2. *Points stationnaires.*

**Définition (Point régulier)** 2.d

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré. Le point $M(t)$ est dit *régulier* si $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$. Si $M(t)$ n'est pas régulier, *i.e.* $f'(t) = \overrightarrow{0}$, on dit qu'il est *stationnaire* (ou *singulier*). On dit que le point $M(t)$ est *birégulier* si les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ sont indépendants. On dit que l'arc est *régulier* (resp. *birégulier*) si tous ses points le sont.

$M(t)$ est régulier si et seulement si la vitesse est non nulle à l'instant $t$.

Un point stationnaire est un point en lequel la vitesse est nulle, mais on ne stationne pas réellement en ce point, puisque l'arc est supposé localement injectif. Un bon exemple de point stationnaire est le sommet de la trajectoire d'un mobile lancé vers le haut à la verticale.

**Exercice (Points singuliers de $f_0$)** 3

Déterminer les points singuliers de $f_0$ ? Réponse : aucun.

**Exercice (Points multiples de la courbe de Lissajous)** 4

Déterminer la période $T$ de la courbe de Lissajous (voir la feuille de TD), puis les points multiples de l'arc restreint à $[0, T[$.

2.2.3. *Tangentes.*

**Définition (Tangente en un point à un arc)**

On dit que l'arc $f$ admet une tangente au point $M(t_0)$ si la droite $(M(t_0)M(t))$ admet une position limite $\Delta$ quand $t$ tend vers $t_0$ (en étant différent de $t_0$). On dit alors que $\Delta$ est la *tangente* au point de paramètre $t_0$ de l'arc $f$.

2.e

La droite $(M(t_0)M(t))$ est bien définie pour $t$ suffisamment proche (et distinct) de $t_0$, car l'arc est supposé localement injectif.

**Illustration**

**Tangente en un point à un arc**

En supposant $x$ localement injective au voisinage de $t_0$, dire que l'arc $f$ admet une tangente au point $M(t_0)$ revient à dire que le rapport

$$\frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$$

admet une limite (éventuellement infinie, auquel cas la tangente est verticale) en $t_0$.

2.3

**Proposition (Tangente en un point régulier)**

Si $M(t_0)$ est un point régulier, alors $f$ admet une tangente en ce point, dirigée par $f'(t_0)$.

2.a

**Démonstration**

□

**Exercice (Tangentes de $f_0$)** 5

Donner les tangentes verticales et horizontales pour $f_0$, ainsi que celles aux points où $f_0$ croise un des axes de coordonnées.

**Proposition (Tangente en un point singulier)** 2.b

Supposons que $M(t_0)$ soit un point singulier, et qu'il existe une dérivée de $f$ en $t_0$ non nulle : soit $j$ le plus petit entier tel que $f^{(j)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. L'arc $f$ admet alors une tangente en $M(t_0)$, dirigée par $f^{(j)}(t_0)$.

**Démonstration**

Admise. $\square$

**Exercice (Tangente en un point d'un arc)** 6

Donner les tangentes

(1) au point de paramètre 0 de $t \mapsto (\cos t, \sin^3 t)$ ;

(2) au point de paramètre 1 de $t \mapsto \left(\frac{(t-1)^2}{t}, \frac{(t-1)^2}{t^2}\right)$.

### 2.3. Branches infinies, directions asymptotiques, asymptotes

**Définition (Branche infinie)** 2.f

On dit que l'arc paramétré $f$ présente une *branche infinie* au voisinage de $t_0$ si $\lim\limits_{t \to t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

**Illustration**

Étudions maintenant quelques cas particuliers. Traitons d'abord le cas des asymptotes horizontales ou verticales :

Définition (Asymptotes horizontales ou verticales)

Si $y$ tend vers $\pm\infty$ et si $x$ tend vers un réel $l$ en $t_0$, on dit que l'arc présente au voisinage de $t_0$ une *asymptote* d'équation $x = l$.
Si $x$ tend vers $\pm\infty$ et si $y$ tend vers un réel $l$ en $t_0$, on dit que l'arc présente au voisinage de $t_0$ une *asymptote* d'équation $y = l$.

2.g

Illustration

Définition (Branches paraboliques et asymptotes)

On se place dans le cas où $x$ et $y$ tendent tous les deux vers $\pm\infty$ et où de plus $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
On dit alors que la droite d'équation $y = ax$ (l'axe $Oy$ si $a = \pm\infty$) est une *direction asymptotique* à la courbe au voisinage de $t_0$.

(1) Dans le cas où $a = \pm\infty$, on dit aussi que l'arc présente une *branche parabolique* dans la direction $Oy$.

(2) Dans le cas où $a = 0$, on dit aussi que l'arc présente une *branche parabolique* dans la direction $Ox$.

(3) Pour $a \in \mathbb{R}^*$ :
- si en outre $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$, on dit que l'arc présente au voisinage de $t_0$ une *branche parabolique* dans la direction $y = ax$.
- si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R}$, on dit que l'arc présente au voisinage de $t_0$ une *asymptote* d'équation $y = ax + b$ (ou que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe). Dans ce dernier cas, si la quantité $y(t) - ax(t) - b$ est positive (resp. négative) quand $t$ tend vers $t_0$, on dit que la courbe est *(localement en $t_0$) au-dessus* (resp. *en dessous*) de l'asymptote.

2.h

Illustration

Exercice (Branches infinies de $f_0$)

Étudier les branches infinies de $f_0$.

**Réponse :**

– **en** $-1$ : asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{3}{2}$, avec $y(t) + \frac{3}{2} = \frac{(t+1)(2t-3)}{2(t-1)}$ ;

– **en** $1$ : $|x|$ et $|y|$ tendent vers $+\infty$, $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers $-2$, et $y(t) + 2x(t)$ vers $\frac{5}{2}$. La formule

$$y(t) - (-2x(t) + \frac{5}{2}) = \frac{(t-1)(6t+5)}{2(t+1)}$$

permet de situer la courbe par rapport à son asymptote ;

– **en** $\pm\infty$ : $|x|$ et $|y|$ tendent vers $+\infty$, $\frac{y}{x}$ tend vers $1$, et $y - x$ tend vers $-1$. La formule

$$y(t) - (x(t) - 1) = -\frac{2t+1}{t^2-1}$$

permet de situer la courbe par rapport à son asymptote.

7

### 2.4. Plan d'étude d'une courbe plane paramétrée

Méthode (Plan d'étude d'une courbe paramétrée)

(1) Domaine de définition de l'arc paramétré, puis réduction éventuelle de celui-ci pour obtenir, par des considérations de symétrie ou de périodicité, le « domaine utile » ;

(2) Étude sur ce dernier domaine de la courbe paramétrée, c'est-à-dire de ses fonctions coordonnées (classe, variations et, dans une moindre mesure, signe) ;

(3) Étude éventuelle des points exceptionnels (points stationnaires, nous disposons pour le moment de moyens limités pour cette étape) ;

(4) Étude éventuelle des branches infinies ;

(5) Recherche des points multiples ;

(6) Tracé (du support) de la courbe.

2.4

Exercice (Support de $f_0$)

Tracer le support de $f_0$.

8

# 3. Courbes en polaires

## 3.1. Courbes définies par une représentation polaire

On reprend les notations usuelles en polaires.

**Définition (Courbe polaire)** 3.a

Soit $r$ et $\theta$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) sur un intervalle $I$. La courbe paramétrée

$$f \ : t \mapsto r(t)\vec{u}(\theta(t))$$

est dite définie par une *représentation polaire*.

La fonction $r$ n'est pas forcément positive, et l'étude de son signe est plus importante que celle de ses variations[2], puisque elle permet de situer le point mobile du bon côté par rapport au pôle.

**Illustration**

**Proposition (Expression des vecteurs vitesse et accélération en polaires)** 3.a

On a

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = r'\vec{u} + r\theta'\vec{v}$$

et

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (r'' - r\theta'^2)\vec{u} + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{v}$$

**Démonstration**

□

2. on se passe parfois de cette dernière étude

### 3.2. Courbes définies par une équation polaire

Dans le cas particulier où la courbe est donnée par une fonction

$$\theta \mapsto r(\theta)\vec{u}(\theta)$$

on dit que la courbe est définie par l'*équation polaire*

$$\rho = r(\theta).$$

Même si cela n'a plus grand sens, on utilisera toujours les termes cinématiques (point mobile, vitesse, accélération).

Le vecteur dérivé est alors donné par

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta)\vec{u}(\theta) + r(\theta)\vec{v}(\theta),$$

qui ne peut donc être nul que lorsque $r$ s'annule (ainsi que $r'$). Le seul point éventuellement singulier est donc le pôle. De plus, lorsque $r$ ne s'annule pas, l'angle $V$ de la tangente avec le vecteur $\vec{u}(\theta)$ est donné par

$$\cos V = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \text{ et } \sin V = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

(où par $\operatorname{cotan} V = \frac{r'}{r}$, ce qui donne $V$ modulo $\pi$).

Cette notation $V$ est standard, mais la formule donnant le vecteur vitesse est tout aussi agréable.

Un vecteur directeur de la normale (sauf éventuellement au pôle) est $-r(\theta)\vec{u}(\theta) + r'(\theta)\vec{v}(\theta)$.

Illustration

Si on atteint l'origine au paramètre $\theta_0$, la courbe admet simplement pour tangente la droite d'équation $\theta = \theta_0$ en ce point.

Illustration

### 3.3. Réduction du domaine utile

Plus encore que dans le cas des arcs cartésiens (ceux donnés avec leurs fonctions coordonnées), il est souvent crucial de réduire le domaine d'étude, afin de mieux repérer les invariances du support (par translation, rotation, symétrie, etc.), et de faciliter le travail.

Donnons quelques exemples de réduction du domaine (en supposant pour simplifier l'arc défini sur $\mathbb{R}$) :

(1) $r$ **est** $2\pi$**-périodique** : il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle fermé de longueur $2\pi$, tout le support sera tracé.

(2) $r$ **est** $\pi$**-antipériodique**[3] : les points de paramètres $\theta$ et $\theta + \pi$ sont confondus. Il suffit donc d'étudier la courbe sur un intervalle fermé de longueur $\pi$, tout le support sera tracé.

(3) $r$ **est** $\pi$**-périodique** : il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle fermé de longueur $\pi$. Le point $M(\theta + \pi)$ se déduit de $M(\theta)$ par symétrie (centrale) par rapport au pôle, le support total se déduira du support sur le domaine utile en lui adjoignant son symétrique par rapport au pôle.

(4) **Plus généralement, supposons que** $r$ **soit** $\frac{2\pi}{q}$**-périodique (pour un certain** $q \in \mathbb{N}^*$**)** : on obtiendra le support de la courbe en dessinant le support de la courbe restreinte à un intervalle fermé de longueur $\frac{2\pi}{q}$, puis en lui adjoignant ses images par les rotations de centre $O$ et d'angle de mesure $\frac{2k\pi}{q}$, $k \in [\![1, , q-1]\!]$.

(5) $r$ **est paire (resp. impaire)** : le point $M(-\theta)$ se déduit de $M(\theta)$ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses (resp. celui des ordonnées).

Illustration

### 3.4. Branches spirales, branches infinies

Si $r$ tend vers 0 (resp. $a \in \mathbb{R}^*$, $\pm\infty$) en $\pm\infty$, alors la courbe admet une branche spirale au voisinage de $\pm\infty$ : le point $O$ comme asymptote (resp. le cercle de centre $O$ de rayon $|a|$ comme asymptote, resp. une branche infinie spirale).

3. *i.e.* $\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad r(\theta + \pi) = -r(\theta)$

Illustration

Si $r(\theta)$ tend vers $\pm\infty$ lorsque $\theta$ tend vers la valeur finie $\theta_0$, alors la courbe admet une direction asymptotique d'équation $\theta = \theta_0$ au voisinage de $\theta_0$.

Dans ce cas, on peut étudier la quantité $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$, qui mesure la distance algébrique entre le point de paramètre $\theta$ et la droite d'équation $\theta = \theta_0$ :

Illustration

(1) Si $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$ tend vers un réel $d$ quand $\theta$ tend vers $\theta_0$, la courbe admet alors une asymptote d'équation $r\sin(\theta - \theta_0) = d$ au voisinage de $\theta_0$.

(2) Si $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$ tend vers $\pm\infty$ quand $\theta$ tend vers $\theta_0$, la courbe admet alors une branche parabolique (dans la direction asymptotique d'équation $\theta = \theta_0$) au voisinage de $\theta_0$.

Dans le premier cas, le signe de $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) - d$ permet de situer courbe et asymptote.

Illustration

### 3.5. Plan d'étude d'une courbe définie par une équation polaire

**Méthode (Plan d'étude d'une courbe paramétrée définie par une équation polaire)** 3.1

(1) Domaine de définition de la fonction $r$, puis réduction éventuelle de celui-ci pour obtenir, par des considérations de symétrie ou de périodicité, le « domaine utile » ;

(2) Étude sur ce dernier domaine de la courbe (classe, variations et, surtout, signe de $r$) ;

(3) Étude éventuelle des branches infinies ;

(4) Tracé du support de la courbe.

# 4. Feuille de TD 8 : Courbes paramétrées

## 4.1. Courbes cartésiennes

**Exercice 1 (Étude d'arcs paramétrés classiques)** 1

Étude et représentation

**1** de la *cycloïde*

$$f\ : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

**2** de la *cardioïde*

$$f\ : t \mapsto (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$$

Trouver une équation polaire de la cardioïde (prendre un autre repère).

**3** de l'*astroïde*

$$f : t \mapsto \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right).$$

**Exercice 2 (Étude d'arcs paramétrés rationnels)** 2

Étude et représentation de

**1** $f_0\ : t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{t^2-2t}{t-1}\right)$.

**2** $f_1\ : t \mapsto \left(\frac{t^2}{(t-2)(t+1)}, \frac{t^2(t+2)}{t+1}\right)$.

**3** $f_2\ : t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{1}{t^3-t}\right)$.

**Exercice 3 (Étude d'arcs paramétrés trigonométriques)** 2

Étude et représentation

**1** de la *courbe de Lissajous* $f : t \mapsto (\cos 3t, \sin 2t)$.

**2** de $g\ : t \mapsto (2\ \cos(t), \sin(2t))$.

**3** de la *deltoïde* $h\ : t \mapsto (2\ \cos(t) + \cos(2t), 2\ \sin(t) - \sin(2t))$.

**Exercice 4 (Centrale MP 08)** 3

Trouver les droites à la fois tangentes et normales à la courbe $\Gamma\ : x(t) = 3t^2, y(t) = 2t^3$.

**Exercice 5 (Centrale MP 08)** 3

On pourra s'aider de Maple.

Soit $C$ l'arc paramétré : $x(t) = \frac{t}{1+t^4}, y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$.

**1** Tracer cette courbe.

**2** Montrer que $C$ est un arc simple.

**3** Donner l'équation de la tangente $D_t$ à $C$ au point $M(t) = (x(t), y(t))$.

**4** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $t$ pour que $D_t$ coupe $C$ en deux points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ distincts de $M(t)$. Calculer $t_1 + t_2$ et $t_1 t_2$.

**5** Donner les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle $OM(t_1)M(t_2)$.

**Exercice 6 (Strophoïde droite)** 1

Étude et représentation de la strophoïde droite définie en polaires par

$$\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$

**Exercice 7 (Courbes en polaires)** 2

Étude et représentation de la courbe polaire définie par
**1** $\rho = \sin(2\theta) - \cos(3\theta)$.
**2** $\rho = \tan\frac{2\theta}{3}$.
**3** $\rho = 1 + \tan\frac{\theta}{2}$.
On montrera en particulier que la courbe admet un unique point double « véritable », en lequel les tangentes sont orthogonales.

**Exercice 8 (Lemniscate de Bernoulli)** 2

Soit $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$. Former une équation polaire du lieu $\Gamma$ des points $M$ tels que $MF \cdot MF' = 1$. Étudier et représenter la courbe correspondante.

**Exercice 9 (Centrale MP 08)** 2

Étudier la courbe $\rho = \frac{1}{\cos\theta/3}$.

**Exercice 10 (Mines MP 08)** 2

Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$.
**Remarque :** on demandait aussi de calculer l'aire de la boucle, mais c'est trop compliqué pour nous pour le moment.

CHAPITRE IX

# Coniques

## Sommaire



On se place dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les coniques ont une définition historique purement géométrique, que nous ne ferons qu'évoquer. Elles sont d'une grande importance en physique, ce qui explique qu'elles soient abordées si tôt dans l'année.

Ce cours ne pose pas de difficulté théorique, mais demande la mémorisation d'un vocabulaire étendu, et de nombreuses formules. Les exercices sont très variés.

## 1. Définition monofocale. Équations

### 1.1. Définition monofocale

**Définition (monofocale des coniques)**

Soit $\mathcal{D}$ une droite, $F$ un point du plan n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, et $e$ un réel strictement positif. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P},\ MF = e\, d(M, \mathcal{D})\}$$

est appelé *conique* d'excentricité $e$, de foyer $F$ et de directrice associée $\mathcal{D}$.
On dit que $\mathcal{C}$ est une *ellipse* (resp. *parabole*, resp. *hyperbole*) si $e < 1$ (resp. si $e = 1$, resp. si $e > 1$).
Le point $F$ est appelé *foyer* de $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$ *directrice* de $\mathcal{C}$ associée au foyer $F$, et $e$ est l'*excentricité*.
La droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $F$ est appelée *axe focal*.
Le nombre $p = e\, d(F, \mathcal{D})$ est appelé *paramètre*.

1.a

**D'autres définitions des coniques**

Nous donnerons en 3 une définition plus large des coniques, qui comprendra les cercles, ou la réunion de deux droites. De plus, les ellipses et les hyperboles admettent des caractérisations dites bifocales, faisant intervenir leurs deux foyers, que nous verrons en 2.1.

1.1

Définition historique des coniques

On voit donc ici les coniques comme des lignes de niveau. Ce n'est pas la définition historique : les coniques sont initialement les différents ensembles obtenus comme section d'un cone, *i.e.* comme intersection d'un cone et d'un plan dans l'espace.

1.2

Clairement, l'axe focal est axe de symétrie de la conique.

Illustration

Définition (Conique à centre)

Une conique est dite *à centre* si elle admet un centre de symétrie $O$. Dans un tel cas, $O$ est appelé *centre* de la conique.

1.b

Définition (Sommet d'une conique)

On appelle *sommet* d'une conique tout point de la conique situé sur l'axe focal.

1.c

## 1.2. Équations

Fixons-nous $F, \mathcal{D}$ et $e$ comme ci-dessus, et soit $\mathcal{C}$ la conique associée. Soit $h$ la distance de $F$ à $\mathcal{D}$, de sorte que $p = eh$, où $p$ est le paramètre. On se place dans le repère orthonormal direct de centre $F$, et dans lequel $\mathcal{D}$ admet pour équation $x = -h$ (avec $h > 0$). Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$x^2 + y^2 = e^2(x + h)^2,$$

qui est donc une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans ce repère.

Bien sûr, $\mathcal{C}$ admet également l'équation cartésienne

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 + y^2 = (ex + p)^2$$

dans ce repère.

1.2.1. *Cas des ellipses.* On se place dans le cas où $\mathcal{C}$ est une ellipse, *i.e.* $e \in ]0, 1[$.

L'équation $\mathcal{E}$ est équivalente à

$$X^2 + \frac{Y^2}{1 - e^2} = \alpha$$

où $X = x - \frac{ep}{1-e^2}$ et $Y = y$, et $\alpha = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} > 0$. Ces nouvelles indéterminées $X$ et $Y$ correspondent à un changement d'origine du repère.

**Proposition (Équation réduite d'une ellipse)** 1.a

L'ellipse $\mathcal{C}$ admet une équation cartésienne, dans un repère orthonormal adapté, de la forme

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.}$$

avec $0 < b < a$.
Réciproquement, une telle équation définit une ellipse.

**Démonstration**

Dans un sens, il suffit de poser $a = \frac{p}{1-e^2}$ et $b = \sqrt{1-e^2}\, a$.
Réciproquement, une telle équation donne une équation cartésienne d'ellipse, en posant

$$\boxed{e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \quad \text{et} \quad h = \frac{a(1-e^2)}{e}.$$

$\square$

**Définition (Équation réduite d'une ellipse)** 1.d

Une telle équation est appelée *équation réduite* de l'ellipse $\mathcal{C}$.
L'axe $(OX)$ est appelé *grand axe* (ou *axe focal*, comme on l'a déjà vu), l'axe $(OY)$ *axe non focal* ou *petit axe*. Les réels $a$ et $b$ sont appelés respectivement *demi-grand axe* et *demi-petit axe*.

Nous conservons les notations introduites dans la suite de cette partie.

**Symétries d'une ellipse** 1.3

Les axes $(OX)$ et $(OY)$ sont axes de symétrie de $\mathcal{C}$, et $O$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$. Une ellipse est donc une conique à centre.

**Sommets d'une ellipse** 1.4

Le grand axe (resp. le petit axe) coupe $\mathcal{C}$ en deux points, de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ (resp. $(0, b)$ et $(0, -b)$). Les points $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ sont les sommets de l'ellipses, et sont également appelés *sommets principaux* de l'ellipse. Les points $(0, b)$ et $(0, -b)$ sont appelés *sommets secondaires* de l'ellipse.

**Second couple foyer-directrice pour une ellipse** 1.5

Il existe un autre couple de foyer-directrice, obtenu par symétrie par rapport à $O$.

**Définition (Distance focale d'une ellipse)** 1.e

La distance $\boxed{c = ea = \sqrt{a^2 - b^2}}$ du foyer $F$ au centre $O$ est appelée *distance focale*.

**Paramètre d'une ellipse**

Le paramètre vaut $\boxed{p = \frac{b^2}{a}.}$ 1.6

**Directrices d'une ellipse**

Les directrices admettent dans le nouveau repère les équations $\boxed{x = -\frac{a}{e}\left(= -\frac{a^2}{c}\right)}$ et $\boxed{x = \frac{a}{e}\left(= \frac{a^2}{c}\right).}$ 1.7

**Illustration**

**Cercle et ellipse**

On convient parfois de considérer un cercle comme une ellipse d'excentricité nulle, bien qu'il n'admette pas de définition par foyer et directrice. Un premier argument en faveur de ce choix provient de l'équation réduite d'une ellipse : si l'on prend $a = b$ (ce qui est interdit pour une ellipse au sens de la première définition), on retrouve une équation de cercle. 1.8

**Proposition (Paramétrage usuel d'une ellipse)**

$\mathcal{C}$ peut se paramétrer dans tout repère où elle admet une équation réduite par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & a\cos(t) \\ Y & = & b\sin(t) \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

1.b

Ce paramétrage, régulier, permet facilement la création d'un nombre arbitraire de points de l'ellipse.

Illustration

Ellipse et affinité orthogonale

On appelle affinité orthogonale une application de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui admet – dans un repère orthonormal bien choisi – une expression analytique de la forme

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= \alpha\, y \end{cases}$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, appelé rapport de l'affinité.

Les affinités orthogonales de rapport 0 (resp. $-1$) sont donc les projections orthogonales (resp. les symétries orthogonales), et l'unique affinité orthogonale de rapport 1 est l'application identique.

L'image d'un cercle par une affinité orthogonale est soit un cercle, soit une ellipse, soit un segment. En effet, en se plaçant dans un repère adapté à l'affinité orthogonale (et en conservant les notations ci-dessus), le cercle admet un paramétrage de la forme $t \mapsto (a + R\cos(t), b + R\sin(t))$, où $t$ décrit par exemple $[0, 2\pi]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $R \in \mathbb{R}_+^*$. 1.9

L'image de ce cercle par l'affinité est donc le support de

$$t \mapsto (a + R\cos(t), \alpha\, b + \alpha\, R\sin(t))\,.$$

Si $\alpha = 0$ (resp. si $\alpha \in \{-1, 1\}$), on reconnaît un segment (resp. un cercle). Sinon, quitte à changer d'origine, on peut supposer les termes constants nuls. Si $\alpha \in ]0, 1[$, on reconnaît un paramétrage d'ellipse, si $\alpha \in ]-1, 0[$, on reconnaît encore une ellipse (en changeant $t$ en $-t$). Si $\alpha > 1$, on reconnaît toujours un paramétrage d'ellipse en changeant $t$ en $\frac{\pi}{2} - t$, et c'est encore le cas (en changeant $t$ en $t - \frac{\pi}{2}$) dans le cas où $\alpha < -1$.

Illustration

1.2.2. *Cas des paraboles.* L'équation $\mathcal{E}$ est équivalente à

$$Y^2 = 2hX$$

en posant $X = x + \frac{h}{2}$ et $Y = y$, ce qui correspond à un changement d'origine. Cette équation s'écrit également (puisque $h = p$) :

$$\boxed{Y^2 = 2pX.}$$

On peut observer que l'origine de ce nouveau repère est l'unique sommet de la parabole.

**Proposition (Équation réduite d'une parabole)**

La parabole $\mathcal{C}$ admet une équation cartésienne, dans un repère orthonormal adapté, sous la forme

$$Y^2 = 2pX$$

avec $p \in \mathbb{R}_+^*$.
Réciproquement, une telle équation définit une parabole.

1.c

**Démonstration**

On l'a vu dans un sens. Pour la réciproque, l'équation $Y^2 = 2pX$ définit une parabole de foyer $F(\frac{p}{2}, 0)$ de directrice d'équation $X = -\frac{p}{2}$.

□

**Définition (Équation réduite d'une parabole)**

Une telle équation est appelée *équation réduite* de la parabole $\mathcal{C}$.

1.f

**Proposition (Paramétrage d'une parabole)**

$\mathcal{C}$ peut se paramétrer par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X & = & 2\,p\,t^2 \\ Y & = & 2\,p\,t \end{array} \right. \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Ce paramétrage est régulier, et possède deux branches paraboliques, de même direction asymptotique $OX$.

1.d

**Symétrie d'une parabole**

Une parabole n'a qu'un axe de symétrie – son axe focal–, et n'a pas de centre.

1.10

Illustration

1.2.3. *Cas des hyperboles.* L'équation $\mathcal{E}$ est équivalente à

$$X^2 - \frac{Y^2}{e^2-1} = \alpha$$

où $X = x + \frac{ep}{e^2-1}$ et $Y = y$, avec $\alpha = \frac{p^2}{(e^2-1)^2} > 0$.

**Proposition (Équation réduite d'une hyperbole)**

L'hyperbole $\mathcal{C}$ admet une équation cartésienne, dans un repère orthonormal adapté, sous la forme

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.}$$

avec $a > 0$ et $b > 0$.
Réciproquement, une telle équation définit une hyperbole.

1.e

**Démonstration**

Dans un sens, on pose $a = \frac{p}{e^2-1}$ et $b = \sqrt{e^2-1}a$. Si réciproquement $a$ et $b$ sont donnés, on obtient bien une équation d'hyperbole en posant

$$\boxed{e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \quad \text{et} \quad h = \frac{a(e^2-1)}{e}.$$

□

**Définition (Équation réduite d'une hyperbole)**

Une telle équation est appelée *équation réduite* de l'hyperbole $\mathcal{C}$.
L'axe $OX$ (l'axe focal) est appelé *axe transverse*, l'axe $OY$ *axe non transverse* (ou *non focal*). Les réels $a$ et $b$ sont appelés respectivement *demi-axe focal* et *demi-axe non focal*.

1.g

Les axes $OX$ et $OY$ sont axes de symétrie de $\mathcal{C}$, et $O$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$ (une hyperbole est une conique à centre).

L'axe transverse (resp. l'axe non transverse) coupe $\mathcal{C}$ en deux points de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ (resp. ne coupe pas $\mathcal{C}$), qui sont les sommets de l'hyperbole.

Il existe un autre couple de foyer-directrice, obtenu par symétrie par rapport à $O$

Le paramètre vaut $\boxed{p = \frac{b^2}{a}.}$

**Définition (Distance focale d'une hyperbole)** 1.h

La distance $\boxed{c = ea = \sqrt{a^2+b^2}}$ du foyer $F$ au centre est appelée *distance focale*.

**Directrices d'une hyperbole** 1.11

Les directrices admettent dans le repère adapté trouvé les équations $\boxed{x = -\frac{a^2}{c}\ \left(= -\frac{a}{e}\right)}$ et $\boxed{x = \frac{a^2}{c}\ \left(= \frac{a}{e}\right)}$. On reconnaît les équations des directrices d'une ellipse.

**Positions relatives des points importants de l'axe focal** 1.12

Résumons les positions des points de la conique situés sur l'axe focal : pour les trois types de coniques, il existe un sommet entre le foyer et la directrice. C'est le seul sommet dans le cas d'une parabole, il y en a un autre situé du côté du foyer (resp. de la directrice) dans le cas de l'ellipse (resp. de l'hyperbole).

**Illustration**

**Définition (Hyperbole équilatère)** 1.i

Si $a = b$, l'hyperbole $\mathcal{C}$ est dite *équilatère*.

**Proposition (Paramétrage d'une hyperbole)** 1.f

$\mathcal{C}$ peut se paramétrer dans le repère où elle admet une équation réduite par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & \varepsilon a\ \mathrm{ch}(t) \\ Y & = & b\ \mathrm{sh}(t) \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

où $\varepsilon$ décrit $\{-1, 1\}$.

Démonstration

□

En réalité, une hyperbole est constituée de deux branches disjointes, c'est pourquoi le paramétrage que nous avons donné est en fait constitué de deux arcs (un pour chaque branche).

**Proposition (Équations des asymptotes d'une hyperbole)**

L'hyperbole $\mathcal{C}$ admet les deux asymptotes d'équations $\frac{Y}{b} = \frac{X}{a}$ et $\frac{Y}{b} = -\frac{X}{a}$

1.g

Démonstration

□

**Retrouver les asymptotes d'une hyperbole**

Lorsque l'hyperbole est donnée par une équation réduite, il suffit donc de se débarrasser du terme constant pour trouver des équations des asymptotes.

1.13

Une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires

### 1.3. Équation polaire

On se place dans un repère polaire dont le foyer $F$ est le pôle. Soit $H$ le projeté orthogonal de $F$ sur $\mathcal{D}$, et $\theta_0$ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{FH}})$. On rappelle que la droite $\mathcal{D}$ admet pour équation polaire $r = \frac{h}{\cos(\theta-\theta_0)}$.

La conique admet quant à elle, en revenant à sa définition, l'équation polaire $e|r\cos(\theta - \theta_0) - h| = |r|$, ce qui conduit à deux équations polaires

$$r = -\frac{eh}{1 - e\cos(\theta - \theta_0)}$$

et

$$r = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

qui donnent en fait la même courbe : un couple $(r, \theta)$ vérifie la seconde équation si et seulement si le couple $(-r, \theta + \pi)$, qui représente le même point, vérifie la première.

On ne retient que la seconde équation :

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

**Cercle et ellipse, le retour**

Le cercle de centre $F$ et de rayon $R$ admet $r = R$ comme équation, équation que l'on retrouve en posant $e = 0$ (et $p = R$). On voit donc encore comment un cercle peut être vu comme une ellipse d'excentricité nulle et dont la directrice est « à l'infini ».

1.14

## 2. Propriétés

### 2.1. Définitions bifocales des coniques à centre

Il ressort de l'étude précédente qu'ellipses et hyperboles ont beaucoup de points en commun (présence de deux axes de symétrie, centre de symétrie, deux couples foyers-directrices, mêmes équations pour les directrices, ...). La présence de deux foyers permet une nouvelle définition de ces coniques, dite *définition bifocale*.

**Proposition (Définition bifocale d'une ellipse)**

Soit $F$ et $F'$ deux points distincts du plan, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $2a > FF'$. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P}, MF + MF' = 2a\}$$

est l'ellipse de foyers $F$ et $F'$, de demi-axe focal $a$

2.a

**Proposition (Définition bifocale d'une hyperbole)**

Soit $F$ et $F'$ deux points distincts du plan, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $2a < FF'$. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P}, |MF - MF'| = 2a\}$$

est l'hyperbole de foyers $F$ et $F'$, de demi-axe focal $a$

2.b

**Démonstration**

Nous ne donnons la démonstration que dans le cas de l'ellipse, le cas de l'hyperbole étant similaire.
C'est simple dans un sens (étant donné un point de l'ellipse $\mathcal{C}$, prendre la perpendiculaire aux directrices passant par ce point). Dans l'autre, on prend un point $M$ de $\mathcal{P}$ vérifiant la condition bifocale. Il est nécessairement situé dans la bande $-a \leqslant X \leqslant a$. Si $M$ est sur l'axe focal, c'est facile. On se place donc dans la situation où $M$ n'est pas sur l'axe focal.
Supposons par exemple que $M$ se trouve dans l'enveloppe convexe de l'ellipse. Soit $M'$ le point de l'ellipse sur la demi-droite $[FM)$. On a donc $FM' = FM + MM'$, $MF + MF' = 2a$ et $M'F + M'F' = 2a$, d'où $MM' + M'F' - MF' = 0$, soit encore $MM' + M'F = MF'$. Nous sommes dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, *i.e.* $M' \in [MF']$. Les droites $(MF)$ et $(MF')$, d'intersection $M$, sont les droites $(M'F)$ et $(M'F')$, d'intersection $M'$ : $M = M'$, donc $M \in \mathcal{C}$. De même si $M$ se trouve hors de l'enveloppe convexe.

□

Illustration

Cette définition permet de considérer un cercle comme une ellipse de foyers confondus. La définition monofocale d'une ellipse, contrairement à sa définition bifocale, ne permet pas de considérer un cercle comme une ellipse.

Si on nous donne une équation sans la valeur absolue $MF - MF' = 2a$, on obtient un arc d'hyperbole (ici, le plus proche de $F'$).

**Méthode du jardinier** 2.1

La définition bifocale de l'ellipse en permet une construction concrète, appelée *méthode du jardinier*.

Illustration

### 2.2. Tangentes

**Proposition (Tangentes aux coniques données par des équations réduites)**

L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ admet pour tangente au point $(x_0,y_0)$ la droite d'équation :

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ admet pour tangente au point $(x_0,y_0)$ la droite d'équation :

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

La parabole d'équation $y^2=2px$ admet pour tangente au point $(x_0,y_0)$ la droite d'équation :

$$yy_0=p(x+x_0)$$

2.c

**Démonstration**

Traitons le cas des ellipses (les autres sont similaires) :

□

Moyen mnémotechnique pour retenir ces formules : le dédoublement des variables.

**Tangente à une conique en polaires**

La conique d'équation polaire $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta)}$ admet pour tangente au point de paramètre $\theta_0$ la droite passant par ce point, et dont un vecteur directeur est

$$r'_0 u_{\theta_0}+r_0 v_{\theta_0},$$

où $r_0=\frac{p}{1+e\cos(\theta_0)}$ et $r'_0=\frac{pe\sin(\theta_0)}{(1+e\cos(\theta_0))^2}$.

2.2

**Proposition (Projection orthogonale d'un cercle sur un plan)**

La projection orthogonale d'un cercle sur un plan non perpendiculaire est une ellipse (ou un cercle).

2.d

**Démonstration**

On utilise la linéarité d'une projection orthogonale. On peut trouver deux vecteurs orthogonaux et unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que leurs projections soient encore orthogonales (on peut même imposer $p(\vec{u}) = \vec{u}$), et tels que le cercle se paramètre en $C + R\cos(t)\vec{u} + R\sin(t)\vec{v}$. La projection du point de paramètre $t$ est

$$p(C) + R\cos(t)p(\vec{u}) + R\sin(t)p(\vec{v})$$

On reconnaît là le paramétrage d'une ellipse.

□

## 3. Équations polynomiales à deux variables de degré 2

Nous allons ici considérablement généraliser la notion de conique, en partant des équations en repère orthonormal.

**Définition (Polynôme du second degré à deux indéterminées)**

Un *polynôme du second degré à deux variables (ou indéterminées)* $x$ et $y$, est un polynôme de la forme :

$$P(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + \zeta$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \in \mathbb{R})$ où au moins un des nombres $\alpha, \beta, \gamma$ n'est pas nul.
Le *discriminant* de $P$ est $\gamma^2 - 4\alpha\beta$.
La *partie quadratique* (resp. *linéaire*, resp. *constante*) de $P(x, y)$ est $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy$ (resp. $\delta x + \epsilon y$, resp. $\zeta$). Le terme $\gamma xy$ est appelé *terme quadratique croisé*.

3.a

Le discriminant de $P$ est donc également celui de $\alpha X^2 + \gamma X + \beta$.

**Définition (Conique généralisée)**

On appelle *conique* toute partie $\Omega$ du plan, d'équation (dans un repère orthonormal) :

$$P(x, y) = 0,$$

où $P$ est un polynôme du second degré à deux variables.

3.b

**Comparaison des deux définitions des coniques**

Les ellipses (y compris les cercles), paraboles, hyperboles, sont donc bien des coniques en ce nouveau sens. Cependant, il en existe d'autres : par exemple, la réunion de deux droites est une conique :

3.1

Soit $\mathcal{C}$ une conique d'équation

$$P(x, y) = 0, \text{ où } P(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + \zeta$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ sont réels, et au moins un des nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ n'est pas nul).

**Proposition (Description des coniques généralisées)**

La conique $\mathcal{C}$ est une ellipse (on comprend les cercles par ce terme), une parabole ou une hyperbole, sauf en des cas dits *dégénérés*, dans lesquels $\mathcal{C}$ est une droite, la réunion de deux droites parallèles non confondues, la réunion de deux droites sécantes, ou l'ensemble vide.
De plus, la nature de la conique est déterminée par le discriminant $\Delta$ de $P$. C'est :

(1) une ellipse (éventuellement dégénérée en l'ensemble vide) si $\Delta < 0$

(2) une parabole (éventuellement dégénérée en union de deux droites parallèles qui peuvent être confondues, ou l'ensemble vide) si $\Delta = 0$

(3) une hyperbole (éventuellement dégénérée en union de deux droites sécantes) si $\Delta > 0$

3.a

La démonstration consiste à effectuer de nombreux changements de repères (orthonormaux) afin de simplifier suffisamment l'équation de $\mathcal{C}$ pour en déterminer la nature.

**Démonstration**

**Première étape : se débarrasser du terme quadratique croisé $\gamma$.**
Si $\gamma$ est déjà nul, il n'y a rien à faire. Supposons $\gamma$ non nul.
On effectue d'abord une rotation du repère d'angle de mesure $\theta$. Cela correspond au changement de variables suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y & = & X\sin\theta + Y\cos\theta \end{array}\right.$$

Le polynôme

$$P(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + \zeta$$

se transforme alors en

$$Q(X,Y) = \alpha' X^2 + \beta' Y^2 + \gamma' XY + \delta' X + \epsilon' Y + \zeta'$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+(\alpha-\beta)\cos 2\theta + \gamma\sin 2\theta\right), \\ \beta' &= \frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-(\alpha-\beta)\cos 2\theta - \gamma\sin 2\theta\right) \\ \gamma' &= (\beta-\alpha)\sin(2\theta) + \gamma\cos(2\theta) \end{aligned}$$

On vérifie (simple calcul) que le discriminant est inchangé, *i.e.*

$$\gamma'^2 - 4\alpha'\beta' = \gamma^2 - 4\alpha\beta.$$

En choisissant $\theta$ tel que

$$\operatorname{cotan}(2\theta) = \frac{\alpha-\beta}{\gamma},$$

on a $\gamma' = 0$.
Quitte à effectuer un tel changement de repère, on peut donc supposer que $\gamma$ est nul.

□

Démonstration

**Deuxième étape : discussion**
*Cas 1*
Supposons que $\alpha$ et $\beta$ soient non nuls. Quitte à effectuer un nouveau changement de repère, correspondant à un changement d'origine, on peut supposer que l'équation de la conique $\mathcal{C}$ est

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \xi$$

*Cas 1.1*
Si $\alpha$ et $\beta$ ont même signe, *i.e.* si le discriminant $\Delta$ est strictement négatif, alors $\mathcal{C}$ est une ellipse (on comprend les cercles par ce terme, que l'on obtient si $\alpha = \beta$), éventuellement dégénérée en l'ensemble vide si $\xi$ n'a pas même signe que $\alpha$ et $\beta$.
*Cas 1.2*
Supposons que $\alpha$ et $\beta$ n'aient pas même signe (*i.e.* $\Delta > 0$) : on reconnaît alors une équation d'hyperbole, éventuellement dégénérée en réunion de deux droites sécantes si $\xi = 0$.
*Cas 2* Supposons que $\Delta = 0$, par exemple que $\alpha = 0$. Quitte à recentrer le repère, on peut supposer que $\mathcal{C}$ est donnée par une équation de la forme

$$\beta y^2 + \delta x + \xi = 0.$$

Si $\delta \neq 0$, on peut, à la suite d'un nouveau changement de repère, supposer avoir une équation

$$\beta y^2 + \delta x = 0,$$

et l'on reconnaît en $\mathcal{C}$ une parabole.
Dans le cas exceptionnel où $\delta = 0$, $\mathcal{C}$ est dégénérée en l'ensemble vide si $\beta\xi > 0$, en une droite si $\xi = 0$, et en réunion de deux droites parallèles si $\beta\xi < 0$.

□

Exemple (Graphe de la fonction inverse et hyperbole)

L'équation $xy = 1$ définit une hyperbole (équilatère).

i

Centre de symétrie d'une conique généralisée

Parmi toutes les coniques généralisées, seules les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.

3.2

Définition (Conique propre)

On appelle *conique propre* une ellipse (on comprend les cercles par ce terme), une parabole ou une hyperbole.

3.c

Coniques propres, coniques dégénérées

L'ensemble des coniques se scinde donc en deux sous-ensembles disjoints : celui des coniques propres, et celui des coniques dégénérées.

3.3

**Tangente en un point d'une conique propre**

La tangente en un point $(x_0, y_0)$ d'une conique propre d'équation

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$$

admet pour équation :

$$\alpha x x_0 + \beta y y_0 + \frac{\gamma}{2}(x y_0 + x_0 y) + \frac{\delta}{2}(x + x_0) + \frac{\epsilon}{2}(y + y_0) + \zeta = 0$$

Le dédoublement des variables fonctionne donc dans le cas général :

3.4

## 4. Feuille de TD 9 : Coniques

On se place systématiquement dans un repère orthonormal direct.

### 4.1. Équations

**Exercice 1 (Description d'une parabole)** 0

Déterminer le paramètre, le foyer et la directrice de la parabole d'équation $y = x^2$.

**Exercice 2 (Coniques généralisées)** 0

Déterminer les éléments caractéristiques et tracer les coniques d'équations :
**1** $xy + 3x + 5y - 4 = 0$.
**2** $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$.
**3** $x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 2y + 3 = 0$.
**4** $9y^2 + 4x^2 + 6y + 4x - 5 = 0$.
**5** $x^2 + xy\sqrt{3} + x - 2 = 0$.

**Exercice 3 (Coniques en polaires)** 0

Déterminer les éléments caractéristiques et tracer les coniques d'équations :
**1** $\rho = \frac{1}{1+\sin(\theta)}$.
**2** $\rho = \frac{1}{2+\cos(\theta)}$.
**3** $\rho = \frac{2}{1+2\cos(\theta)}$.
**4** $\rho = \frac{2}{\sqrt{2}+\cos(\theta)+\sin(\theta)}$.

**Exercice 4 (Mines PC 08)** 0

Nature de la conique d'équation : $2x^2 - xy - 3y^2 + 5x + 3y + 5 = 0$ ?

### 4.2. Tangentes et normales

**Exercice 5 (Cercle orthoptique)** 1

Déterminer l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à une ellipse. Même question pour une parabole, une hyperbole.

**Exercice 6 (Tangentes à une ellipse et bissectrice)** 1

**1** Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers $F$ et $F'$, $M$ un point de $\mathcal{E}$. Montrer que la tangente à $\mathcal{E}$ en $M$ est bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.
**Indication :** On pourra utiliser la définition bifocale de $\mathcal{E}$, et paramétrer régulièrement $\mathcal{E}$.
**2** Trouver et démontrer un résultat analogue pour une hyperbole.

Exercice 7 (Tangente à une ellipse et directrice) 2

On considère une ellipse $\mathcal{C}$ de foyer $F$ et de directrice associée $\mathcal{D}$. Soit $M$ un point de $\mathcal{C}$ situé sur la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par $F$. Montrer que l'axe focal, la directrice $\mathcal{D}$, et la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en $M$ sont concourantes.

Exercice 8 (Tangentes à une parabole) 2

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer $F$, de directrice $\mathcal{D}$, $M$ un point de $\mathcal{P}$ et $H$ son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ en $M$ est la médiatrice de $[FH]$. En déduire un procédé de construction d'une parabole point à point.

Exercice 9 (Normales à une ellipse) 3

Parmi les normales à une ellipse, quelles sont celles qui s'éloignent le plus du centre de l'ellipse ?

## 4.3. Paramétrages, lieux

Exercice 10 (Sommet d'une parabole paramétrée) 2

Déterminer le sommet et l'axe de la parabole paramétrée par

$$t \mapsto \left(t^2 + t + 1, t^2 - 2t + 2\right).$$

Exercice 11 (Un peu d'optique) 2

Montrer qu'un miroir parabolique est rigoureusement stigmatique pour le point objet à l'infini sur son axe.

Exercice 12 (Mines PC 08) 2

Montrer que l'image de l'arc $\left(\frac{1}{1+t+t^2}, \frac{t}{1+t+t^2}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ est incluse dans une conique que l'on précisera. Dessiner cette image.

Exercice 13 (Centrale PSI 08) 3

Soit $P\ : t \mapsto t^3 - 2t^2 + t + 1$ et $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ; P(x) = P(y)\}$. Montrer que $S$ est la réunion d'une droite et d'une courbe. Étudier cette courbe.

Exercice 14 (Lieu d'intersection de coniques) 3

Construire la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire :

$$\rho = 1 + \cos(\theta).$$

Soit $P$ et $Q$ deux points de $\mathcal{C}$ alignés avec $O$. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ en $P$ et $Q$ sont perpendiculaires. Que décrit leur point d'intersection ?

Exercice 15 (Paraboles de même foyer) 3

Si deux paraboles distinctes ont un foyer commun, montrer qu'elles ont au plus deux points communs.

# Troisième partie

# Algèbre et géométrie

CHAPITRE X

# Entiers naturels

## Sommaire



Dans ce chapitre, on étudie l'ensemble des entiers naturels. Les objectifs principaux sont la maîtrise du raisonnement par récurrence, et la définition de la notion d'ensemble fini (et du nombre d'éléments d'un tel ensemble).

## 1. Nombres entiers naturels

### 1.1. Propriétes fondamentales

Nous supposons connu l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Nous savons notamment que cet ensemble est muni de la loi de composition interne d'addition, qui est associative, commutative, et qui admet pour élément neutre 0 (on dit que $(\mathbb{N},+)$ est un *monoïde* commutatif [1]).

- Pour tout entier naturel $n$, l'entier $n+1$ est *le successeur* de $n$, et $n$ est le *prédécesseur* de $n+1$ (0 n'a pas de prédécesseur). L'application $S\ : n \mapsto n+1$ est appelée *passage au successeur* ;
- $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe, puisque par exemple 1 n'admet pas de symétrique ;
- L'addition est toutefois *régulière* dans le sens suivant :
$$\forall\, p,q,r \in \mathbb{N}, \quad (p+r=q+r) \Rightarrow (p=q).$$
(*i.e.* tout élément est simplifiable pour l'addition).

$\mathbb{N}$ est aussi muni de la loi de composition interne de multiplication, qui est associative, commutative, qui admet 1 pour élément neutre, et qui est distributive par rapport à l'addition.

- La multiplication n'est pas régulière, mais on a tout de même :
$$\forall\, p,q,r \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \quad pr=qr \Rightarrow p=q$$
(la multiplication restreinte à $\mathbb{N}^*$ est donc régulière) ;
- $(\mathbb{N},\cdot)$ n'est pas un groupe, puisque par exemple 0 ou 2 n'admettent pas de symétriques, ou encore parce que la multiplication n'est pas régulière, à cause de l'élément *absorbant* 0.

1. il manque le fait que tout élément soit symétrisable pour en faire un groupe abélien

Enfin, $\mathbb{N}$ est muni d'un ordre naturel (ou usuel), noté $\leqslant$. Cet ordre est total, 0 minore toute partie de $\mathbb{N}$, et certaines parties de $\mathbb{N}$ (par exemple $\mathbb{N}$ lui-même, ou l'ensemble $2\mathbb{N}$ des nombres pairs) n'admettent pas de majorant dans $\mathbb{N}$.

Cet ordre est de plus *compatible avec l'addition* au sens où :

$$\forall\, p, q, r \in \mathbb{N}, \quad p \leqslant q \Leftrightarrow (p + r \leqslant q + r)$$

Cet ordre est aussi *compatible avec la multiplication par un entier non nul*, au sens où :

$$\forall\, p, q, r \in \mathbb{N}, \quad (p \leqslant q \wedge r \neq 0) \Leftrightarrow (pr \leqslant qr)$$

De plus, l'ensemble $\mathbb{N}$ vérifie la propriété fondamentale suivante :

**Fait (Propriété fondamentale des entiers naturels)**

Toute partie non vide (de $\mathbb{N}$) a un plus petit élément.

On en déduit :

**Proposition (Partie majorée non vide d'entiers naturels)** 1.a

Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.

**Démonstration**

Soit $A$ une partie majorée non vide de $\mathbb{N}$, et soit $\Omega$ l'ensemble des majorants de $A$ (dans $\mathbb{N}$). Par hypothèse, $\Omega$ n'est pas vide, et admet donc un plus petit élément $b$. Il s'agit de montrer que $b$ est un élément de $A$. Supposer $b \notin A$ conduit aux absurdités $A = \emptyset$ si $b$ est nul, et $b - 1 \in \Omega$ si $b$ n'est pas nul.

□

**Notation (Intervalles d'entiers)** 1.a

Pour tous entiers naturels $p, q$, $p \leqslant q$, on pose

$$[\![p, q]\!] = \{n \in \mathbb{N}, p \leqslant n \leqslant q\}$$

On pose également

$$[\![p, +\infty[\![ = \{n \in \mathbb{N}, p \leqslant n\}$$

Par convention, $[\![1, 0]\!] = \emptyset$.

### 1.2. Raisonnement par récurrence

**Théorème (Raisonnement par récurrence (ou principe de récurrence))** 1.b

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$ [a]. On suppose que :

(1) $\mathcal{P}(0)$ (est vraie) (*amorçage* ou *initialisation*) ;

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*hérédité*).

Pour tout entier naturel $n$, l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie.

*a.* on dit aussi que $(\mathcal{P}_n)$ est un *prédicat* sur $\mathbb{N}$

**Démonstration**

On considère l'ensemble $\Omega$ des entiers naturels $n$ tels que $\mathcal{P}(n)$ soit fausse. On souhaite montrer que $\Omega$ est vide. On raisonne par l'absurde en le supposant non vide : il admet donc un plus petit élément $b$. La condition d'amorçage montre que $b$ n'est pas nul, et donc $b \geqslant 1$. Or l'entier naturel $b-1$ ne peut être élément de $\Omega$ (par définition de $b$), donc $\mathcal{P}(b-1)$ est vraie, ce qui entraîne, par hérédité, l'absurdité $b \notin \Omega$. □

Sous une forme plus épurée, le principe de récurrence résulte du fait que l'unique partie de $\mathbb{N}$, comprenant 0, et stable par passage au successeur, est $\mathbb{N}$ elle-même.

Cette récurrence est dite *simple* (ou *faible*), car on déduit $\mathcal{P}(n+1)$ de l'unique assertion $\mathcal{P}(n)$.

**Exercice (Récurrence simple)** 1

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ : $2^p \geqslant p+1$.

Bien sûr, on peut généraliser ce résultat en commençant à un autre rang que 0 :

Ce principe de récurrence admet de nombreuses variantes. En voici quelques unes (vous pouvez d'ailleurs les combiner) :

**Corollaire (Récurrence avec deux prédécesseurs)** 1.c

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

(1) $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies (*amorçage*) ;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ (*hérédité*).

L'assertion $\mathcal{P}(n)$ est alors vérifiée pour tout entier naturel $n$.

**Démonstration**

Se ramener au théorème en formulant, pour tout entier naturel, l'hypothèse $\mathcal{P}'(n) = (\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1))$. □

**Corollaire (Récurrence forte)** 1.d

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

(1) $\mathcal{P}(0)$ est vraie (*amorçage*) ;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\forall m \in [\![0, n]\!], \quad \mathcal{P}(m)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*hérédité*).

Pour tout entier naturel $n$, $\mathcal{P}(n)$ est alors vérifiée.

**Démonstration**

Se ramener au théorème, en posant, pour tout entier naturel $n$, l'hypothèse $\mathcal{P}'(n) = \mathcal{P}(0) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n)$ $\square$

**Exercice (Récurrence forte)** 2

Donner un exemple pertinent d'utilisation d'une récurrence forte (on pourra penser à l'arithmétique).

**Corollaire (Récurrence finie)** 1.e

Soit $p$ et $q$ deux entiers naturels, $p < q$, et $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in [\![p, q]\!]$. On suppose que :

(1) $\mathcal{P}(p)$ est vraie (*amorçage*) ;

(2) Pour tout entier $n \in [\![p, q-1]\!]$, $\quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*hérédité*).

Alors, pour tout entier naturel $n \in [\![p, q]\!]$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

**Exercice (Lemme pour extractrice)** 3

Soit $n$ un entier naturel, et $f : [\![0, n]\!] \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors, pour tout entier naturel $k \in [\![0, n]\!]$, on a $f(k) \geqslant k$.

En corollaire, si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, on a $f(k) \geqslant k$, pour tout entier naturel $k$.

**Méthode (Principe de récurrence)** 1.1

En pratique, une preuve par récurrence comporte quatre étapes, que nous présentons dans le cadre du théorème :

(1) *Formulation de la récurrence :* pour chaque entier naturel $n$, on formule l'hypothèse de récurrence (ou on énonce/introduit l'assertion) suivante : etc.

(2) *Amorçage :* on vérifie $\mathcal{P}(0)$ ;

(3) *Hérédité :* soit $n$ un entier naturel. Supposons $\mathcal{P}(n)$, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. etc. ;

(4) *Conclusion :* en conclusion, pour tout entier naturel $n$, l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

### 1.3. Suite définie par une récurrence et une condition initiale

**Définition (Suite d'éléments de $E$)** 1.b

Soit $E$ un ensemble non vide, et $A$ une partie de $\mathbb{N}$. Une *suite d'éléments de $E$* indexée par $A$ est une famille d'éléments de $E$ indexée par $A$ : c'est donc un élément de $E^A$ (et, d'un autre point de vue, une application de $A$ dans $E$).

**Proposition (Suite récurrente définie par une itératrice)** 1.f

Soit $E$ un ensemble non vide, et $f : E \to E$ une application. Soit $\alpha \in E$. Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ (indexée par $\mathbb{N}$) vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

**Démonstration**

*(Unicité)* supposons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les conditions de l'énoncé. L'ensemble des indices en lesquels elles coïncident comprend 0 et est stable par passage au successeur : c'est donc $\mathbb{N}$, et les suites sont égales.
*(Existence)* on considère l'ensemble $\Omega$ des entiers $n$ pour lesquels on peut définir $u_0, \dots, u_n$ comme dans l'énoncé. Cet ensemble comprend 0, et est stable par passage au successeur : c'est donc $\mathbb{N}$.

□

**Définition (Suite récurrente)** 1.c

Dans le contexte de la proposition précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite définie par la condition initiale $u_0 = \alpha$ et par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (ou l'itératrice $f$)*. On dit aussi que c'est une suite *récurrente*.

**Exercice (Suite récurrente)** 4

Soit $f : x \mapsto \ln(1 + x)$. Montrer que la suite $(u_n)$ définie par la condition initiale $u_0 = 1$ et l'itératrice $f$ est bien définie.

Attention, si $f$ est une application d'une *partie* de $E$ dans $E$, il se peut très bien que la suite récurrente ne soit pas définie pour tout entier. Si par exemple $f : x \mapsto \frac{1-x}{x}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. $u_0$, $u_1$ et $u_2$ sont bien définis, mais pas $u_3$.

### 1.4. Exemples d'utilisation des symboles de somme et produit

On considère une loi de composition interne $\star$ sur un ensemble $E$, associative. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$. On appelle composée de cette famille par $\star$ le terme d'indice $n$ de la suite $(u_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 &= e_1 \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], u_{k+1} &= u_k \star e_{k+1} \end{cases}$$

Si $E$ admet un élément neutre $e$ pour $\star$, on peut convenir que la composée de la famille vide par $\star$ soit $e$.

Dans le cas où $\star$ est l'addition (resp. la multiplication), on note [2] $\sum_{k=1}^{n} e_k$ (resp. $\prod_{k=1}^{n} e_k$) cette composée.

**Exercice (Somme des $n$ premiers entiers non nuls)** 5

Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Le symbole $\sum$ possède de nombreuses propriétés facilitant le calcul. Illustrons-les sur quelques exemples :

2. Bien entendu, l'indice $k$ est une variable muette.

**Exercice (Somme des $n$ premiers entiers non nuls à la Gauss)** 6

Montrer le résultat de l'exercice précédent sans récurrence, en utilisant le symbole $\sum$.

Sommes télescopiques : ce sont les sommes de la forme

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k),$$

qui se simplifient en $a_{n+1}-a_0$.

**Exercice (Somme des carrés)** 7

En considérant la somme télescopique

$$\sum_{k=0}^{n}((k+1)^3-k^3),$$

montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Si on effectue un produit de nombres réels strictement positifs, la fonction logarithme permet de passer à une somme.

Quel est l'équivalent des sommes télescopiques pour les produits ? Les expressions (licites) du type $\prod_{1\leqslant p\leqslant n}\frac{a_{p+1}}{a_p}$.

**Définition (Factorielle)** 1.d

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$n!=\prod_{1\leqslant i\leqslant n} i$$

On convient que $0!=1$

On appelle le nombre $n!$ (la) *factorielle* (de) $n$.

**Exercice (Factorielle)** 8

Soit $n$ un entier naturel non nul. Exprimer

$$\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$

sans symbole de produit.

## 2. Ensembles finis

### 2.1. Notion d'ensemble fini. Cardinal d'un ensemble fini

**Rappel (Équipotence)**

Soit deux ensembles $A$ et $B$. On dit que $A$ est *en bijection avec* (ou *équipotent à*) $B$ s'il existe une bijection de $A$ dans $B$. Cette relation est clairement une relation d'équivalence.
Grâce à la symétrie, on dit que $A$ et $B$ *sont en bijection* (ou *équipotents*) au lieu de $A$ est en bijection avec $B$.

**Lemme (Indifférence de l'élément enlevé pour le cardinal)** 2.a

Soit $E$ un ensemble non vide, et $a, b \in E$. Alors $E \setminus \{a\}$ et $E \setminus \{b\}$ sont en bijection.

**Démonstration**

Soit $\varphi : E \to E$, telle que

$$\begin{cases} \forall x \in E - \{a, b\}, \varphi(x) &= x \\ \varphi(a) &= b \\ \varphi(b) &= a \end{cases}$$

Cette application est clairement une involution, c'est donc une bijection de $E$ sur $E$.
La restriction $\varphi_{|E\setminus\{a\}}^{|E\setminus\{b\}}$ de $\varphi$ définit une bijection de $E \setminus \{a\}$ sur $E \setminus \{b\}$, ces ensembles sont donc en bijection.

□

**Lemme Unicité du cardinal** 2.b

Si $n$ et $m$ sont deux entiers naturels tels que $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$ soient en bijection, alors $n = m$.

**Démonstration**

Montrons cette assertion par récurrence sur $m$. L'amorçage pour $m = 0$ est clair. Supposons le résultat établi à un rang $m \in \mathbb{N}$ fixé, montrons qu'il subsiste au rang suivant :
Soit donc un entier $n$ tel que $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m+1]\!]$ soient en bijection. Soit $f$ une bijection de $[\![1, m+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$. En particulier, $n$ est non nul. En notant $m_0 = f^{-1}(n)$, on a clairement une bijection entre $[\![1, m+1]\!] \setminus \{m_0\}$ et $[\![1, n-1]\!]$. En outre, d'après le lemme précédent, $[\![1, m+1]\!] \setminus \{m_0\}$ et $[\![1, m]\!]$ sont en bijection. Par conséquent, $[\![1, m]\!]$ et $[\![1, n-1]\!]$ sont en bijection. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $m = n - 1$, soit $n = m + 1$. La propriété est donc héréditaire.
L'assertion est donc établie.

□

**Définition (Ensemble fini)** 2.a

Un ensemble $E$ est dit *fini* s'il existe une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $E$, pour un certain entier naturel $n$. Le *cardinal* (ou *nombre d'éléments*) de $E$ est alors le nombre $n$, et est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$.
Un ensemble non fini est dit *infini*.

Pour définir cette notion très intuitive de « nombres d'éléments », on s'appuie sur les ensembles finis les plus simples (ceux de la forme $[\![1,n]\!]$), et on utilise la relation d'équipotence (qui est une relation d'équivalence). Autrement dit, on regroupe les ensembles finis par « classes d'équivalence ». Cette notion de cardinal d'un ensemble fini est bien définie grâce au lemme (un même ensemble fini ne peut pas avoir deux cardinaux distincts). Deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal.

**Exemple (Ensembles finis)** i

(1) L'ensemble vide est donc un ensemble fini de cardinal nul (et c'est le seul) ;
(2) Pour tous $(p,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $[\![p+1,p+n]\!]$ est de cardinal $n$. Il suffit en effet d'introduire la bijection $x \mapsto x+p$ de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![p+1,p+n]\!]$.
(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[\![0,n]\!]$ est de cardinal $n+1$ (c'est un cas particulier de l'exemple précédent).
(4) Plus généralement, $[\![p,q]\!]$ (pour $p \leqslant q$) est de cardinal $q-p+1$.
(5) $\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$ est de cardinal 2.

### 2.2. Parties d'un ensemble fini

**Lemme (Ensemble fini privé d'un élément)** 2.c

Si $E$ est un ensemble fini de cardinal non nul $n$, et $a$ un élément de $E$, alors $E \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $\operatorname{Card}(E)-1$.

**Démonstration**

La démonstration est similaire à celle du précédent lemme : soit en effet $E$ un ensemble fini de cardinal non nul $n$. Soit $f$ une bijection de $E$ sur $[\![1,n]\!]$, et $a \in E$. L'ensemble $E \setminus \{a\}$ est en bijection avec $E \setminus \{f^{-1}(n)\}$, donc avec $[\![1,n-1]\!]$ : il est fini de cardinal $n-1$.

$\square$

**Théorème (Partie d'un ensemble fini)** 2.d

Soit $E$ un ensemble fini, et $F$ une partie de $E$. On a :
(1) $F$ est un ensemble fini et $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$ ;
(2) $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ si et seulement si $F = E$.

Démonstration

On montre ceci par récurrence sur le cardinal de $E$. Il n'y a rien à prouver pour $E = \emptyset$. Pour $E$ non vide, si $F = E$, il n'y a rien à prouver, et sinon, $F \subsetneq E$, donc il existe $a \in E$ tel que $F \subset E - \{a\}$. Ce dernier ensemble est de cardinal $\operatorname{Card} E - 1$, ce qui prouve par hypothèse de récurrence que $F$ est fini, et que $\operatorname{Card} F < \operatorname{Card} E$.

□

Cardinal et parties strictes

Un ensemble fini ne peut donc pas être en bijection avec l'une de ses parties strictes. En revanche, un ensemble infini peut-être équipotent à l'une de ses parties strictes [a]

*a.* et même tout ensemble infini est équipotent à l'une de ses parties strictes, c'est l'une des définitions possibles de la notion d'ensemble infini.

2.1

Partie finie d'entiers

Une partie non vide $P$ de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée. Ce résultat est évidemment faux en général, pour les parties de $\mathbb{R}$ par exemple.

2.2

Exercice (Suite monotone d'entiers naturels)

On considère ici des suites d'entiers naturels indexées par $\mathbb{N}$.

**1** Montrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire (*i.e.* il existe un rang à partir duquel la suite est constante).

**2** Montrer que toute suite croissante d'entiers naturels est non majorée ou stationnaire.

9

### 2.3. Ensembles finis et applications

Proposition (Ensembles finis et surjectivité)

Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $F$ étant fini. Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. L'image $f(E)$ de $f$ est alors finie, $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card} F$, et cette inégalité est une égalité si et seulement si $f$ est surjective.

2.e

Démonstration

L'image de $f$ étant une partie de $F$, elle est finie, et $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card} F$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $f(E) = F$, *i.e.* $f$ est surjective.

□

**Proposition (Ensembles finis et injectivité)**

Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $E$ étant fini. Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. L'image $f(E)$ de $f$ est alors finie, $\mathrm{Card}(f(E)) \leqslant \mathrm{Card}(E)$, et cette inégalité est une égalité si et seulement si $f$ est injective.

2.f

**Démonstration**

Montrons ceci par récurrence sur le cardinal de $E$.
L'amorçage pour $E = \emptyset$ est évident.
Supposons l'assertion prouvée (pour toute application $f : E \to F$) si $E$ est de cardinal $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons qu'elle subsiste au rang suivant. Soit donc $E$ un ensemble de cardinal $n+1$, et $f : E \to F$ une application.
Supposons dans un premier temps $f$ injective : la restriction de $f$ à son image à l'arrivée est une bijection, donc $f(E)$ et $E$ sont équipotents. En particulier, $f(E)$ est un ensemble fini, de même cardinal que $E$.
Supposons maintenant $f$ non injective. On peut donc trouver deux éléments distincts $a$ et $b$ de $E$ tels que $f(a) = f(b)$. Bien sûr, l'image de $f$ est également $f(E \setminus \{a\})$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à la restriction de $f$ à $E \setminus \{a\}$ (de cardinal $n$) au départ, on constate que l'image de $f$ est finie, de cardinal au plus $n$. En particulier, $\mathrm{Card}(f(E)) < \mathrm{Card}(E)$ : l'hérédité est démontrée, le résultat s'ensuit.

□

Cela donne une condition suffisante de non surjectivité (resp. de non injectivité) : il suffit que $\mathrm{Card}(F) > \mathrm{Card}(E)$ (resp. il suffit que $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$).

**Théorème (Ensembles finis et bijectivité)**

Étant donnés deux ensembles finis $E$ et $F$, de même cardinal $n$, et une application $f$ de $E$ dans $F$, les propriétés suivantes sont équivalentes deux à deux :

(1) $f$ est injective ;

(2) $f$ est surjective ;

(3) $f$ est bijective.

2.g

**Démonstration**

En effet, dire que $f$ est surjective revient à dire que $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F) = n$, et dire que $f$ est injective revient à dire que $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E) = n$.
Les deux premières assertions sont donc équivalentes : elles sont également équivalente à leur conjonction, *i.e.* à la troisième assertion.

□

Dans ce contexte très particulier, il suffit, pour prouver la bijectivité, de prouver l'injectivité (ou la surjectivité). Dans un certain nombre d'exercices, on demande de prouver un résultat d'existence. On a parfois intérêt à introduire une application entre ensembles finis (le plus souvent : d'un ensemble fini sur lui-même) dont on prouve l'injectivité (résultat d'unicité), puis la surjectivité (résultat d'existence) grâce à ce théorème.

**Exercice (De l'injectivité à la surjectivité)**

Faire l'exercice 15 de TD.

10

**Proposition (Indexation d'un ensemble fini de naturels)** — 2.h

Si $P$ est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$ de cardinal $n$, alors il existe une unique bijection strictement croissante de $[\![1, n]\!]$ sur $P$.

**Démonstration**

**Existence :** cette propriété est claire si $P$ un singleton. Fixons un entier naturel non nul $n$, et supposons la propriété établie pour toute partie $P$ de $\mathbb{N}$ de cardinal $n$. Soit $P$ une partie de $\mathbb{N}$, de cardinal $n+1$. Cette partie de $\mathbb{N}$ est finie, donc majorée. Comme elle est en outre non vide, elle admet un plus grand élément $M$. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut trouver une application strictement croissante $g$ de $[\![1, n]\!]$ sur $P \setminus \{M\}$. La fonction $f$ de $[\![1, n+1]\!]$ dans $P$, coïncidant avec $g$ sur $[\![1, n]\!]$, et valant $M$ en $n+1$, est clairement une bijection strictement croissante de $[\![1, n+1]\!]$ sur $P$.
L'existence est démontrée.

**Unicité :** supposons que $f$ et $g$ soient des bijections strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ sur $P$. L'application $f^{-1} \circ g$ est donc une bijection strictement croissante de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après le premier exercice sur la récurrence, on a $f^{-1} \circ g(k) \geqslant k$, puis, par croissance de $f$, $g(k) \geqslant f(k)$.
Par symétrie des rôles joués par $f$ et $g$ (ou en effectuant un raisonnement analogue sur $g^{-1} \circ f$), on a $f(k) \geqslant g(k)$ : $f(k) = g(k)$.
Ceci valant pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a bien $f = g$.

□

En fait, cette proposition se généralise à tout partie finie non vide d'un ensemble totalement ordonné.

## 3. Dénombrement

### 3.1. Opérations sur les ensembles finis

**Lemme (Cardinal d'une union disjointe de deux ensembles)** — 3.a

Soit $A$ et $B$ deux ensembles finis disjoints. L'ensemble $A \cup B$ est alors fini, et :

$$\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$$

**Démonstration**

Si $n$ et $m$ sont les cardinaux respectifs de $A$ et $B$, on définit aisément une bijection de $[\![1, n+m]\!]$ sur $A \cup B$ :

□

Corollaire (Cardinal d'un complémentaire)

Soit $A$ une partie de l'ensemble fini $E$. On a alors :

$$\operatorname{Card}(E \setminus A) = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$$

3.b

Démonstration

En effet, $A$ et $E \setminus A$ sont finies, disjointes, et de réunion $E$. □

Proposition (Cardinal d'une union disjointe de $p$ ensembles)

Si $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est une famille de $p$ ensembles finis deux à deux disjoints, alors $\bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} A_k$ est un ensemble fini, et :

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant p} A_k\right) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \operatorname{Card} A_k$$

3.c

Démonstration

Récurrence sur $p$. □

Proposition (Cardinal d'une union de deux ensembles finis)

Soit $A$ et $B$ deux ensembles finis. L'ensemble $A \cup B$ est alors fini, et :

$$\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$$

3.d

Démonstration

En effet, $A$ et $B \setminus A$ (resp. $A \cap B$ et $B \setminus A$) sont disjoints, et leur union est $A \cup B$ (resp. $A$). □

Proposition (Cardinal d'un produit cartésien)

Si $A$ et $B$ sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est fini, et :

$$\operatorname{Card}(A \times B) = \operatorname{Card} A \operatorname{Card} B$$

3.e

Démonstration

$A \times B$ est la réunion disjointe des $\{a\} \times B$, pour $a$ parcourant $A$. □

**Corollaire (Cardinal de $A^p$)**

Soit $A$ un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $A^p$ est fini, et :

$$\operatorname{Card} A^p = (\operatorname{Card} A)^p$$

3.f

**Démonstration**

Récurrence sur $p$. □

### 3.2. Dénombrement lié aux applications entre ensembles finis

**Proposition (Cardinal de $E^A$)**

Si $E$ et $A$ sont finis, alors $E^A$ est fini, de cardinal $(\operatorname{Card} E)^{\operatorname{Card} A}$.

3.g

**Démonstration**

□

Cette formule justifie *a posteriori* l'emploi de la notation $E^A$.

**Proposition (Nombre d'applications injectives)**

Étant donnés deux ensembles finis non vides $E$ et $F$, de cardinaux respectifs $m$ et $n$, le nombre d'applications injectives de $E$ dans $F$ est :

(1) nul si $m > n$ ;

(2) égal à $\frac{n!}{(n-m)!}$ sinon.

3.h

**Démonstration**

Le seul cas digne d'intérêt est celui où $m \leqslant n$.
On peut raisonner par récurrence sur $n$ : pour tout entier naturel $n$, on formule l'hypothèse de récurrence suivante :
$\mathcal{H}_n$ : pour tout entier naturel $m$ compris entre 0 et $n$, et tous ensembles $E$ et $F$ de cardinaux respectifs $m$ et $n$, l'ensemble $\Omega_{E,F}$ des injections de $E$ dans $F$ est de cardinal $\frac{n!}{(n-m)!}$.
L'amorçage pour $n = 0$ est clair ($\emptyset^\emptyset$ est de cardinal 1).
Fixons un entier naturel $n$, supposons $\mathcal{H}_n$, et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$ : soit $m$ un entier naturel inférieur ou égal à $n+1$, $E$ et $F$ deux ensembles finis de cardinaux respectifs $m$ et $n+1$. Si $m = 0$, le résultat est clair. Si $m \geqslant 1$, soit $a$ un élément de $E$. Se donner une injection $f$ de $E$ dans $F$, c'est se donner une image de $a$ par $f$ ($n+1$ possibilités), puis une injection de $E \backslash \{a\}$ dans $F \backslash \{f(a)\}$ : l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_m$ pour ces deux derniers ensembles montre que nous avons exactement $\frac{n!}{(n-(m-1))!}$ possibilités pour ce faire. Au total, l'ensemble $\Omega_{E,F}$ est de cardinal

$$(n+1)\frac{n!}{(n+1-m)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!}$$

L'hérédité est bien prouvée.
En conclusion, la formule est bien valable pour tout entier naturel $n$, et tout entier naturel $m$ inférieur ou égal à $n$.

$\square$

**Définition (Permutation)** 3.a

Une *permutation* d'un ensemble $E$ est une bijection de $E$ sur lui-même.
On note $\mathcal{S}_E$ ou $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des permutations de $E$.

Le nombre de permutations d'un ensemble fini $E$ est $(\operatorname{Card} E)!$.

### 3.3. Parties de $E$

**Définition (Application caractéristique d'une partie)** 3.b

Soit $E$ un ensemble, et $A$ une partie de $E$. L'*application caractéristique* (ou *indicatrice*) de $A$ (dans $E$), notée $1_A$ ou $\chi_A$, est l'application de $E$ dans $\{0,1\}$, telle que :

$$\forall x \in E, \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

**Exercice (Fonctions caractéristiques)** 11

Soit $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. Écrire les fonctions $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{E\backslash A}$ et $\chi_{A\cup B}$ en fonction de $\chi_A$ et $\chi_B$.

**Proposition (Indicatrices et parties)** 3.i

L'application $\psi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$ envoyant $A \in \mathcal{P}(E)$ sur $1_A$ est une bijection.

**Démonstration**

Sa bijection réciproque est :

$\square$

**Proposition (Cardinal d'un ensemble de parties)** 3.j

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal $2^n$.

**Démonstration**

Conséquence immédiate de la proposition précédente.

$\square$

**Définition (Combinaison)** 3.c

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$, et soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle *combinaison* (de $p$ objets (pris) dans $E$) une partie de $E$ de cardinal $p$. Le cardinal de leur ensemble (fini car $\mathcal{P}(E)$ l'est) est noté $\binom{n}{p}$ (prononcé $p$ parmi $n$).

$\binom{n}{p}$ est donc le nombre de parties de cardinal $p$ dans un ensemble de cardinal $n$ La notation ne fait pas référence à $E$, ce qui se justifie aisément

**Proposition (Formule pour les combinaisons)** 3.k

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $p \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Démonstration**

Soit $E$ de cardinal $n$, et $X_p$ une partie de $E$ de cardinal $p$. L'ensemble $\Omega_{X_p}$ des applications injectives de $[\![1, p]\!]$ dans $X_p$ est donc de cardinal $p!$.
Notons $A_p$ l'ensemble des parties de $E$ de cardinal $p$.
L'ensemble $\nabla_p$ des applications injectives de $[\![1, p]\!]$ dans $E$ est de cardinal $\frac{n!}{(n-p)!}$.
De plus, $\nabla_p$ est l'union disjointe (de $\binom{n}{p}$ ensembles) :

$$\nabla_p = \sqcup_{X_p \in A_p} \Omega_{X_p},$$

ce qui donne le résultat.

$\square$

Évidemment, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

**Proposition (Formules combinatoires)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Si en outre $n$ et $p$ sont $\geqslant 1$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \text{ (triangle de Pascal)}$$

3.1

Montrer ceci par le calcul :

**Démonstration**

□

Montrer à nouveau ces résultats à l'aide de raisonnements combinatoires :

**Démonstration**

□

**Exercice (Autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair)**

**1** Montrer par la formule du binôme de Newton que

$$\sum_{p \text{ pair}} \binom{n}{p} = \sum_{p \text{ impair}} \binom{n}{p}$$

**2** Le montrer par des interprétations ensemblistes.

12

## 4. Nombres entiers (relatifs), nombres rationnels

Les constructions de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}$ ne sont pas au programme, puisqu'elles font intervenir la notion de relation d'équivalence. Retenons que le monoïde abélien $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, que l'addition (resp. la multiplication, la relation d'ordre) dans $\mathbb{Z}$ prolonge celle de $\mathbb{N}$, et que :

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Pour construire $\mathbb{Z}$, on utilise une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ($(a, b) \equiv (a', b')$ si et seulement si $a + b' = a' + b$). Un élément $n_0$ de $\mathbb{Z}$ ne correspond pas seulement à un couple $(a_0, b_0)$ tel que $n_0 = a_0 - b_0$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mais plutôt à l'ensemble des couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ équivalents à $(a_0, b_0)$ :

$$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, b) \equiv (a_0, b_0)\}$$

**Exercice (Lois sur les relatifs)** 13

(facultatif) décrire les lois d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}$

Les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ sont $-1$ et $1$, d'où la construction de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, contenant $\mathbb{Z}$. Remarquons que l'addition, (resp. la multiplication, la relation d'ordre) dans $\mathbb{Q}$ prolonge celle de $\mathbb{Z}$, et que :

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.

Pour construire $\mathbb{Q}$, on utilise une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ($(a, b) \equiv (a', b')$ si et seulement si $ab' = a'b$). Il dispose aussi d'un ordre, prolongeant celui de $\mathbb{Z}$.

**Définition (Valeur absolue)** 4.a

On définit une application $|.| : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+$, $x \mapsto x$ si $x \geqslant 0$, et $x \mapsto -x$ si $x \leqslant 0$. Cette fonction est appelée (fonction) *valeur absolue*, et elle vérifie les propriétés suivantes :
- $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- $\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad ||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$ ;
- $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad |xy| = |x||y|$.

**Exercice (Automorphismes du corps des nombres rationnels)** 14

Exercice important : montrer que le seul automorphisme de corps de $\mathbb{Q}$ est l'identité.

# 5. Feuille de TD 10 : Entiers naturels

## 5.1. Raisonnement par récurrence

**Exercice 1 (Suite récurrente bien définie)** 0

**1** Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)$ de nombres réels telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{1+u_n}.$$

**2** Même question pour les conditions $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 1 + \ln(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**3** Même question pour les conditions $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = \sqrt{2 - w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 2 (Raisonnement par récurrence)** 0

**1** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
**2** Soit $x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$ divise $x^2 - x$, alors $p$ divise $x^n - x$.
**3** Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$, le nombre $m^{2r+1} + n^{2r+1}$ est divisible par $m + n$.
**4** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, et

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que pour tout entier naturel, $u_n = n(n-1)$.
**5** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

**Exercice 3 (Inégalité arithmético-géométrique : une preuve de Cauchy)** 2

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on formule l'hypothèse de récurrence suivante (appelée *inégalité arithmético-géométrique* pour $n$ réels positifs) :

$$(\mathcal{H}_n): \quad \forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(1) Montrer $\mathcal{H}_2$ ;
(2) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'implication $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n-1}$ ;
(3) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'implication $(\mathcal{H}_n \wedge \mathcal{H}_2) \Rightarrow \mathcal{H}_{2n}$ ;
(4) En déduire que $\mathcal{H}_n$ est vraie, pour tout $n \geqslant 2$.

### 5.2. Utilisation des symboles de somme et de produit

**Exercice 4 (Symboles de somme et de produit)** — 0

**1** Établir une formule pour $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ valable pour chaque entier $n \geqslant 2$.
**2** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $1\ 1! + 2\ 2! + \cdots + n\ n! = (n+1)! - 1$.
**3** Évaluer, pour tout entier naturel $n$, la somme

$$S_n = \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, p+q\leqslant n\}} (p+q).$$

**4** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Trouver une formule pour $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)$.
**5** De même pour $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$.
**6** Soit $n$ un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} \min(\{i,j\})$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \min(\{i,j\})$ et $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \min(\{i,j\})$.
**7** Soit $n$ un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} ij$.

**Exercice 5 (Sommes de puissances)** — 1

**1** Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
**2** Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
**3** Trouver une formule analogue pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$. Quel est le lien entre cette somme et $\sum_{k=0}^{n} k$ ? Retrouver ce lien par un dessin.

**Exercice 6 (Somme de carrés de nombres de même parité)** — 3

Montrer de deux manières différentes que, pour tout entier pair $\geqslant 2$, on a :

$$2^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3}$$

Montrer que pour tout entier naturel impair $n$, on a

$$1^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3}.$$

**Exercice 7 (Cube et carrés)** — 3

Montrer que le cube d'un entier positif peut toujours s'écrire comme la différence de deux carrés.

**Exercice 8 (Sommes de sommes)** — 4

On définit par récurrence $S_{m,n}$ par :
– $\forall n \in \mathbb{N}, S_{0,n} = \sum_{k=0}^{n} 1$ ;
– $\forall m,n \in \mathbb{N}, S_{m+1,n} = \sum_{k=0}^{n} S_{m,k}$.
Donner une expression simple de $S_{m,n}$, pour tous $n,m \in \mathbb{N}$.

### 5.3. Dénombrement

**Exercice 9 (Nombre de zéros)** 3

Par combien de zéros se termine le nombre 1000000! ?

**Exercice 10 (Formules de convolution de Vandermonde)** 3

**1** Montrer :

$$\forall (p,q,r) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}.$$

**2** En déduire une expression plus simple de $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

**Exercice 11 (Dénombrement lié à des parties)** 3

**1** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\mathrm{Card}\left\{(A,B) \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])^2, A \subset B\right\}.$$

**2** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Calculer

$$\sum_{A \subset E} \mathrm{Card}(A), \qquad \sum_{A,B \subset E} \mathrm{Card}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \sum_{A,B \subset E} \mathrm{Card}(A \cup B).$$

**Exercice 12 (Mines PSI 08)** 3

Soit $E$ un ensemble fini, $A$ et $B$ des parties de $E$. Combien y a-t-il de parties $X$ de $E$ telles que $A \cup X = B$ ?

**Exercice 13 (X PC 08)** 3

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$ et $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Déterminer le nombre de $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \cap X = B$.

**Exercice 14 (Décomposition d'un entier en somme)** 4

On fixe un entier $n \geqslant 1$, et $p \in [\![1,n]\!]$. Calculer :

$$\mathrm{Card}\{(a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{N}^p, a_1 + \cdots + a_p = n\}.$$

### 5.4. Ensembles finis, curiosités

**Exercice 15 (Monoïde fini et régulier)** 1

On appelle *monoïde* un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre pour cette loi. Montrer qu'un monoïde fini et régulier (*i.e.* tout élément est simplifiable à gauche et à droite) est un groupe.

### Exercice 16 (Élément d'un groupe fini) — 1

Soit $G$ un groupe multiplicatif fini d'élement neutre $e$.

**1** Montrer que pour tout $g \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$.

**2** Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $g \in G$, on ait $g^n = e$.

### Exercice 17 (Utilisation du principe des tiroirs) — 2

Soit $n$ un entier naturel non nul. On choisit $n+1$ nombres quelconques (distincts deux à deux) dans $[\![1, 2n]\!]$. Montrer qu'il en existe deux qui sont premiers entre eux. Montrer qu'il en existe deux tels que l'un divise l'autre.

### Exercice 18 (X MP 08) — 3

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ par trois méthodes différentes.

### Exercice 19 (Parties disjointes de même somme) — 5

Soit $S$ un ensemble de 10 entiers distincts choisis parmi les nombres $1, 2, \dots, 99$. Montrer que $S$ contient toujours deux sous-ensembles disjoints dont la somme de leurs éléments respectifs est la même.

### Exercice 20 (Mondanités) — 5

Monsieur et Madame Machin ont été invités à une soirée à laquelle assistaient aussi quatre autres couples, ce qui faisait un total de dix personnes. À l'arrivée des invités, un certain nombre de poignées de mains furent échangées, d'une manière imprévisible, mais sujette à deux conditions évidentes : personne n'a serré sa propre main, et aucun mari n'a serré la main de sa femme. À la fin, par curiosité, M. Machin circulait dans l'assistance en demandant à chaque personne : « Combien de mains avez-vous serrées ? … Et vous ? … Et vous ? » M. Machin a posé la question à neuf personnes (tout le monde, y compris sa femme), et a obtenu neuf réponses différentes. Combien de mains Madame Machin a-t-elle serrées ?

### Exercice 21 (Ensembles dénombrables) — 5

Soit $A$ et $B$ deux ensembles. L'ensemble $A$ est dit *équipotent* à $B$ s'il existe une bijection de $A$ sur $B$.

**1** Montrer que l'équipotence est une relation d'équivalence.

Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

**2** Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

**3** Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

**4** Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

**5** Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

CHAPITRE XI

# Structures algébriques

## Sommaire



## 1. Groupes

### 1.1. Lois de composition interne

Soit $E$ un ensemble non vide.

**Définition (Loi de composition interne)**

Une *loi de composition interne* $\diamond$ sur $E$ est une application de $E \times E$ dans $E$.
La loi $\diamond$ est dite *associative* si

$$\forall\, x, y, z \in E, \quad (x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$$

La loi $\diamond$ est dite *commutative* si

$$\forall\, x, y \in E, \quad (x \diamond y) = (y \diamond x)$$

$E$ possède un *élément neutre* pour la loi $\diamond$ s'il existe $e \in E$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad e \diamond x = x \diamond e = x$$

Si $(E, \diamond)$ possède un élément neutre $e$, alors un élément $x \in E$ est dit *symétrisable* (pour $\diamond$) s'il existe $x' \in E$ tel que

$$x \diamond x' = x' \diamond x = e$$

$x'$ est alors appelé *symétrique* de $x$ dans $(E, \diamond)$.

1.a

Dans ce qui suit, $E$ est muni d'une loi de composition interne $\diamond$.

**Définition (Partie stable)**

Une partie $A$ de $E$ est dite *stable* par $\diamond$ si, pour tout $(a, a') \in A^2$, $a \diamond a' \in A$. 1.b

**Proposition (Unicité de l'élément neutre, du symétrique)**

(1) $E$ possède au plus un élément neutre, qui est alors son propre symétrique.

(2) Dans le cas où la loi est associative et où $E$ admet un élément neutre $e$ pour $\diamond$, chaque élément de $E$ admet au plus un symétrique pour cette loi.

1.a

**Démonstration**

$\square$

**Définition (Élément simplifiable)**

Un élément $x$ de $E$ est dit *simplifiable à gauche* (pour $\diamond$) si, pour tous $y, z \in E$ tels que $x \diamond y = x \diamond z$, on a $y = z$. On définit de même le fait que $x$ soit *simplifiable à droite*. On dit que $x$ est *simplifiable* s'il est simplifiable à gauche et à droite.

1.c

**Proposition (Élément simplifiable)**

On suppose que $\diamond$ est associative et que $E$ admet un élément neutre $e$ pour $\diamond$. Tout élément symétrisable de $E$ est alors simplifiable.

1.b

**Démonstration**

$\square$

**Définition (Distributivité)**

On suppose $E$ muni d'une seconde loi de composition interne $\star$. On dit que $\star$ est *distributive à gauche* par rapport à $\diamond$ si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z).$$

On définit de même la *distributivité à droite*.
La loi $\star$ est dite *distributive* par rapport à $\diamond$ si elle l'est à gauche et à droite.

1.d

Exercice (Exemples de distributivité)

Donnez des exemples de lois distributives par rapport à d'autres.

1

### 1.2. Groupes, sous-groupes

Définition (Groupe)

Soit $G$ un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne $\star$. On dit que la loi $\star$ définit une *structure de groupe*, ou que $G$ (ou plutôt $(G, \star)$) est un *groupe* relativement à cette loi, si
- $\star$ est associative ;
- $G$ admet un élément neutre pour $\star$ (généralement noté $e$ ou $e_G$) ;
- tout élément de $G$ admet un symétrique dans $G$ pour la loi $\star$.

Le groupe $(G, \star)$ est dit *abélien* ou *commutatif* si la loi $\star$ de $G$ est commutative.

1.e

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

D'après 1.a et 1.b, $G$ a un unique élément neutre, tout élément de $G$ a un unique symétrique et est simplifiable.

On note souvent la loi d'un groupe multiplicativement [1] (le symétrique de $x$ est alors noté $x^{-1}$) ou additivement (le symétrique de $x$ est $-x$). Cette dernière notation est réservée au cas d'un groupe abélien. Dans le cas de la notation multiplicative, on peut définir les puissances $n$-ièmes (où $n$ est un entier relatif) d'un élément $x$ de $G$. On a alors, pour tout $x \in G$, tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ :

$$x^m x^n = x^{m+n} = x^n x^m$$

et

$$(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m$$

mais en général

$$(xy)^n \neq x^n y^n$$

(où $y \in G$). On a cependant bien égalité si $x$ et $y$ commutent, *i.e.* $xy = yx$.

Le symétrique du produit $xy$ est $y^{-1}x^{-1}$, mais pas $x^{-1}y^{-1}$ en général (c'est le cas si et seulement si les deux éléments commutent).

En notation additive, on définit de même $nx$ où $(n, x) \in \mathbb{Z} \times G$, et on a, pour tout $(x, y) \in G^2$ et tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ :

$$(m+n)x = mx + nx, \quad m(nx) = (mn)x, \quad m(x+y) = mx + my.$$

Exemple (Groupes)

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ pour l'addition.
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est un groupe.
- Groupe symétrique $\mathcal{S}_E$ associé à un ensemble non vide $E$. Ce groupe n'est pas abélien dès que $E$ possède trois éléments distincts.
- Groupe des isométries du plan ;
- Groupe produit (voir l'exercice 8 de TD).

i

1. Si on ne précise pas la loi, c'est d'ailleurs implicitement le cas.

**Définition (Sous-groupe)**

Une partie $H$ d'un groupe $(G, \cdot)$ est un *sous-groupe* de $G$ si $H$ est
- stable par $\cdot$ ;
- $H$, muni de la loi induite, est un groupe.

1.f

Nous noterons dans ce cours $H \leqslant G$ lorsque $H$ est un sous-groupe de $G$. Si en outre $H \neq G$, on note $H < G$, et on dit que $H$ est un sous-groupe *propre* de $G$.

Cette définition comporte des propriétés cachées : si $H$ est un sous-groupe de $G$, alors $e_H = e_G$, et le symétrique d'un élément de $H$ pour $\cdot$ est le même dans $H$ et dans $G$.

Si $G$ est abélien, alors tous ses sous-groupes le sont aussi.

Cette notion de sous-groupe est très importante, car en général, pour montrer qu'un ensemble est un groupe, on montre qu'il s'agit d'un sous-groupe d'un groupe bien connu. Cette remarque vaut d'ailleurs pour toutes les structures algébriques.

Voici deux critères pratiques pour montrer qu'une partie d'un groupe en est un sous-groupe ($H$ désigne une partie de $G$) :

**Proposition (Première caractérisation des sous-groupes)**

$H$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si
(1) $H \neq \emptyset$ ;
(2) $H$ est stable par la loi de $G$ ;
(3) $H$ est stable par passage au symétrique

1.c

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Seconde caractérisation des sous-groupes)**

$H$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si
(1) $H \neq \emptyset$ ;
(2) $\forall x, y \in H, \quad xy^{-1} \in H$.

1.d

Démonstration

$\square$

Exemple (Sous-groupes)

- Si $K \leqslant H$ et $H \leqslant G$, alors $K \leqslant G$.
- Un groupe ayant plus d'un élément admet au moins deux sous-groupes, $G$ lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre.
- $\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Q} \leqslant \mathbb{R} \leqslant \mathbb{C}$, mais aussi $\mathbb{U}_n \leqslant \mathbb{U} \leqslant \mathbb{C}^*$
- Une intersection quelconque de sous-groupes en est un.
- L'union de deux sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un est inclus dans l'autre. L'union de trois sous-groupes sans relations d'inclusion peut très bien être un sous-groupe (donnez un exemple).
- Nous verrons que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$.
- Centre d'un groupe : si $G$ est un groupe, alors son *centre*

$$Z(G) = \{g_0 \in G, \forall\, g \in G, gg_0 = g_0 g\}$$

est un sous-groupe commutatif de $G$.

ii

Exercice (Partie finie stable par multiplication)

Faire l'exercice 2 de TD.

2

### 1.3. Morphismes de groupes

Dans cette section, sauf mention contraire, $(G, \cdot)$ et $(G', \cdot)$ sont deux groupes, d'éléments neutres respectifs $e$ et $e'$.

Définition (Morphisme de groupe)

Soient $(G, T)$ et $(G', \nabla)$ deux groupes. Un *(homo-)morphisme* de $G$ vers $G'$ est une application $\varphi : G \to G'$ vérifiant :

$$\forall\, x, y \in G, \quad \varphi(xTy) = \varphi(x)\nabla\varphi(y)$$

L'ensemble des morphismes de $G$ vers $G'$ est noté $\mathrm{Hom}(G, G')$.
Un *endomorphisme* est un morphisme d'un groupe vers lui-même, l'ensemble des endomorphismes d'un groupe $G$ est noté $\mathrm{End}(G)$.
Un *isomorphisme* est un morphisme bijectif. S'il existe un isomorphisme entre deux groupes $G$ et $G'$, on dit alors que les deux groupes sont *isomorphes*.
Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif (ou encore : un isomorphisme d'un groupe vers lui-même).
L'ensemble des automorphismes de $G$ est noté $\mathrm{Aut}(G)$.

1.g

Sauf mention contraire, $\varphi$ désigne un morphisme de $G$ vers $G'$.

**Proposition (Composition de morphismes)**

Soit $G$, $G'$ et $G''$ trois groupes. Si $\varphi \in \operatorname{Hom}(G, G')$ et $\psi \in \operatorname{Hom}(G', G'')$, alors $\psi \circ \varphi \in \operatorname{Hom}(G, G'')$.

1.e

**Démonstration**

□

**Proposition (Bijection réciproque d'un isomorphisme)**

La bijection réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.

1.f

**Démonstration**

□

**Isomorphie**

L'isomorphie est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

1.1

**Proposition (Propriétés des morphismes de groupes)**

Soit $H$ et $H'$ des parties respectives de $G$ et de $G'$. On a :

(1) $\varphi(e) = e'$ ;

(2) $\forall\, x \in G, \quad \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$ ;

(3) $\forall\, x \in G, \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$ ;

(4) $(H \leqslant G) \Rightarrow (\varphi(H) \leqslant G')$ ;

(5) $(H' \leqslant G') \Rightarrow (\varphi^{-1}(H') \leqslant G)$.

1.g

**Démonstration**

$\square$

**Définition (Image et noyau d'un morphisme de groupes)**

$\varphi(G)$ (sous-groupe de $G'$) est appelé *image* de $\varphi$, noté $\operatorname{Im}\varphi$. $\varphi^{-1}(\{e'\})$ est appelé *noyau* de $\varphi$, et est noté $\operatorname{Ker}\varphi$ (c'est un sous-groupe de $G$).

1.h

On a donc $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{g \in G, \varphi(g) = e'\}$.

**Proposition (Injectivité et surjectivité d'un morphisme de groupes)**

$\varphi$ est surjective (resp. injective) si et seulement si $\operatorname{Im}\varphi = G'$ (resp. $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$).

1.h

**Démonstration**

□

**Exemple (Morphismes de groupes)**

- Les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les applications, $n \mapsto an$, où $a$ décrit $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto x^n$ (noyau $\mathbb{U}_n$) (Attention : la puissance $n$-ième – dans un groupe multiplicatif– n'est pas, en général, un morphisme).
- ln : $(\mathbb{R}_+^*, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ et exp : $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times)$.
- $\theta \mapsto e^{i\theta}$ morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$
- l'exponentielle est un morphisme surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ sur $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
- Soit $I$ un intervalle non vide, $a \in I$. L'application de $\mathbb{R}^I$ dans $\mathbb{R}$, qui à $f$ associe $f(a)$ est un morphisme de groupes (morphisme d'évaluation en $a$).
- $G \to G'$, $x \mapsto e'$, le morphisme trivial de $G$ dans $G'$, montre qu'entre deux groupes, il existe toujours un morphisme.

iii

**Exercice (Isomorphisme de groupes)**

Faire l'exercice 4 de TD.

3

**Exercice (Groupe fini commutatif)**

Faire l'exercice 5 de TD.

4

# 2. Anneaux

## 2.1. Définition et propriétés calculatoires

**Définition (Anneau)**

Soit $A$ un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ (ou $A$) est un *anneau* si
- $(A, +)$ est un groupe commutatif ;
- La loi $\times$ est associative, et distributive par rapport à l'addition ;
- Il existe un élément neutre pour le produit $\times$.

Si de plus la loi $\times$ est commutative, on dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau commutatif*.
L'élément neutre pour l'addition est noté $0$ ou $0_A$ et appelé *élément nul* de $A$.
L'élément neutre pour la multiplication est souvent noté $1$ ou $1_A$ et appelé *élément unité* de $A$.
Le symétrique d'un élément pour l'addition est appelé *opposé* (de cet élément).
S'il existe, le symétrique d'un élément pour la multiplication est appelé *inverse* (de cet élément).

2.a

Dans la suite, sauf mention contraire, $A$ désigne un anneau.
Soit $a \in A$. On définit [2] la notation $ma$ pour tout entier naturel $m$ par la récurrence suivante :

$$(0.a = 0_A) \wedge (\forall m \in \mathbb{N}, \quad (m+1)a = a + ma)$$

On étend alors cette notation au cas d'un entier négatif $m$, en posant $ma = -((-m)a)$.
On définit la notation $a^m$ pour tout entier naturel $m$ par la récurrence suivante :

$$(a^0 = 1_A) \wedge (\forall m \in \mathbb{N}, \quad a^{m+1} = aa^m)$$

Dans le cas où $a$ est inversible, on étend la notation $a^m$ au cas d'un entier négatif $m$, en posant $a^m = (a^{-1})^{-m}$.
On a (avec des notations évidentes) $(m+n)a = ma + na$, $m(na) = (mn)a$, $m(a+b) = ma + mb$. Pour la multiplication, on a $a^{m+n} = a^m a^n$, $a^{mn} = (a^m)^n$. En revanche, il n'est pas sûr que $(ab)^m = a^m b^m$.

**Proposition (Premières propriétés calculatoires dans un anneau)**

Pour tous $a, b, c \in A$ et tout entier relatif $m$, on a :
- $a0_A = 0_A a = 0_A$ (on dit que $0_A$ est *absorbant*) ;
- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ ;
- $(-a)(-b) = ab$ ;
- $(a-b)c = ac - bc$ ;
- $a(b-c) = ab - ac$ ;
- $a(mb) = (ma)b = m(ab)$.

2.a

2. On l'a déjà fait dans le cadre des groupes additifs.

Démonstration

□

Il se peut que $1_A = 0_A$, auquel cas l'anneau est réduit à son élément nul (et dit *nul*).

Exemple (Anneaux)

(1) $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.

(2) Si $(A, +, \times)$ est un anneau et $X$ un ensemble non vide, alors $A^X = \mathcal{F}(X, A)$, muni des lois déduites de $A$ est un anneau. En particulier, il en est ainsi de $\mathbb{R}^I$ et de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (où $I$ désigne un intervalle non vide).

(3) Si $A$ et $B$ sont deux anneaux, on peut définir un anneau produit (comme pour les groupes). En particulier, $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ est un anneau.

(4) $A[X]$, anneau des polynômes à coefficients dans $A$ à une indéterminée (et donc par exemple $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X, Y]$).

i

Proposition (Distributivité du produit par rapport au symbole sommatoire)

Soit $A$ un anneau, $n \in \mathbb{N}^*$, $b \in A$ et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in A^n$.

$$b \left( \sum_{i \in [\![1,n]\!]} a_i \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (b a_i)$$

et

$$\left( \sum_{i \in [\![1,n]\!]} a_i \right) b = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i b).$$

2.b

Démonstration

Récurrence sur $n$.

□

**Proposition (Formule sans nom)**

Soit $a, b \in A$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $a$ et $b$ commutent. On a :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k\right)(a-b).$$

2.c

**Démonstration**

Cette formule se démontre sans récurrence :

$$\begin{aligned}(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k\right) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^{k+1}\right)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^k\right) = a^n - b^n.\end{aligned}$$

De même dans l'autre sens.

□

**Proposition (Formule du binôme de Newton)**

Soit $a, b \in A$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $a$ et $b$ commutent. On a alors les relations :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2.d

**Démonstration**

Par récurrence sur $n$. L'amorçage est clair, détaillons le calcul principal de l'hérédité :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n\\ &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \quad (\text{car } ab = ba)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\ &= \binom{n}{0}b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

□

Pour appliquer ces formules, il faut absolument vérifier au préalable que les éléments commutent. Ce sera par exemple le cas si $A$ est commutatif.

Pour ne pas se tromper dans les exposants, on peut vérifier l'homogénéité de ces formules (voir $a$ et $b$ comme des longueurs).

**Exercice (Développement dans un anneau)** 5

Développer $(a-b)(a+b)$, $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$ pour $a$ et $b$ ne commutant pas.

**Exercice (Éléments nilpotents d'un anneau)** 6

Faire l'exercice 22 de TD.

**Notation (Éléments inversibles d'un anneau)** 2.b

Soit $A$ un anneau non nul. On note $A^\times$ (ou $A^*$) l'ensemble des éléments inversibles de $A$.

**Exemple (Éléments inversibles)** ii

$\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\} (\neq \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.
Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{R}^X$ (où $X$ est un ensemble non vide) ?

**Proposition (Les inversibles forment un groupe)** 2.e

Soit $A$ un anneau non nul. L'ensemble $A^\times$ est un groupe pour la loi $\times$.

**Démonstration**

$\square$

**Définition (Diviseur de zéro)** 2.c

Soit $A$ un anneau non nul, et $a \in A \setminus \{0\}$. On dit que $a$ est un *diviseur de zéro* s'il existe $b$ dans $A$, non nul, tel que $ab = 0$ ou $ba = 0$.

Un élément est un diviseur de zéro si et seulement si il est non simplifiable. En particulier, il ne peut être inversible, mais un élément peut ne pas être inversible tout en étant simplifiable (exemple : tout nombre distinct de 0, 1 et $-1$ dans $\mathbb{Z}$).

**Exemple (Diviseurs de zéro)** iii

Dans $A^2$ (avec $A \neq \{0\}$), $\mathbb{R}^X$ (avec $|X| \geqslant 2$), on a des diviseurs de zéro.

**Définition (Anneau intègre)** 2.d

Un anneau non nul est dit *intègre* s'il est commutatif et sans diviseur de zéro.

**Exemple (Anneaux intègres)** iv

Les anneaux usuels $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont intègres, mais pas $A^2$.
Soit $n \geqslant 2$. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (étudié dans l'un des DM) est intègre si et seulement si c'est un corps, *i.e.* si et seulement si $n$ est premier.

### 2.2. Sous-anneaux

$B$ désigne une partie de $A$.

**Définition (Sous-anneau)** 2.e

On dit que $B$ est un *sous-anneau* de $(A, +, \times)$ si :
- $1_A \in B$ ;
- $B$ est stable pour $+$ ;
- $B$ est stable pour $\times$ ;
- muni des lois induites, $(B, +, \times)$ possède une structure d'anneau.

On voit apparaître ici la condition $1_A \in B$, qui ne résulte pas des suivantes (voyez le contraste avec les sous-groupes).

Donner un exemple de partie non vide de $A$ (non nul) vérifiant toutes les conditions sauf celle-ci.

**Proposition (caractérisation des sous-anneaux)** 2.f

$B$ est un sous-anneau de $A$ si et seulement si

(1) $1_A \in B$ ;

(2) $\forall a, b \in B, \quad a - b \in B$ ;

(3) $\forall a, b \in B, \quad ab \in B$.

Démonstration

□

Exemple (Sous-anneaux)

(1) Si $C$ est un sous-anneau de $B$, et $B$ un sous-anneau de $A$, alors $C$ est un sous-anneau de $A$.
(2) On peut appliquer ceci à $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$.
(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(i)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ (voir le TD pour des définitions).
(4) Une intersection de sous-anneaux en est un.

v

### 2.3. Morphismes d'anneaux

$A$ et $B$ désignent des anneaux.

Définition (Morphisme d'anneaux)

On dit qu'une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :
– $f(1_A) = 1_B$ ;
– $\forall\, a, b \in A, \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$ ;
– $\forall\, a, b \in A, \quad f(ab) = f(a)f(b)$.

2.f

On a les propriétés classiques des morphismes. Par exemple, si $a$ est inversible, alors $f(a)$ l'est, d'inverse $f(a^{-1})$. Plus généralement, $f(a^n) = f(a)^n$ pour tout entier pour lequel cela a un sens. L'image directe ou réciproque d'un sous-anneau est un sous-anneau.

$f$ est donc (plus qu')un morphisme de groupes. En particulier, $f$ est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_A\}$.

Il est nécessaire de préciser que l'image de l'unité est l'unité (cela ne résulte pas des autres conditions, penser à l'application nulle).

Exemple (Morphismes d'anneaux)

(1) Dans $(\mathbb{R}^I, +, \cdot)$, évaluation en $a \in A$.

(2) Endomorphismes de l'anneau $\mathbb{Z}$ : ce sont des endomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, donc de la forme $n \mapsto an$. Comme un tel morphisme doit valoir 1 en 1, on en déduit que c'est $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

(3) Morphisme naturel d'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (et plus généralement de tout sous-anneau dans un anneau).

(4) Morphisme de dérivation dans un anneau de polynômes : c'est un morphisme de groupes additifs et d'espaces vectoriels, mais pas d'anneaux (il n'envoie pas l'unité sur l'unité, et ne respecte pas la multiplication).

(5) Shifts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (faire attention pour le shift à droite).

(6) Il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par exemple (plus prosaïquement : de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, etc.).

vi

Exercice (Éléments d'un anneau)

Faire l'exercice **??** de TD.

7

## 3. Corps

Définition (Corps)

Soit $K$ un ensemble muni de deux lois $+$ et $\times$. On dit que $(K, +, \times)$ est un *corps* si $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif non nul, dans lequel tout élément non nul est inversible.

3.a

Tout corps est un anneau intègre (et la réciproque est fausse).

Exemple (Corps)

(1) $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps.

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$ sont des corps (on montre que ce sont des sous-corps de $\mathbb{C}$).

(3) Pour tout nombre premier $p$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

(4) Le produit cartésien de deux corps n'est pas un corps.

i

Un corps $K$ est donc un anneau commutatif tel que $(K \setminus \{0\}, \times)$ soit un groupe.

Définition (Sous-corps)

Une partie $L$ d'un corps $(K, +\times)$ est appelée *sous-corps* de $K$ si $L$ est un sous-anneau de $K$, qui, muni des lois induites, est un corps. On dit alors que $K$ est un *surcorps* de $L$.

3.b

**Proposition (Caractérisation des sous-corps)**

$L$ est un sous-corps de $(K,+,\times)$ si et seulement si
- $1_K \in L$ ;
- $\forall x,y \in L, \quad x-y \in L$ ;
- $\forall (x,y) \in (L-\{0\})^2, \quad xy^{-1} \in L$.

3.a

**Démonstration**

□

**Définition (Morphisme de corps)**

Soient $(K,+,\times)$ et $(L,+,\times)$ deux corps. Une application $f : K \to L$ est un *morphisme du corps* $K$ vers le corps $L$ si $f$ est un morphisme de l'anneau $(K,+,\times)$ vers $(L,+\times)$.

3.c

S'il est prouvé que $f$ est non nul, il est superflu de prouver que $f(1_K)=1_L$ :

**Exercice (Morphisme de corps)**

Faire l'exercice 19 de TD.

8

**Exercice (Automorphismes du corps des réels)**

Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres réels.
**Indication :** on pourra vérifier qu'un tel automorphisme est croissant.

9

## 4. Questionnaire 4 : Structures algébriques

**1** Existe-t-il une loi distributive avec elle-même ?

**2** Quels sont les groupes dont toutes les parties non vides sont des sous-groupes ?

**3** $z \mapsto z^3$ est un automorphisme de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

**4** $x \mapsto x^3$ est un automorphisme de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

**5** On peut conférer à $]-1,1[$ une structure de groupe abélien. Même question pour $\mathbb{N}$, $[-1,1]$.

**6** L'ensemble des suites réelles arithmétiques est-il un groupe pour l'addition ? Même question pour les suites réelles géométriques.

**7** On peut trouver un groupe d'ordre 3 dont tout élément est son propre symétrique.

**8** On peut trouver un groupe d'ordre 8 dont tout élément est son propre symétrique.

**9** Soit $A$ un anneau commutatif, $a \in A$. À quelle condition (nécessaire et suffisante) $x \mapsto ax$ de $A$ dans $A$) est-elle une injection ? une surjection ?

**10** Existe-t-il un corps de cardinal 6 ?

**11** Soit $G$ un groupe quelconque. Tout sous-groupe de $G$ est-il le noyau d'un morphisme de groupes de source $G$ ?

**12** Tout anneau intègre est-il un corps ?

## 5. Feuille de TD 11 : Structures algébriques

### 5.1. Groupes

**Exercice 1 (Exemples de sous-groupes engendrées par une partie)** 0

On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Quel est le sous-groupe de $\mathbb{C}$ additif engendré par $\{i, j\}$ ? Quel est le sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ multiplicatif engendré par $\{i, j\}$ ?

**Exercice 2 (Partie finie stable par multiplication)** 0

Soit $G$ un groupe multiplicatif et $H$ une partie finie de $G$ non vide, stable par multiplication. Montrer que $H$ est un sous-groupe de $G$.

**Exercice 3 (Endomorphismes de $\mathbb{Z}$)** 0

Déterminer les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

**Exercice 4 (Isomorphisme de groupes)** 0

Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sont isomorphes. Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sont-ils isomorphes ?

**Exercice 5 (Groupe fini commutatif)** 1

Soit $G$ un groupe commutatif fini de cardinal $n$. Montrer que pour tout élément de $g$ de $G$, on a $g^n = e$.
**Indication :** considérer le produit des éléments de $G$.

**Exercice 6 (Opérations ensemblistes sur des sous-groupes)** 1

**1** Soit $G$ un groupe. Montrer que l'intersection de sous-groupes de $G$ est encore un sous-groupe de $G$.

**2** Montrer que la réunion de deux sous-groupes $H_1$ et $H_2$ de $G$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si l'un de ces sous-groupes est inclus dans l'autre.

**3** Donner un exemple de groupe réunion de trois de ses sous-groupes, ces derniers n'étant pas comparables pour la relation d'ordre d'inclusion.

**4** Soit $A$ une partie de $G$. Montrer que l'intersection des sous-groupes de $G$ contenant $A$ est le plus petit sous-groupe de $G$ (au sens de l'inclusion) contenant $A$. Le sous-groupe est noté $< A >$, et appelé *sous-groupe de $G$ engendré par $A$*.

Exercice 7 (Théorème de Cayley) 1

Soit $G$ un groupe, et $a$ un élément de $G$.

**1** Montrer que les applications $\alpha_a : g \mapsto ag$ et $\beta_a : g \mapsto ga$ – appelées respectivement applications de *multiplication (ou de translation) à gauche et à droite par a* – sont des permutations de $G$.

**2** Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle application soit un endomorphisme de $G$.

**3** Montrer que l'application $\phi : a \mapsto \alpha_a$ est un morphisme injectif de $G$ vers $\mathcal{S}_G$. En déduire que tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations (théorème de Cayley).

Exercice 8 (Structure de groupe produit) 1

Soient $(G, T)$ et $(G', *)$ deux groupes. Montrer que la loi $\nabla$ sur $G \times G'$ définie par

$$\forall (g_1, g_1'), (g_2, g_2') \in G \times G', \quad (g_1, g_1') \nabla (g_2, g_2') = (g_1 T g_2, g_1' * g_2')$$

confère à $G \times G'$ une structure de groupe, appelée structure de *groupe produit*, déduite (ou héritée) de celles de $G$ et $G'$.

Exercice 9 (Caractérisation de la commutativité) 1

Soit $G$ un groupe. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

**1** $G$ est abélien.

**2** L'application carré de $G$ dans $G$ est un endomorphisme de $G$.

**3** L'application inverse de $G$ dans $G$ est un automorphisme de $G$.

Exercice 10 (Transfert de structure) 1

Soit $G$ un groupe multiplicatif, $E$ un ensemble et $\phi : G \to E$ une bijection. On définit une opération $*$ sur $E$ par :

$$\forall\, x, y \in E, x * y = \phi\left(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $*$ confère à $E$ une structure de groupe, et que les groupes $G$ et $E$ sont isomorphes.

Exercice 11 (Groupe d'automorphismes d'un groupe) 1

Soit $G$ un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de $G$.

**1** Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

**2** Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

**3** Pour $a \in G$ on note $\phi_a$ l'application de $G$ dans $G$ telle que $\phi_a(x) = axa^{-1}$, pour tout élément $x$ de $G$ : $\phi_a$ est appelée *conjugaison par a* (dans $G$). Montrer que $\phi_a$ est un automorphisme de $G$, (on dit que $\phi_a$ est un automorphisme *intérieur*).

**4** Montrer que l'application $a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce morphisme soit injectif.

Exercice 12 (Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$) 2

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
**Indication :** on pourra utiliser 5.

Exercice 13 (Centre et commutant) 2

Soit $G$ un groupe multiplicatif. On note $Z(G) = \{a \in G, \forall\, b \in G,\ ab = ba\}$ (c'est le *centre* de $G$), et pour $a \in G$ : $C(a) = \{b \in G,\ ab = ba\}$ (c'est le *commutant* de $a$).
Montrer que $Z(G)$ et $C(a)$ sont des sous-groupes de $G$.

Exercice 14 (Structure de groupe) 3

**1** Soit $G$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à gauche et tel que chaque élément de $G$ admette un symétrique à gauche. Montrer que $G$ est un groupe.

**2** Soit $G$ un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative $\cdot$ telle que :

$$\forall\, a, b \in G,\ \exists x, y \in G \ :\ a = x \cdot b = b \cdot y.$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

**3** Soit $G$ un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que $G$ est un groupe.

## 5.2. Compléments sur les groupes

Exercice 15 (Théorème de Lagrange) 5

Le cardinal d'un groupe fini est également appelé *ordre* de ce groupe.
Soit $G$ un groupe fini, et $H$ un sous-groupe de $G$. On considère l'ensemble $\Omega$ des translatés à gauche de $H$ par un élément de $g$ :

$$\Omega = \{gH,\ g \in G\}$$

(pour $g \in G$ fixé, $gH$ désigne l'ensemble $\{gh,\ h \in H\}$).

**1** Montrer que la réunion des éléments de $\Omega$ est $G$.

**2** Montrer que chaque élément de $\Omega$ est de même cardinal que $H$.

**3** Montrer que deux éléments distincts de $\Omega$ sont disjoints.

**4** En déduire que l'ordre de $H$ divise celui de $G$ : c'est le théorème de Lagrange.

Exercice 16 (Ordre d'un élément d'un groupe) 5

On appelle *ordre* d'un élément $g$ d'un groupe $G$ le plus petit entier naturel non nul $k$ tel que $g^k = e$, s'il existe. On dit alors que $g$ est d'ordre fini.

**1** Montrer que pour tout élément $g$ d'un groupe fini $G$, $g$ est d'ordre fini (facile), divisant l'ordre de $G$ (moins facile).

**2** Montrer que tout groupe d'ordre pair admet un élément d'ordre 2.

**3** Donner un exemple de groupe infini dont tout élément est d'ordre fini.

**4** Montrer que si $m$ est l'ordre de $g \in G$, alors $g^k = e$ si et seulement si $m$ divise $k$.

Exercice 17 (Résultats élémentaires sur les ordres) 5

**1** Soit $G$ et $G'$ deux groupes et $f$ un morphisme de $G$ dans $G'$. Pour $a \in G$, comparer l'ordre de $a$ et celui de $f(a)$.
**2** Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de $a$ et de $bab^{-1}$.
**3** Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de $ab$ et de $ba$.

Exercice 18 (Racine carrée dans un groupe d'ordre impair) 5

Soit $G$ un groupe fini de cardinal impair. Montrer que :

$$\forall\, x \in G,\ \exists! y \in G \text{ tel que } x = y^2.$$

**Indication :** montrer que l'application carrée est surjective grâce au travail précédent. En déduire qu'elle est bijective.

## 5.3. Anneaux, corps

Exercice 19 (Morphisme de corps) 0

Montrer que tout morphisme de corps est injectif.

Exercice 20 (Anneau des endomorphismes d'un groupe commutatif) 1

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de $G$, sur lequel on définit la loi (notée abusivement) $+$ par :

$$\forall\, f, g \in \mathrm{End}(G), \forall\, x \in G, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 21 (Anneau intègre fini) 1

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 22 (Éléments nilpotents d'un anneau) 1

Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nul. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.
**1** Montrer qu'un élément de $A$ ne peut pas être à la fois nilpotent et inversible.
**2** Donner un exemple d'élément nilpotent non nul dans l'anneau des endomorphismes de $(\mathbb{C}, +)$.
**3** Montrer qu'il peut exister des éléments ni inversibles ni nilpotents.
**4** Montrer que si $x$ est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible.
**5** Montrer que si $x$ et $y$ sont nilpotents et commutent, alors $xy$ et $x + y$ sont nilpotents.

**Exercice 23 (Morphisme d'anneaux)** 2

Étant donné deux anneaux $A$ et $B$ quelconques, existe-t-il au moins un morphisme d'anneaux de $A$ vers $B$ ?

**Exercice 24 (Centre d'un anneau)** 3

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On appelle *centre* de $A$ l'ensemble $C = \{x \in A, \forall\, y \in A, xy = yx\}$. Montrer que $C$ est un sous-anneau de $A$.

**Exercice 25 (Idéaux)** 3

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif non nul. Un *idéal* $\mathcal{I}$ de $A$ est un sous-ensemble de $A$ vérifiant :
– $(\mathcal{I}, +)$ est un groupe ;
– $\forall\, a \in A, \forall\, y \in \mathcal{I}, \quad ay \in \mathcal{I}$.

**1** Montrer que pour tout $\alpha \in A$, $\alpha A = \{\alpha x,\ x \in A\}$ est un idéal de $A$. Montrer en particulier que $\{0\}$ et $A$ sont deux idéaux de $A$.

**2** Montrer que $A$ est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et $A$.

**3** Trouver tous les idéaux de $\mathbb{Z}$.

**Exercice 26 (Anneau des entiers de Gauss)** 3

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C}, \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad z = a + ib\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre pour les lois d'addition et de multiplication déduites de celles de $\mathbb{C}$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

**Exercice 27 (Groupe d'automorphismes d'une extension quadratique de $\mathbb{Q}$)** 3

On pose $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{z \in \mathbb{R}, \exists (a, b) \in \mathbb{Q}^2, \quad z = a + b\sqrt{3}\}$. Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un corps pour les lois déduites de celles de $\mathbb{R}$.
Déterminer le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

**Exercice 28 (Radical d'un idéal)** 3

Soit $A$ un anneau commutatif, $I$ un idéal de $A$. On appelle *radical* de $I$ et on note $\sqrt{I}$ l'ensemble :

$$\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

Dans $\mathbb{Z}$, calculer $\sqrt{12\mathbb{Z}}$, $\sqrt{72\mathbb{Z}}$.

**Exercice 29 (Une caractérisation des corps)** 3

Soit $A$ un anneau commutatif non nul dont tout idéal est premier, c'est-à-dire vérifie, pour tout $(x, y) \in A^2$ :

$$xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Montrer que $A$ est un corps.

Exercice 30 (Corps algébriquement clos) 5

Un corps $K$ est dit *algébriquement clos* si tout polynôme non constant à coefficients dans $K$ admet une racine dans $K$. Montrer qu'un corps algébriquement clos est de cardinal infini.

CHAPITRE XII

# Espaces vectoriels

## Sommaire



L'algèbre linéaire est le plus important thème en algèbre cette année. Il est fréquent qu'un phénomène (physique, biologique, économique, etc.) soit modélisé – en première approximation – par des équations linéaires. Le concept de linéarité éclaire bien entendu beaucoup de théories mathématiques, aussi bien en algèbre (théorie des corps par exemple) qu'en analyse (voir le cours sur les équations différentielles).

Nous nous limitons au cas où le corps de base, noté $\mathbb{K}$, est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutefois, on peut définir la notion d'espace vectoriel sur n'importe quel corps.

# 1. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

## 1.1. Espace vectoriel sur un corps

**Définition (Espace vectoriel)**

Soit $E$ un ensemble muni d'une loi interne $+$ d'addition et d'une loi externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$, ou un *$\mathbb{K}$-espace vectoriel*, si

(1) $(E, +)$ est un groupe commutatif (son élément neutre, noté $0$ ou $\overrightarrow{0}$ ou $0_E$ est appelé *vecteur nul*) ;

(2) $\forall x \in E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ ;

(3) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;

(4) $\forall x \in E, \quad 1.x = x$ ;

(5) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

Les éléments de $E$ sont appelés *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

1.a

Pour aller plus vite, on dit parfois (en fait très souvent) que $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. De même, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base $\mathbb{K}$, on dit que $E$ est un espace vectoriel. Il ne faut pas oublier cependant qu'on ne peut parler d'espace vectoriel si on ne dispose pas de corps de base (également appelé *corps des scalaires*).

Bien que la notion d'espace vectoriel fasse appel à celle de corps (et donc à celles de groupe et d'anneau), elle est bien plus simple à étudier, dans la mesure on l'on arrivera assez facilement à décrire les espaces vectoriels à isomorphisme près.

Dans la pratique, on ne montrera pour ainsi dire jamais qu'un ensemble structuré est un espace vectoriel en revenant à cette définition, mais en prouvant qu'il est un *sous-espace vectoriel* d'un « plus gros » espace vectoriel : c'est pourquoi les exemples généraux suivants sont fondamentaux.

**Exemple (Espaces vectoriels)**

(1) $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(2) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(3) $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(4) L'ensemble des vecteurs du plan (et de l'espace) constitue un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(5) Si $X$ est un ensemble, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations naturelles.

(6) L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(7) Plus généralement, et c'est l'exemple à retenir, si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $X$ un ensemble quelconque, alors $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

i

**Proposition (Calculs dans un espace vectoriel)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous $\alpha \in K$ et $x \in E$, on a :

(1) $0_K.x = 0_E$.

(2) $\alpha 0_E = 0_E$.

(3) $-(\alpha x) = \alpha(-x) = (-\alpha)x$.

(4) $\alpha x = 0_E \Rightarrow (\alpha = 0 \vee x = 0_E)$.

1.a

Démonstration

□

Définition (Espace vectoriel produit)

Si $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, il en est de même pour $E \times F$ muni des lois naturelles. Cet espace vectoriel est appelé *espace vectoriel produit* (de $E$ par $F$).

1.b

On peut retrouver ainsi le fait que $\mathbb{K}^n$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Dans la suite, sauf mention contraire, $E$ désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

### 1.2. Sous-espaces vectoriels

Définition (Sous-espace vectoriel)

Soit $E'$ une partie de $E$. On dit que $E'$ est un *sous-espace vectoriel* de $E$ si $E'$ est

(1) stable par somme ;
(2) stable par la loi de multiplication par un scalaire ;
(3) $E'$, muni de ces lois, est un espace vectoriel.

1.c

Exemple (Sous-espaces vectoriels)

(1) $\{0_E\}$ et $E$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, appelés sous-espaces vectoriels *triviaux* de $E$.
(2) Si $G$ est un sous-espace vectoriel de $F$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, alors $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Plus généralement, la relation « être un sous-espace vectoriel de » est une relation d'ordre dans l'« ensemble » des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
(3) $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais c'est loin d'être le seul.
(4) Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $\mathcal{F}(X, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, E)$.
(5) $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, lui-même sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(6) On a vu des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

ii

**Proposition (Caractérisations des sous-espaces vectoriels)**

Soit $F$ une partie non vide de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

(2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F, \lambda x \in F$ et $\forall x, y \in F, x + y \in F$.

(3) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

1.b

**Démonstration**

$\square$

Un sous-espace vectoriel de $E$ n'est donc rien d'autre qu'une partie non vide de $E$ stable par combinaison linéaire. On peut noter qu'un sous-espace vectoriel de $E$ comprend nécessairement $0_E$, mais que cette condition n'est pas suffisante.

**Exercice (Structure d'espace vectoriel)**

Faire l'exercice 2 de TD.

1

**Proposition (Intersection de sous-espaces vectoriels)**

Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

1.c

**Démonstration**

$\square$

**Exercice (Union de deux sous-espaces vectoriels)**

Faire l'exercice 9 de TD.

2

**Définition (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)**

Soit $A$ une partie de $E$. il existe un plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $A$ (pour la relation d'inclusion). On l'appelle *sous-espace vectoriel engendré par $A$* et on le note $\operatorname{Vect} A$ ou $\operatorname{Vect}(A)$.
On définit de même un sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}$ engendré par une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $E$.

1.d

**Exemple (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)**

(1) Le sous-espace engendré par $\emptyset$ (dans $E$) est $\{0_E\}$.
(2) Le sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}$ engendré par $\{1\}$ (resp. $i$) est $\mathbb{R}$ (resp. $i\mathbb{R}$).
(3) Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions s'annulant au moins une fois est $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

iii

**Définition (Droite et plan vectoriels)**

Si $a$ est un vecteur non nul de $E$, alors

$$\operatorname{Vect}\{a\}(= \operatorname{Vect}(a) = \mathbb{K}a = \{\lambda a, \lambda \in \mathbb{K}\})$$

s'appelle la *droite vectorielle engendrée par $a$*.
Si $a$ et $b$ sont deux vecteurs non colinéaires de $E$ (*i.e.* aucun ne peut s'exprimer comme multiple de l'autre par un scalaire), alors $\operatorname{Vect}\{a, b\}$ est le *plan vectoriel* engendré par $a$ et $b$.

1.e

**Définition (Somme de sous-espaces vectoriels)**

Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. La *somme* $F_1 + F_2$ de $F_1$ et $F_2$ est l'ensemble

$$\{x_1 + x_2, \quad (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $E$.

1.f

**La somme remplaçe l'union**

$F_1 + F_2$ est donc le plus petit espace vectoriel contenant $F_1 \cup F_2$ : c'est $\operatorname{Vect}(F_1 \cup F_2)$.

1.1

Cette définition se généralise facilement à un nombre fini de sous-espaces vectoriels. En fait, elle se généralise même à toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de $E$. La somme $\sum_{i\in I} F_i$ est alors $\operatorname{Vect}(\cup_{i\in I} F_i)$.

**Définition (Somme directe)**

Soit $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que $F_1$ et $F_2$ sont en *somme directe* si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Dans ce cas, la somme $F_1 + F_2$ peut également se noter $F_1 \oplus F_2$.

1.g

Plus généralement, on dit que la somme $F_1+\cdots+F_p$ de sous-espaces vectoriels de $E$ est *directe* si l'application

$$S : \begin{array}{rcl} F_1 \times \cdots \times F_p & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array}$$

est injective, et on note alors $\oplus_{i \in [\![1,p]\!]} F_i$ leur somme.

Dans le cas où $p = 2$, cette nouvelle définition équivaut bien à la première. Cependant, on peut trouver trois sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, F_3$ d'un espace vectoriel $E$ qui sont en somme directe deux à deux, mais qui ne sont pas en somme directe.

**Définition (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)** 1.h

Deux sous-espaces vectoriels $F$ et $F'$ de $E$ sont dits *supplémentaires* si $F \oplus F' = E$.

$F$ et $F'$ sont donc supplémentaires dans $E$ si et seulement si $F + F' = E$ et $F \cap F' = \{0\}$.

On peut montrer (nous le ferons dans le cas de la dimension finie plus tard) que tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire, *qui n'est presque jamais unique* (seul un sous-espace vectoriel trivial a un supplémentaire unique).

Ne pas confondre *supplémentaire* et *complémentaire* (cette dernière notion n'a pas d'intérêt dans le cadre des espaces vectoriels, car le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel).

**Proposition (Caractérisation de la supplémentarité)** 1.d

Deux sous-espaces vectoriels $F$ et $F'$ de $E$ sont supplémentaires si et seulement si chaque vecteur $x$ de $E$ s'exprime de façon unique sous la forme $x = x_F + x_{F'}$, où $x_F$ et $x_{F'}$ sont des vecteurs respectifs de $F$ et $F'$.

**Démonstration**

$\square$

**Exemple (Sous-espaces supplémentaires)** iv

(1) $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i = \mathbb{C}$.

(2) Avec des notations évidentes, $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Exercice (Supplémentarité dans l'espace des suites convergentes)** 3

Faire l'exercice 11 de TD.

## 2. Familles finies de vecteurs

### 2.1. Généralités, notion de combinaison linéaire

**Définition (Sous-famille, surfamille)**

2.a

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle *sous-famille* de $(x_i)_{i\in I}$ toute famille d'éléments de $E$ obtenue par restriction de la famille $(x_i)_{i\in I}$ (vue en tant qu'application de $I$ dans $E$). On appelle *surfamille* de $(x_i)_{i\in I}$ toute famille dont $(x_i)_{i\in I}$ est une sous-famille.

**Définition (Combinaison linéaire)**

2.b

Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n$ vecteurs $x_1, \dots, x_n$ (non nécessairement distincts). Une *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ (ou de la famille $(x_1, \dots, x_n)$) est une expression du type

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

pour certains scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ou famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$). On parle de combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ (ou de la famille $(x_1, \dots, x_n)$) avec les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ou la famille de coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$).
On dit qu'une combinaison linéaire est à *résultat nul* si le vecteur somme est le vecteur nul.
On dit qu'une combinaison linéaire est *triviale* si tout coefficient est nul.

Une combinaison linéaire triviale est à résultat nul, mais la réciproque est fausse :

**Exemple (Combinaison linéaire)**

i

Chaque vecteur du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ s'exprime sous une forme unique comme combinaison linéaire des vecteurs $1$ et $i$ (mais aussi $1+i$ et $1-i$ par exemple).
Cela revient d'ailleurs à observer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\,i$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}$ (de même, $\mathbb{R}(1+i) \oplus \mathbb{R}(1-i) = \mathbb{C}$).

**Combinaison linéaire d'une famille infinie de vecteurs**

2.1

Supposons que $\mathcal{F} = (x_i)_I$ soit une famille infinie de vecteurs de $E$ (*i.e.* $I$ est infini).
On peut définir la notion de combinaison linéaire de vecteurs de cette famille : il s'agit d'une combinaison d'une sous-famille finie de $\mathcal{F}$, ou si l'on préfère, une expression de la forme

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i,$$

où la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires est à support fini, *i.e.* le *support*

$$\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$$

de cette famille est un ensemble fini.
Pourquoi s'être imposé des familles à support fini ? Une première raison évidente est qu'il nous fallait donner un sens à $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, ce qui poserait des problèmes insurmontables si une infinité de scalaires n'étaient pas nuls.
Nous verrons une autre raison à la section suivante.

### 2.2. Familles génératrices

**Proposition (Sous-espace engendré par une famille finie)**

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On a :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{y \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\}$$

2.a

**Démonstration**

□

**Exemple (Sous-espaces engendrés par une partie)**

(1) $(1)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, $(1)$ engendre le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et $(1)$ n'engendre pas le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

(2) Une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, non colinéaires, engendre $\mathbb{R}^2$.

(3) Une famille de trois vecteurs non coplanaires de $\mathbb{R}^3$ engendre cet espace vectoriel.

(4) Cependant, une famille de trois vecteurs non colinéaires deux à deux de $\mathbb{R}^3$ n'engendre pas toujours $\mathbb{R}^3$ :

ii

**Sous-espace engendré par une famille infinie**

En fait, le résultat précédent se généralise à une famille quelconque $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de $E$ : $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $(x_i)_{i \in I}$ (même si la famille est infinie). Voici une autre raison pour laquelle il était intéressant de définir ainsi la notion de combinaison linéaire d'une famille infinie. Par exemple, considérons les suites partout nulles sauf en un indice où elles valent 1. Quel sous-espace vectoriel engendrent-elles ?

2.2

**Définition (Famille génératrice)**

On considère une famille $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de $E$. On dit que la famille $\mathcal{F}$ (ou que la partie $\{x_1, \dots, x_p\}$) est *génératrice* (dans $E$) si

$$\operatorname{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$$

On dit aussi que $\mathcal{F}$ *engendre* $E$.
On définit également la notion de *partie génératrice*.

2.c

Ainsi, $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice (de $E$) si et seulement si tout vecteur $y$ de $E$ s'exprime (d'au moins une manière) comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille :

$$\forall\, y \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice :

**Exercice (Suppression d'un vecteur dans une famille génératrice)**

Soit $x_1, \dots, x_{p+1} \in E$. Montrer que si $x_{p+1}$ est combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_p$, alors $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{p+1}) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

4

### 2.3. Familles libres

**Définition (Famille libre, famille liée)**

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ (où $p \in \mathbb{N}^*$) de vecteurs de $E$ est *libre*, ou encore que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont *linéairement indépendants*, si toute combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_p)$ à résultat nul est triviale, *i.e.* :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \left( \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \right) \Rightarrow (\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad \lambda_i = 0)\,.$$

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est *liée*, ou encore que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont *linéairement dépendants*, si $(x_1, \dots, x_p)$ n'est pas libre, *i.e.* s'il existe une combinaison linéaire non triviale de $(x_1, \dots, x_p)$ à résultat (pourtant) nul :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p - \{(0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$$

(*i.e.* il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$).
Une telle combinaison linéaire est appelée *relation de liaison* des vecteurs $x_1, \dots, x_p$.

2.d

Ne pas se mélanger les pinceaux : pour n'importe quelle famille de vecteurs, la combinaison linéaire triviale est à résultat nul (la notion de famille libre est tout de même plus intéressante que cela ...)

Ne pas confondre non tous nuls et tous non nuls : par exemple, la famille $((1, 1), (0, 0))$ est liée.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Autrement dit, toute surfamille d'une famille liée est liée.

**Proposition (Caractérisation des familles liées)**

Une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs est liée si et seulement si l'un (au moins) de ses vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres (de l'autre si $p = 2$).

2.b

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Caractérisation des familles libres)**

La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si et seulement si tout vecteur de $E$ s'exprime d'au plus une manière comme combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_p)$.

2.c

**Démonstration**

$\square$

**Exemple (Familles libres ou liées)**

(1) Une famille constituée d'un unique vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul.

(2) Toute famille comprenant le vecteur nul (resp. dans laquelle un même vecteur apparaît deux fois) est liée.

(3) $(1, i)$ dans $\mathbb{C}$ vu en tant que $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$-espace vectoriel est libre puis liée.

(4) Deux vecteurs forment une famille liée si et seulement si ils sont colinéaires.

iii

Une famille infinie $\mathcal{F}$ est dite *libre* si toutes ses sous-familles finies le sont. Cela revient à dire que toute combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ à résultat nul est triviale.

**Exercice (Des exemples simples de liberté)** 5

**1** Soit $v_1 = (1,2,3,0), v_2 = (0,3,5,1), v_3 = (0,0,0,7)$. Montrer que $(v_1, v_2, v_3)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

**2** Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de $E$ (où $p \geqslant 2$). Montrer que $(x_1, x_2 + x_1, \dots, x_p + x_1)$ est libre. Généraliser cet exemple. La famille $(x_1 - x_p, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_p - x_{p-1})$ est-elle libre ?

**Exercice (Liberté de familles)** 6

Répondre à quelques questions de l'exercice 24 de TD.

### 2.4. Bases

**Définition (Base)** 2.e

Une famille de vecteurs de $E$ est une *base* (de $E$) si elle est libre et génératrice (dans $E$).

On traite dans ce cours le cas des familles finies.

**Exemple (Base)** iv

(1) Quelles sont les bases d'une droite vectorielle ? du plan, de l'espace ?

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de $E$ si et seulement si tout vecteur $x$ de $E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_p)$,*i.e.* :

$$\forall y \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k.$$

Dans ce contexte, les $\lambda_i$ sont les *coordonnées* (ou *composantes*) de $y$ dans la base $(x_1, \dots, x_p)$. Plus précisément, $\lambda_i$ est la composante de $y$ dans $(x_1, \dots, x_p)$ selon $x_i$.

**Exercice (Bases)** 7

Soit $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une base de $E$ (où $n \geqslant 2$). Montrer que $(x_1, x_2 + x_1, \dots, x_n + x_1)$ est une base de $E$. Expliquer pourquoi aucune sous-famille stricte de $\mathcal{B}$ ne peut être une base (de $E$). Même question avec une surfamille stricte.

## 3. Applications linéaires

### 3.1. Définitions

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

**Définition (Application linéaire)**

Une application $\phi\ : E \to F$ est dite *linéaire* (ou $\mathbb{K}$-*linéaire*), ou on dit que c'est un *morphisme (d'espaces vectoriels)* si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$$

et

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$.
Une application linéaire d'un espace vectoriel $E$ dans lui-même est appelée un *endomorphisme*. On note leur ensemble $\mathcal{L}(E)$.
On appelle *isomorphisme* de $E$ sur $F$ toute application linéaire bijective de $E$ sur $F$.
On appelle *automorphisme* de $E$ tout endomorphisme bijectif de $E$. Leur ensemble est noté $\mathrm{GL}(E)$.

3.a

**Proposition (Caractérisation de la linéarité)**

$\phi\ : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$$

3.a

**Démonstration**

□

Si $\phi$ est linéaire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ :

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi(x_k).$$

L'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul. Ainsi, une application n'envoyant pas $0_E$ sur $0_F$ ne peut être linéaire. Cette condition nécessaire pour être linéaire est loin d'être suffisante :

Exemple (Applications linéaires)

(1) L'application nulle $f : x \in E \mapsto 0_F$ montre qu'entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, il existe toujours un morphisme.

(2) L'application identité $\mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de $E$.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $x \in E \mapsto \lambda x$, appelée *homothétie de rapport $\lambda$* dans (ou de) $E$, est un endomorphisme de $E$.

(4) La dérivation $\mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^0(I), f \mapsto f'$ est linéaire.

(5) Soit $g \in \mathbb{R}^I$. L'application $f \mapsto gf$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^I$. Pour quelles fonctions $g$ est-ce également un endomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}^I$ ?

(6) Soit $I$ un intervalle et $a \in I$. L'application $\varphi : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, f \mapsto f(a)$ est un morphisme d'espaces vectoriels (et d'anneaux), appelé morphisme d'évaluation en $a$.

(7) Si $f : E \to F$ et $g : E \to G$ sont linéaires, alors $\varphi : E \to F \times G, x \mapsto (f(x), g(x))$ est linéaire.

(8) Les translations dans le plan ou l'espace sont-elles linéaires ?

i

Exercice (Exemples d'applications linéaires, ou pas)

Faire l'exercice 4 de TD. On pourra y revenir tout au long de ce cours, pour trouver de nouvelles démonstrations de linéarité.

8

Proposition (Espace des applications linéaires sur un espace vectoriel)

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel.

3.b

Démonstration

Montrons que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $F^E$ :

$\square$

Proposition (Composée d'applications linéaires)

La composée licite $v_0 \circ u_0$ ($u_0 \in \mathcal{L}(E, F)$, $v_0 \in \mathcal{L}(F, G)$) de deux applications linéaires est linéaire

3.c

Démonstration

$\square$

**Proposition** (Bijection réciproque d'un isomorphisme d'espaces vectoriels)

La bijection réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

3.d

Démonstration

$\square$

**Proposition** (La composition par une application linéaire donnée est linéaire)

Soit $E, F, G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u_0 \in \mathcal{L}(E,F)$, $v_0 \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors les applications

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(F,G) & \to & \mathcal{L}(E,G) \\ v & \mapsto & v \circ u_0 \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(E,G) \\ u & \mapsto & v_0 \circ u \end{array}$$

sont linéaires, *i.e.*

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(F,G), \mathcal{L}(E,G)) \text{ et } \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F), \mathcal{L}(E,G))$$

3.e

Démonstration

$\square$

La composition dans $\mathcal{L}(E)$ est donc bilinéaire. $\mathcal{L}(E)$ est un ensemble très structuré : c'est un espace vectoriel, muni de la composition qui est bilinéaire, associative, et possède un élement neutre ((($\mathcal{L}(E), +, \circ$) est donc un anneau). On dit que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-*algèbre* (hors-programme). On note souvent la composition multiplicativement ($fg$ désigne $f \circ g$, et $f^2 = f \circ f$ par exemple).

Si $f$ et $g$ sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$, on peut calculer $(f+g)^n$. Si $f$ et $g$ commutent, la formule de Newton est valable. En particulier, c'est le cas si $f$ ou $g$ est une homothétie.

Cependant, en général, deux endomorphismes d'un même espace vectoriel ne commutent pas. Donner quelques exemples :

De même, on prendra garde avant d'appliquer la formule sans nom.

De même, on fera attention au fait que $\mathcal{L}(E)$ admet presque toujours des diviseurs de zéro :

**Exercice (Exemple d'élément nilpotent non nul)** 9

Faire l'exercice 7 de TD.

**Proposition (Groupe linéaire)** 3.f

$\mathrm{GL}(E)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

**Démonstration**

Montrons que $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_E$ :

$\square$

**Définition (Groupe linéaire)** 3.b

Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ est appelé *groupe linéaire* de $E$.

En général, ce groupe n'est pas commutatif :

**Définition (Forme linéaire)** 3.c

Soit $E$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On appelle *forme linéaire* une application linéaire de $E$ dans le corps des scalaires $\mathbb{K}$.

Exemple (Formes linéaires)

(1) L'évaluation en $a$ (où $a \in I$) est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$.

(2) Le produit scalaire ou le déterminant (un seul vecteur varie, le ou les autres sont fixés) dans le plan ou dans l'espace est une forme linéaire.

(3) L'application qui à une suite réelle convergente asssocie sa limite est une forme linéaire.

ii

### 3.2. Noyau et image d'une application linéaire

Proposition (Image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par un morphisme)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Pour tout sous-espace vectoriel $E'$ de $E$, l'image $f(E')$ de $E'$ par $f$ est un sous-espace vectoriel. Pour tout sous-espace vectoriel $F'$ de $F$, l'image réciproque $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

3.g

Démonstration

$\square$

C'est une façon élégante et trop souvent oubliée de prouver qu'un ensemble est un (sous-)espace vectoriel. On pourra à ce sujet revenir sur l'exercice 4 de TD.

Définition (Noyau et image d'une application linéaire)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le *noyau* de $f$, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est $f^{-1}(\{0_F\})$. L'*image* de $f$ est $f(E)$, noté $\mathrm{Im}(f)$.

3.d

Le noyau de $f$ est un sous-espace vectoriel de $E$, l'image de $f$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

Exercice (Noyau et image d'un morphisme d'évaluation)

Soit $a \in I$, $\varphi : f \in \mathbb{R}^I \mapsto f(a)$. Donner le noyau et l'image de $\varphi$.

10

Exercice (Supplémentaires d'un hyperplan)

Faire l'exercice 13 de TD.

11

Proposition (Caractérisation de l'injectivité par le noyau)

Un morphisme est injectif si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

3.h

Démonstration

$\square$

### 3.3. Applications linéaires et familles

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p) \in E^p$. On note (abusivement) $f(\mathcal{F})$ la famille $(f(x_1), \ldots, f(x_p))$.

Proposition (Applications linéaires et familles génératrices)

On suppose $\mathcal{F}$ génératrice dans $E$. La famille $f(\mathcal{F})$ engendre alors $\operatorname{Im} f$. En particulier, si $f$ est surjective, la famille $f(\mathcal{F})$ engendre $F$.

3.i

Démonstration

$\square$

Proposition (Applications linéaires et liberté)

(1) Si la famille $\mathcal{F}$ est liée, alors $f(\mathcal{F})$ est liée.
(2) Si la famille $f(\mathcal{F})$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est libre.
(3) Si $f$ est injective, et si $\mathcal{F}$ est libre, alors $f(\mathcal{F})$ est libre.

3.j

**Démonstration**

□

Voici un résultat fondamental, prouvant que l'on peut construire des morphismes entre espaces vectoriels avec facilité et souplesse :

**Proposition (Application linéaire et image d'une base)**

On suppose $E$ muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$. Pour toute famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $F$, il existe une unique application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ telle que $\forall\, i \in I, f(e_i) = v_i$.

3.k

**Démonstration**

Ne traiter que le cas de familles finies : $I = [\![1, n]\!]$. Procéder par analyse-synthèse.

□

**Définition d'un morphisme par image d'une base**

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application linéaire $\varphi$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de $E$. Est-elle entièrement déterminée par l'image d'une famille génératrice ? Oui !

En revanche, pour se donner (*i.e.* définir légitimement) une application linéaire, il suffit de donner l'image d'une base. Si on donne l'image d'une famille génératrice, il se peut que l'application ne soit pas définie ! Donner un exemple :

3.1

C'est (notamment) grâce à cette proposition que l'algèbre linéaire n'est pas si compliquée que cela. Cette proposition est à la base de la représentation des applications linéaires par des tableaux de nombres, les matrices.

De plus, en combinant les derniers résultats :

**Proposition (Injectivité, surjectivité et image d'une base)** 3.l

On reprend le contexte de la proposition précédente.

(1) $f$ est injective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

(2) $f$ est surjective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice dans $F$.

(3) $f$ est bijective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de $F$.

**Corollaire (Isomorphisme et image d'une base)** 3.m

$f$ est un isomorphisme si et seulement si il envoie une base donnée de $E$ sur une base de $F$ si et seulement si il envoie toute base de $E$ sur une base de $F$.

**Exemple (Application linéaire définie par image d'une base)** iii

La donnée d'une famille de $p$ vecteurs $(x_1,\dots,x_p)$ d'un $K$-espace vectoriel $E$ détermine une application linéaire $\varphi$ de $K^p$ dans $E$, envoyant la base canonique de $\mathbb{K}^p$ sur cette famille.

Le noyau de cette application l'ensemble des $p$-uplets donnant une combinaison linéaire à résultat nul, l'image est $\text{Vect}(x_1,\dots,x_p)$.

$\varphi$ est injective (resp. surjective) si et seulement si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est libre (resp. génératrice).

### 3.4. Projecteurs et symétries

**Définition (Projecteur vectoriel)** 3.e

Soit $E$ un espace vectoriel, et $\varphi : E \to E$ une application. On dit que $\varphi$ est un *projecteur (vectoriel)* s'il existe deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$, supplémentaires dans $E$, tels que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = x_F$, où on a écrit $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$. Plus précisément, $\varphi$ est appelé *projecteur* sur $F$ parallèlement à $G$.

Cette définition est bien licite par existence et unicité de la décomposition en question.

**Illustration**

**Lemme (Linéarité des projecteurs)**

Tout projecteur est linéaire.

3.n

**Démonstration**

□

Soit $p$ un tel projecteur, sur $F$ parallèlement à $G$. On a $\mathrm{Im}(p) = F$ et $\mathrm{Ker}(p) = G$. On a donc $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. De plus, $\mathrm{Im}(p)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par $p$ dans $E$, *i.e.* $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

**Exemple (Projecteurs)**

(1) $0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\mathrm{Id}_E$ sont des projecteurs de $E$, dits *triviaux*.

(2) Les « projecteurs vectoriels géométriques » rencontrés en début d'année sont des projecteurs vectoriels en ce nouveau sens.

(3) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on peut définir des projecteurs « partie paire » et « partie impaire ».

iv

**Proposition (Caractérisation des projecteurs)**

Soit $p$ un endomorphisme de $E$. $p$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

3.o

**Démonstration**

□

**Définition (Symétrie vectorielle)** 3.f

Soit $E$ un espace vectoriel. On appelle *symétrie (vectorielle)* toute application de la forme $x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G$ (avec des notations évidentes). On parle alors de *symétrie par rapport à $F$, relativement à $G$*.

Soit $s$ la symétrie par rapport à $F$, relativement à $G$, $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$. On a :

$$s = 2p - Id_E,$$

donc $s$ est un endomorphisme de $E$, et même un automorphisme involutif ($s^2 = \mathrm{Id}_E$). On a

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E).$$

**Proposition (Caractérisation des symétries)** 3.p

Soit $s$ un endomorphisme de $E$. $s$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

**Exercice (Projecteurs)** 12

Faire l'exercice 23 de TD.

## 4. Questionnaire 5 : Espaces vectoriels

**1** Soient $u$ et $v$ deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^7$, et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^7)$, $g((1,0)) = u$ et $g((0,1)) = v$. Alors $g$ est injective.

**2** On considère une famille $(x, y, z)$ de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

**a** $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{Vect}(x, y, z) = \mathrm{Vect}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ ;

**b** $\forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad \mathrm{Vect}(x, y, z) = \mathrm{Vect}(\lambda x + \mu y, \lambda y + \mu z, \lambda z + \mu x)$.

**3** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

**a** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de $E$ ;

**b** Si $E \subset F + G$, alors $E = F + G$ ;

**c** $F + G = \{\lambda_F x_F + \lambda_G x_G, (x_F, x_G) \in F \times G \wedge (\lambda_F, \lambda_G) \in \mathbb{C}^2\}$ ;

**d** $F + G = \{\lambda_F x_F + \lambda_G x_G, (x_F, x_G) \in F \times G \wedge (\lambda_F, \lambda_G) \in \mathbb{R}^2\}$ ;

**e** Toute application $f : E \to E$ est un endomorphisme de $E$ ;

**f** Il existe une application linéaire injective de $F$ dans $E$ ;

**g** Il existe une application linéaire surjective de $F$ dans $G$.

**h** Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u(F + G) = u(F) + u(G)$.

**4** Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

**a** Pour vérifier qu'une application $\varphi \ : E \to F$ est linéaire, il suffit de connaître les images par $\varphi$ des vecteurs d'une base de $E$ ;

**b** Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{B}_F$ une base de $F$. Si chaque vecteur de $\mathcal{B}_F$ admet (au moins) un antécédent par $f$, alors $f$ est surjective ;

**c** Soit $x_F$ un vecteur de $\mathcal{B}_F$. Si $x_F$ admet au plus un antécédent par $f$, alors $f$ est injective (on ne dit rien sur les éventuels autres vecteurs de $\mathcal{B}_F$) ;

**d** Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour vérifier que $f = g$, il suffit de le vérifier sur les vecteurs d'une base (resp. d'une famille génératrice, resp. d'une famille libre).

**e** Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. On a $\mathrm{Im}(f + g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

# 5. Feuille de TD 12 : Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## 5.1. Espaces vectoriels, première approche

**Exercice 1 (Comment voir $\mathbb{R}_+^*$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)** 0

On munit $\mathbb{R}_+^*$ des lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par $a \oplus b = ab$ et $\lambda \otimes a = a^\lambda$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, tout réel $\lambda$. Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exercice 2 (Structure d'espace vectoriel)** 0

Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles :

(1) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$, de limite finie en $+\infty$ ;

(2) L'ensemble des solutions $(x_1, x_2, x_3)$ du système : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

(3) L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.

(4) L'ensemble des fonctions sur $[a,b]$ dérivables, vérifiant $f(a) = 7f(b) + 2f'((a+b)/2)$.

(5) L'ensemble des fonctions sur $[0,1]$ admettant un point fixe.

(6) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 ou en 4.

(7) L'ensemble des suites réelles convergentes.

(8) L'ensemble des suites réelles bornées.

(9) L'ensemble des suites réelles négligeables devant $(n)$.

(10) L'ensemble des polynômes de degré exactement $n$.

(11) L'ensemble des polynômes de degré au plus $n$.

(12) L'ensemble des fonctions de classe $C^2$ vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.

(13) L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

(14) L'ensemble des points $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x + y) = 0$.

(15) L'ensemble des vecteurs $(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

(16) L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.

**Exercice 3 (Sous-espace vectoriel de L(E))** 3

Soit $U$ un sous-espace vectoriel de $E$, et

$$A = \{f \in L(E) \mid U \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Montrer que $A$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

## 5.2. Applications linéaires, première approche

**Exercice 4 (Exemples d'applications linéaires, ou pas)** 0

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

(1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.

(2) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.

(3) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.

(4) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$.

(5) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \ : f \mapsto \left(t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\right)$.

(6) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x + 5y$.

(7) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$.

(8) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$.

(9) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$.

(10) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$.

(11) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V} = (4, -1, 1/2)$.

(12) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$.

(13) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$.

**Exercice 5 (Composée, image et noyau)** 0

Soient $F$ et $G$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

**Exercice 6 (Importance du corps de base)** 0

Soient $f$ et $g$, applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \mathrm{Re}(z)$. Montrer que $f$ et $g$ sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel

**Exercice 7 (Exemple d'élément nilpotent non nul)** 0

Donner un exemple d'endomorphisme non nul de carré nul (carré au sens de la composition, bien entendu).

**Exercice 8 (Isomorphisme et équations différentielles)** 1

Montrer que l'espace vectoriel des solutions réelles de $y'' - 3y' + 5y = 0$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

### 5.3. Opérations sur les sous-espaces vectoriels

**Exercice 9 (Union de deux sous-espaces vectoriels)** 0

Soit $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

**Exercice 10 (Stabilité du noyau et de l'image par un élément du commutant)** 1

Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par $g$. Montrer que l'implication réciproque peut être fausse.

**Exercice 11 (Supplémentarité dans l'espace des suites convergentes)** 2

Soit $E$ l'espace vectoriel des suites réelles convergentes. Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des suites réelles convergeant vers 0, et $G$ celui des suites constantes. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

**Exercice 12 (Application somme)** 2

Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On définit l'application $f : F \times G \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

**1** Montrer que f est linéaire.

**2** Déterminer le noyau et l'image de $f$.

**Exercice 13 (Supplémentaires d'un hyperplan)** 2

Soit $f$ une forme linéaire non nulle sur $E$. On fixe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et on note $H = \mathrm{Ker}\, f$. Montrer : $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

### 5.4. Endomorphismes d'un espace vectoriel

**Exercice 14 (Lorsque tout vecteur non nul est propre)** 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout vecteur $x$ de $E$, $f(x)$ est colinéaire à $x$. Montrer que $f$ est une homothétie.

**Exercice 15 (Polynôme annulateur)** 1

**1** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant $f^3 + 2f + 5\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$.

**2** Soit $f$ un endomorphisme de $E$, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0$. Établir $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

**3** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Généraliser cet exemple

Exercice 16 (Commutant d'un endomorphisme) 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On introduit l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$, appelé *commutant* de $f$.
**1** Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
**2** Décrire $\mathcal{C}(f)$ lorsque $f$ est un projecteur.

Exercice 17 (La nilpotence passe au crochet de Lie) 1

Soit $u$ un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel $E$. Montrer que $v \mapsto uv - vu$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 18 (Lorsque la somme des images est l'image de la somme) 2

Soit $(u, v) \in (L(E))^2$, tel que $u^2 = u$ et $vu = 0$. Montrer que : $\operatorname{Im}(u + v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$.

Exercice 19 (Supplémentarité et inverses unilatéraux *(Mines PSI 09)*) 3

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$. On suppose que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Montrer : $\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u = F$.

Exercice 20 (Intersection de l'image et du noyau) 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
**1** Montrer que $(\operatorname{Ker} f^n)$ est croissante pour l'inclusion.
**2** Montrer que $(\operatorname{Im} f^n)$ est décroissante pour l'inclusion.
**3** Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f(\operatorname{Ker}(f^2))$.

## 5.5. Projecteurs, symétries

Exercice 21 (Projecteurs et puissances d'un endomorphisme) 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0$. On a vu $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrer que le projecteur $p$ sur $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$ appartient à $\operatorname{Vect}(\mathrm{Id}_E, f)$. On pose $q = \mathrm{Id}_E - p$. Expliquer en quoi $p$ et $q$ permettent de calculer les puissances de $f$.

Exercice 22 (Projecteurs) 3

Soit $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$.
**1** On suppose que $p \circ q = 0$. On note $r = p + q - q \circ p$. Montrer que $r$ est un projecteur, de noyau $\operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$ et d'image $\operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$.
**2** Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si : $p \circ q = q \circ p = 0$.
**3** On suppose que $p$ et $q$ commutent. Montrer que $p \circ q$ est le projecteur de $E$ sur $\operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(q)$.

Exercice 23 (Projecteurs de $\mathcal{L}(E)$) — 3

Soit $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$ tels que $p \circ q = q \circ p = 0$,

$$\Pi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & p \circ f \circ p \end{array} \quad \text{et} \quad \Theta : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & q \circ f \circ q \end{array}.$$

Vérifier que $\Pi$ et $\Theta$ sont des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$, et que $\Pi \circ \Theta = \Theta \circ \Pi = 0$.

## 5.6. Familles de vecteurs

Exercice 24 (Liberté de familles) — 1

**1** Montrer que si $(u_1, u_2, u_3)$ est un triplet de vecteurs tous non nuls de $\mathbb{R}^3$, orthogonaux deux à deux, alors $(u_1, u_2, u_3)$ est libre.
**2** La famille $(x \mapsto \cos(x+a))_{a\in\mathbb{R}}$ est-elle libre ?
**3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on introduit $P_i : x \mapsto \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x - a_j)$. Montrer que $(P_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.
**4** *(Mines MP 08, Mines MP 09)* Montrer que la famille des fonctions réelles de la variable réelle $t \mapsto |t - a|$, lorsque $a$ décrit $\mathbb{R}$, est libre.
**5** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $g_a : x \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.
**6** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : x \mapsto x^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
**7** Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $u^m = (\sin(1/n^m))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est libre.
**8** *(X MP 08)* Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x^n)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
**9** *(X MP 08)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille de fonctions

$$(x \mapsto \sin(nx), x \mapsto \sin((n-1)x)\cos(x), \ldots, x \mapsto \sin(x)\cos((n-1)x))$$

est-elle libre ?
**10** *(X MP 08)* Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que $(f, f\circ f, f\circ f\circ f)$ est un système libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Exercice 25 (Translation d'une famille libre *(Mines MP 08, X MP 08)*) — 3

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille libre de $E$ et $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de scalaires. On pose $s = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Condition nécessaire et suffisante pour que $(u_i + s)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit libre ?

CHAPITRE XIII

# Arithmétique

## Sommaire



L'arithmétique consiste (à notre niveau) en l'étude de l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Passez du temps à bien démontrer (au moins de tête) les affirmations non prouvées.

Pour ceux qui envisagent la MP, il est fortement recommandé de travailler le DM sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

## 1. Divisibilité dans l'anneau des entiers relatifs

**Définition (Diviseur, multiple)** 1.a

Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs. On dit que $b$ est un *diviseur* de $a$, ou que $a$ est un *multiple* de $b$, s'il existe un entier relatif $q$ tel que $a = qb$. On note alors $b|a$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de $n$, et $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de $n$. Pour tous $a$ et $b$ entiers relatifs, on a donc $b|a \Leftrightarrow a \in b\mathbb{Z} \Leftrightarrow b \in \mathcal{D}(a)$.

**Exemple (Diviseurs et multiples)** i

(1) $\mathcal{D}(0) = \mathbb{Z}$, $0\mathbb{Z} = \{0\}$.
(2) $\mathcal{D}(1) = \{-1, 1\}$, $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
(3) $\mathcal{D}(2) = \{-2, -1, 1, 2\}$, $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs.

Soit $m$ et $n$ deux entiers relatifs.
(1) $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n|m \Leftrightarrow \mathcal{D}(n) \subset \mathcal{D}(m)$.
(2) Si $n$ est un multiple non nul de $m$, alors $|n| \geqslant |m|$.
(3) On a $m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ si et seulement si $\mathcal{D}(m) = \mathcal{D}(n)$ si et seulement si $m = n$ ou $m = -n$.

On rappelle que les $n\mathbb{Z}$ (où $n$ décrit $\mathbb{Z}$, ou seulement $\mathbb{N}$) sont exactement les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Si $G$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il existe donc un unique entier naturel $n$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

**Sur la relation de divisibilité** 1.1

La relation de divisibilité est réflexive et transitive, mais pas antisymétrique. Cependant, sa restriction à $\mathbb{N}$ est antisymétrique, et il s'agit donc d'une relation d'ordre. Bien sûr, il s'agit d'un ordre partiel.

**Proposition (Divisibilité)**

Soient $a$, $b$, $c$, $d$, $u$ et $v$ des entiers relatifs. On a :

(1) $(d|a \wedge d|b) \Rightarrow d|au + bv$.

(2) Si $b$ est non nul, alors :

$$d|a \Leftrightarrow db|ab$$

(3) Si $a$ divise $b$ et $c$ divise $d$, alors $ac$ divise $bd$.

(4) Pour tout entier naturel $k$,

$$b|a \Rightarrow b^k|a^k$$

1.a

**Démonstration**

$\square$

**Idéaux d'entiers relatifs**

Soit $n$ un entier relatif. $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. De plus, $n\mathbb{Z}$ est stable par multiplication par *tout* entier relatif. On dit que $n\mathbb{Z}$ est un *idéal* de $\mathbb{Z}$.
Réciproquement, tout idéal de l'anneau $\mathbb{Z}$ est de cette forme :

1.2

**Théorème (Division euclidienne)**

Soit $a$ un entier relatif et $b$ un entier naturel *non nul*. Il existe un unique couple d'entiers relatifs $(q, r)$ tels que

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < b$$

1.b

**Définition (Division euclidienne)**

Dans ce contexte, $q$ est appelé *quotient de la division euclidienne* de $a$ par $b$, et $r$ est appelé *reste de la division euclidienne* de $a$ par $b$.

1.b

**Démonstration**

L'unicité se montre en constatant que si $(q, r)$ et $(q', r')$ conviennent, alors $r - r' = b(q' - q)$. Il s'ensuit que $r - r'$ est un multiple de $b$, vérifiant également $|r - r'| < b$ par hypothèse : c'est donc 0, d'où $r = r'$ puis, par simplification par l'élément non nul $b$, $q = q'$.
Pour l'existence, on exhibe un couple convenable, à savoir celui où $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$, et $r = a - bq$.

□

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une relation, la *relation de congruence modulo n*, par

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad y \equiv x[n] \Leftrightarrow y - x \in n\mathbb{Z} \, (\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + kn)$$

(on dit alors que $y$ est *congru* à $x$ modulo $n$, et on note également $y \equiv x \mod n$).
La congruence modulo $n$ est une relation d'équivalence :

La congruence est compatible avec la somme et la multiplication : pour tous entiers $a$, $b$, $c$, $d$, si $a \equiv b \, [n]$ et $c \equiv d \, [n]$, alors $a + c \equiv b + d \, [n]$, $ac \equiv bd \, [n]$, et, pour tout entier naturel $k$, $a^k \equiv b^k \, [n]$) :

**Congruence et reste de la division euclidienne** 1.3

Soit $a$ un entier relatif, $b$ un entier naturel non nul, et $r$ le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$. Le reste $r$ est donc l'unique élément de $[\![0, b - 1]\!]$, congru à $a$ modulo $b$. Il est nul si et seulement si $b$ divise $a$.
Pour Maple, `a mod b` désigne $r$.

**Exercice (Parité d'une somme)** 1

Soit $n$ un entier naturel non nul. Trouver le reste de la division de $\sum_{k=1}^{n} k$ par 2.

**Exercice (Reste d'une puissance)** 2

Trouver le reste de la division euclidienne de $234^{122}$ par 7.

**Exercice (Une équation diophantienne)** 3

Montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2 - 5y^2 = 3$$

## 2. Plus grand diviseur commun

**Proposition (Somme de sous-groupes d'un groupe additif)**

Soit $(G, +)$ un groupe abélien. Soient $H$ et $K$ deux sous-groupes de $G$. On note

$$H + K = \{h + k, h \in H, k \in K\}$$

$H + K$ le plus petit sous-groupe de $G$ qui contient $H$ et $K$ (pour la relation d'ordre d'inclusion), appelé sous-groupe de $G$ *engendré* par $H \cup K$.

2.a

**Démonstration**

On vérifie aisément que $H+K$ est un sous-groupe de $G$, contenant $H$ et $K$. De plus, tout sous-groupe de $G$ contenant $H$ et $K$ est stable par $+$, et doit donc contenir $H + K$.

□

**Définition (Plus grand commun diviseur)**

Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs. Il existe un unique entier naturel $n$ tel que

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}.$$

On dit que $n$ est le *plus grand commun diviseur* (ou pgcd) de $a$ et de $b$. On note $n = \mathrm{pgcd}(a, b)$, ou $n = a \wedge b$ (ou parfois $(a, b)$).

2.a

**Démonstration**

Justification de la définition : $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, et peut donc s'écrire de manière unique sous la forme annoncée.

□

**Exemple (PGCD)**

Pour tout entier relatif $m$, $0 \wedge m = |m|$.
$24 \wedge (-30) = 6$.

i

Fixons deux entiers relatifs $a$ et $b$.

Par définition, il existe des entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $a \wedge b = au + bv$. Réciproquement, tout entier qui s'écrit $au + bv$ est un multiple de $a \wedge b$.

Le pgcd de $a$ et $b$ est donc l'unique entier naturel divisant $a$ et $b$, et divisible par tout diviseur de $a$ et $b$ : il s'agit donc bien du plus grand diviseur de $a$ et $b$, pour la relation d'ordre de divisibilité sur $\mathbb{N}$ (et même pour l'ordre naturel si $a$ ou $b$ est non nul).

Bien sûr $a \wedge b = b \wedge a = |a| \wedge |b|$.

Pour tout entier relatif $k$, $(ka) \wedge (kb) = |k|(a \wedge b)$, car $k(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) = (ka)\mathbb{Z} + (kb)\mathbb{Z}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a \wedge b = (a - kb) \wedge b$. En particulier si $b$ est un entier naturel non nul, $a \wedge b = b \wedge r$, où $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$. Cette dernière remarque est le fondement de l'algorithme d'Euclide.

**Proposition (Algorithme d'Euclide)**

On se donne deux entiers naturels $a$ et $b$. L'algorithme suivant donne la valeur de $a \wedge b$.

(1) Si $b = 0$, renvoyer $a$ et terminer l'algorithme.

(2) Poser $r \leftarrow a \mod b$, $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$ et retourner à l'étape 1.

2.b

**Démonstration**

(Justification de l'algorithme d'Euclide)
Si $b = 0$, on a bien $a \wedge b = |a| = a$. Sinon, on applique une ou plusieurs fois l'étape 2. Remarquons qu'à chaque application de la seconde étape, le couple $(a, b)$ est changé en $(b, r)$, où $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ (licite puisque $b \neq 0$), et que le pgcd est inchangé. Comme la suite des couples obtenue est finie (car la suite des secondes composantes est une suite strictement décroissante d'entiers naturels), de dernier couple $(a, 0)$, et comme $a \wedge 0 = a$, l'algorithme renvoie bien $a \wedge b$. □

**Exercice (Calcul de pgcd par l'algorithme d'Euclide)**

Calculer, avec l'algorithme d'Euclide, le pgcd de 2114 et 2567.

4

**Définition (Entiers premiers entre eux)**

Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs. On dit que $a$ et $b$ sont *premiers entre eux* (ou *étrangers*) si $a \wedge b = 1$.

2.b

$a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement si les seuls diviseurs communs à $a$ et $b$ sont 1 et $-1$, si et seulement si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

1 et $-1$ sont premiers avec tout entier.

**Théorème de Bézout**

Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs. $a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au + bv = 1$.

2.c

**Démonstration**

Si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. En particulier $1 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, ce qui prouve une première implication.
Si réciproquement on peut écrire $1 = au + bv$ pour certains entiers $u$ et $v$, alors tout diviseur commun $d$ à $a$ et $b$ divise 1, et donc $a \wedge b = 1$. □

Si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, toute relation (il n'y a pas unicité) du type $1 = au + bv$ est appelée *relation de Bézout*. Plus généralement, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, toute relation $au + bv = a \wedge b$ (où $u, v \in \mathbb{Z}$) est appelée *relation de Bézout*.

Pour trouver une relation de Bézout, on peut appliquer l'algorithme d'Euclide, puis « remonter » les calculs. On verra plus tard une méthode plus propre, fondée sur le calcul matriciel.

**Théorème de Gauss**

Soient $a$, $b$, $c$ trois entiers relatifs. Si $a$ divise $bc$ et si $a$ est premier avec $b$, alors $a$ divise $c$.

2.d

**Démonstration**

□

Si $d = a \wedge b$, alors il existe des entiers $a'$ et $b'$ premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$ : le cas où $a$ ou $b$ est nul est aisé. Si $a$ et $b$ sont non nuls, on est conduit à poser $a' = \frac{a}{a \wedge b}$ et $b' = \frac{b}{a \wedge b}$, et, de la relation $d = au + bv$ (pour certains entiers $u$ et $v$), on déduit la relation de Bézout $1 = a'u + b'v$ entre $a'$ et $b'$.

Écriture d'un nombre rationnel sous forme irréductible : tout nombre rationnel $r$ s'écrit de manière unique sous la forme $\frac{p}{q}$, où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \backslash \{0\})$, et où $p$ et $q$ sont premiers entre eux. L'unicité peut se montrer avec le théorème de Gauss. Donnez les formes irréductibles de $\frac{30}{-24}$ et de 0 :

**Exercice (Entier premier avec un produit)**

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a$ est premier avec $b$ et avec $c$ si et seulement si il est premier avec $bc$.

5

Ceci se généralise à un produit de plusieurs termes. En particulier, si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, toute puissance de $a$ est étrangère à toute puissance de $b$ (même si un exposant est nul).

## 3. Plus petit commun multiple

**Définition (Plus petit commun multiple)**

Soient $a$ et $b$ deux entiers. Il existe un unique entier naturel $n$ tel que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$. Cet entier est appelé *plus petit commun multiple* de $a$ et $b$, et est noté $\text{ppcm}(a, b)$ ou $a \vee b$.

3.a

**Démonstration**

Justification de la définition : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, et peut donc s'écrire de manière unique sous la forme annoncée.

□

Exemple (PPCM)

(1) $0 \vee 0 = 0$.

(2) Pour tout entier relatif $m$, $0 \vee m = 0$.

(3) $24 \vee (-30) = 120$.

i

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs.
L'entier $a \vee b$ est le plus petit entier naturel pour la divisibilité [1] qui soit multiple de $a$ et de $b$.
On a $a \vee b = b \vee a = |a| \vee |b|$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $(ka) \vee (kb) = |k|(a \vee b)$.

Exercice (Entiers premiers entre eux et ppcm)

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.
**1** Montrer que si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $a \vee b = |ab|$, et que la réciproque est vraie si $a$ et $b$ sont non nuls.
**2** Montrer : $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

6

On peut définir le pgcd et le ppcm de plusieurs entiers, de la même façon qu'avec deux entiers : le pgcd de $a_1, \dots, a_r$ (où $r \geqslant 3$) est l'unique entier naturel $d$ tel que $d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + \cdots + a_r\mathbb{Z}$, et le ppcm de $a_1, \dots, a_r$ est l'unique entier naturel $n$ tel que $n\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} \cap \cdots \cap a_r\mathbb{Z}$.

On dit que les entiers $a_1, \dots, a_r$ sont *premiers entre eux (dans leur ensemble)* si leur pgcd vaut 1. L'identité de Bézout est encore valable, et caractérise la primalité globale.

On dit que les entiers $a_1, \dots, a_r$ sont *premiers entre eux deux à deux* si, pour tous $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tels que $i \neq j$, on a $a_i \wedge a_j = 1$.

Si les $a_1, \dots, a_r$ sont premiers entre eux deux à deux, ils sont premiers dans leur ensemble (il suffit même que deux de ces entiers soient premiers entre eux), mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de $6, 10, 15$.

## 4. Nombres premiers

Définition (Nombre premier)

Soit $p$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit que $p$ est *premier* si les seuls diviseurs naturels de $p$ sont 1 et $p$. Sinon, il est dit *composé*. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

4.a

1 n'est pas premier.
Si $p \in \mathcal{P}$ ne divise pas $a \in \mathbb{Z}$, alors $a \wedge p = 1$. En particulier, $p$ est premier avec $1, \dots, p-1$, et deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.
Si $p \in \mathcal{P}$ divise $ab$ (où $a, b \in \mathbb{Z}$), alors $p$ divise $a$ ou $b$.

Lemme Existence d'un diviseur premier

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ est divisible par (au moins) un nombre premier.

4.a

1. Cela reste-t-il vrai pour l'ordre usuel ?

**Démonstration**

En effet, $\mathcal{D}(n)\cap(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})$ n'est pas vide (il comprend $n$), et son plus petit élément est nécessairement premier. $\square$

Si $n$ ($n \geqslant 2$) n'est divisible par aucun entier compris (au sens large) entre 2 et $\sqrt{n}$, alors il est premier. Par exemple, 113 est premier car $113 = 5! - 7$, et $11^2 > 113$.

**Proposition (Infinité du nombre de nombres premiers)** 4.b

L'ensemble des nombres premiers est infini.

**Démonstration**

On peut démontrer ce résultat par l'absurde, en supposant disposer d'une énumération $p_1, \dots, p_m$ de l'ensemble des nombres premiers. Le nombre $N = 1 + p_1 \dots p_m$, bien que supérieur ou égal à 2, n'admet pas de diviseur premier (puisqu'on a une relation de Bézout entre $N$ et chaque nombre premier), ce qui contredit le lemme précédent. $\square$

**Théorème (Décomposition en produit de facteurs premiers)** 4.c

Tout entier $n \geqslant 2$ s'écrit sous la forme

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers distincts deux à deux, et $m_1, \dots, m_r$ sont des entiers strictement positifs.
Une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

**Définition (Décomposition en produit de facteurs premiers)** 4.b

Dans le contexte du théorème précédent, la décomposition trouvée est appelée *décomposition de $n$ en produit de facteurs premiers*.

**Démonstration**

**Unicité :** si $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r} = {p'_1}^{m'_1} {p'_2}^{m'_2} \dots {p'_{r'}}^{m'_{r'}}$ sont deux décompositions de $n$ en produit de facteurs premiers, on doit avoir $\{p_1, \dots, p_r\} = \{p'_1, \dots, p'_{r'}\}$ (si par exemple $p_1 \notin \{p'_1, \dots, p'_{r'}\}$, le théorème de Gauss itéré nous ferait aboutir à l'absurdité $p_1 | 1$). En particulier, on a $r = r'$. Quitte à réordonner les nombres $p'_1, \dots, p'_{r'}$, on peut donc supposer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $p_i = p'_i$. S'il existe un $i \in [\![1, r]\!]$ pour lequel $m_i \neq m'_i$, par exemple $m_1 > m'_1$ pour fixer les idées, alors

$$p_1^{m_1 - m'_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r} = {p'_2}^{m'_2} \dots {p'_{r'}}^{m'_{r'}}$$

$p_1$ divise un produit d'entiers qui lui sont étrangers : c'est absurde. $\square$

Démonstration

**Existence :** par récurrence forte sur $n$ ($n \geqslant 2$). Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose l'hypothèse :
$(\mathcal{H}_n)$ : tout entier $k \in [\![2, n]\!]$ admet une décomposition du type annoncé.
L'amorçage est aisé ($2 = 2^1$).
Fixons $n \geqslant 2$, $\mathcal{H}_n$, et déduisons-en $\mathcal{H}_{n+1}$. Il ne reste qu'à prouver que $n+1$ admet une telle décomposition. Si $n+1$ est premier, c'est facile ($n+1 = (n+1)^1$). Sinon, il admet un diviseur premier $p$, $p < n+1$. D'après $\mathcal{H}_n$, $\frac{n+1}{p}$ admet une telle décomposition, soit

$$\frac{n+1}{p} = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$$

Par conséquent, si $p$ n'est pas l'un des $p_1, \dots, p_m$, alors

$$n+1 = p p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$$

est une décomposition de $n+1$ en produit de facteurs premiers. Si $p = p_i$ pour un certain $i \in [\![1, r]\!]$, alors

$$n+1 = p_1^{m'_1} p_2^{m'_2} \dots p_r^{m'_r},$$

où, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $m'_j = m_j$ si $j \neq i$, et $m'_i = m_i + 1$, est une décomposition de $n+1$ en produit de facteurs premiers.
En conclusion, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, ce qui prouve l'existence.

□

Définition (Valuation $p$-adique)

Pour chaque nombre premier $p$, et pour tout entier naturel non nul $n$, on appelle *valuation $p$-adique* de $n$ le plus grand entier $k$ tel que $p^k$ divise $n$. Elle est notée $\nu_p(n)$.

4.c

Exercice (Calculs de valuations $p$-adiques)

Calculer les valuations $p$-adiques de $2^3 3^{15} 11^{12}$, pour $p$ décrivant $\mathcal{P}$.
Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\nu_p(mn) = \nu_p(m)\nu_p(n)$.

7

Pour tout entier naturel non nul, on a $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}$.

Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels non nuls. $m$ divise $n$ si et seulement si, pour tout nombre premier $p$, $\nu_p(m) \leqslant \nu_p(n)$.

Pour calculer le pgcd ou le ppcm de deux entiers $m$ et $n$, on a les relations suivantes :
$\nu_p(m \wedge n) = \min\{\nu_p(m), \nu_p(n)\}$ et $\nu_p(m \vee n) = \max\{\nu_p(m), \nu_p(n)\}$.
On peut décomposer un entier relatif (différent de $0, 1$ et $-1$), en rajoutant $\epsilon \in \{-1, +1\}$ devant le produit).

Exercice (Calculs de pgcd et ppcm à l'aide des décompositions)

Calculer les pgcd et ppcm de $30^5$ et de $42^{20}$.

8

## 5. Questionnaire 6 : Arithmétique

**1** Si $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[n]$, alors $ac \equiv bd[mn]$.

**2** Si $a \wedge b = 1$, alors $a + b$ est premier.

**3** Si $a \wedge b = 1$, alors $a^2$ et $b^2$ sont premiers entre eux.

**4** Si $a \wedge b = 1$, alors $a + b$ et $ab$ sont premiers entre eux.

**5** Si $m \neq 0$ et $am \Leftrightarrow bm[mn]$, alors $a \equiv b[n]$.

**6** Pour tout nombre premier $p$ différent de 2 et de 5, il existe un multiple de $p$ dont tous les chiffres valent 1.

**7** Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. A-t-on toujours $(a \wedge b \wedge c)(a \vee b \vee c) = |abc|$ ?

# 6. Feuille de TD 13 : Arithmétique

## 6.1. Congruences, équations diophantiennes, division euclidienne

**Exercice 1 (Divisibilité)** 0

**1** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 ne divise jamais $n^2+1$.
**2** Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 24.
**3** Montrer que 39 divise $7^{37}+13^{37}+19^{37}$.
**4** Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si 9 divise $a^3+b^3+c^3$, alors 3 divise $a$ ou $b$ ou $c$.
**5** Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a^2+b^2$ est divisible par 7 si et seulement si $a$ et $b$ le sont.

**Exercice 2 (Calculs de restes)** 0

**1** Trouver, pour tout entier naturel non nul $n$, le reste de la division de $\sum_{k=1}^{n} k$ par 2.
**2** Trouver le reste de la division euclidienne de $234^{122}$ par 7.
**3** Trouver le reste de la division de $(a^2+(a-1)^2)^2$ par $4a^2$ ($a \in \mathbb{N}^*$).

**Exercice 3 (Chiffres en base 10)** 0 à 4

**1** Trouver le chiffre des unités de $7^{7^7}$.
**2** Trouver les deux derniers chiffres de la représentation décimale de $19^{19^{19}}$.
**3** Montrer que chaque nombre du type
$$2^{2^n}+1$$
(où $n \geqslant 2$) se termine par 7.
**4** Montrer qu'un nombre entier positif de six chiffres dont la représentation décimale est de la forme « abcabc » est nécessairement divisible par 13.
**5** On admet que $2^{29}$ est un nombre de 9 chiffres, tous différents (en base 10). Quel est le chiffre manquant ?
**6** Trouver la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de $4444^{4444}$.

**Exercice 4 (Équations diophantiennes)** 2

**1** Montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que
$$x^2-5y^2=3.$$

**2** L'équation diophantienne
$$x^3+2y^3=4z^3$$
possède-t-elle dans $\mathbb{Z}^3$ une autre solution que le triplet nul ?

**Exercice 5 (Centrale MP 08)** 2

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par $n$.

### 6.2. Diviseurs, pgcd, ppcm

**Exercice 6 (Une fraction irréductible)** 0

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{n^3+n}{2n^2+1}$ est irréductible.

**Exercice 7 (Autour de la relation de Bézout)** 2

**1** Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls et premiers entre eux. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(x, y)$ de $\mathbb{Z}^2$ tels que $ax + by = 1$. Montrer que si $(x_0, y_0)$ est l'un d'eux, les autres sont donnés par $x = x_0 + kb$ et $y = y_0 - ka$, $k$ décrivant $\mathbb{Z}$.

**2** En déduire que si $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs non nuls, il existe une infinité de couples d'entiers $(x, y)$ tels que $ax+by = a \wedge b$. Expliquer comment calculer les solutions d'une telle équation (appliquer scrupuleusement l'algorithme d'Euclide à $|a|$ et $|b|$).

**3** En déduire la résolution générale d'une équation du type $ax + by = c$.

**4** Résoudre $2520x - 3960y = 6480$ $(x, y \in \mathbb{Z})$.

**Exercice 8 (Égalité de ppcm)** 3

Montrer que $\mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, 2n) = \mathrm{ppcm}(n + 1, n + 2, \ldots, 2n)$.

**Exercice 9 (Une caractérisation des carrés parfaits)** 3

Soit $n$ un entier strictement positif, et soit $d(n)$ le nombre d'entiers positifs divisant $n$. Prouver que $d(n)$ est impair si et seulement si $n$ est un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un nombre entier).

**Exercice 10 (Somme des diviseurs)** 3

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs naturels. Montrer que si $m$ et $n$ sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

**Exercice 11 (Entiers premiers entre eux dans leur ensemble)** 3

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \prod_{j \neq i} a_j$. Montrer que $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux premiers entre eux si et seulement si $b_1, \ldots, b_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

### 6.3. Nombres premiers, nombres composés, divers

**Exercice 12 (Nombres premiers)** 0

Montrer que si $p$ et $8p-1$ sont premiers, alors $8p+1$ est composé (on pourra considérer la congruence de $p$ modulo 3).

**Exercice 13 (Une petite partie du théorème de Dirichlet)** — 1

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$.

**Exercice 14 (Nombres de Mersenne et de Fermat)** — 1

Trouver une condition nécessaire sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $2^n - 1$ soit premier. Même question avec $2^n + 1$.

**Exercice 15 (Nombre composé dans toute base)** — 3

Montrer que, peu importe la base, le nombre 10101 est composé.

**Exercice 16 (Nombres composés consécutifs)** — 3

Montrer que pour tout entier strictement positif $n$, il existe $n$ nombres consécutifs composés.

**Exercice 17 (ENS Lyon 08))** — 3

On pose $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.
**1** Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$.
**2** Si $n \neq m$, quel est le pgcd de $F_n$ et de $F_m$ ?
**3** À l'aide de ce qui précède, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

**Exercice 18 (Irrationalité de $\sqrt{2}$, preuve originale)** — 5

En observant que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, et en considérant une suite géométrique de raison $\sqrt{2} - 1$, montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

**Exercice 19 (Transfert d'information)** — 5

Deux mathématiciens, $P$ et $S$, cherchent deux nombres entre 2 et 200. $P$ connaît leur produit, et $S$ leur somme. Tous les deux réfléchissent, puis s'ensuit la discussion suivante :
**1** P : Je ne peux pas déterminer ces deux nombres.
**2** S : Je le savais.
**3** P : Alors je les ai trouvés.
**4** S : Alors moi aussi.
Trouver ces nombres.

CHAPITRE XIV

# Dimension finie

## Sommaire



Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

## 1. Dimension d'un espace vectoriel

**Définition (Espace finiment engendré)** 1.a

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est dit *finiment engendré* s'il admet une famille génératrice finie.

**Exemple (Espaces finiment engendrés)** i

(1) L'espace vectoriel trivial $\{0\}$ est donc finiment engendré, ainsi qu'une droite ou un plan vectoriel (et l'espace $\mathbb{R}^3$).
(2) Plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel finiment engendré.
(3) $\mathbb{R}[X]$ n'est pas finiment engendré.

Voici la proposition fondamentale dont les autres résulteront, et qui relie familles génératrices et libres avec la cardinalité :

**Proposition (fondamentale en dimension finie)** 1.a

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) une famille de vecteurs de $E$, et soit aussi $(y_0, \dots, y_n)$ une famille de vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. La famille $(y_0, \dots, y_n)$ est alors liée.

**Démonstration**

Par récurrence sur $n$. C'est clair lorsque $n = 1$ (les vecteurs $y_0$ et $y_1$ sont alors colinéaires).
Supposons le résultat vrai au rang $n \geqslant 1$ fixé, et montrons-le au rang $n+1$. On considère une famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ de vecteurs de $E$, et une famille $(y_0, \dots, y_{n+1})$ de vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n+1})$. Pour tout entier $m \in [\![0, n+1]\!]$, il existe des scalaires $\lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{n+1,m}$ tels que :

$$y_m = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \lambda_{k,m} x_k.$$

Si les scalaires $\lambda_{n+1,0}, \dots, \lambda_{n+1,n+1}$ sont nuls, alors les vecteurs $y_0, \dots, y_{n+1}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, et sont donc liés par hypothèse de récurrence. Sinon, on peut – quitte à réordonner les vecteurs $y_0, \dots, y_{n+1}$ – supposer $\lambda_{n+1,n+1}$ non nul. L'idée consiste alors se débarrasser des coefficients selon le nouveau vecteur $x_{n+1}$, en posant, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ :

$$z_k = y_k - \frac{\lambda_{n+1,k}}{\lambda_{n+1,n+1}} y_{n+1},$$

On vérifie alors que $z_0, \dots, z_n$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, et forment donc – d'après l'hypothèse de récurrence – une famille liée : il existe des scalaires non tous nuls $\mu_0, \dots, \mu_n$, tels que

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mu_k z_k = 0_E.$$

En posant $\mu_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1,n+1}} \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \lambda_{n+1,k} \mu_k$, on constate que la combinaison linéaire $\sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n+1} \mu_k y_k$ n'est pas triviale, mais à résultat nul : la famille $(y_0, \dots, y_{n+1})$ est liée.

$\square$

En corollaire, on a la

**Corollaire (de la proposition fondamentale)** 1.b

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $E$.
Si cette famille est génératrice dans $E$, toute famille d'éléments de $E$ d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.
Si cette famille est libre, aucune famille d'au plus $n-1$ vecteurs n'est génératrice dans $E$.

**Démonstration**

Soit $(y_1, \dots, y_k)$ une famille de vecteurs de $E$.
Dans le cas où $k \geqslant n+1$, alors $(y_1, \dots, y_{n+1})$ – donc sa surfamille $(y_1, \dots, y_k)$ – est liée.
Dans le cas où $k < n$, supposer le caractère générateur de $(y_1, \dots, y_k)$ entraîne le caractère lié de $(x_1, \dots, x_n)$, ce qui prouve le résultat par contraposition.

$\square$

Dans un espace vectoriel finiment engendré, toute famille libre est finie.
Si pour tout entier naturel $n$, on peut trouver des familles libres d'au moins $n$ vecteurs de $E$, alors $E$ n'est pas finiment engendré.

**Exercice (Lemme de l'ajout liant)**

Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et $(x_1, \dots, x_n, y)$ est liée, alors $y \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

1

**Théorème de la base incomplète**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel finiment engendré, et $(x_1, \dots, x_m)$ (resp. $(y_1, \dots, y_n)$) une famille libre (resp. une famille génératrice finie de $E$) ($m$ et $n$ sont des entiers naturels non nuls).
Il est possible de compléter la famille $(x_1, \dots, x_m)$ à l'aide de vecteurs de la famille $(y_1, \dots, y_n)$ de manière à former une base de $E$.

1.c

La démonstration est assez technique, en voici d'abord un résumé : on choisit une famille « intermédiaire » entre la famille libre $(x_1, \dots, x_m)$ et la famille génératrice $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ qui reste libre, et dont le nombre de termes soit maximal. On montre alors que cette famille est génératrice.

**Démonstration**

Pour clarifier la rédaction, on effectue le changement de notation $x_{m+i} = y_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, $(y_1, \dots, y_n) = (x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$. La famille $(x_1, \dots, x_m)$ est libre, mais pas nécessairement génératrice. La famille $(x_1, \dots, x_{m+n})$ est génératrice, mais pas nécessairement libre. On considère l'ensemble :

$$S = \{\text{Card}\, I, ([\![1, m]\!] \subset I \subset [\![1, m+n]\!]) \wedge ((x_i)_{i \in I} \text{ est libre})\}.$$

$S$ est une partie non vide (elle comprend $m$) et majorée (par $m+n$) de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus grand élément $\alpha$, provenant d'(au moins) une famille libre $(x_i)_{i \in I}$, dont on cherche à montrer le caractère générateur. Il suffit de montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $y_j = x_{m+j}$ appartient à $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Soit donc $j \in [\![1, n]\!]$ quelconque. Si $j + m \in I$, alors $y_j$ est l'un des vecteurs de $(x_i)_{i \in I}$, et l'assertion est évidente.
Si $j + m \notin I$, alors $\text{Card}(I \cup \{j + m\}) = \alpha + 1$, et la famille $(x_i)_{i \in I \cup \{j+m\}}$ est liée : il en existe une combinaison linéaire non triviale à résultat nul. D'après le lemme de l'ajout liant, $x_{j+m} \in \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.
La famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre et génératrice dans $E$ : c'est une base de $E$.

□

Un cas particulier intéressant : une famille génératrice pouvant être liée, il n'est pas question de lui adjoindre des vecteurs pour en faire une base. Cependant, on peut former une base en lui ôtant un ou plusieurs vecteurs (cas particulier du théorème précédent), sauf [1] dans le cas où l'espace vectoriel est nul. Par conséquent, de toute famille génératrice d'un espace vectoriel non nul, on peut extraire une base.

De même, toute famille libre d'un espace finiment engendré non nul $E$ peut se compléter en une base de $E$.

Bien sûr, on ne peut pas adjoindre n'importe quel vecteur, et il est fort possible qu'on ait plusieurs choix convenables : donner des exemples.

**Corollaire (Existence d'une base)**

Tout espace vectoriel finiment engendré, non réduit au vecteur nul, admet une base.

1.d

1. à moins qu'on accepte les familles indexées par l'ensemble vide

**Démonstration**

Un tel espace vectoriel admet une famille génératrice finie, famille dont on peut extraire une base. □

**Théorème (Définition de la dimension)** 1.e

Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel finiment engendré, non réduit au vecteur nul, toutes les bases de $E$ sont finies et ont le même nombre d'éléments.

On rappelle que le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une famille est le cardinal de son ensemble d'indexation (ou de sa source si on la voit comme une application).

**Définition (Dimension)** 1.b

Dans ce contexte, ce nombre appelé *dimension* de $E$, et noté $\dim E$.
Par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul est 0.
Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de dimension infinie.

**Démonstration**

Considérons deux bases $(x_1, \dots, x_m)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $E$ (il en existe, et elles sont finies, d'après la proposition fondamentale). La famille $(x_1, \dots, x_m)$ est génératrice, et $(y_1, \dots, y_n)$ est libre, donc $n \leqslant m$. En échangeant les rôles des deux bases, $m \leqslant n$. Finalement, $m = n$. □

**Exemple (Base canonique)** ii

Comme $\mathbb{K}^n$ admet pour base sa base canonique, de cardinal $n$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie $n$.

Ainsi, un espace vectoriel est finiment engendré si et seulement si il est de dimension finie (on utilisera dorénavant plutôt cette dernière expression).

Un espace vectoriel est de dimension nulle si et seulement si il est réduit au vecteur nul.

Nouvelles définitions d'une droite et d'un plan vectoriel : espaces vectoriels de dimensions 1 et 2 respectivement.

Importance du corps de base : $\mathbb{C}$ est un *plan* vectoriel réel, mais aussi une *droite* vectorielle complexe.

Voilà une proposition très importante en pratique :

**Proposition (Caractérisation des bases en dimension finie connue)** 1.f

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n$ éléments de $E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

(2) $(x_1, \dots, x_n)$ engendre $E$.

(3) $(x_1, \dots, x_n)$ est une base.

Démonstration

□

Grâce à cette proposition, *si on connaît la dimension $n$ de $E$*, on peut juger si une famille de vecteurs de $E$ est une base de $E$ : on limite l'étude à son éventuelle liberté ou à son éventuel caractère générateur (il est souvent plus fastidieux de vérifier qu'une famille est génératrice), puis on précise que cette famille est bien de cardinal $n$.

Une famille génératrice de $E$ doit avoir au moins $n(= \dim E)$ vecteurs (contraposée : pour qu'une famille ne soit pas génératrice, il suffit qu'elle ait strictement moins de $n$ vecteurs). Cependant, une famille de plus de $n$ vecteurs peut ne pas être génératrice :

Une famille libre de $E$ ne doit pas avoir plus de $n$ vecteurs (contraposée : une famille de plus de $n$ vecteurs est liée). Cependant, une famille de moins de $n$ vecteurs peut très bien être liée :

Exemple (Dimensions)

Soit $(x_1, \dots, x_m)$ une famille libre de vecteurs de $E$. On a alors : $\dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_m) = m$.
Si $E'$ est isomorphe à $E$ de dimension finie, alors $E'$ est de dimension finie, la même que $E$.

iii

Exercice (Base en dimension 4)

Soit $(u_1, \dots, u_4) = ((1, 2, 3, 1), (2, 1, 2, 1), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 1, 1))$. Montrer que $(u_1, \dots, u_4)$ est une base de $\mathbb{K}^4$.

2

Exercice (Travail en basse dimension)

Parcourir l'exercice 1 de la feuille de TD. On pourra y revenir quand on aura terminé le cours.

3

Proposition (Dimension d'un produit cartésien)

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ sont deux bases respectives des espaces vectoriels de dimensions finies $E$ et $F$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$, alors la famille $((e_1, 0), \dots, (e_m, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_n))$ est une base de $E \times F$. En particulier, $\dim E \times F = \dim E + \dim F$.

1.g

Démonstration

$\square$

La formule $\dim E \times F = \dim E + \dim F$ subsiste si $E$ ou $F$ est de dimension nulle.

Cette formule passe mal. Pour éviter d'écrire l'énormité $\dim(E \times F) = \dim(E)\dim(F)$, on peut se rappeler que $\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{m+n}$, ou prendre le cas où $F = \{0\}$.

Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(E^n) = n\dim(E)$.

**Exercice (Isomorphisme entre somme et produit en cas de somme directe)** 4

Montrer que si $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$, alors $E = F \oplus G$ et $F \times G$ sont isomorphes. En particulier, si les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

## 2. Dimension d'un sous-espace vectoriel

**Proposition (Dimension d'un sous-espace vectoriel)** 2.a

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, et soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. L'espace vectoriel $F$ est alors de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, on a l'égalité $\dim E = \dim F$ si et seulement si $E = F$.

Démonstration

Écartons le cas évident où $F$ est nul.
Considérons l'ensemble $\Omega$ des familles libres de vecteurs de $F$. Cet ensemble n'est pas vide, puisque $F$ admet au moins un vecteur non nul. Comme tout élément de $\Omega$ est une famille libre de vecteurs de $E$, son cardinal est d'au plus $n$. En particulier, il existe un élément de $\Omega$, de cardinal maximal. Cette famille de vecteurs de $F$ est libre par appartenance à $\Omega$, et génératrice (grâce au lemme de l'ajout liant) : c'est une base de $F$, qui est donc de dimension finie.
Cette base de $F$ pouvant se compléter en une base de $E$, on a nécessairement $\dim F \leqslant \dim E$.
Si $E = F$, alors évidemment, $\dim E = \dim F$. Si réciproquement $\dim E = \dim F$, prenons une base de $F$. Elle peut se compléter en une base de $E$. Par contrainte sur le cardinal commun aux bases de $E$, cette complétion n'en est pas vraiment une, et cette base de $F$ est une base de $E$.

$\square$

**Proposition (Dimension d'un supplémentaire)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $F$ admet un supplémentaire $G$ dans $E$, et la dimension de tout supplémentaire de $F$ est $\dim E - \dim F$.

2.b

**Démonstration**

On écarte le cas évident où $F$ est trivial. On sait que $F$ admet alors une base $(x_1, \dots, x_m)$. On peut compléter cette famille libre de vecteurs de $E$ en une base $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ de $E$. On vérifie alors que $\mathrm{Vect}(x_{m+1}, \dots, x_n)$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$.
Si $G$ est un supplémentaire quelconque de $F$ dans $E$, on a vu précédemment que $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$.

□

Dans le contexte de la démonstration précédente, si $F$ et $G$ admettent respectivement pour bases $(x_1, \dots, x_m)$ et $(y_1, \dots, y_k)$, alors $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$ (la *concaténée* de ces deux familles, dans cet ordre) est une base de $E$.

**Proposition (Dimension d'une somme)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On a alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

2.c

**Démonstration**

Déjà , $F$, $G$, $F+G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie. $F \cap G$ admet un supplémentaire $G'$ dans $G$. Il suffit alors de prouver que $G'$ et $F$ sont supplémentaires dans $F + G$, et la proposition précédente donne le résultat annoncé.

□

Remarquez l'analogie avec les cardinaux des ensembles finis. Nous verrons que cette analogie va encore plus loin.

**Corollaire (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie)**

Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de lespace vectoriel de dimension finie $E$. Deux quelconques de ces trois propositions entraînent la troisième.

(1) $F \cap G = \{0\}$.

(2) $F + G = E$.

(3) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

2.d

Démonstration

□

## 3. Rang d'une famille finie de vecteurs

**Définition (Rang d'une famille finie de vecteurs)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de $E$. Le *rang* de la famille $\mathcal{F}$ est la dimension (finie) du sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $\mathcal{F}$ :

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

3.a

Dans ce contexte, comme $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, le rang $r$ de $\mathcal{F}$ vérifie $0 \leqslant r \leqslant n$. De plus, si $E$ est de dimension finie, le rang $r$ vérifie $r \leqslant \dim E$.

Donner des exemples d'inégalités strictes :

Le rang est nul si et seulement si chacun des vecteurs $x_i$ est nul.

Le rang est égal à 1 si et seulement si au moins un des vecteurs n'est pas nul, et tous les autres vecteurs lui sont colinéaires.

Le rang est égal à deux si et seulement si la famille possède deux vecteurs non colinéaires $x_{i_0}$ et $x_{j_0}$, et tous les autres $x_i$ sont combinaisons linéaires de ces vecteurs.

En pratique, comment déterminer le rang de $(x_1, \dots, x_n)$ ? L'idée naturelle est d'extraire de $(x_1, \dots, x_n)$ une base de $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ (si la famille n'est pas nulle), dont le nombre de termes est la dimension de $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, donc le rang de $(x_1, \dots, x_n)$.

On observe que le rang d'une famille est inchangé si :

(1) On multiplie l'un des vecteurs par un scalaire non nul.

(2) On échange des vecteurs de la famille.

(3) On à ôté à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres (attention aux erreurs de raisonnement lors de l'application de cette observation).

(4) On a supprimé un vecteur combinaison linéaire des autres.

Une fois la famille génératrice $(x_1, \dots, x_n)$ « allégée » en une famille libre, mais toujours génératrice de $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il suffit d'en calculer le nombre de termes pour obtenir le rang de la famille.

## 4. Applications linéaires et dimension finie

### 4.1. Structure des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie

**Théorème d'isomorphie**

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

4.a

**Démonstration**

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie $n$.
On sait déjà que si $E$ et $F$ sont isomorphes, alors ils ont même dimension.
Si réciproquement $E$ et $F$ ont même dimension, montrons qu'ils sont isomorphes.
Si $E$ et $F$ sont de dimension nulle, alors ils ne comprennent que le vecteur nul, et sont donc isomorphes.
Sinon, ils admettent des bases $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ et on définit une application linéaire $\varphi$ de $E$ dans $F$ en envoyant $x_i$ sur $y_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cette application linéaire envoyant une base sur une base, elle réalise un isomorphisme de $E$ sur $F$.

□

Pour tout corps de base, et tout entier $n$, il existe au moins un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ ($\{0_{\mathbb{K}}\}$ si $n = 0$, et $\mathbb{K}^n$ sinon).

Ainsi, la structure d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ fixé est entièrement déterminée par un simple nombre entier. La structure d'espace vectoriel (au moins de dimension finie), bien qu'elle fasse appel à celles de groupe, anneau, corps, est donc très simple.

En corollaire, on peut fixer un représentant agréable de chaque classe d'isomorphie, à savoir $\mathbb{K}^n$ :

### 4.2. Applications linéaires et coordonnées

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives $m$ et $n$ non nulles. Se donner une application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ revient à donner l'image d'une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans $F$. Si $\mathcal{C}$ est une base de $F$, nous sommes donc ramenés à donner, pour chacun des $m$ vecteurs de $\mathcal{B}$, ses $n$ coordonnées dans $\mathcal{C}$. Cela signifie que $f$ est déterminée par ces $mn$ nombres (dans un certain ordre). Nous reviendrons largement sur cette observation lors du cours sur les matrices.

Plus formellement, on a la :

**Proposition (Dimension de $L(E, F)$)** 4.b

Si $E$ et $F$ sont deux espaces de dimension finies respectives $m$ et $n$, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie, et :

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = mn$$

**Démonstration**

□

**Proposition (Image d'un vecteur par une application linéaire)**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives $m$ et $n$ non nulles, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases respectives de $E$ et $F$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, soit $\begin{pmatrix} c_{1,k} \\ \vdots \\ c_{n,k} \end{pmatrix}$ le système de coordonnées de $u(e_k)$ dans $\mathcal{C}$.

Soit $x$ un vecteur quelconque de $E$, de système de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors le système de coordonnées de $y = u(x)$ dans $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, où :

$$\forall\, l \in [\![1, n]\!], \quad \beta_l = \sum_{k=1}^{m} c_{l,k} \alpha_k$$

4.c

**Démonstration**

$\square$

**Exercice (Un isomorphisme en cas de supplémentarité)**

Soit $E$ et $H$ des espaces vectoriels de dimension finie, $F$ et $G$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $\mathcal{L}(E, H)$ et $\mathcal{L}(F, H) \times \mathcal{L}(G, H)$ sont isomorphes. Ce résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?

5

### 4.3. Le théorème du rang et ses conséquences

**Définition (Rang d'un morphisme)**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension finie, on appelle *rang* de $\varphi$ la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

4.a

Exemple (Rang d'un morphisme)

(1) Si $E$ est de dimension finie de base $(e_1, \dots, e_m)$, le rang de $\varphi$ est le rang de la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m))$ (cela reste vrai pour une famille génératrice), et donc inférieur ou égal $m$.

(2) Si $F$ est de dimension finie $n$, alors le rang $r$ (est fini et) vérifie $r \leqslant n$.

(3) Si $E$ et $F$ sont de dimensions finies respectives $m$ et $n$, alors $r \leqslant \min(m, n)$.

(4) Bien sûr si $E$ ou $F$ est de dimension finie $n$, alors on peut parler du rang $r$ de toute application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

i

Lemme préparatoire au théorème du rang

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\varphi$ définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} \varphi$ dans $E$ sur $\operatorname{Im} \varphi$.

4.d

Démonstration

Soit $G$ un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \varphi$ dans $E$. On restreint $\varphi$ à $G$ au départ, et à $\operatorname{Im} \varphi$ à l'arrivée, ce qui donne une application linéaire $\psi$ de $G$ dans $\operatorname{Im} \varphi$. On montre aisément que cette application est surjective et injective : elle réalise donc un isomorphisme de $G$ sur $\operatorname{Im} \varphi$.

□

On utilise surtout ce lemme en dimension finie, mais il est valable en dimension quelconque. En corollaire immédiat, on a le fameux :

Théorème du rang

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E$ étant de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\operatorname{rg}(\varphi) + \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E$$

4.e

Démonstration

L'existence d'un supplémentaire $G$ de $\operatorname{Ker} \varphi$ dans $E$ et le lemme précédent donnent immédiatement le résultat.

□

En pratique, cette formule, la *formule du rang*, est très utile, plus que l'isomorphisme du lemme. C'est pour cette raison qu'on a qualifié de lemme la première assertion et de théorème la seconde.

La dimension de $F$ n'intervient pas : il peut très bien ne pas être de dimension finie. En fait, il est facile de s'en rendre compte car en « grossissant » $F$, on ne change rien au rang de $\varphi$ et à la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi$ (alors qu'il serait compliqué de « grossir » $E$).

Même si $E = F$, $\operatorname{Im} \varphi$ et $\operatorname{Ker} \varphi$, sous-espaces vectoriels de $E$, ne sont pas nécessairement supplémentaires. En revanche, ils le sont si et seulement si ils sont en somme directe (d'après le corollaire 2.d page 315).

En corollaire, on obtient une sorte d'analogue de la proposition sur les applications entre ensembles finis de même cardinal :

**Proposition (Isomorphismes en même dimension finie)**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de *même* dimension finie $n$, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ est injective ;

(2) $f$ est surjective ;

(3) $f$ est un isomorphisme.

4.f

**Démonstration**

$f$ est injective (resp. surjective) si et seulement si $\dim \ker(f) = 0$ (resp. $\operatorname{rg}(f) = n$). La formule du rang ($\operatorname{rg} \varphi + \dim \operatorname{Ker} \varphi = n$) montre donc l'équivalence entre les deux premières assertions. Ces deux assertions sont donc équivalentes à leur conjonction, c'est-à-dire à la dernière.

□

On applique très souvent cette dernière proposition dans le cas d'un endomorphisme en dimension finie.

**Proposition (Inverse unilatéral d'un endomorphisme en dimension finie)**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où $E$ est de dimension finie. S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $w \in \mathcal{L}(E)$) tel $v \circ u = \operatorname{Id}_E$ (resp. $u \circ w = \operatorname{Id}_E$), alors $u \in \operatorname{GL}(E)$, et $v$ (resp. $w$) est la bijection réciproque de $u$.

4.g

**Démonstration**

□

Attention, ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie : penser au morphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$, où aux shifts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**Proposition (Conservation du rang par composition avec un isomorphisme)**

Soit $E$, $F$, $G$ trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

(1) Si $u$ est un isomorphisme, alors $v$ et $v \circ u$ ont même rang.

(2) Si $v$ est un isomorphisme, alors $u$ et $v \circ u$ ont même rang.

4.h

**Démonstration**

La première assertion est immédiate (il suffit d'ailleurs que $u$ soit surjective pour que $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(v \circ u)$).
La seconde provient du fait que $\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Im}\, u)$, et du fait qu'un isomorphisme envoie un sous-espace vectoriel sur un sous-espace vectoriel de même dimension (il suffit d'ailleurs que $v$ soit injective pour que $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.

□

**Exercice (Caractérisations de supplémentarité de l'image et du noyau)** 6

Faire l'exercice 14 de TD.

**Exercice (Sommes d'images et de noyaux)** 7

Faire l'exercice 17 de TD.

### 4.4. Formes linéaires et hyperplans

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On rappelle qu'une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Ce dernier ensemble est appelé *dual* de $E$, et est parfois noté $E^*$. Si $E$ est de dimension finie, alors $E^*$ est de dimension finie, celle de $E$.

**Exercice (Forme linéaire non nulle)** 8

Montrer qu'une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

**Proposition (Préliminaire à la définition d'un hyperplan)** 4.i

Soit $H$ un sous-espace vectoriel de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\dim H = n - 1$ ;

(2) Il existe une droite vectorielle $D$ de $E$ telle que $E = D \oplus H$ ;

(3) Il existe une forme linéaire non nulle $f$ de $E$ telle que $H = \mathrm{Ker}\, f$.

**Démonstration**

(1) ⇒ (2) : soit $u \in E \setminus H$, et $D = \mathbb{K}u$. On vérifie alors que $E = D \oplus H$.
(2) ⇒ (3) : prendre un vecteur directeur $x$ de $D$ complété en une base de $E$ par des vecteurs de $H$, et envoyer $x$ sur 1, tous les autres sur 0.
(3) ⇒ (1) : appliquer le théorème du rang.

□

**Définition (Hyperplan)**

On se place dans le contexte de la proposition précédente. On appelle *hyperplan (vectoriel)* de $E$ tout sous-espace vectoriel de $E$ vérifiant l'une de ces conditions. On dit également que $f$ *définit* $H$.

4.b

Si un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ contient un hyperplan $H$ de $E$, alors $F = E$ ou $F = H$. De façon pompeuse, les hyperplans sont les éléments maximaux pour la relation d'ordre d'inclusion dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels stricts de $E$.

Pour tout scalaire non nul $\lambda$, $\lambda f$ définit encore $H$. En fait, deux formes linéaires non nulles définissent un même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles (c'est-à-dire liées).

Pour tout vecteur $u$ n'appartenant pas à $H$, on a $E = H \oplus \mathbb{K}u$.

**Proposition (Équation d'hyperplan)**

Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. On note $x_1, \dots, x_n$ les composantes d'un vecteur $x$ de $E$ selon les vecteurs de $\mathcal{B}$. Une partie $H$ de $E$ est un hyperplan (de $E$) si et seulement si elle admet dans $\mathcal{B}$ une équation du type

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0,$$

où les scalaires $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas tous nuls.

4.j

**Démonstration**

Introduire la forme linéaire $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ dans un sens, évaluer en $x$ la forme linéaire considérée dans l'autre.

□

Deux équations $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$ (ni les $a_i$ ni les $b_i$ n'étant tous nuls) définissent un même hyperplan si et seulement si il existe un scalaire (non nul) $\lambda$ tel que $(b_1, \dots, b_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n)$.

On peut définir la notion d'hyperplan en dimension infinie, en ne conservant que les deux dernières assertions (qui sont bien toujours équivalentes en dimension infinie).

**Exemple (Équations d'hyperplans)**

(1) $x + 2y = 0$ est une équation d'hyperplan dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une équation de droite.

(2) $x + y + z = 0$ est une équation d'hyperplan dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une équation de plan.

(3) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ est une équation d'hyperplan dans $\mathbb{R}^n$.

ii

## 5. Questionnaire 7 : Dimension finie

**1** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7)$ telle que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^7$.
**a** $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^7$ ;
**b** $f_{|\operatorname{Im} f}$ est injective.

# 6. Feuille de TD 14 : Dimension finie

## 6.1. Familles de vecteurs

**Exercice 1 (Travail en basse dimension)** 0

**1** Montrer que les vecteurs $x_1 = (0,1,1)$, $x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1,1,1)$.

**2** Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.

**3** Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

**4** Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble $E$ des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ vérifiant l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. L'ensemble $E$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ ? Si oui, en donner une base.

**5** Soient $v_1 = (1,0,0,-1), v_2 = (2,1,0,1), v_3 = (1,-1,1,-1), v_4 = (7,2,0,-1)$ et $v_5 = (-2,-3,1,0)$. Donner une base du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Déterminer un supplémentaire $G$ de $F$ dans $\mathbb{R}^4$.

**6** (Mines MP 08) Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x = y - 2z \text{ et } y = 3t\}$. Quelle est la structure de $F$ ? Donner une base de $F$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 2 (Liberté d'une famille de formes linéaires)** 4

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des formes linéaires sur $E$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

(2) Pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il existe un vecteur $x$ de $E$ tel que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on ait : $\varphi_i(x) = \lambda_i$.

**Exercice 3 (Travail dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des réels)** 5

**1** *(X MP 08)* On se place dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. La famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est-elle liée ?

**2** Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ est-il de dimension finie ?

## 6.2. Sous-espaces vectoriels

**Exercice 4 (Supplémentaire commun à deux sous-espaces (Mines MP 08))** 2

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

**1** Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels stricts de $E$. Montrer que $F \cup G \neq E$.

**2** Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ ayant même dimension. Montrer que $F$ et $G$ possèdent un supplémentaire commun.

**Exercice 5 (Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent cyclique *(X PC 09)*)** 2

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, u(e_i) = e_{i+1}$ et $u(e_n) = 0$. Déterminer les sous-espaces stables par $u$.

Exercice 6 (Sous-espace inclus dans son image) 3

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $U$ un sous-espace vectoriel de $E$.

**1** Montrer que si $U$ est de dimension finie, alors, pour tout endomorphisme $f$ de $E$ : $(U \subset f(U)) \Rightarrow (U = f(U))$.

**2** Montrer que la propriété précédente tombe en défaut si on ne suppose plus $U$ de dimension finie.

Exercice 7 (Le b.a.-ba des extensions de corps) 5

Soit $K$ un corps, $L$ un sous-corps de $K$. Montrer que $K$ est un $L$-espace vectoriel. On suppose que le $L$-espace vectoriel $K$ est de dimension finie $p$. On considère un $K$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$. Montrer que $E$ est un $L$-espace vectoriel de dimension finie $np$.

### 6.3. Applications linéaires

Exercice 8 (Non équivalence entre injectivité et surjectivité d'un endomorphisme) 0

Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis d'un endomorphisme surjectif et non injectif.

Exercice 9 (Existence d'une application linéaire à valeurs imposées *(X PC 09)*) 0

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies.

**1** Soit $(x, y) \in E \times F$. À quelle condition existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f(x) = y$ ?

**2** Soient $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ dans $E \times F$. À quelle condition existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ ?

Exercice 10 (Propagation des propriétés par linéarité) 0 à 1

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, $E$ étant de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

**1** Montrer que si $f$ est nulle sur une famille génératrice de $E$, alors $f$ est identiquement nulle.

**2** Montrer que si $f, g$ coïncident sur une famille génératrice de $E$, alors $f = g$.

**3** Montrer que si (dans le cas où $E = F$), pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée, alors $f$ est une homothétie.

Exercice 11 (Endomorphismes cycliques *(Centrale PC 09)*) 1

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. On dit qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est *cyclique* s'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.

**1** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Montrer que $f$ est cyclique

**2** Montrer que le commutant d'un endomorphisme cyclique est constitué de ses polynômes.

**Exercice 12 (De la nilpotence ponctuelle à la nilpotence globale)** 2

**1** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}^*, \quad f^{p_x}(x) = 0.$$

Montrer que $f$ est nilpotent.

**2** Montrer que ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie.

**Exercice 13 (Quand l'inverse est un polynôme)** 2

Soit $f$ un automorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie non nulle. Montrer que $f^{-1}$ est un polynôme en $f$.

**Exercice 14 (Supplémentarité de l'image et du noyau d'un endomorphisme)** 2

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ ;

(2) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ ;

(3) $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

**Exercice 15 (Sur le dual)** 2

Soit $E$ un espace vectoriel. On note $E^*$ son dual.

**1** Montrer que si $f$ et $g$ sont deux formes linéaires sur $E$ de même noyau, alors $f$ et $g$ sont colinéaires.

**2** On suppose ici que $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\Phi_n : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f^{(n)}(0) \end{array}.$$

Montrer que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

**3** Ici, $E$ est de dimension 3, et $u$ est un endomorphisme de $E$ tel que $u^2 = 0$. Montrer l'existence de $(a, f) \in E \times E^*$ tel que, pour tout $x \in E$ :

$$u(x) = f(x)a.$$

**Exercice 16 (Endomorphismes commutant)** 3

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f^2 - f \circ g + 2f - \operatorname{Id}_E = 0$. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

**Exercice 17 (Sommes d'images et de noyaux)** 3

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $(f, g) \in L(E)^2$ avec $E = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

**Exercice 18 (Dimension et annulation sur un sous-espace)** 3

**1** *(Mines MP 09)* Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie, $G$ un sous-espace de $E$. On pose $L = \{u \in \mathcal{L}(E,F), G \subset \operatorname{Ker} u\}$. Montrer que $L$ est un espace vectoriel et donner sa dimension.

**2** *(X PC 09)* Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$ avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Déterminer la dimension de $\{\varphi \in E^*, \varphi_{|F} = 0\}$.

**Exercice 19 (Finitude ponctuelle des itérées *(ENS Lyon MP 09)*)** 3

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Caractériser les endomorphismes $f$ de $E$ tels que, pour tout $x$ de $E$, l'ensemble $\{f^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ soit fini.

**Exercice 20 (Une décomposition en produit d'automorphisme et de projecteur)** 4

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme $g$ de $E$ et un projecteur $p$ de $E$ tels que $f = g \circ p$.

## 6.4. Rang

**Exercice 21 (Calculs de rang)** 0

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Montrer que $\operatorname{rg}(f) = 1$.

**Exercice 22 (Inégalités et rang)** 1

**1** Soit $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$ deux morphismes entre espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer :

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

**2** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et $u, v$ deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - n \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$

**Exercice 23 (Égalité de rangs)** 3

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\operatorname{Im}(g)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $E$, puis que $f, g, g \circ f, f \circ g$ ont le même rang.

**Exercice 24 (Une somme de rangs)** 3

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim E$.

CHAPITRE XV

# Polynômes

## Sommaire



Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Cela dit, il est possible de définir des polynômes sur tout corps (et même sur tout anneau commutatif).

Nous avons déjà une idée intuitive de la notion de polynôme, mais pas de définition précise. En fait, il serait facile de définir les polynômes que nous connaissons de façon fonctionnelle, mais ceci soulèverait plusieurs problèmes : tout d'abord, cela cacherait l'intérêt formel des polynômes, l'aspect fonctionnel dans des espaces non numériques (on parlera par exemple de polynôme de matrices ou d'endomorphismes). De plus, cette notion s'étendrait mal au cas d'un corps de base quelconque, et surtout fini.

Je parle de la notion d'idéal, mais vous pouvez laisser de côté cette définition hors-programme (qui peut toutefois tomber en DS, où elle vous serait rappelée).

Sauf mention contraire, $A, B, C, P, Q, R$ désignent des éléments de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha$ un élément de $\mathbb{K}$.

## 1. Polynômes à une indéterminée

### 1.1. Construction de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

**Définition (Support d'une suite)** 1.a

On appelle *support* de la suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ la partie suivante de $\mathbb{N}$ :

$$\{n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0\}.$$

**Définition (Suite presque nulle)**

On dit qu'une suite $(u_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est *presque nulle* si elle est de support fini. Notons $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ presques nulles.

1.b

$(u_n)$ est de support fini si et seulement si il existe un rang à partir duquel son terme général est nul. $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Nous voulons munir $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ d'une opération de multiplication. En vue de la formule de multiplication de deux polynômes, on pose :

**Définition (Produit de suites presque nulles)**

Pour tous éléments $P = (u_n)$ et $Q = (v_n)$ de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on pose $PQ = (\mu_n)$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i,j \geqslant 0, i+j=n} u_i v_j.$$

1.c

**Lemme (La multiplication polynomiale est interne)**

Le produit de deux suites presque nulles est une suite presque nulle.

1.a

**Démonstration**

□

On pose $X = (\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \mathbb{K}(\mathbb{N})$. On montre facilement par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k$ est la suite de terme général $\delta_{k,n}$.

Pour tout élément $P = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on a donc $P = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k X^k$, notation que l'on retiendra.

Désormais, nous noterons $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des suites presque nulles à coefficients dans $\mathbb{K}$, et ses éléments seront appelés *polynômes (en l'indéterminée $X$)*.

Dans une phrase telle que « Soit $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ un polynôme », on considèrera implicitement que les coefficients $a_k$ sont des scalaires.

**Définition (Base canonique de l'espace des polynômes)**

La famille infinie $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique de $\mathbb{K}[X]$*.

1.d

**Proposition (Anneau des polynômes à une indéterminée)**

$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

1.b

Démonstration

$\square$

Munie d'une structure très riche (anneau et espace vectoriel), on dit que $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. On l'appelle *algèbre (ou anneau) des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (et à une indéterminée)*.

En fait cette construction et ces notations sont généralisables à tout corps $\mathbb{K}$ (éventuellement fini), et même à tout anneau commutatif non nul : si $A$ est un tel anneau, on définit l'anneau des polynômes $A[x]$ à une indéterminée à coefficients dans $A$.

Cela s'applique à $A = \mathbb{K}[X]$ ! On définit alors l'anneau $\mathbb{K}[X, Y]$ des polynômes à deux indéterminées, à coefficients dans $\mathbb{K}$. On peut évidemment généraliser à $n$ indéterminées, pour tout $n \geqslant 1$.

Ce n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, car la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ n'est pas induite par celle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

**Définition (Monôme, polynôme constant)** 1.e

On appelle *monôme* tout polynôme du type $\lambda X^k$, où $(\lambda, k) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{N}$. Un polynôme *constant* est un polynôme du type $\lambda$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

**Définition (Composé d'un polynôme par un autre)** 1.f

Soit $A = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. Pour tout polynôme $B$, on pose $A(B) = \sum_{k \geqslant 0} a_k B^k$, le *composé* du polynôme $B$ par le polynôme $A$.

**Exemple (Composé de polynômes)** i

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = P$.

**Exercice (Composés de polynômes)** 1

Pour $A = X^2 + 1$ et $B = X + 3$, calculer $A(B)$ et $B(A)$.

### 1.2. Degré d'un polynôme

**Définition (Degré d'un polynôme)**

Soit $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $P$ non nul. On appelle *degré* de $P$ et note $\deg(P)$ le plus grand entier $p$ tel que $a_p \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.

1.g

**Valuation d'un polynôme**

On a une notion analogue à celle du degré en prenant le plus petit entier et non le plus grand : la *valuation* de $P$ non nul (par convention la valuation du polynôme nul vaut $+\infty$). Les propriétés que nous verrons pour le degré ont des analogues pour la valuation, que je vous incite à énoncer et démontrer.

1.1

**Définition (Coefficient dominant, polynôme unitaire)**

On appelle *coefficient dominant* d'un polynôme $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ non nul de degré $p$ le coefficient $a_p$, *i.e.* celui de son terme de plus haut degré. Un polynôme *unitaire* (ou *normalisé*) est un polynôme (non nul) de coefficient dominant égal à 1.
Le *normalisé* d'un polynôme non nul $P$, de coefficient dominant $\lambda$, est le polynôme $\frac{1}{\lambda} P$.

1.h

**Proposition (Degré d'une somme, d'un produit)**

Soit $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a :

(1) $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$, une condition suffisante d'égalité étant $\deg P \neq \deg Q$.

(2) $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

1.c

**Démonstration**

$\square$

Donner un exemple où l'inégalité est stricte :

Comme indiqué, nous avons une condition suffisante (« si ») mais pas nécessaire (« seulement si ») :

**Corollaire (Intégrité de l'anneau des polynômes)** 1.d

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

**Démonstration**

$\square$

En particulier, tout polynôme non nul est simplifiable pour le produit.

**Corollaire (Polynômes inversibles)** 1.e

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est inversible si et seulement si son degré est nul (*i.e.* si et seulement si c'est un polynôme constant non nul).

**Démonstration**

$\square$

Ces résultats expliquent pourquoi on a posé $\deg 0 = -\infty$.
Cela permet en particulier de prouver que pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, tous scalaires $\lambda$ et $\mu$ :

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$$

**Proposition (Degrés échelonnés)** 1.f

Soit $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ une famille de polynômes *tous non nuls*. On suppose que

$$\deg P_1 < \cdots < \deg P_m$$

(on dit que l'on a une famille de polynômes à *degrés échelonnés*).
La famille $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ est alors libre.

**Démonstration**

□

**Définition (Espace des polynômes de degré au plus $n$)** 1.i

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathbb{K}_n[X]$ par

$$\{P \in \mathbb{K}[X],\ \deg P \leqslant n\}$$

$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, de dimension[1] $n+1$, dont une base (dite *canonique*) est $(1, X, \dots, X^n)$.

Si $n \geqslant 1$, $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$, car non stable par multiplication.

**Exercice (Degré d'un polynôme composé)** 2

Faire l'exercice 8 de TD.

### 1.3. Division euclidienne

**Définition (Relation de divisibilité dans l'anneau des polynômes)** 1.j

Soient $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que $B$ *divise* $A$, ou que $A$ est un *multiple* de $B$, s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BC$.
On note alors $B|A$.
On note $\mathbb{K}[X]A$ (resp. $\mathcal{D}(A)$) l'ensemble des multiples (resp. des diviseurs) de $A$.

**Exemple (Divisibilité dans l'anneau des polynômes)** ii

$X^2+1$ divise $X^4+4X^2+3$.
Le polynôme nul ne divise que lui-même, mais est divisible par tout polynôme.

La relation de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ est réflexive, transitive, mais non antisymétrique :

Si $B|A$, alors $BC|AC$ pour tout $C \in \mathbb{K}[X]$ (la réciproque est vraie si $C \neq 0$, par intégrité).
Si $B$ divise $A$ et $A$ est non nul, alors $\deg B \leqslant \deg A$.

1. et non $n$, comme on le lit trop souvent.

**Définition (Polynômes associés)**

On dit que deux polynômes $A$ et $B$ *sont associés* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$

1.k

Justification de l'expression symétrique :

**Proposition (Caractérisations des polynômes associés)**

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $A$ et $B$ sont associés.

(2) $A$ divise $B$ et $B$ divise $A$.

(3) $A$ et $B$ ont même degré, et l'un divise l'autre.

1.g

**Démonstration**

$\square$

**Théorème de division euclidienne dans l'anneau des polynômes**

Étant donné deux polynômes $A$ et $B$ de $\mathbb{K}[X]$, où $B \neq 0$, il existe un unique couple $(Q, R)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B$$

1.h

**Définition (Quotient et reste d'une division euclidienne polynomiale)**

Dans ce contexte, on appelle $Q$ le *quotient* et $R$ le *reste* de la division euclidienne de $A$ par $B$.

1.l

**Démonstration**

Unicité :

$\square$

Démonstration

Existence : notons $m = \deg(B)$, $b_m$ le coefficient dominant de $B$.
Pour tout entier $n \geqslant m$, on pose l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ : pour tout polynôme $A$ de degré strictement inférieur à $n$, on a existence d'un tel couple.
Amorçage au rang $m$ : soit $A \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(A) < m$. Le couple $(0, A)$ convient ($A = 0 \times B + A$ et $\deg(A) < \deg(B)$).
Hérédité : fixons un entier $n \geqslant m$, et supposons le résultat vérifié à ce rang. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(A) < n+1$.
Si $\deg(A) < n$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure directement.
Supposons $\deg(A) = n$, notons $a_n$ son coefficient dominant.
Posons $A_1 = A - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B$. Comme $\deg(A_1) < n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, obtenant $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A_1 = Q_1 B + R_1$ et $\deg(R_1) < \deg(B)$.
On a

$$A = \left( \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q_1 \right) B + R_1,$$

d'où l'existence d'un tel couple pour $A$ : l'hérédité est prouvée.

□

Le polynôme $B$ divise $A$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$ est nul.

La preuve de l'existence est intéressante en tant que telle, puisqu'elle nous fournit un algorithme pour effectuer cette division euclidienne :

**Algorithme de division euclidienne :**
Données : $B$ de degré $m \geqslant 0$, de coefficient dominant $b_m \neq 0$, $A$ de degré $n \geqslant m$.
$Q \leftarrow 0$ ; $R \leftarrow A$.
Pour $k$ allant de $n - m$ à $0$ par pas de $-1$ :
- $q_k \leftarrow r_{k+m}/b_m$.
- $R \leftarrow R - q_k X^k B$.

Exercice (Division euclidienne polynomiale) 3

Effectuer la division euclidienne de $A = X^5 + 2X^4 - 3X^2 + X + 2$ par $B = X^3 - X + 1$.

Dans certains exercices, il est demandé ou il est utile de calculer le reste dans une division euclidienne. Nous verrons qu'il n'est pas toujours nécessaire d'effectuer une division euclidienne pour ce faire.

Exercice (Idéaux de l'anneau des polynômes à une indéterminée) 4

Une partie $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}[X]$ en est un *idéal* si c'est un sous-groupe additif, stable par multiplication par un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$.
Montrer qu'une partie $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}[X]$ en est un idéal si et seulement si il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\mathcal{I} = A\mathbb{K}[X].$$

## 2. Fonctions polynomiales

### 2.1. Définition. Racines d'un polynôme

**Définition (Fonction polynomiale)** 2.a

Soit $A = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose

$$A(\alpha) = \sum_{k \geqslant 0} a_k \alpha^k$$

(dans cette somme, seul un nombre fini de termes sont non nuls).
La fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, définie par $x \mapsto A(x)$, est appelée *fonction polynomiale* associée au polynôme $A$, et notée $\tilde{A}$, voire $A$.

Cette définition est consistante avec celle d'un polynôme composé.

**Proposition (Morphisme d'évaluation d'un polynôme)** 2.a

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'application $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$, $P \mapsto P(\alpha)$ est à la fois une forme linéaire et un morphisme d'anneaux.

Le reste de la division euclidienne de $P$ par $X - \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{K}$) est $P(\alpha)$.

**Définition (Racine d'un polynôme)** 2.b

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que $\alpha$ est un *zéro* (ou une *racine*) de $P$ si $P(\alpha) = 0$.

Comme $P(0)$ est le coefficient constant, on voit tout de suite si 0 est racine de $P$. De même, 1 est racine si et seulement si la somme des coefficients est nulle.

$\alpha$ est une racine de $P$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de $P$ par $X - \alpha$ est nul, si et seulement si $(X - \alpha)$ divise $P$.

Comme l'évaluation en $\alpha$ est une forme linéaire non nulle, l'ensemble des polynômes admettant $\alpha$ pour racine est un hyperplan. Comme cette évaluation est également un morphisme d'anneaux, cet ensemble est aussi un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

**Exercice (Polynôme admettant $p$ racines distinctes)** 5

Montrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont $p$ racines distinctes de $P$, alors $P$ est divisible par $\prod_{1 \leqslant i \leqslant p}(X - \alpha_i)$.

En particulier, si $\deg P = p$, alors il existe une constante non nulle $\lambda$ (le coefficient dominant de $P$) telle que :

$$P = \lambda \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} (X - \alpha_i)$$

**Exemple (Polynôme admettant $n$ racines distinctes)** i

Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ :

Corollaire (Un polynôme non nul n'a pas plus de racines que son degré)

Un polynôme non nul de degré $n$ admet au plus $n$ racines distinctes.

2.b

Ainsi, si un élément $\mathbb{K}_n[X]$ s'annule $n+1$ fois au moins, c'est le polynôme nul.

Exercice (Donnée d'un polynôme par ses valeurs en certains points)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_{n+1}$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

6

Proposition (Du polynôme à la fonction polynomiale)

L'application naturelle

$$\tilde{} : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{K}} \\ P & \mapsto & \tilde{P} \end{array}$$

est un morphisme injectif de $\mathbb{K}$-espaces-vectoriels et d'anneaux.

2.c

Démonstration

□

L'injectivité peut tomber en défaut dans le cas où le corps de base est quelconque. Donner un exemple lorsque le corps est fini :

Comment calculer rapidement la valeur d'une fonction polynomiale en un point ? Grâce à l'algorithme de Horner :

On écrit $P(X) = ((\dots((a_n X + a_{n-1})X + a_{n-2})X + \dots)X + a_1)X + a_0$.
$V = P(\alpha)$
$V \leftarrow a_n$
Pour $i$ allant de $n-1$ à $0$ par pas de $-1$ :
$V \leftarrow V * \alpha + a_i$
Cela permet d'évaluer un polynôme en moins de produits que la méthode naïve.

Exemple (Algorithme de Horner)

$2X^3 + 3X^2 - X + 4 = ((2X+3)X-1)X+4$. En 3 :
2 puis $2*3+3=9$ puis $9*(3)-1=26$ puis $26*(3)+4=82$

ii

### 2.2. Ordre de multiplicité d'une racine

**Définition (Ordre de multiplicité d'une racine)** 2.c

Soit $\alpha$ une racine de $P$ non nul. $\alpha$ est appelée *racine d'ordre (de multiplicité)* $p$ (de $P$) si $p$ est le plus grand entier tel que $(X-\alpha)^p$ divise $P$.
On dit que $\alpha$ est racine *multiple* (simple, double, triple, ...) si son ordre vaut 2 au moins (exactement 1, 2, 3, ...).

L'existence de l'ordre vient de ce que $(X-\alpha)^{\deg P+1}$ ne divise pas $P$ non nul. En particulier, l'ordre de $\alpha$ dans $P$ est inférieur ou égal à $\deg(P)$.

On dit aussi parfois que $\alpha$ est racine d'ordre 0 pour parler d'une non racine (ce sera le cas dans ce cours).

**Exercice (Caractérisation de l'ordre d'une racine)** 7

Montrer que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre $p \in \mathbb{N}$ dans $P$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ n'admettant pas $\alpha$ pour racine tel que $P = (X-\alpha)^p Q$.

**Lemme Ordre de multiplicité d'une racine dans un produit** 2.d

Soit $P = QR$ un polynôme, $\alpha \in \mathbb{K}$. Notons $m_P$, $m_Q$, $m_R$ les ordres respectifs de $\alpha$ pour les polynômes $P$, $Q$, $R$. On a alors $m_P = m_Q + m_R$.

**Démonstration**

$\square$

**Corollaire (Ordre de multiplicité)** 2.e

Si $P = QR$, $\alpha$ est une racine d'ordre $r$ de $P$, et n'est pas racine de $Q$, alors $\alpha$ est racine d'ordre $r$ de $R$.

**Exercice (Polynôme admettant des racines distinctes données avec multiplicité)** 8

Soit $P$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont $p$ racines distinctes de $P$, d'ordre respectivement au moins égal à $r_1, \dots, r_p$, alors $P$ est divisible par $\prod_{1 \leqslant i \leqslant p}(X-\alpha_i)^{r_i}$.

En particulier, si $\deg P = \sum_{i=1}^{p} r_i$, et si $\lambda$ est le coefficient dominant de $P$, alors

$$P = \lambda \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} (X-\alpha_i)^{r_i}$$

Corollaire (Nombre de racines d'un polynôme comptées avec leur multiplicité)

Un polynôme non nul de degré $n$ possède au plus $n$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

2.f

## 2.3. Polynôme dérivé

Définition (Polynôme dérivé)

Soit $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit le *polynôme dérivé* $P'$ de $P$ par

$$P' = \sum_{k\geqslant 1} k a_k X^{k-1} (= \sum_{k\geqslant 0} (k+1) a_{k+1} X^k)$$

2.d

Contrairement au cas des fonctions, la question de la dérivabilité ne se pose pas, et la notation $(X^2+X)'$ par exemple est licite.

Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on « reconnaît » bien la dérivation usuelle, c'est-à-dire que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\widetilde{(P')} = (\tilde{P})'$.

Proposition (Degré du polynôme dérivé)

Si $\deg P > 0$, alors $\deg P' = \deg P - 1$.
Le polynôme $P$ est constant si et seulement si $P' = 0$.

2.g

Démonstration

$\square$

Proposition (La dérivation polynomiale est linéaire)

La dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

2.h

Ce morphisme est surjectif non injectif (ce qui prouve au passage qu'on travaille en dimension infinie, même si on le savait depuis le début).

Proposition (Dérivée d'un produit)

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

2.i

La dérivation n'est pas un endomorphisme de l'*anneau* $\mathbb{K}[X]$ :

Démonstration

$\square$

Définition (Dérivées successives d'un polynôme)

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on définit, par récurrence, le polynôme dérivé d'ordre $r$, par :

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall r \geqslant 0, P^{(r+1)} = (P^{(r)})'$$

2.e

Exercice (Dérivée $r$-ième)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Donner la dérivée $r$-ième de $(X - \alpha)^n$.

9

Itérée de la dérivation, l'application dérivée $r$-ième est linéaire.

Proposition (Formule de Leibniz)

Pour tous polynômes $P$ et $Q$, tout entier $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$(PQ)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} P^{(k)} Q^{(r-k)}$$

2.j

Démonstration

$\square$

**Proposition (Formule de Taylor)**

Pour tous $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ :

$$P(X) = \sum_{p \geqslant 0} \frac{P^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^p$$

2.k

**Démonstration**

□

Cette formule est utile pour décomposer un polynôme dans la base $((X-\alpha)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de $(X-\alpha)$. On a donc aussi :

$$P(\alpha + X) = \sum_{p \geqslant 0} \frac{P^{(p)}(\alpha)}{p!} X^p$$

**Proposition (Ordre d'une racine du polynôme dérivé)**

Soit $r \geqslant 1$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\alpha$ est racine d'ordre $r$ de $P$, alors $\alpha$ est racine d'ordre $r-1$ du polynôme dérivé $P'$.

2.l

**Démonstration**

□

La réciproque est fausse :

Proposition (Caractérisation de l'ordre d'une racine)

$\alpha$ est racine d'ordre $r$ de $P$ si et seulement si

$$P(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(r)}(\alpha) \neq 0$$

2.m

Démonstration

□

Moyen mnémotechnique : l'ordre est le nombre de polynômes s'annulant en $\alpha$ ci-dessus, ou encore prendre $r = 0$ ou $r = 1$.

$\alpha$ est donc une racine multiple de $P$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

## 3. Polynômes scindés, fonctions symétriques élémentaires des racines

Définition (Polynôme scindé)

Un polynôme non nul est dit *scindé* sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{1 \leqslant k \leqslant p} (X - \alpha_k)$$

où $\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

3.a

Le fait d'être scindé est stable par produit, pas par somme :

Exemple (Polynômes scindés)

(1) $X^2 + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

(2) Si un polynôme est scindé sur $\mathbb{K}$, alors ses coefficients sont dans $\mathbb{K}$, mais la réciproque est fausse.

(3) Un polynôme complexe de degré $n$ admettant $n$ racines complexes distinctes est scindé, mais la réciproque est fausse :

(4) En revanche, $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il possède $n$ racines dans $\mathbb{K}$, comptées avec leur ordre de multiplicité.

i

Exemple (Premières relations coefficients racines)

Soit $s, p \in \mathbb{K}$. On sait que les racines de $A = X^2 - sX + p$ ont pour somme $s$ et pour produit $p$.

ii

Nous allons généraliser ces formules à un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ non constant quelconque.
On considère un polynôme $P$ scindé sur $\mathbb{K}$ : $P = \lambda \prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)$, où $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$.
Il existe de scalaires $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ tels que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k) = \lambda(X^p - \sigma_1 X^{p-1} + \cdots + (-1)^p \sigma_p).$$

Un calcul trivial donne, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ :

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant p} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}.$$

Retenir en particulier que

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant p} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2}$$

$$\sigma_p = \prod_{k=1}^{p} \alpha_k$$

Définition (Fonctions symétriques élémentaires des racines)

Les quantités $\sigma_i$ sont appelées les *fonctions symétriques élémentaires* des racines du polynôme $P$.

3.b

Exemple (Fonctions symétriques élémentaires des racines)

Détailler les fonctions symétriques élémentaires des racines pour les polynômes scindés sur $\mathbb{K}$ de degrés 2 et 3.

iii

Chaque $\sigma_k$ peut être vu comme un polynôme en les indéterminées $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, de degré global et de valuation $k$.

En fait, tout polynôme symétrique en les $\alpha_k$ (*i.e.* inchangé en permutant ces indéterminées) peut s'exprimer au moyen de ces fonctions symétriques élémentaires. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Ainsi, $X^3 - X^2 + 3X + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, puisque la somme des carrés de ses racines est strictement négative (je vous invite à trouver une autre preuve, plus élémentaire).

## 4. Arithmétique de l'anneau des polynômes

### 4.1. Compléments sur la divisibilité

**Exercice** (Lemme d'algèbre linéaire pour l'arithmétique des polynômes)

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $E_1$ et $E_2$ deux espaces vectoriels de $E$. Montrer :

$$\varphi(E_1 + E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2) \quad \text{et} \quad \varphi(E_1 \cap E_2) \subset \varphi(E_1) \cap \varphi(E_2),$$

cette dernière inclusion pouvant être stricte. Cependant, vérifier que c'est une égalité si $\varphi$ est injective, ou si $\varphi$ est nulle.

10

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. L'application $\varphi_P \; : A \mapsto AP$ de multiplication par $P$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, nul ou injectif.

Pour tous polynômes $P$, $Q$ et $R$ :

Si $P$ divise $Q$ et $R$, il divise $\lambda Q + \mu R$.

Si $P$ divise $Q$, il divise $QR$.

Pour tout polynôme $D$, $D$ est un diviseur commun à $P$ et $Q$ si et seulement si $D$ est un diviseur commun à $P$ et $Q - PR$.

Si $A$ et $B$ sont deux polynômes, $B$ non nul, $R$ le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$, alors

$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R).$$

### 4.2. PGCD

Si $P$ est un polynôme, on note $P^*$ le normalisé de $P$ si $P$ n'est pas nul, et le polynôme nul si $P$ l'est lui-même.

**Proposition** (PGCD pour deux polynômes)

Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Il existe un unique polynôme nul ou unitaire $D$ tel que $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(D)$, *i.e.* :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], (P|A \text{ et } P|B) \Leftrightarrow P|D.$$

De plus, il existe un couple de polynômes $(U, V)$ tel que $AU + BV = A \wedge B$.

4.a

**Démonstration**

Commencer par l'unicité.

Pour l'existence, on écarte le cas où $A$ ou $B$ est nul, puis on se ramène au cas où $\deg(A) \geqslant \deg(B) \geqslant 0$. On définit par récurrence les suites $(R_k)$, $(Q_k)$, $(U_k)$, $(V_k)$ de la manière suivante.

$R_0 = A$, $U_0 = 1$, $V_0 = 0$ de sorte que $R_0 = U_0 A + V_0 B$.

$R_1 = B$, $U_1 = 0$, $V_1 = 1$, de sorte que $R_1 = U_1 A + V_1 B$.

Pour tout entier naturel $k$ tel que $R_k$ et $R_{k+1}$ soient définis, et si $R_{k+1} \neq 0$, on définit $Q_{k+2}$ (resp. $R_{k+2}$) comme le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de $R_k$ par $R_{k+1}$. On définit alors $U_{k+2} = U_k - Q_{k+2} U_{k+1}$ et $V_{k+2} = V_k - Q_{k+2} V_{k+1}$ de sorte que si $R_k = U_k A + V_k B$ et $R_{k+1} = U_{k+1} A + V_{k+1} B$, alors $R_{k+2} = U_{k+2} A + V_{k+2} B$. Les diviseurs communs à $R_k$ et $R_{k+1}$ sont les diviseurs communs à $A$ et $B$, et la suite des degrés des $R_k$ est strictement décroissante à partir du rang 1

□

**Définition (PGCD de deux polynômes)**

On dit que $D$ est le *pgcd* de $A$ et de $B$. On note $D = \text{pgcd}(A, B)$, ou $D = A \wedge B$
On dit que $AU + BV = A \wedge B$ est une *relation de Bézout* pour $A$ et $B$, et que $(U, V)$ est un couple de coefficients de Bézout pour le couple $(A, B)$.

4.a

En fait [2] on a

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = (A \wedge B)\mathbb{K}[X]$$

(1) Si $A = 0$, alors $A \wedge B$ vaut $B^*$.

(2) Plus généralement $A \wedge B = B^*$ si et seulement si $B$ divise $A$.

(3) $A \wedge B = B \wedge A$

(4) $D$ est le polynôme unitaire de plus haut degré divisant $A$ et $B$.

(5) Si on a des polynômes associés, $\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_2)$ et $\mathcal{D}(B_1) = \mathcal{D}(B_2)$, alors $A_1 \wedge B_1 = A_2 \wedge B_2$.

(6) $\forall A, B, C \in \mathbb{K}[X], (A - BC) \wedge B = A \wedge B$

(7) Pour tous polynômes $A, B, C$, on a $(CA) \wedge (CB) = C^*(A \wedge B)$.

(8) Il n'y a pas unicité du couple de Bézout.

**Algorithme d'Euclide** [3]
$(U_0, V_0) \leftarrow (1, 0)$
$(U_1, V_1) \leftarrow (0, 1)$
Tant que $B \neq 0$
$Q \leftarrow$ quotient de la division euclidienne de $A$ par $B$
$(A, B) \leftarrow (B, A - QB)$
$(U_0, U_1) \leftarrow (U_1, U_0 - QU_1)$
$(V_0, V_1) \leftarrow (V_1, V_0 - QV_1)$
Fin tant que
Si $A \neq 0$
$\lambda \leftarrow$ coefficient dominant de $A$.
$A \leftarrow A/\lambda$, $U_0 \leftarrow U_0/\lambda$, $V_0 \leftarrow V_0/\lambda$.
Résultat : $(A, U_0, V_0)$.

### 4.3. Polynômes premiers entre eux

**Définition (Polynômes premiers entre eux)**

Soient $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que $A$ et $B$ sont *premiers entre eux* si $A \wedge B = 1$, *i.e.* les seuls diviseurs communs à $A$ et $B$ sont les polynômes constants non nuls (*i.e.* de degré 0).

4.b

2. La « bonne » définition de $A \wedge B$ consisterait à observer que $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$ est un idéal, donc de la forme $C\mathbb{K}[X]$ pour un certain polynôme, uniquement déterminé si on impose en outre qu'il soit nul ou unitaire.
3. que vous pouvez prouver en utilisant un invariant de boucle

**Proposition (Identité de Bézout pour les polynômes)** 4.b

Deux polynômes $A$ et $B$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux polynômes $U$ et $V$ tels que

$$AU + BV = 1$$

**Démonstration**

$\square$

**Théorème de Gauss** 4.c

Si $A$ divise $BC$ et $A$ est premier avec $B$, alors $A$ divise $C$.

**Démonstration**

$\square$

Si $A$ est premier avec $BC$, il est premier avec $B$ et avec $C$.

Si $A$ est premier avec $B$ et avec $C$, alors $A$ est premier avec $BC$. Plus généralement, si chaque $A_i$ est premier avec chaque $B_j$, alors $A_1 \dots A_m$ et $B_1 \dots B_n$ sont premiers entre eux.

Cas particulier : si $A \wedge B = 1$, alors $A^m \wedge B^n = 1$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Si $\lambda$ et $\mu$ sont deux scalaires distincts, alors $(X - \lambda) \wedge (X - \mu) = 1$.

Plus généralement, si $\lambda_i, \mu_j$ sont des scalaires distincts deux à deux et $\alpha_i, \beta_j$ sont des entiers naturels, alors

$$\prod (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \wedge \prod (X - \mu_i)^{\beta_i} = 1$$

Ainsi, deux polynômes scindés sur $\mathbb{K}$ sont premiers entre eux si et seulement si ils non pas de racine commune.

Si $A$ et $B$ premiers entre eux divisent $C$, alors $AB$ divise $C$.

Il existe des polynômes $A_1$ et $B_1$ premiers entre eux tels que $A = (A \wedge B)A_1$ et $B = (A \wedge B)B_1$.

### 4.4. PPCM

**Définition (PPCM de deux polynômes)**

Soient $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Il existe un unique polynôme $M$, nul ou unitaire tel que
$$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X].$$
On dit que $M$ est le *ppcm* de $A$ et $B$, on le note $\text{ppcm}(A, B)$ ou $A \vee B$.

4.c

**Démonstration**

Justification de cette définition :

$\square$

Invariance du ppcm par association.

Si $A$ ou $B$ est nul, le ppcm est nul.

$A \vee B = B^*$ si et seulement si $B$ est un multiple de $A$.

Si $A$ et $B$ sont non nuls, alors le ppcm est non nul, et est le commun multiple unitaire de plus petit degré de $A$ et $B$.

$$(CA) \vee (CB) = C^*(A \vee B)$$

Si $A$ et $B$ sont premiers entre eux, alors $A \vee B = (AB)^*$, et réciproquement dans le cas où $A$ et $B$ sont non nuls.

Pour tous polynômes $A$ et $B$, on a
$$(A \wedge B)(A \vee B) = (AB)^*.$$

On généralise comme dans le cas de $\mathbb{Z}$ les notions de PGCD et PPCM au cas d'une famille finie de polynômes. Il faudra à cet égard distinguer polynômes premiers entre eux deux à deux et polynômes premiers entre eux dans leur ensemble.

## 5. Polynômes irréductibles, décomposition

### 5.1. Polynômes irréductibles

**Définition (Polynôme irréductible sur un corps)**

On appelle polynôme *irréductible (sur $\mathbb{K}$)* tout polynôme $P$ non constant de $\mathbb{K}[X]$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants ou associés à $P$ :
$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], P = AB \Rightarrow (\deg A = 0 \text{ ou } \deg B = 0)$$

5.a

**Exemple (Polynômes irréductibles)**

(1) Tout polynôme de degré 1 est donc irréductible.
(2) Un polynôme de degré 2 n'est pas toujours irréductible, mais peut l'être.
(3) Un polynôme de degré 2 au moins n'est pas irréductible s'il possède une racine et *a fortiori* s'il est scindé, mais ces conditions ne sont pas nécessaires.
(4) En revanche elles le deviennent si le degré du polynôme est 2 ou 3.
(5) En particulier, un polynôme réel de degré impair $\geqslant 3$ n'est jamais irréductible sur $\mathbb{K}$.

i

Si $P$ est irréductible, alors les associés de $P$ sont irréductibles.

Pour tous $A, P \in \mathbb{K}[X]$, où $P$ est irréductible, $(P \wedge A)$ vaut 1 ou $P^*$, *i.e.* $P$ et $A$ sont premiers entre eux ou $P$ divise $A$.

Si deux polynômes irréductibles ne sont pas associés, ils sont premiers entre eux (en particulier deux polynômes unitaires irréductibles distincts).

Si $P$ irréductible divise un produit, alors il divise un terme de ce produit.

**Proposition (Existence d'un diviseur irréductible)**

Tout polynôme non constant est divisible par au moins un polynôme irréductible.

5.a

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Décomposition en produit d'irrréductibles)**

Tout polynôme $A$ non constant s'écrit

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} \dots P_m^{\alpha_m},$$

où $m > 0$, les $P_i$ sont des polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux, et les $\alpha_i$ sont des entiers strictement positifs .

Une telle écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Cette décomposition s'appelle *décomposition de $A$ en produit de facteurs irréductibles*.

5.b

**Démonstration**

$\square$

On peut décrire les diviseurs de $A$ d'après sa décomposition.
On peut calculer $A \wedge B$ et $A \vee B$ si on connaît les décompositions de $A$ et de $B$.

### 5.2. Le théorème de d'Alembert-Gauss. Application à la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

**Théorème de d'Alembert-Gauss**

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède une racine dans $\mathbb{C}$.

5.c

**Démonstration**

Admise !

$\square$

**Corollaire (Polynômes irréductibles complexes)**

L'ensemble des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré 1.

5.d

**Corollaire (Décomposition en produit d'irréductibles, cas complexe)**

Tout polynôme non constant $P$ de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, *i.e.* $P$ peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{1 \leqslant k \leqslant p} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, des complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ deux à deux distincts, et des entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_p$.

5.e

**Définition (Polynôme conjugué)**

Soit $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ un polynôme. On appelle *polynôme conjugué* de $P$ et on note $\overline{P}$ le polynôme $\sum_{k \geqslant 0} \overline{a_k} X^k$.

5.b

**Proposition (Racine conjuguée du polynôme conjugué)**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha$ une racine complexe d'ordre $r \in \mathbb{N}$. Le complexe $\bar{\alpha}$ est alors racine d'ordre $r$ de $\bar{P}$.

5.f

Dans le cas particulier où le polynôme $P$ est réel et la racine $\alpha$ non réelle, $\overline{\alpha}$ est racine de $P$, de même ordre que $\alpha$.

**Proposition (Polynômes irréductibles réels)**

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (*i.e.* de discriminant strictement négatif).

5.g

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Décomposition en produit d'irréductibles, cas réel)**

Tout polynôme non constant $P$ de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme produit de son coefficient dominant, de polynômes réels unitaires de degré 1 et de polynômes réels unitaires de degré 2 sans racine réelle.

5.h

**Exercice (Décomposition, cas réel)**

**1** Factoriser $X^4 + bX^2 + c$ dans $\mathbb{R}[X]$, où $b$ et $c$ sont des réels tels que $b^2 - 4c < 0$.
**2** Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

11

## 6. Feuille de TD 15 : Polynômes

La lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, $n, p, q$ sont des entiers naturels.

### 6.1. Arithmétique des polynômes

**Exercice 1 (Calculs de restes)** 0

**1** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. Quel est le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-a)$, par $(X-a)(X-b)$ ?

**2** Trouver le reste de la division euclidienne de $X^6 - 5X^4 + 3X^3 - X^2 + X + 2$ par $(X-1)^3$.

**3** Trouver par trois méthodes le reste de la division euclidienne de $P = X^5 + 4X^3 + 3X^2 - X + 6$ par $(X-1)^2(X+2)$.

**4** Chercher le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

**5** Soit $B = X^3 - X^2 + X - 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $A_n = (X^2 + X + 1)^n - X^{2n} - X^n - 1$.

**i** Donner une condition sur $n$ pour que $B$ divise $A_n$.

**ii** Donner le reste de la division euclidienne de $A_n$ par $B$.

**Exercice 2 (Contraintes de restes)** 0

**1** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}_3[X]$ divisibles par $X+1$ et dont les restes des divisions par $X+2, X+3, X+4$ sont égaux.

**2** *(Mines PSI 09)* Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal tel que : $P$ divisé par $X^2+X+1$ donne un reste égal à $X-1$ et $P$ divisé par $(X-1)^2$ donne un reste égal à $2-X$.

**Exercice 3 (Divisibilité de polynômes)** 0

**1**

**i** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P(P) - X$.

**ii** Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

**2** Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$.

**3** Soit $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P$ non constant. Montrer que si $A \circ P$ (autre notation pour $A(P)$) divise $B \circ P$, alors $A$ divise $B$.

**Exercice 4 (Couple de Bézout)** 0

Trouver un couple de Bézout pour $A = X^5 + 1$ et $B = X^7 + X^6 + X^3 + 1$.

**Exercice 5 (Décomposition en produit d'irréductibles)** 0, 5 pour la dernière

**1** Factoriser $P(X) = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$, sachant que $P$ admet au moins deux racines rationnelles (comptées avec leur ordre de multiplicité).

**2** Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

**3** *(CCP MP 08)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ : $X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$.

**4** Démontrer que $1 + (X-1)^2(X-3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

**Exercice 6 (Couple de Bézout optimal)** — 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non constants et $D = P \wedge Q$.
Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V)$ de polynômes tels que :

$$UP + VQ = D, \deg U < \deg Q - \deg D \text{ et } \deg V < \deg P - \deg D$$

**Exercice 7 (Polynômes positifs)** — 1

Soit $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] : \exists Q, R \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = Q^2 + R^2\}$.
**1** Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.
**2** Montrer que $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\}$.

**Exercice 8 (Degré d'un polynôme composé)** — 2

Montrer que pour tous polynômes non constants $P$ et $Q$, $\deg(P(Q)) = \deg(P)\deg(Q)$.

### 6.2. Polynômes et algèbre linéaire

**Exercice 9 (Familles de $\mathbb{R}_3[X]$ *(TPE PC 08)*)** — 0

Soit $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}_3[X]$.
**1** On suppose que : $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 0$. La famille $(P_1, P_2, P_3, P_4)$ est-elle liée ?
**2** On suppose que : $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 1$. La famille $(P_1, P_2, P_3, P_4)$ est-elle liée ?

**Exercice 10 (Puissances de matrices)** — 0, 1 pour la méthode

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
**1** Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
**2** Quel est le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^3 - 3X^2 + 2X$ ?
**3** Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
**4** $A$ est-elle inversible ?

**Exercice 11 (Un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ *(TPE PC 08)*)** — 0

**1** Soit $\phi\ : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P + P'$. Montrer que $\phi$ est un automorphisme.
**2** Étudier de même $\psi\ : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto aP + XP'$, où $a \in \mathbb{R}$.

**Exercice 12 (Polynômes d'interpolation de Lagrange)** 1

Soit $a_0, \dots, a_n$ des scalaires distincts deux à deux, $b_0, \dots, b_n$ des scalaires.
**1** Montrer qu'il existe un unique polynôme $P$ de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. C'est le *polynôme interpolateur de Lagrange* aux points $(a_i, b_i)$ $(i \in [\![0, n]\!])$.
**2** Déterminer explicitement ce polynôme.

**Exercice 13 (Un opérateur sur les polynômes)** 1

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $U_p = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(X-k)}{p!}, p \in \mathbb{N}$ (par convention, un produit indexé par l'ensemble vide vaut 1), et

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

**1** Démontrer que la famille $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
**2** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Delta^n(U_p)$.
**3** En déduire que : pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$.
**4** *(X MP 09)* Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P$ prend en tout entier relatif une valeur entière relative si et seulement si les coordonnées de $P$ dans la base $(U_p)$ sont entières.
**5** *(X MP 09)* On prolonge naturellement l'application $\Delta$ en un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction. Montrer que $f$ est polynomiale si et seulement si il existe un entier naturel $n$ tel que $\Delta^n(f) = 0$.
**6** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n$. Démontrer que la famille $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n))$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

**Exercice 14 (Bases d'espaces polynomiaux)** 2

**1** *(TPE)* Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$, et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
**2** *(Mines PSI 09)* Soit $P$ un polynôme de degré $n$ et $a_0, \dots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que la famille $(P(X + a_k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ constitue une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Exercice 15 (Formes linéaires sur des espaces de polynômes)** 2

**1** *(Mines MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $(c_1, \dots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $P$ de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k(P(k) + P(-k) - 2P(0)).$$

**2** *(Centrale MP 07)* Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de $A$ ? Donner une base de $A$.
**3** *(X MP 09)* Déterminer les $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tels qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \quad P'(a) = \alpha P(-2) + \beta P'(-2) + \gamma P(-1) + \delta P(1/2).$$

Exercice 16 (Une relation polynomiale *(X MP 08)*) 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n$, scindé à racines simples. On note $a_1, \ldots, a_n$ les racines de $P$. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)} = \frac{Q^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}.$$

## 6.3. Racines d'un polynôme

Exercice 17 (Équation d'inconnue polynomiale *(Mines MP 08, X MP 09)*) 1

**1** Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0 \text{ et } P(X^2) = P(X)P(X-1)\}$. Soit $P \in \mathcal{A}$. Montrer que les racines de $P$ sont de module 1. Déterminer $\mathcal{A}$.
**2** *(Mines PC 09)* Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.
**3** *(Centrale PC 09)* Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'$ divise $P$.
**4** Trouver les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = P'P''$.

Exercice 18 (Relations coefficients-racines) 2

**1** *(X PC 08)* Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de $P$. On note $x_1, x_2, x_3$ les racines de $P$. Déterminer : $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2x_3$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}$, $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.
**2** Soit $x_1, x_2, x_3, x_4$ les racines de $X^4 + X + 1$. Calculer $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i - 1}$.
**3** Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que ces nombres sont en progression géométrique si et seulement si $(ab+ac+bc)^3 = abc(a+b+c)^3$.

Exercice 19 (Polynômes scindés) 2

**1** *(Mines MP 09)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
**2** *(X MP 09)* Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $Q + aQ'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
**3** *(X MP 09)* Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$. On pose $R = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^{(k)}$. Montrer que $R$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 (Multiplicité de racines) 2

**1** *(Mines MP 07, X MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les racines complexes du polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X-k) + a$ sont de multiplicité au plus 2.
**2** *(X MP 09)* Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de $P'$ est racine de $P$.

Exercice 21 (Majoration du module des racines *(X-ENS PSI 08)*) 2

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$. Montrer que les racines complexes de $P$ ont un module majoré par $\max\{1, |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|\}$

Exercice 22 (Etude des racines d'un polynôme *(Mines MP 08)*) 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.

**1** Soit $z$ une racine de $P$ distincte de 1. Montrer que $|z| < 1$.

**2** Montrer que les racines de $P$ sont simples.

Exercice 23 (Polynôme complexe laissant stable l'ensemble des rationnels *(Mines PSI 08)*) 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

## 6.4. Divers

Exercice 24 (Irrationnalité de $\pi$) 1

**1** Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $P_n = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}$ et ses dérivées successives prennent, en 0 et $\frac{a}{b}$, des valeurs entières.

**2** Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) \mathrm{d}t$ converge vers 0.

**3** Montrer par l'absurde que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 25 (D'un polynôme positif à un autre) 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 0$. Démontrer que pour tout réel $x$, on a $(P + P' + P'' + \dots)(x) \geqslant 0$.

Exercice 26 (Une curiosité polynomiale) 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $P = X^2 + aX + b$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, \quad P(n)P(n+1) = P(k)$.

CHAPITRE XVI

# Matrices

## Sommaire



Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (on peut cependant définir des matrices sur un corps quelconque). $n, p, q$ désigneront des entiers naturels non nuls, et $\mathcal{C}_p$ sera la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Elle sera notée $(e_1(p), \dots, e_p(p))$ ou simplement $(e_1, \dots, e_p)$ si le contexte le permet. $E$, $F$ et $G$ seront des espaces de dimension finie non nulle.

Les matrices offrent un cadre formel de travail en algèbre linéaire en dimension finie. Leur efficacité (et leur origine) tient avant tout au fait qu'en dimension finie, on peut représenter une application linéaire à l'aide d'une quantité finie de nombres. En effet, pour se donner une application linéaire de $E$ dans $F$, il suffit de donner l'image d'une base de $E$. Pour se donner l'image d'un vecteur de cette base, on peut donner ses composantes dans une base de $F$ : la donnée d'un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ peut donc se réduire à la donnée d'un tableau de $\dim(E)\dim(F)$ nombres.

# 1. Définitions. Matrices particulières

## 1.1. Définition, formes particulières de matrices

**Définition (Matrice)** 1.a

Une *matrice de type (ou taille)* $(n, p)$ (ou à $n$ lignes et $p$ colonnes, ou de *taille* $n \times p$) est une famille $A$ de scalaires indexée par $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, *i.e.* un élément de $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.
Pour tout $(l, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $a_{l,k}$ l'image de $(l, k)$ par $A$, *coefficient* de $A$ en position $(l, k)$.
On écrit alors $A = (a_{l,k})_{1 \leqslant l \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant p}$ (ou moins précisément $A = (a_{l,k})$).
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes (à coefficients dans $\mathbb{K}$).

Soit $A$ une matrice. On représente une matrice par un tableau, de $n$ lignes et $p$ colonnes, le coefficient $a_{l,k}$ se trouvant sur la $l$-ième ligne et $k$-ième colonne. En fait, une matrice est avant tout un tableau de nombres, qui, le plus souvent a un sens lié à l'algèbre linéaire (une matrice peut par exemple représenter une application linéaire, ou un changement de base).

**Exemple (Matrices)** i

(1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ est de taille $2 \times 3$.

(2) La matrice de taille $(n, p)$ dont tous les coefficients sont nuls est appelées *matrice nulle* (de taille $n, p$), et notée $0_{n,p}$ (ou 0).

**Définition (Matrices de tailles particulières)** 1.b

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
On dit que $M$ est une *matrice colonne* (resp. une *matrice ligne*) si $p = 1$ (resp. si $n = 1$).
On dit que $M$ est une matrice *carrée* si $n = p$. On dit alors que $M$ est une matrice carrée d'*ordre* (ou de *taille*) $n$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille $n$ (à coefficients dans $\mathbb{K}$).

En pratique, on identifiera les matrices colonnes à $n$ lignes à des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
La matrice carrée nulle de taille $n$ $0_{n,n}$ est également notée $0_n$.

## 1.2. Matrices carrées particulières

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille $n$. On appelle *coefficients diagonaux* de $A$ les nombres $a_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

**Définition (Matrice carrée diagonale)** 1.c

$A$ est dite *diagonale* si $a_{i,j} = 0$, dès que $i \neq j$, *i.e.* tous les coefficients non diagonaux de $A$ sont nuls.

**Exemple (Matrices diagonales)**

(1) La matrice diagonale de taille $n$ dont tous les coefficients diagonaux valent 1 est appelée *matrice identité* (de taille $n$), et notée $I_n$. Par exemple, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux est dite *scalaire*.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale non scalaire.

ii

La notation $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désignera la matrice de taille $n$ dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_i$ étant en position $(i, i)$).

**Définition (Matrices triangulaires)**

$A$ est dite *triangulaire supérieure* si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i > j) \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

$A$ est dite *triangulaire inférieure* si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (j > i) \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

$A$ est dite *triangulaire supérieure stricte* si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i \geqslant j) \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

$A$ est dite *triangulaire inférieure stricte* si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (j \geqslant i) \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

1.d

**Exemple (Matrices triangulaires)**

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

iii

Une matrice triangulaire stricte n'est donc rien d'autre qu'une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Une matrice diagonale n'est donc rien d'autre qu'une matrice triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

## 2. Matrice d'une famille finie de vecteurs, d'une application linéaire

$E$ et $F$ sont de dimensions finies respectives $p$ et $n$, et munis de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.

**Définition (Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base)**

Soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_q)$ une famille finie de vecteurs de $E$. On appelle *matrice associée à la famille de vecteurs* $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de taille $p \times q$ dont la $j$-ième colonne est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur $v_j$ ($j \in [\![1, q]\!]$). Cette matrice est notée $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$

2.a

**Exemple** (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base)

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice d'un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

i

Soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_q)$ une famille finie de vecteurs de $E$, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $u(\mathcal{V})$ la famille $(u(v_1), \dots, u(v_q))$ de vecteurs de $F$.

**Définition** (Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice *associée à l'application linéaire $u$ et aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$* (ou la matrice de $u$ dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$), élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, est la matrice $M_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))$.
Dans le cas où $E = F$ et lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on écrit $M_{\mathcal{B}}(u)$ au lieu de $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$. Cette matrice est appelée matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$.

2.b

Ainsi, nous dirons que tel morphisme est représenté par telle matrice (dans un couple de bases donné).

**Exemple** (Matrices d'une application linéaire)

(1) $M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_p$.
(2) La matrice de l'application partie réelle (de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans la base $(1, i)$ est
(3) La matrice de l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_3[X]$, dans la base canonique, est
(4) $\mathrm{Id}_E$ peut ne pas être représentée par $I_n$ dans un couple de bases donné (donner un exemple)
(5) Un endomorphisme de $E$ distinct de $\mathrm{Id}_E$ peut être représentée par $I_n$ dans un couple de base donné (donner un exemple)
(6) La matrice d'une application nulle est toujours nulle.

ii

Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans deux bases données (ou une seule dans le cas d'un endomorphisme). Attention cependant, deux matrices différentes peuvent correspondre à un même morphisme, et deux morphismes distincts peuvent avoir les mêmes matrices dans deux couples de bases distincts. Nous reviendrons sur ceci plus tard.

Dans le cas d'un endomorphisme, on prend presque toujours la même base au départ et à l'arrivée (sauf pour les matrices de changement de base, voir le paragraphe suivant).

Il peut être utile, étant donné une matrice $M$, de la voir comme représentant un certain morphisme dans une ou plusieurs bases : si le contexte ne nous fait pas préférer une autre interprétation, on considèrera le *morphisme canoniquement associé* à $M$.

**Définition (Morphisme canoniquement associé à une matrice)**

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le *morphisme canoniquement associé* à $M$ est l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, représenté par $M$ dans les bases canoniques de ces espaces.

2.c

Nous noterons $\mu_C$ l'application qui à une matrice associe son morphisme canoniquement associé.

**Exemple (Morphisme canoniquement associé à une matrice)**

(1) Le morphisme canoniquement associé à $0_{n,p}$ est nul.
(2) Le morphisme canoniquement associé à $I_n$ est $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$.
(3) Le morphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ envoie $e_1$ sur $e_2$, et réciproquement.
(4) Le morphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ envoie respectivement $e_1(3)$, $e_2(3)$ et $e_3(3)$ sur $e_1(2) + 2e_2(2)$, $2e_1(2)$ et $3e_1(2) + e_2(2)$.
(5) Le morphisme canoniquement associé à une matrice ligne à $p$ colonnes est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$.

iii

Certains confondent une matrice avec le morphisme qui lui est canoniquement associé, parlant par exemple de noyau d'une matrice. Dans ce cours de première année, je préfère éviter cet abus.

## 3. Opérations sur les matrices

Nous allons définir plusieurs opérations entre matrices, ce qui conférera à certains ensembles de matrices des structures (d'espaces vectoriels, d'anneaux). Ces opérations (addition, multiplication par un scalaire, et produit) seront définies pour représenter fidèlement les opérations correspondantes pour les applications linéaires (addition, multiplication par un scalaire, et composition). On verra enfin une dernière opération matricielle, la transposition, dont l'interprétation en termes linéaires ne va pas de soi.

Ce « transfert de structure » conduira à l'existence d'isomorphismes entre ensembles de matrices et ensembles d'applications linéaires.

### 3.1. L'espace vectoriel des matrices de taille $(n, p)$

On rappelle que du point de vue ensembliste, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal à $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. Ce dernier ensemble est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel, que nous décidons de conserver pour $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ :

**Définition (Somme de matrices)**

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice *somme* $C = (c_{i,j})$, élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $A+B$, par $c_{i,j} = a_{i,j}+b_{i,j}$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!][\![1, p]\!]$.

3.a

**Définition (Produit d'une matrice par un scalaire)**

Soient $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice *produit* de $A$ par le scalaire $\lambda$, $C = (c_{i,j})$, notée $\lambda A$, par $c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!][\![1, p]\!]$.

3.b

Proposition (Base canonique matricielle)

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $np$, dont une base est $(E_{i,j}(n,p))$, où $E_{i,j}(n,p) = (\delta_{l,i}\delta_{k,j})_{(l,k)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. Cette base est la *base canonique* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

3.a

Cette base est notée $(E_{i,j}(n))$ si $n = p$, voire $(E_{i,j})$ si le contexte le permet.

### 3.2. Produit matriciel

En réalité, $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est également muni d'une structure d'anneau produit, déduite de celle sur $\mathbb{K}$. Cependant, ce produit n'est pas l'expression de la composition des applications linéaires, c'est pourquoi nous allons en définir un autre.

Supposons $E$, $F$ et $G$ de dimensions respectives $q$, $p$ et $n$, de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_n)$, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Nous voulons définir un produit matriciel de telle sorte que

$$\boxed{M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)} \quad (*)$$

Notons $A = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v)$, $B = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, et $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u)$.

Soit $j \in [\![1, q]\!]$ : on a $u(e_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} f_k$.

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $v(f_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} g_i$, de sorte que

$$\begin{aligned} v(u(e_j)) &= \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} v(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} g_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \right) g_i. \end{aligned}$$

La formule $(*)$ sera vérifiée si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$ :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j},$$

d'où la définition suivante :

Définition (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la *matrice produit* (de $A$ par $B$) $C = (c_{i,j})$, notée $AB$, élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, de la manière suivante : pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

3.c

Attention ! La multiplication $AB$ n'est possible que si le nombre de colonnes de $A$ est égal au nombre de lignes de $B$.

Exercice (Produit matriciel)

Faire des exemples de calculs de produits, illustrant la non commutativité du produit matriciel (il se peut que $AB$ soit défini sans que $BA$ le soit, que $AB$ et $BA$ soient définies sans qu'elles aient même taille, que $AB$ et $BA$ soient définies de même taille, mais distinctes).

1

On a une sorte de relation de Chasles pour la taille du produit : « $(n, p) \times (p, q) \to (n, q)$. »

Il résulte aisément de la définition du produit matriciel :

Proposition (Produit matriciel)

Le produit matriciel est bilinéaire et associatif.
Linéarité par rapport à la première variable : si $A$, $A'$ et $B$ sont trois matrices, et si $AB$ et $A'B$ sont bien définis, et $\lambda$ et $\lambda'$ sont deux scalaires quelconques, on a :

$$(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B$$

3.b

Proposition (Algèbre des matrices carrées de taille $n$)

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, non commutatif dès que $n \geqslant 2$. Cet anneau est canoniquement isomorphe à $(\mathcal{L}(\mathbb{K}^n), +, \circ)$.

3.c

L'élément nul (resp. unité) de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $0_n$ (resp. $I_n$).

Comme cet anneau n'est pas commutatif (sauf si $n = 1$), on ne peut pas toujours appliquer la formule du binôme de Newton. Cependant, on peut l'appliquer si les deux matrices considérées commutent (ce sera le cas si l'une d'entre elles est scalaire).

Cet anneau possède des diviseurs de 0 si $n \geqslant 2$ :

Cet anneau possède même des éléments nilpotents non nuls si $n \geqslant 0$ :

Comme dans tout anneau, on a une structure de groupe multiplicatif pour les inversibles :

Définition (Groupe linéaire matriciel)

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la loi de multiplication, appelé *groupe linéaire* d'indice $n$, et noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

3.d

Si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, ne pas oublier que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemple (Matrices inversibles)

Les matrices diagonales ne comportant pas de zéro sur leur diagonale sont inversibles.

i

Proposition (Isomorphismes entre ensembles d'applications linéaires et de matrices)

L'application $u \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ vers l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
En outre, si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, cette application est aussi un isomorphisme d'anneaux, et $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ sont des groupes isomorphes.

3.d

Ces isomorphismes confèrent aux ensembles de matrices des propriétés particulières : par exemple, si un endomorphisme $u$ a pour matrice $A$ dans une base $\mathcal{B}$, alors $u$ est un automorphisme (*i.e.* est inversible) si et seulement si $A$ est inversible. En particulier, une matrice carrée admettant un inverse $B$ dans un sens (à gauche par exemple) admet $B$ pour inverse.

Comme propriété générale d'un morphisme, on a aussi $M_B(u^n) = (M_B(u))^n$, et cela pour toute valeur sensée de $n$ ($n \in \mathbb{N}$ si la matrice n'est pas inversible, et $n \in \mathbb{Z}$ sinon).

Il faut s'entraîner à mettre en correspondance les questions sur les applications linéaires et celles sur les matrices, chaque point de vue pouvant permettre de mieux comprendre l'autre.

**Proposition (Écriture matricielle de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur)** 3.e

Soit $x \in E$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $y = u(x)$. On note $X$ (resp. $Y$) le vecteur colonne des composantes de $x$ dans $B$ (resp. de $y$ dans $C$), et $A = M_{B,C}(u)$. On a alors

$$Y = AX$$

**Exercice (Opérations algébriques sur les matrices)** 2

Faire les deux premiers exercices de TD.

**Exercice (Commutant d'une matrice)** 3

Faire l'exercice 4 de TD.

### 3.3. Transposition

**Définition (Transposée)** 3.e

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice *transposée* de $A$, notée ${}^tA$, élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par ${}^tA = (c_{i,j})$, où

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], c_{i,j} = a_{j,i}$$

**Exemple (Transposées)** ii

La transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne, et réciproquement. Une matrice diagonale est invariante par transposition, mais la réciproque est fausse (donner un exemple).

$\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^{tt}A = A$.

**Proposition (La transposition est un isomorphisme)** 3.f

La transposition est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$$

La transposition est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En revanche, bien que la transposition ne soit pas un automorphisme de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dès que $n \geqslant 2$, on a une formule agréable pour la transposée d'un produit :

**Proposition (Transposition et produit)** 3.g

$\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall\, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Démonstration

□

En corollaire, si $A$ est une matrice carrée inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ (plus généralement, pour tout entier relatif $k$, $({}^tA)^k = {}^t(A^k)$).

**Définition (Matrice symétrique, antisymétrique)** 3.f

Une matrice carrée $A$ est dite *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$).
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exemple (Matrices symétriques, antisymétriques)** iii

Toute matrice diagonale est symétrique, mais la réciproque est fausse (donner des exemples).
Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls, mais la réciproque est fausse (donner des exemples).

**Exercice (Puissances d'une matrice symétrique ou antisymétrique)** 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, supposée symétrique ou antisymétrique. Que dire des puissances de $A$ ?

**Proposition (Supplémentarité des matrices symétriques et antisymétriques)** 3.h

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $\frac{1}{2}n(n+1)$, celle de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $\frac{1}{2}n(n-1)$

Démonstration

Pour la supplémentarité, interpréter $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ comme des noyaux.

□

En particulier, toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

## 4. Matrice de changement de base

**Définition (Matrice de passage)** 4.a

On suppose $E$ de dimension $n$, et on considère deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de $E$. On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On peut la noter $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

La $j$-ième colonne de $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ est constituée des composantes de $e'_j$ dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc aussi la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$. En particulier, une matrice de passage est inversible.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet d'exprimer facilement les vecteurs de $\mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Bien sûr, $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}} = I_n$.

**Proposition (Propriétés des matrices de passage)** 4.a

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ sont des bases de $E$, alors

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''}$$

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $E$, alors $P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

**Démonstration**

□

**Proposition (Écriture matricielle d'un changement de base pour un vecteur)** 4.b

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$. Soit $x$ un vecteur de $E$, et $X$ (resp. $X'$) le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). On a alors :

$$X = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} X'$$

**Démonstration**

□

On sait facilement exprimer les vecteurs de la nouvelle base comme combinaisons linéaires des vecteurs de l'ancienne base, mais on sait facilement exprimer les anciennes coordonnées d'un vecteur en fonction des nouvelles.

**Proposition (Formules de changement de base)**

On se donne deux espaces vectoriels $E$ et $F$, de dimensions respectives non nulles $p$ et $n$. On se donne deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $E$, et deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $F$. On se donne $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $A$ (resp. $B$) la matrice de $u$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$). On pose $Q = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{C}'}$ et $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. On a alors :

$$B = Q^{-1}AP$$

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, si la base est la même au départ et à l'arrivée, on a donc :

$$B = P^{-1}AP$$

4.c

**Démonstration**

□

**Exercice (Changement de base)**

Faire l'exercice 9 de TD.

5

## 5. Matrices équivalentes, matrices semblables

**Définition (Matrices équivalentes)**

Deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* s'il existe une matrice inversible $Q$ d'ordre $n$ et une matrice inversible $P$ d'ordre $p$ telles que

$$B = Q^{-1}AP$$

5.a

**Définition (Matrices semblables)**

Deux matrices carrées $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P$ d'ordre $n$ telle que

$$B = P^{-1}AP$$

5.b

Deux matrices $A$ et $B$ sont équivalentes si et seulement si il existe deux matrices inversibles $U$ et $V$ telles que $B = UAV$.

Ces deux relations sont des relations d'équivalence.

Deux matrices semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fausse, même pour des matrices carrées de même taille :

Si $B = P^{-1}AP$, alors par récurrence [1], $B^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et cette relation s'étend aux entiers négatifs si $A$ (et donc $B$) est inversible. Bien souvent, pour calculer une puissance $n$-ième, on cherche si elle est semblable à une matrice diagonale, car ces dernières matrices ont des puissances facilement calculables. C'est le problème de la diagonalisation d'une matrice.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La seule matrice semblable à $\lambda I_n$ est elle-même :

Certaines matrices carrées ne sont pas semblables à une matrice diagonale (on pourra considérer une matrice nilpotente non nulle) :

**Proposition (Caractérisation des matrices équivalentes)** 5.a

Deux matrices $A$ et $B$ sont équivalentes si et seulement si elles représentent un même morphisme dans deux couples de bases.

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Caractérisation des matrices semblables)** 5.b

Deux matrices carrées $A$ et $B$ de taille $n$ sont semblables si et seulement si il existe un endomorphisme $u$ de $E$ et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $E$ telles que

$$A = M_{\mathcal{B}}(u) \text{ et } B = M_{\mathcal{C}}(u)$$

1. Ou parce que la conjugaison par $P$, *i.e.* l'application $M \mapsto P^{-1}MP$, est un (auto)morphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Démonstration

□

Exercice (Trace)

Faire l'exercice 11, que l'on peut considérer comme du cours.

6

## 6. Rang d'une matrice. Opérations élémentaires

### 6.1. Rang d'une matrice

Définition (Rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang* de $A$ le rang de la famille des $p$ vecteurs colonnes de $A$ (identifiés à des vecteurs de $\mathbb{K}^n$). On le note $\mathrm{rg}(A)$.

6.a

Le rang de $A$ est donc inférieur ou égal à $p$ et à $n$.

Exemple (Rangs de matrices)

(1) Le rang de $A$ est nul si et seulement si la matrice $A$ est nulle.
(2) Le rang de $A$ vaut 1 si et seulement si au moins une des colonnes de $A$ n'est pas nulle, et toutes les autres colonnes de $A$ en sont des multiples.
(3) Le rang de $A$ est le rang de toute application linéaire susceptible d'être représentée par $A$.

i

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est égal à sa taille.

Soient $n, p, r$ trois entiers tels que $0 \leqslant r \leqslant \min(p, n)$. On note $J_r(n,p)$ (ou $J_r$ lorsque le contexte est suffisamment clair) la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients $a_{i,j}$ vérifient $a_{i,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, et tous les autres sont nuls.

Ainsi, $J_0(2,2)$, $J_2(4,5)$, $J_3(5,3)$ valent respectivement

$J_r(n,p)$ est de rang $r$.

Lemme premier pour l'équivalence matricielle

Deux matrices équivalentes (et de même taille) ont même rang.

6.a

Démonstration

□

Lemme second pour l'équivalence matricielle

Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang $r$ si et seulement si elle est équivalente à $J_r(n,p)$.

6.b

Démonstration

□

Proposition (Caractérisation de l'équivalence matricielle par le rang)

Deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

6.c

Démonstration

□

Proposition (Invariance du rang par transposition)

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée ${}^tA$.

6.d

Démonstration

□

Le rang d'une matrice est donc non seulement égal au nombre maximum de colonnes libres de $A$, mais aussi au nombre maximum de lignes libres de $A$.

Exercice (Inégalités entre rangs)

Faire l'exercice 14 de TD.

7

### 6.2. Opérations élémentaires

$n$ et $p$ sont deux entiers naturels non nuls.

Définition (Opération élémentaire sur les lignes d'une matrice)

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de lignes $L_1, \ldots, L_n$. On appelle *opération (ou manipulation) élémentaire* sur les lignes de la matrice $A$ l'une des opérations suivantes :

(1) Addition d'un multiple d'une ligne à une autre : changer $L_i$ en $L_i + \alpha L_j$, avec $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

(2) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : changer $L_i$ en $\alpha L_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha \neq 0$.

(3) Échange de deux lignes : changer $L_i$ en $L_j$ et réciproquement changer $L_j$ en $L_i$, $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Ces trois opérations sont codées respectivement $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $L_i \leftrightarrow L_j$.

6.b

On définit de la même façon des *opérations (ou manipulations) élémentaires* sur les colonnes de la matrice $A$.

Toute opération élémentaire, donc toute suite d'opérations élémentaires, change $A$ en une matrice de même rang.

On déduit de ces résultats que le rang d'une matrice n'est pas changé si :

(1) On ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes (applications successives de la première).

(2) On change une ligne $L_i$ en $\alpha L_i + \beta L_j$, avec $i \neq j$, et $\alpha \neq 0$ ($L_i \leftarrow \alpha L_i$ puis $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$).

(3) On permute ses lignes (applications successives de la dernière).

(4) On ajoute à chaque ligne $L_j$ un multiple de $L_i$, avec $i \neq j$.

Attention : les changements simultanés sur des lignes, comme $(L_1, L_2) \leftarrow (L_1 - L_2, L_2 - L_1)$, sont interdits.

Les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) s'interprètent comme des multiplications à gauche (resp. à droite) par des matrices inversibles. Plus précisément :

(1) $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ s'interprète comme la multiplication à gauche par $I_n + \alpha E_{i,j}(n)$ (et $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ s'interprète comme la multiplication à droite par $I_p + \alpha E_{j,i}(p)$).

(2) $L_i \leftarrow \alpha L_i$ s'interprète comme la multiplication à gauche par $I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}(n)$ (et $C_i \leftarrow \alpha C_i$ s'interprète comme la multiplication à droite par $I_p + (1 - \alpha)E_{i,i}(p)$).

(3) $L_i \leftrightarrow L_j$ s'interprète comme la multiplication à gauche (resp. à droite) par $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

En conséquence, on a la proposition :

**Proposition** (Écriture matricielle des opérations élémentaires)

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, transformée en une matrice $B$ par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. il existe alors une matrice inversible $U$ telle que $B = UA$. La matrice $U$ est obtenue en faisant subir la même suite d'opérations élémentaires à $I_n$.
De même si $C$ est obtenue de $A$ par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes : il existe alors une matrice inversible $V$ telle que $B = AV$. La matrice $V$ est obtenue en faisant subir la même suite d'opérations élémentaires à $I_p$.

6.e

**Exercice** (Hyperplan et matrice inversibles)

Faire l'exercice 17, devenu classique.

8

### 6.3. Première application : calcul de l'inverse d'une matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On déduit de la proposition précédente que si on arrive, à la suite d'opérations sur les lignes, à obtenir $I_n$ à partir de $A$, alors la matrice $A$ est inversible, et son inverse est obtenu en appliquant à $I_n$ la même suite d'opérations.

On en déduit l'algorithme du pivot de Gauss pour calculer l'inverse d'une matrice inversible.
**Donnée :** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'algorithme retourne $A^{-1}$ si $A$ est inversible, et échoue sinon.
$(M, P) \leftarrow (A, I_n)$
Pour $j$ allant de 1 à $n$, faire :

(1) Si $m_{j,j} = 0$, alors soit $k > j$ tel que $a_{k,j} \neq 0$. Appliquer l'opération $L_j \leftrightarrow L_k$ à $M$ et $P$.
*(on s'assure que $m_{j,j} \neq 0$, il est appelé* pivot*).*

(2) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, appliquer les opérations $L_i \leftarrow m_{j,j} L_i - m_{i,j} L_j$ à $M$ et $P$
*(seul $m_{j,j}$ n'est pas nul sur la colonne $C_j$ de $M$).*

*(La matrice $M$ est désormais diagonale)*
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, effectuer $L_i \leftarrow \frac{1}{m_{i,i}} L_i$ à $M$ et $P$.
*($M$ est désormais $I_n$, et $P = A^{-1}$)*
**Sortie :** $P$ $(= A^{-1})$.
Si l'algorithme échoue, c'est que la matrice n'est pas de rang $n$, donc pas inversible.

Il existe un algorithme analogue avec les colonnes. Attention cependant ! Il ne faut pas mélanger manipulations sur les lignes et les colonnes en vue d'un calcul d'inverse, car l'inverse n'est pas obtenu en appliquant les mêmes opérations à $I_n$.

**Exercice** (Algorithme de Gauss pour le calcul d'inverse)

Appliquer l'algorithme de Gauss pour le calcul d'inverse à deux matrices de taille 3, l'une étant inversible et l'autre pas.

9

### 6.4. Seconde application : calcul du rang d'une matrice

Nous avons vu comment calculer l'inverse d'une matrice. Cela prouve en particulier que la multiplication à gauche (resp. à droite) par toute matrice inversible $P$ d'une matrice $B$ correspond à une suite d'opérations sur les lignes (resp. les colonnes) de $B$. Ainsi, d'après les propriétés sur les matrices équivalentes, on peut ramener toute matrice à une matrice du type $J_r(n, p)$ pour certains entiers $n, p, r$. Ceci donne une méthode pratique de calcul du rang d'une matrice. En fait, il n'est pas nécessaire de se ramener à une matrice du type $J_r(n, p)$ : n'importe quelle matrice équivalente à $A$ dont on peut facilement calculer le rang convient.

L'idée est de se ramener à une matrice dite *échelonnée* :

**Définition (Matrice échelonnée)**

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de $A$. Pour chaque $i$, soit $d(i)$ le plus petit entier $j$ (s'il existe) tel que $a_{i,j} \neq 0$. On dit que la matrice $A$ est *échelonnée* s'il existe un entier $r \in [\![0, n]\!]$ tel que :

(1) Pour tout $i > r$, la ligne $L_i$ est nulle.

(2) Pour tout $i \leqslant r$, la ligne $L_i$ est non nulle.

(3) La suite $(d(1), \dots, d(r))$ est strictement croissante.

Les $r$ coefficients $a_{i,d(i)}$, qui sont tous non nuls, sont appelés les *pivots* de $A$.

6.c

Une telle matrice est de rang $r$.

L'algorithme suivant, dit du pivot de Gauss (pour le calcul du rang) donne une méthode de calcul du rang.

Si tous les coefficients de la première colonne sont nuls, passer à la deuxième colonne. Sinon, choisir un coefficient non nul en première colonne (appelé pivot), et le placer en haut à gauche par échange de ligne. Annuler tous les autres coefficients grâce à ce pivot, puis passer à la colonne et au pivot suivants.

Algorithme du pivot de Gauss pour le calcul du rang.

**Donnée :** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

**Description :** *l'algorithme retourne le rang de $A$, en transformant une matrice en une matrice échelonnée par opérations élémentaires sur les lignes.*

$r \leftarrow 0$

$M \leftarrow A$

$l \leftarrow 1$

Pour $j$ allant de 1 à $n$, faire :

Tant que $l \leqslant p$ et que le rang $r$ n'a pas été incrémenté, faire :

(1) Si $m_{j,l} = 0$, alors s'il existe $k > j$ tel que $m_{k,l} \neq 0$, appliquer l'opération $L_j \leftrightarrow L_k$ à $M$.

*(on s'assure que $m_{j,l} \neq 0$ lorsque cela est possible. Ce nombre $m_{j,l}$ est appelé* pivot*).*

(2) Si $m_{j,l} \neq 0$, alors $r \leftarrow r+1$, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $i > j$, appliquer les opérations $L_i \leftarrow m_{j,l}L_i - m_{i,l}L_j$ à $M$.

*(tous les termes de la $l$-ième colonne $C_l$ de $M$ après $m_{j,l}$ sont nuls).*

(3) Si $m_{j,l} = 0$, $l \leftarrow l+1$.

*(on passe à la colonne $C_{l+1}$ car $C_l$ n'a rien donné).*

Fin tant que *(soit le rang a été incrémenté, soit la ligne $L_j$ et les suivantes sont nulles, et la matrice est déjà échelonnée)*

Fin boucle pour

*(La matrice $M$ est désormais échelonnée)*

**Sortie :** $r$ $(= \mathrm{rg}(A))$.

Un calcul analogue peut se mener avec les colonnes plutôt qu'avec les lignes.

En fait, *contrairement au cas du calcul de l'inverse d'une matrice*, si on ne cherche que le rang, on peut très bien mélanger opérations élémentaires sur lignes et colonnes.

**Exercice (Calcul de rang d'une matrice)**

Faire la première question de l'exercice 13.

10

## 7. Systèmes

### 7.1. Définitions

**Définition (Système linéaire)**

On appelle *système linéaire* de $n$ équations, à $p$ inconnues (et à coefficients dans $\mathbb{K}$) tout système d'équations d'inconnues $x_1, \dots, x_p$, de la forme :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ et les $b_i$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
Les $a_{i,j}$ sont appelés *coefficients du système*.
La matrice $A = (a_{i,j})$ est appelée *matrice du système*.
Le rang de $A$ est le *rang du système*.
Les coefficients $b_1, \dots, b_n$ sont les *seconds membres du système*.
On dit que $(x_1, \dots, x_p)$ est le vecteur (ou $p$-uplet) des *inconnues* de $\mathcal{S}$.
Un vecteur $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant les $n$ égalités de $\mathcal{S}$ est appelé *solution du système*.
Un système linéaire est dit *homogène* si les seconds membres sont tous nuls. À un système $\mathcal{S}$ on associe un système homogène $\mathcal{H}$ en changeant tous les seconds membres en 0.
Deux systèmes linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

7.a

Cependant, si le système est homogène, il possède toujours la solution nulle $(0, 0, \dots, 0)$, appelée solution *triviale*.

**Définition (Systèmes carrés)**

Un système est dit *carré* si sa matrice associée est carrée (*i.e.* $\mathcal{S}$ comporte autant d'équations que d'inconnues).
Un système $\mathcal{S}$ est dit *triangulaire* si sa matrice associée est triangulaire (en particulier, un tel système est carré).
Un système carré est dit *de Cramer* si sa matrice associée est inversible (*i.e.* son rang $r$ vérifie $r = n (= p)$).

7.b

### 7.2. Différentes interprétations d'un système linéaire

On reprend le système $\mathcal{S}$ de la définition ci-dessus.

**Interprétation matricielle :** si $A = (a_{i,j})$ est la matrice du système, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{S}$ s'écrit

$$AX = B$$

Le système homogène associé s'écrit

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, si le système est de Cramer, le système possède une unique solution (peu importe le second membre).

L'avantage d'un système triangulaire de Cramer est qu'il est facile d'en donner l'unique solution. Si par exemple ce système est triangulaire supérieur (de matrice triangulaire supérieure), on en déduit $x_n$ puis $x_{n-1}$, comme cela jusqu'à $x_1$.

**Interprétation en termes d'applications linéaires :** en prenant le morphisme $u(\in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n))$, canoniquement associé à $A$, il apparaît que $\mathcal{S}$ est équivalent à l'égalité

$$u(x) = b$$

où $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Résoudre $\mathcal{S}$, c'est donc trouver $u^{-1}(\{b\})$. Dans le cas particulier d'un système homogène $\mathcal{H}$, il s'agit donc de trouver $\operatorname{Ker} u$.

**Interprétation en termes de combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ :**

Notons $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Résoudre $\mathcal{S}$ c'est trouver tous les scalaires $x_1, \dots, x_p$ tels que

$$\sum_{j=1}^{p} x_j C_j = B$$

*i.e.* toutes les façons d'écrire le vecteur colonne $B$ comme combinaison linéaire des vecteurs $C_1, \dots, C_p$.

$\mathcal{S}$ admet une solution au moins si et seulement si $B \in \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

$\mathcal{H}$ admet toujours la solution triviale signifie que la combinaison linéaire triviale est à résultat nul. Dire que $\mathcal{H}$ possède d'autres solutions que la solution triviale signifie que la famille $(C_1, \dots, C_p)$ est liée.

**Interprétation en termes de formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$ :** pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la forme linéaire

$$\varphi_i : (x_1, \dots, x_p) \mapsto a_{i,1}x_1 + \dots a_{i,p}x_p$$

$(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si

$$(x_1, \dots, x_p) \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})$$

Définition (Matrice associée à une famille de formes linéaires)

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ une famille finie de formes linéaires sur $E$. On appelle *matrice associée à cette famille de formes linéaires* dans la base $\mathcal{B}$ la matrice dont la $j$-ième ligne est constituée des images par $\varphi_j$ dans $\mathbb{K}$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Cette matrice est de taille $q \times n$.

7.c

Si une forme linéaire $\varphi_i$ est nulle, une condition nécessaire pour que $\mathcal{S}$ ait une solution est que $b_i = 0$, et on peut alors retirer du système la ligne $L_i$ qui est sans intérêt.

Supposons que ces formes linéaire soient toutes non nulles. Un vecteur solution s'interprète dans ce cas comme un vecteur appartenant à l'intersection des « hyperplans affines » $\varphi_i^{-1}(\{b_i\})$.

### 7.3. Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel de dimension $p - \operatorname{rg}(A)$.

En conséquence, pour $\mathcal{S}$ admettant au moins une solution $x_0$, une solution générale $x$ de $\mathcal{S}$ s'écrit $x = x_0 + h$, où $h$ est une solution générale de $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{S}$ admet au moins deux solutions distinctes, il en possède une infinité.

### 7.4. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

On conserve le système $\mathcal{S}$, dont on note les équations $E_1, \dots, E_n$. On définit aisément des lois d'addition de deux équations, et de multiplication d'une équation par un scalaire.

Définition (Opération élémentaire sur les équations d'un système)

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes de $\mathcal{S}$ l'une des opérations suivantes :

(1) Addition d'un multiple d'une équation à une autre (codage $E_i \leftarrow E_i + \alpha E_j$).

(2) Multiplication d'une équation par un scalaire non nul (codage $E_i \leftarrow \alpha E_i$).

(3) Échanger deux équations (codage $E_i \leftrightarrow E_j$).

7.d

Toute opération élémentaire sur les lignes de $\mathcal{S}$ transforme ce système en un système équivalent.

Comme pour les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, on peut donner d'autres opérations licites :

(1) On ajoute à une équation une combinaison linéaire des autres équations (applications successives de la première).
(2) On change une équation $E_i$ en $\alpha E_i + \beta E_j$, avec $i \neq j$, et $\alpha \neq 0$ ($E_i \leftarrow \alpha E_i$ puis $E_i \leftarrow E_i + \beta E_j$).
(3) On permute ses équations (applications successives de la dernière).
(4) On ajoute à chaque équation $E_j$ un multiple de $E_i$, avec $i \neq j$.
(5) On peut supprimer de $\mathcal{S}$ toute équation triviale. Plus généralement, on peut supprimer de $\mathcal{S}$ une équation combinaison linéaire des autres équations.

### 7.5. Résolution des systèmes de Cramer par la méthode du pivot de Gauss

Le principe de cette méthode est analogue aux autres méthodes du pivot de Gauss : on effectue des opérations élémentaires sur les équations d'un système afin d'obtenir un système équivalent, et dont la matrice est échelonnée.

En fait, l'algorithme du pivot de Gauss correspond exactement à l'algorithme du pivot de Gauss pour le calcul du rang d'une matrice par opérations sur les lignes, appliqué à la matrice $A$ du système à laquelle on adjoint une dernière colonne qui est $B$ (second membre). La matrice ainsi trouvée est échelonnée. Si le système est de Cramer, la matrice $A$ est changée en une matrice triangulaire supérieure, ce qui permet de calculer l'unique solution du système.

En pratique, il n'est pas nécessaire d'appliquer cet algorithme de manière si rigide : si par exemple les coefficients sont entiers, on privilégiera les pivots petits (idéalement 1), quitte d'ailleurs à modifier l'ordre d'écriture des inconnues (exemple idiot où la matrice est échelonnée à permutation des colonnes près).

## 8. Feuille de TD 16 : Matrices

$n$ désigne un entier naturel non nul.

### 8.1. Calcul matriciel

**Exercice 1 (Matrices commutant)** 0

**1** Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que $A$ et $B$ commutent.
**2** Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = I_n + A + A^2$. Montrer que $AB = BA$.
**3** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que $A$ et $B$ commutent.

**Exercice 2 (Calcul d'inverse d'une matrice)** 0

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 3 (Puissances de matrices)** 1

**1** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$. Calculer $B^n$, puis $A^n$, pour tout entier naturel $n$.
**2** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n$, calculer $A^n$.
**3** Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $(A(\theta))^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
**4** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
**5** Calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Faire le lien avec la suite de Fibonacci.

**Exercice 4 (Commutant d'une matrice)** 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On nomme *commutant* de $A$ et on note $C(A)$ l'ensemble des $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.
**1** Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, contenant l'ensemble $\mathbb{K}[A]$ des polynômes en $A$.
**2** Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires distincts deux à deux. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Exercice 5 (Nullité de produits de matrices) 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 6 (Matrices commutant avec un ensemble de matrices) 2

**1** Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
**2** Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (Inverse d'une matrice (X MP 09)) 2

Soit $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $I_n - AB$ inversible. Montrer que $I_n - BA$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 8 (Sous-espaces de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) 3

Soit $F$ et $G$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

et

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix}, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.

## 8.2. Matrices et morphismes

**Exercice 9 (Changement de base)** 0

**1** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.
On pose $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$, $e'_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
**i** Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
**ii** Écrire la matrice de $f$ dans cette base.
**iii** Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

**2** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose $e'_1 = (1,0,1)$, $e'_2 = (-1,1,0)$, $e'_3 = (1,1,1)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
**i** Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
**ii** Déterminer la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}'$.
**iii** Calculer $M_{\mathcal{B}}(f^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**3** Soit $h$ l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases $(e_1, e_2, e_3)$ et $(f_1, f_2)$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
**i** On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_2 + e_3, e_3 + e_1, e_1 + e_2).$$

Quelle est la nouvelle matrice $A_1$ de $h$ ?
**ii** On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :

$$(f'_1, f'_2) = \left(\frac{1}{2}(f_1 + f_2), \frac{1}{2}(f_1 - f_2)\right)$$

en conservant la base $(e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice $A_2$ de $h$ ?

**Exercice 10 (Matrice d'un projecteur (Mines MP 08))** 0

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, $P$ le plan d'équation $z = x - y$, $D$ la droite d'équations : $x = -y = z$. Trouver la matrice canonique de la projection $p$ de $\mathbb{R}^3$ sur $P$ parallèlement à $D$.

**Exercice 11 (Trace)** 1

Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La *trace* de $A$, notée $\mathrm{tr}(A)$ est la somme de ses termes diagonaux : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

**1** Montrer que la trace est une forme linéaire.

**2** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Donner un exemple de trois matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(CBA)$.

**3** Soit $f$ un endomorphisme de $E$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$ ($\dim(E) = n$). Montrer que $\mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}'}(f))$. Ceci permet de définir la *trace* d'un endomorphisme de $E$ comme la trace de l'une quelconque des matrices le représentant.

**4** Soit $p$ un projecteur de $E$. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

**5** Montrer que l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et en donner une base.

Exercice 12 (Représentation matricielle des endomorphismes de carré nul en dimension 3) 3

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $f$ un endomorphisme non nul de $E$. Montrer que $f$ est de carré nul si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 8.3. Rang d'une matrice, opérations élémentaires

Exercice 13 (Calculs de rangs) 0

**1** Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on est courageux, on pourra calculer l'inverse lorsque la matrice est inversible.

**2** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$. Déterminer le rang de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont tous les coefficients sont égaux à $a$ sauf les diagonaux qui valent 1.

**3** Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs colonne $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $A = X^tY$.

**4** Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Déterminer le rang de $A$.

Exercice 14 (Inégalités entre rangs) 3

**1** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. On écrit $M = P + iQ$, où $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer : $\operatorname{rg}(P) \leqslant 2$.

**2** Montrer : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) \leqslant \operatorname{rg}(AB) + n$.

Exercice 15 (Un calcul d'inverse) 3

En utilisant les opérations élémentaires, calculer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

### 8.4. Similitude, équivalence

**Exercice 16 (Condition suffisante de non similitude)** 1

Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées de taille $n$.

**1** Montrer que si $A$ et $B$ sont semblables, et si $P$ est un polynôme, alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

**2** En déduire que s'il existe un polynôme $P$ tel que $P(A) = 0$ mais $P(B) \neq 0$, alors $A$ et $B$ ne sont pas semblables.

**3** Application : montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

**4** Soit $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A$ et $B$ ont même rang, même déterminant (notion que l'on verra plus tard, mais que l'on a rencontrée en début d'année), même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A - I_3)^2$ et $(B - I_3)^2$).

**Exercice 17 (Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$)** 2

Soit $H$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geqslant 2$).

**1** Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M, \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.

**2** En déduire que $H$ contient une matrice inversible.

**Exercice 18 (Similitude de matrices)** 2

**1** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_2$, non scalaire. Montrer que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**2** Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $AB$ et $BA$ sont semblables. Ce résultat subsiste-t-il si $A$ n'est plus supposée inversible ?

**3** Soit $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$. Les matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ sont-elles semblables ?

**Exercice 19 (Produit et inverse de matrices triangulaires supérieures)** 3

Soient $A$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.

**1** Montrer que $AB$ est triangulaire supérieure.

**2** Montrer que si $A$ est triangulaire supérieure stricte, alors $A^n = 0_n$ (en particulier, $A$ est nilpotente).

**3** Soit $\varphi$ un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi(F) \subset F$. Montrer que $\varphi^{-1}(F) \subset F$.

**4** Montrer que si $A$ est inversible, alors $A^{-1}$ est triangulaire supérieure.

**Exercice 20 (Exponentielle d'une matrice nilpotente)** 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, on définit : $\exp A = \sum_{i \geqslant 0} \frac{A^i}{i!}$.

Montrer que si $A$ et $B$ sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.

Exercice 21 (Matrice à diagonale dominante (X MP 09, X PSI 09)) 3

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

(on dit que $A$ est à *diagonale dominante*).
Montrer que $A$ est inversible.

## 8.5. Systèmes

Exercice 22 (Systèmes) 3

**1** Résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel $m$ :

$$\begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 8 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$$

**2** Résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels $\lambda$ et $a$ :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + t = \lambda \\ 2x + y - z = \lambda - 1 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda \\ (\lambda+2)x + (\lambda+2)y - z = 3\lambda + a \end{cases}$$

Exercice 23 (Compatibilité d'un système) 0

Étudier l'existence de solutions des systèmes complexes :

**1**

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$$

**2**

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = -1. \end{cases}$$

**3**

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z = -1 \\ (m-1)x - 3z = -1. \end{cases}$$

**4**

$$\begin{cases} 3mx + (3m-7)y + (m-5)z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2mz = m+1 \\ 4mx + (5m-7)y + (2m-5)z = 0. \end{cases}$$

CHAPITRE XVII

# Déterminant

## Sommaire



Étant donné une application $f$ de $E$ dans $F$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$, nous noterons $\tilde{f}(\mathcal{B})$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ de vecteurs de $F$.

## 1. Groupe symétrique

### 1.1. Définitions

Soit $E$ un ensemble non vide. On appelle *permutation* de $E$ une application bijective de $E$ sur lui-même. On note $\mathcal{S}_E$ (ou $\mathcal{S}(E)$, $\mathfrak{S}_E$) l'ensemble des permutations de $E$. Cet ensemble est muni d'une structure de groupe pour la composition. Si $E$ est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{S}_E$ est fini de cardinal $n!$. On rappelle que le cardinal d'un groupe est également appelé son ordre.

**Définition (Groupe symétrique d'indice $n$)** — 1.a

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le *groupe symétrique* $\mathcal{S}_n$ (ou $\mathfrak{S}_n$) comme le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$, muni de la composition.

Un élément $\sigma$ de $\mathcal{S}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) peut être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Par exemple, l'élément neutre $e(= \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]})$ de $\mathcal{S}_n$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a $\mathcal{S}_3 =$ :

Le groupe $\mathcal{S}_n$ est d'ordre $n!$, non commutatif dès que $n \geqslant 3$ :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. L'ensemble

$$\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \quad \sigma(n) = n\}$$

est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, canoniquement ismomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.

**Proposition (Ordre d'une permutation)** 1.a

Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, il existe un plus petit entier naturel non nul $p$ tel que $\sigma^p = e$.

**Démonstration**

L'ensemble

$$\Omega = \{\sigma^k, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

étant fini, l'application $k \in \mathbb{N} \mapsto \sigma^k$ n'est pas injective, et il existe donc deux entiers naturels $i$ et $j$, $i < j$, tels que $\sigma^i = \sigma^j$. Ainsi, $\sigma^{j-i} = e$. Il s'ensuit que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma^k = e\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et admet donc un plus petit élément $p$.

□

**Définition (Ordre d'une permutation)** 1.b

Dans le contexte de la proposition précédente, $p$ est appelé l'*ordre* de $\sigma$.

**Exemple (Ordre d'une permutation)** i

Le seul élément d'ordre 1 de $\mathcal{S}_n$ est son élément neutre. Les permutations $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ sont des éléments d'ordre 2 de $\mathcal{S}_4$.

Définition (Cycle, transposition)

Soit $n \geqslant 2$, $p \in [\![2, n]\!]$. Un élément de $\mathcal{S}_n$ est appelé *cycle* de longueur $p$ (ou *$p$-cycle*) s'il existe $p$ éléments distincts $i_1, \dots, i_p$ de $[\![1, n]\!]$ tels que :

(1) $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{p-1}) = i_p, \sigma(i_p) = i_1$.

(2) Pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_1, \dots, i_p\}, \sigma(j) = j$.

On appelle *support* du $p$-cycle $\sigma$ l'ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$.
$\sigma$ peut être noté $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}$.
Un 2-cycle est aussi appelé *transposition*.
Le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ est appelé *permutation circulaire*.

1.c

Toute transposition est d'ordre 2, mais un exemple précédent nous montre que la réciproque est fausse.
Deux cycles de supports disjoints commutent.
Un même cycle peut posséder plusieurs « écritures ». Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Un $p$-cycle est d'ordre $p$.

Exemple (Cycles)

(1) L'exemple de
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
montre qu'une puissance d'un cycle n'est pas toujours un cycle.

(2) Soit $n \geqslant 3$ et $j, k \in [\![2, n]\!]$, $j \neq k$. On a $\begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k \end{pmatrix}$.

(3) L'inverse du $p$-cycle $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} i_p & i_{p-1} & \dots & i_1 \end{pmatrix}$ (c'est aussi $\sigma^{p-1}$).

ii

$\mathcal{S}_n$ possède $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ transpositions.

## 1.2. Parties génératrices de $\mathcal{S}_n$

Définition (Orbite d'un élément sous-l'action d'une permutation)

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle *orbite* de $i$ pour $\sigma$ (ou sous l'action de $\sigma$) l'ensemble
$$\Omega_i = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbb{N}\}$$
Une orbite est dite *triviale* si c'est un singleton.

1.d

Exercice (Cardinal d'une orbite)

Montrer que
$$\mathrm{Card}(\Omega_i) = \min\{p \in \mathbb{N}^*, \sigma^p(i) = i\},$$
et que $\mathrm{Card}(\Omega_i)$ divise l'ordre de $\sigma$.

1

On a
$$\Omega_i = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbb{N}^*\} = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbb{Z}\}$$
mais aussi, si $\sigma^p(i) = i$ :
$$\Omega_i = \{\sigma^k(i),\ k \in [\![1, p]\!]\} = \{\sigma^k(i),\ k \in [\![0, p-1]\!]\}$$
Un élément $\sigma$ de $\mathcal{S}_n$ est un cycle si et seulement si toutes les orbites de $\sigma$, sauf une, sont triviales.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et $i, j \in [\![1, n]\!]$. La relation « appartenir à l'orbite de » ($i\mathcal{R}j$ équivaut à $i \in \Omega_j$) est une relation d'équivalence. En particulier, $[\![1, n]\!]$ est union disjointe des orbites distinctes sous l'action de $\sigma$.

**Proposition (Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints)**

Soit $n \geqslant 2$. Tout élément non trivial de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints. De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

1.b

**Démonstration**

**Unicité :** les cycles intervenant dans une telle décomposition (de $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{e\}$) doivent avoir pour supports les différentes orbites non triviales de $\sigma$, et pour une telle orbite, l'action du cycle correspondant $s$ doit coïncider avec celle de $\sigma$, ce qui détermine $s$.

□

**Démonstration**

**Existence :** soit $\sigma$ un élément non trivial de $\mathcal{S}_n$, et $\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_l}$ les différentes orbites non triviales de $[\![1, n]\!]$ sous l'action de $\sigma$. Pour tout $k \in [\![1, l]\!]$, on note $p_k$ le cardinal de l'orbite $\Omega_{j_k}$, de sorte que

$$\Omega_{j_k} = \{j_k, \sigma(j_k), \dots, \sigma^{p_k-1}(j_k)\}.$$

On note $\sigma_k = \begin{pmatrix} j_k & \sigma(j_k) & \dots & \sigma^{p_k-1}(j_k) \end{pmatrix}$. Les permutations $\sigma$ et $\sigma_k$ coïncident sur $\Omega_{j_k}$. On sait par ailleurs que les cycles $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ commutent deux à deux. Vérifions que $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Cet entier appartient à au plus une des orbites $\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_l}$ :

- S'il n'appartient à aucune d'entre elles, il est laissé fixe par $\sigma$, ainsi que par $\sigma_1, \dots, \sigma_l$, de sorte que $\sigma(i) = (\sigma_1 \dots \sigma_l)(i)$.
- S'il appartient à l'une d'entre elles, mettons $\Omega_{j_{k_0}}$, alors, il est laissé invariant par tout $\sigma_j$ tel que $j \neq j_0$, de sorte que $(\sigma_1 \dots \sigma_l)(i) = \sigma_{j_{k_0}}(i) = \sigma(i)$.

□

**Exercice (Décomposition d'une permutation)**

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2

Quel est l'intérêt d'une telle décomposition ?

(1) Comparaison de permutations : grâce à l'unicité, deux permutations sont égales si et seulement si on a trouvé les mêmes décompositions.

(2) Vérification d'une propriété sur $\mathcal{S}_n$ : si on veut vérifier une propriété [1] sur $\mathcal{S}_n$, il suffit de vérifier qu'elle est vraie pour tous les cycles, et qu'elle est stable par produit.

(3) Puissances d'une permutation : muni d'une telle décomposition, il est aisé de calculer toute puissance d'une permutation (car les cycles intervenant dans cette décomposition commutent deux à deux). Ainsi, dans l'exercice ci-dessus,

$$\sigma^{17} =$$

1. On peut comparer cela au principe de récurrence : pour vérifier une propriété sur $\mathbb{N}$, il suffit de la vérifier au rang 0 et d'établie qu'elle est par passage au successeur. On a aussi utilisé ce genre d'arguments en algèbre linéaire.

**Proposition (Génération du groupe symétrique par les transpositions)** 1.c

Soit $n \geqslant 2$. Tout élément de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions.

**Démonstration**

D'après la proposition précédente, il suffit de le prouver pour tout cycle. On note que :

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_2 & i_3 \end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} i_{p-1} & i_p \end{pmatrix}.$$

□

Cette décomposition n'est pas unique en général, voir l'exemple 2 page 385. De plus, d'après cet exemple, les transpositions $\begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{S}_n$.

### 1.3. Signature, groupe alterné

**Définition (Signature d'une permutation)** 1.e

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle *signature* de $\sigma$ le nombre noté $\varepsilon(\sigma)$, défini par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-t},$$

où $t$ est le nombre d'orbites de $\sigma$.
On dit que $\sigma$ est de signature *paire* (resp. *impaire*) si $\varepsilon(\sigma) = 1$ (resp. $\varepsilon(\sigma) = -1$).

**Exemple (Signature d'une permutation)** iii

(1) $\varepsilon(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}) = 1$.
(2) Une transposition est de signature $-1$.
(3) Un 3-cycle est de signature 1.
(4) Plus généralement, pour tout $p$-cycle $\sigma$, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p+1}$.
(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{S}_4$ est de signature 1.

**Lemme sur la signature** 1.d

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et $\tau$ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Alors

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$$

**Démonstration**

Écrivons $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ $(i \neq j)$. Soit $\Omega$ une orbite sous l'action de $\sigma$. On vérifie que
– si $\Omega$ ne comprend ni $i$ ni $j$, alors $\Omega$ est aussi une orbite sous l'action de $\sigma \circ \tau$.
– si $\Omega$ comprend $i$ et $j$, alors les orbites de $i$ et $j$ sous l'action de $\sigma \circ \tau$ sont disjointes, d'union $\Omega$.
– si $\Omega$ comprend $i$ mais pas $j$, et si on note $\Omega'$ l'orbite de $j$ sous l'action de $\sigma$, alors l'orbite de $i$ et de $j$ sous l'action de $\sigma \circ \tau$ est $\Omega \cup \Omega'$.
Ainsi, les nombres d'orbites sous les actions respectives de $\sigma$ et $\sigma \circ \tau$ n'ont pas même parité, d'où le résultat.

□

Ce lemme permet de prouver la :

**Proposition (La signature est un morphisme)**

L'application $\varepsilon : (\mathcal{S}_n, \circ) \to (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes multiplicatifs.

1.e

**Démonstration**

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Le lemme précédent montre que si l'on décompose $\sigma$ en produit de $k$ transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. Ainsi, si $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de $k'$ transpositions, on a :

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = (-1)^{k+k'} = (-1)^k(-1)^{k'} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma'),$$

d'où le résultat.

□

Cela prouve en particulier que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de $p$ transpositions (resp. de $q$ transpositions), alors $p$ et $q$ ont même parité.

**Définition (Groupe alterné d'indice $n$)**

On définit le *groupe alterné* d'indice $n$, noté $\mathcal{A}_n$ (ou $\mathfrak{A}_n$), comme le noyau du morphisme de groupes $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ (*i.e.* l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ de signature paire).

1.f

**Exercice (Cardinal du groupe symétrique alterné d'indice $n$)**

On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est d'ordre $n!/2$.

3

**Exercice (Autre point de vue sur la signature)**

(Exercice facultatif, peu utile dans la suite)
Étant donné $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, où $i < j$, on dit que $\sigma$ inverse $i$ et $j$ si $\sigma(j) < \sigma(i)$.

**1** Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$, où $inv(\sigma)$ désigne le nombre d'inversions d'inversions sous l'action de $\sigma$, *i.e.* le nombre de couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, où $i < j$, tels que $\sigma$ inverse $i$ et $j$, soit encore

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

**2** En utilisant la question précédente, montrer à nouveau que $\varepsilon$ est un morphisme de groupes.

4

## 2. Applications multilinéaires

Dans toute la suite du chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n$ est un entier naturel non nul, et $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

### 2.1. Définitions

**Définition (Application multilinéaire)**

Soit $f$ une application de $E^n$ dans $F$. On dit que $f$ est linéaire en sa $i$-ème variable (où $i \in [\![1, n]\!]$) si, pour tout choix de vecteurs $u_j$, $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, l'application $u \mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n)$ (de $E$ dans $F$) est linéaire.
On dit que $f$ est *$n$-linéaire* (ou *multilinéaire*) si elle est linéaire en chacune de ses $n$ variables.
On note $\mathcal{L}_n(E, F)$ l'ensemble des applications $n$-linéaires de $E^n$ vers $F$
Si $n = 2$ (resp. $n = 3$), et si $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$, alors on dit que $f$ est *bilinéaire* (resp. *trilinéaire*).
On dit que $f$ est une *forme multilinéaire* (ou *$n$-linéaire*) sur $E$ si $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

2.a

Attention ! Il ne faut pas confondre $\mathcal{L}_n(E, F)$ et $\mathcal{L}(E^n, F)$. On a par exemple (avec des notations évidentes)

$$f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda f(u_1, \dots, u_n) \text{ si } f \text{ est linéaire,}$$

mais

$$f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda^n f(u_1, \dots, u_n) \text{ si } f \text{ est } n\text{-linéaire.}$$

De même, on a :

(1) $f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u', v')$ si $f$ est linéaire.
(2) $f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u, v') + f(u', v) + f(u', v')$ si $f$ est bilinéaire.

$\mathcal{L}_n(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $F^{E^n}$.

**Exemple (Applications multilinéaires)**

Exemples d'applications bilinéaires :

(1) La multiplication de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$.
(2) Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$).
(3) Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
(4) Le déterminant dans $\mathbb{R}^2$.
(5) $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$ dans $\mathcal{C}([0, 1])$.
(6) $(f, g) \mapsto (fg)'$ de $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}))^2$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
(7) Exemple d'application trilinéaire : le produit mixte (ou déterminant) dans $\mathbb{R}^3$.

i

**Exercice (Exemples d'applications multilinéaires)**

Consture des applications $n$-linéaires par composition à partir d'applications $n$-linéaires et d'applications linéaires.

5

**Proposition (Expression d'une application $n$-linéaire dans une base)**

On suppose $E$ de dimension finie $p \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $E$. On considère $n$ vecteurs $u_j = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e_i$ (exprimés dans $\mathcal{B}$) de $E$, et $\varphi \in \mathcal{L}_n(E, F)$. On a alors

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant p, \dots, 1 \leqslant i_n \leqslant p} a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

2.a

Démonstration

Récurrence sur $n$. □

En reprenant le contexte de cette proposition :

(1) Réciproquement, une expression de la forme

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant p,\dots,1\leqslant i_n\leqslant p} \lambda_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1,1}\dots a_{i_n,n},$$

où les $\lambda$ sont des scalaires, définit une application $n$-linéaire.

(2) Pour vérifier[2] que deux applications $n$-linéaires sont égales, il suffit de vérifier qu'elles coïncident en chaque $(e_{i_1},\dots,e_{i_n})$, $(i_1,\dots,i_n)\in[\![1,p]\!]^n$.

### 2.2. Applications multilinéaires alternées

**Définition (Application $n$-linéaire symétrique, antisymétrique, alternée)** 2.b

Soit $\varphi : E^n \to F$.

(1) $\varphi$ est dite *symétrique* si, pour toute transposition $\tau$ de $[\![1,n]\!]$ :

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad \forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n,$

$$\varphi(u_{\tau(1)},\dots,u_{\tau(n)}) = \varphi(u_1,\dots,u_n).$$

(2) $\varphi$ est dite *antisymétrique* si, pour toute transposition $\tau$ de $[\![1,n]\!]$ :

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad \forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n,$

$$\varphi(u_{\tau(1)},\dots,u_{\tau(n)}) = -\varphi(u_1,\dots,u_n).$$

(3) $\varphi$ est dite *alternée* si

$$\forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n, \big(\exists (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i\neq j \wedge u_i=u_j\big) \Rightarrow (\varphi(u_1,\dots,u_n)=0_F)$$

L'ensemble des applications $n$-linéaires alternées de $E^n$ dans $F$ est noté $A_n(E,F)$.

$\varphi$ est alternée si et seulement si

$$\forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n, (\mathrm{Card}(\{u_1,\dots,u_n\})<n) \Rightarrow (\varphi(u_1,\dots,u_n)=0_F)$$

**Proposition (Équivalence entre antisymétrie et caractère alterné)** 2.b

$\varphi\in\mathcal{L}_n(E,F)$ est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

Démonstration

□

2. C'est une bonne approche pour montrer la formule du double produit vectoriel par exemple

**Proposition (Formule pour les applications $n$-linéaires alternées)**

2.c

Soit $f \in A_n(E,F)$, et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Pour tous vecteurs $u_1,\dots,u_n$ de $E$, on a :

$$f(u_{\sigma(1)},u_{\sigma(2)},\dots,u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1,\dots,u_n).$$

**Démonstration**

$\square$

On a une formule plus simple (sans le « $\varepsilon(\sigma)$ ») analogue dans le cas d'une application multilinéaire symétrique.

**Exemple (Applications $n$-linéaires alternées)**

ii

(1) Le déterminant dans le plan est bilinéaire alterné.
(2) Le produit vectoriel est bilinéaire alterné.
(3) Le produit mixte (ou le déterminant) dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est trilinéaire alterné.

Une application $n$-linéaire à la fois symétrique et antisymétrique est nulle (si $n \geqslant 2$).
$A_n(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E,F)$.

**Proposition (Évaluation d'une application $n$-linéaire alternée sur une famille liée)**

2.d

Soit $\varphi$ une application $n$-linéaire alternée. Si $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille liée de vecteurs de $E$, alors

$$\varphi(u_1,\dots,u_n) = 0_F$$

**Démonstration**

$\square$

En particulier, si $\dim E < n$, alors $A_n(E,F)$ est un singleton, constitué de l'application nulle $E^n \to F$.

**Corollaire (Image d'une application $n$-linéaire alternée)**

Soit $\varphi$ une application $n$-linéaire alternée. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs de $E$, et si on ajoute à $u_j$ une combinaison linéaire des autres vecteurs de $(u_1, \ldots, u_n)$ pour obtenir un vecteur $u'_j$, alors

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \varphi(u_1, \ldots, u_{j-1}, u'_j, u_{j+1}, \ldots, u_n)$$

(*i.e.* on ne modifie pas l'image de $(u_1, \ldots, u_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs $u_j$ une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille).

2.e

**Proposition (Expression sommatoire pour une application $n$-linéaire alternée)**

On suppose $E$ de dimension $n$, et on se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$. On considère $n$ vecteurs $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ de $E$ exprimés dans $\mathcal{B}$, et $\varphi \in A_n(E, F)$. On a :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \varphi(e_1, \ldots, e_n)$$

2.f

**Démonstration**

□

**Exercice (Expression sommatoire en basse dimension)**

Écrire en extension cette formule en dimensions 1, 2 puis 3.

6

## 3. Déterminant de $n$ vecteurs dans une base

$E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Nous allons dans un premier temps étudier les formes $n$-linéaires alternées sur $E$, et prouver que $\dim A_n(E, \mathbb{K}) = 1$, ce qui débouchera sur la définition du déterminant (d'une famille) de $n$ vecteurs de $E$ dans la base $\mathcal{B}$.

### 3.1. Formes $n$-linéaires alternées sur $E$

**Théorème fondamental pour le déterminant**

L'espace vectoriel $A_n(E, \mathbb{K})$ est une droite vectorielle.

3.a

Démonstration

□

L'application

$$f \mapsto f(e_1, \dots, e_n)$$

est un isomorphisme de $A_n(E, \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$.

### 3.2. Définitions et propriétés du déterminant de $n$ vecteurs

**Définition (Déterminant dans une base)** 3.a

L'unique forme $n$-linéaire alternée $\varphi$ sur $E$ telle que

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$$

est appelée application *déterminant dans la base* $\mathcal{B}$, et est notée $\det_{\mathcal{B}}$.

Pout tout élément $\varphi$ de $A_n(E, F)$, on a

$$\varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$$

D'après ce qui précède, on a :

**Proposition (Formule sommatoire du déterminant dans une base)** 3.b

On considère $n$ vecteurs $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ de $E$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$$

Attention ! Contrairement au début d'année, on ne parle par simplement de déterminant d'une famille de vecteurs, mais de déterminant d'une famille de vecteurs *dans une base*.

Cette formule est rarement employée pour calculer effectivement un déterminant. En revanche, on l'utilise souvent dans les exercices théoriques permettant de montrer un résultat général.

**Proposition (Lien entre les déterminants dans deux bases)** 3.c

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de $E$. Pour tous vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de $E$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

Démonstration

□

Nous en déduisons une des premières propriétés vraiment utiles de la notion de déterminant :

Proposition (Caractérisation des bases par le déterminant)

La famille $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\dim(E)$ vecteurs de $E$ est une base de $E$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n) \neq 0$.

3.d

Démonstration

□

Exercice (Base grâce au déterminant)

Soit $(u_1, u_2, u_3) = ((1, 2, 3), (2, 1, -1), (0, 1, a))$, où $a$ est un paramètre réel. Déterminer pour quelles valeurs de $a$ $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

7

## 4. Déterminant d'un endomorphisme

$E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition (Définition du déterminant d'un endomorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique scalaire $\lambda$ tel que, pour toute base $\mathcal{B}$ de $E$, on ait, pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$

4.a

Démonstration

**Unicité :** fixons une base $\mathcal{B}$ de $E$. On doit avoir :

$$\det_{\mathcal{B}}(\tilde{f}(\mathcal{B})) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \lambda$$

L'unique valeur possible pour $\lambda$ est donc $\det_{\mathcal{B}}(\tilde{f}(\mathcal{B}))$.

□

Démonstration

**Existence :**

(1) Fixons une base $\mathcal{B}$ de $E$. L'application

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\cdot)) \; : \; \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{K} \\ (u_1, \ldots, u_n) & \mapsto & \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) \end{array}$$

est une forme $n$-linéaire alternée sur $E$. La droite vectorielle $A_n(E, \mathbb{K})$ étant dirigée par $\det_{\mathcal{B}}$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}}(f(\cdot)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Ceci prouve l'existence de $\lambda$, pour une base donnée. Il reste à vérifier que ce scalaire ne dépend pas de cette base.

(2) Soit $\mathcal{B}'$ une base de $E$. On sait qu'il existe un scalaire $\mu$ tel que

$$\det_{\mathcal{B}'} = \mu \det_{\mathcal{B}}$$

(on sait même que $\mu = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$). On a alors $\det_{\mathcal{B}'}(f(\cdot)) = \mu \det_{\mathcal{B}}(f(\cdot))$. L'égalité $\det_{\mathcal{B}}(f(\cdot)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}$, multipliée par $\mu$, montre que :

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(\cdot)) = \lambda \det_{\mathcal{B}'}$$

L'assertion est prouvée.

□

Définition (Déterminant d'un endomorphisme) — 4.a

Soit $f$ un endomorphisme de $E$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Le scalaire

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \left(= \det_{\mathcal{B}}(\tilde{f}(\mathcal{B}))\right)$$

ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ (mais seulement de $f$). On l'appelle *déterminant* de $f$ et on le note $\det(f)$.

Attention ! Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ (et non $\lambda \det(f)$, sauf cas particulier) et, en général, $\det(f+g) \neq \det(f) + \det(g)$

De plus, on ne parle pas du déterminant d'un endomorphisme *dans une base*, mais simplement du déterminant d'un endomorphisme.

Exemple (Déterminant d'un endomorphisme) — i

(1) Le déterminant de l'endomorphisme nul de $E$ est nul.

(2) Le déterminant de l'application identique de $E$ vaut 1.

(3) $\det(\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda^n$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tous $u_1, \ldots, u_n \in E$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$

Proposition (Déterminant d'une composée) — 4.b

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$$

Démonstration

□

En particulier, $\det f \circ g = \det g \circ f$.

Proposition (Caractérisation des automorphismes par le déterminant)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $f$ est un automorphisme de $E$ si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce dernier cas, on a :

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$$

4.c

Démonstration

□

Le déterminant définit donc un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ vers $\mathbb{K}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier naturel $p$, on a :

$$\det(f^p) = (\det f)^p$$

(par convention, $f^0 = \mathrm{Id}_E$). Ce résultat s'étend à tout entier relatif dans le cas où $f$ est un automorphisme.

## 5. Déterminant d'une matrice carrée

Définition (Déterminant d'une matrice carrée)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle *déterminant* de $A$, et on note $\det A$, le scalaire

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Ce scalaire est noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

5.a

$\det(A)$ est donc le déterminant de la famille des vecteurs colonnes de $A$ dans la base canonique, vus comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. C'est également le déterminant de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, canoniquement associé à $A$, et même le déterminant de tout endomorphisme représenté par $A$ dans une base donnée.

Exemple (Déterminant matriciels)

On a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} =$$

et

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

i

Le travail précédent montre les propriétés suivantes :

(1) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors

$$\det(AB) = \det A \det B \quad \text{et} \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Attention ! En général, $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$, et $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

(2) Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. On a alors

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

(3) La formule $\det(A^k) = (\det A)^k$ est valable pour tout entier $k$ pour lequel elle a un sens.

(4) Deux matrices semblables ont même déterminant.

(5) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de $E$, et $A$ la matrice carrée de cette famille dans la base $\mathcal{B}$. On a alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det A$$

Cette famille est une base si et seulement si $\det A \neq 0$.

(6) On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $E$. Soit $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det P \det_{\mathcal{B}'}$$

Proposition (Invariance du déterminant par transposition)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det {}^t A = \det A$$

5.a

Démonstration

$\square$

Exercice (Calculs de déterminants par l'expression sommatoire)

Faire la première question de l'exercice 2 de TD en utilisant l'expression sommatoire du déterminant.

8

## 6. Calcul et utilité d'un déterminant

### 6.1. Propriétés calculatoires d'un déterminant

Remarquons que nous retrouvons bien les définitions données en début d'année pour des tableaux $2 \times 2$ et $3 \times 3$.

Pour calculer un déterminant, il est rare de recourir à l'expression sommatoire donnée plus haut.

Par abus de langage, on confond le déterminant (qui est un scalaire) avec le « tableau » dont on part. Ainsi, nous pourrons parler de colonnes et de lignes d'un déterminant.

(1) Multiplier une colonne par un scalaire $\lambda$ mutliplie le déterminant par $\lambda$.

(2) Multiplier tous les coefficients (*i.e.* chaque colonne) par $\lambda$ multiplie le déterminant par $\lambda^n$.

(3) Un déterminant dont une colonne est nulle est nul.

(4) Permuter deux colonnes change le déterminant en son opposé. Plus généralement, appliquer une permutation de signature paire (resp. impaire) à l'ensemble des colonnes d'un déterminant le laisse inchangé (resp. le change en son opposé).

(5) On ne modifie pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes.

(6) Un déterminant est nul si et seulement si ses vecteurs colonnes sont liés.

On a bien sûr des propriétés analogues sur les lignes d'un déterminant (puisque le déterminant d'une matrice est le déterminant de sa transposée). Ces propriétés sont, avec le développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne (voir plus loin), les plus utiles en pratique pour calculer un déterminant.

### 6.2. Cofacteurs, comatrice

Ici $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

**Définition (Mineur, cofacteur, comatrice)**

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout couple d'indices $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle *mineur* du coefficient de position $(i,j)$ dans $A$ (ou par abus mineur de $a_{i,j}$) et on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$, d'ordre $n-1$, obtenu en supprimant dans $A$ la $i$-ème ligne et la $j$-ième colonne (ligne et colonne où se trouve $a_{i,j}$).
Le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ est appelé *cofacteur* du coefficient $a_{i,j}$.
On appelle *comatrice* de $A$ et on note $\operatorname{com} A$ la matrice $(A_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

6.a

On parle aussi abusivement de cofacteur d'un déterminant.

**Exercice (Comatrices)**

Donner les comatrices des matrices carrées de taille 2, puis de taille 3.

9

**Exercice (Comatrice de la transposée)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{com}({}^tA) = {}^t \operatorname{com}(A)$.

10

**Lemme premier pour le développement du déterminant selon une colonne**

Le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ dont la dernière colonne est nulle sauf son dernier coefficient, qui vaut 1, est le mineur de ce coefficient.

6.a

Démonstration

On a
$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n},$$
or $a_{\sigma(n),n} = 0$ si $\sigma(n) \neq n$ et $a_{n,n} = 1$. La somme est donc indicée sur le sous-groupe $G$ de $\mathcal{S}_n$ laissant $n$ invariant. On a un isomorphisme canonique entre $\mathcal{S}_{n-1}$ et $G$, qui laisse la signature inchangée. Le résultat s'ensuit.

□

Lemme second pour le développement du déterminant selon une colonne

Si la $j$-ième colonne de $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nulle, sauf son $i$-ème terme, qui vaut 1, alors
$$\det A = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j} = A_{i,j}.$$

6.b

Démonstration

Si c'est le $i$-ème et non plus le dernier coefficient qui vaut 1 et les autres 0, alors on se ramène au cas précédent par action du cycle $\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & i+1 & i \end{pmatrix}$ sur les lignes de $A$, cycle de signature $(-1)^{n-i+1-1}$. Si en outre c'est la $j$-ième colonne qui a tous ses coefficients nuls sauf 1, on effectue la permutation $\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & j+1 & j \end{pmatrix}$ sur les colonnes de $A$, de signature $(-1)^{n-j+1-1}$.

□

Proposition (Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$$
(développement de $\Delta$ par rapport à sa $j$-ème colonne)
On a aussi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ :
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$$
(développement de $\Delta$ par rapport à sa $i$-ème ligne)

6.c

Démonstration

□

Une combinaison habile des propriétés calculatoires d'un déterminant et ces formules constituent très souvent la façon la plus simple de calculer un déterminant.

Exercice (Calculs de déterminants)

Faire les questions **3** et **4** de l'exercice 2 de TD.

11

### 6.3. Aspect polynomial du déterminant

D'après son expression sommatoire, on constate que l'application déterminant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A)$ est polynomiale en ses $n^2$ coefficients. Cet aspect polynomial permet de calculer certains déterminants, en estimant le degré du polynôme considéré, et en le connaissant en un nombre suffisant de points.

L'exemple typique sur le sujet est le très classique déterminant de Vandermonde :

Exercice (Déterminant de Vandermonde)

Faire l'exercice 3 de TD.

12

## 7. Applications de la notion de déterminant

Nous avons déjà vu comment la notion de déterminant permettait facilement de tester si une famille est une base, ou si un endomorphisme est un automorphisme.

### 7.1. Inverse d'une matrice

Proposition (Formule avec la comatrice)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A({}^t\text{com}\, A) = ({}^t\text{com}\, A)A = (\det A)I_n$$

En particulier, si $A$ est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t\text{com}\, A)$$

7.a

Démonstration

□

Il faut bien observer que la première formule est valable (et est utile) même si $A$ n'est pas inversible.

Exemple (Inverse d'une matrice de taille 2 par la comatrice)

On ne se sert pas souvent de cette formule pour un calcul d'inverse, sauf dans le cas d'une matrice carrée de taille 2 : si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors son inverse est

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

i

Exercice (Inverse d'une matrice triangulaire par la comatrice)

Soit $A$ une matrice triangulaire supérieure inversible. Montrer, avec la formule de la comatrice, que son inverse est triangulaire supérieure.

13

### 7.2. Formules de Cramer

On se donne un système carré $\mathcal{S}$ (*i.e.* dont la matrice est carrée). On sait que le système est de Cramer si et seulement si le déterminant de sa matrice n'est pas nul.

Proposition (Formules de Cramer)

On se donne un système de Cramer $\mathcal{S}$, d'écriture matricielle $AX = B$. L'unique vecteur solution de $\mathcal{S}$ est le $n$-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

où $A_i$ désigne la matrice obtenue à partir de $A$ en remplaçant sa $i$-ème colonne par le vecteur colonne second membre $B$.

7.b

Démonstration

□

Comme pour la formule avec la comatrice, l'intérêt de cette formule est avant tout théorique

Le déterminant de la matrice est néanmoins utile pour vérifier/trouver les valeurs spéciales d'un paramètre, c'est-à-dire celles qui rendent le système non inversible.

**Exemple (Formules de Cramer)**

Le système
$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases},$$
est de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et on a alors pour unique solution le couple $(x_0, y_0)$, où
$$x_0 = \frac{ed - bf}{ad - bc} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

ii

### 7.3. Orientation

Grâce à la notion de déterminant, nous pouvons reprendre et étendre la notion d'orientation d'un espace vectoriel réel.

Considérons un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n \geqslant 1$. On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de $E$ en posant que $\mathcal{B}'$ a *même orientation* que $\mathcal{B}$ si
$$\det M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$$
(nous savons déjà que ce déterminant est non nul).

Si deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ n'ont pas la même orientation, alors toute base $\mathcal{B}''$ aura même orientation que $\mathcal{B}$ ou que $\mathcal{B}'$ : nous avons ainsi deux orientations possibles pour $E$.

Ainsi, le choix d'une base $\mathcal{B}$ de $E$ définit une orientation de $E$. Toutes les bases de même orientation que $\mathcal{B}$ seront dites *directes*, les autres *indirectes*.

En général, nous orientons $\mathbb{R}^n$ avec sa base canonique (c'est parfois implicite). Nous retrouvons les définitions de l'orientation du plan et de l'espace vues en début d'année.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est directe et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, alors $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ est directe (resp. indirecte) si $\sigma$ est de signature paire (resp. impaire).

Interprétation du déterminant (plutôt de sa valeur absolue) comme aire/volume en dimensions 2 et 3.

### 7.4. Calcul du rang d'une matrice (hors-programme)

**Exercice (Rang d'une matrice par le déterminant)**

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice extraite de $A$ toute matrice obtenue en supprimant des lignes ou colonnes de $A$.
Montrer que le rang de $A$ est la plus grande taille d'une matrice inversible extraite de $A$.

14

Ainsi, le rang de $A$ est la plus grande taille d'un « déterminant extrait » de $A$ non nul.

# 8. Feuille de TD 17 : Déterminant

$n$ désigne un entier naturel non nul.

## 8.1. Calculs de déterminants

**Exercice 1 (Nullité d'un déterminant)** 0

Montrer sans calcul que pour tous réels $a, b, c, d$ :

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

**Exercice 2 (Calculs divers de déterminants)** 0

**1** Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

**2** Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

**3** Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \vdots & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

**Réponse :** $(-1)^{n-1}n^{n-2}\frac{n(n+1)}{2}$.

**4** Calculer $(a, b, c \in \mathbb{R})$ :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

**Réponse :** $2abc(a+b+c)^3$.

**5** *(X MP 09, CCP PSI 09)* Soit $\Phi\ : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det \Phi$.

**6** *(X PC 09)* Soit $\Phi\ : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A + 2{}^t A$. Déterminer la trace et le déterminant de $\Phi$.

**Exercice 3 (*Déterminant de Vandermonde*)** 1

On considère un entier $n \geqslant 1$ et $n+1$ scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

**Exercice 4 (Matrice compagnon)** 1

On considère un entier $n \geqslant 2$ et $n$ scalaires $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1}-X \end{vmatrix}.$$

**Exercice 5 (Calcul de déterminant par multilinéarité)** 2

*(Mines PSI)* Soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $m_{i,i} = a_i + b_i$ et $m_{i,j} = b_i$ si $i \neq j$. Calculer le déterminant de $M$.

**Exercice 6 (*Mines MP 08*)** 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = X^n - X + 1$.
**1** Montrer que $P_n$ admet $n$ racines distinctes $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.
**2** Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$.

**Exercice 7 (Un déterminant tridiagonal)** 3

Soit $a, b, c$ trois réels, et $\Delta_n$ le déterminant de taille $n$ ($n \geqslant 2$) suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$.
**1** Montrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$

**2** En déduire une méthode de calcul de $\Delta_n$ pour tout entier naturel $n$.
**3** Donner une formule explicite pour $\Delta_n$ dans le cas où $a^2 = 4bc$.

Exercice 8 (Calcul astucieux de déterminant) 3

*(Centrale PC 09)* Soit $a, b, c$ trois réels, $b \neq c$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & \mathbf{b} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{c} & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 9 (*Mines MP 08*) 4

On se donne $m$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$ avec $m < n$, $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}_m[X]$, $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

### 8.2. Propriétés du déterminant

Exercice 10 (Déterminant par blocs) 2

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ $(p, q \geqslant 1)$.
**1** Calculer

$$\begin{vmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}.$$

**2** Étendre ce résultat à $\begin{vmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}$, où $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Exercice 11 (Dérivation d'un déterminant) 2

**1** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}[X])$. Montrer que si $a_{i,j} = P_{i,j}(X) \in \mathbb{R}[X]$ (pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$), alors

$$(\det(A))' = \begin{vmatrix} P'_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,n} \\ P'_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P'_{n,1} & P_{n,2} & \dots & P_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{1,1} & P'_{1,2} & P_{1,3} & \dots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P'_{2,2} & P_{2,3} & \dots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n,1} & P'_{n,2} & P_{n,3} & \dots & P_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,n-1} & P'_{1,n} \\ P_{2,1} & \dots & P_{2,n-1} & P'_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n,1} & \dots & P_{n,n-1} & P'_{n,n} \end{vmatrix}$$

**2** Calculer, au moyen d'une récurrence, le déterminant suivant de taille $n$ :

$$\begin{vmatrix} 1+X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+X \end{vmatrix}.$$

Exercice 12 (Perturbation matricielle sans effet sur le déterminant) 3

**1** *(X MP 09)* Soit $n$ un entier pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, $J$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que, pour tout réel $t$, $\det(A + tJ) = \det(A)$.
**2** *(X PC 09)* Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A+M) = \det(A)+\det(M)$.

Exercice 13 (Déterminant d'un endomorphisme matriciel) 3

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme $u_A$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $B \mapsto AB$. Préciser la matrice de $u_A$ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, et vérifier que $\det(u_A) = (\det A)^2$.

Exercice 14 (*(Ulm MP 08)*) 3

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A + B) \geqslant 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^p + B^p) \geqslant 0$.

Exercice 15 (*X 07, Mines MP 08*) 4

Soit $A$ et $H$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg}(H) = 1$. Montrer : $\det(A + H)\det(A - H) \leqslant \det A^2$.

## 8.3. Utilisation du déterminant

Exercice 16 (Racines carrées réelles de l'unité) 0

On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$. Montrer que $n$ est pair. Si $n$ est pair, existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$ ?

Exercice 17 (Matrice antisymétrique de taille impaire) 0

Montrer qu'une matrice antisymétrique de taille impaire ne peut pas être inversible.

Exercice 18 (Inversion matricielle par le déterminant) 0

En utilisant les déterminants, inverser la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 19 (Comatrice) — 0

On considère trois réels $a, b, c$, et

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant et la comatrice de $A$. Quand $A$ est inversible, préciser $A^{-1}$.

### Exercice 20 (Rang et déterminant de la comatrice) — 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \geqslant 2$. Calculer $\operatorname{rg}(\operatorname{com} A)$ et $\det(\operatorname{com} A)$.
**Indication :** discuter selon le rang de $A$, le cas compliqué étant $\operatorname{rg}(A) = n - 1$.

### Exercice 21 (Indépendance de la similitude par rapport au corps des scalaires) — 3

*(Mines MP 08, X PC 09)* Montrer que si deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

CHAPITRE XVIII

# Espaces euclidiens

## Sommaire



Dans ce chapitre, le corps de base des espaces vectoriels considérés est $\mathbb{R}$. Notre objectif est de compléter et généraliser certains résultats de début d'année.

$E$ désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $n$ un entier naturel non nul.

## 1. Produit scalaire

### 1.1. Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

**Définition (Application (définie) positive)** 1.a

Une application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ est dite *positive* si

$$\forall x \in E, \quad f(x,x) \geqslant 0$$

Dans ce dernier cas, $f$ est dite *définie positive* si en outre

$$\forall x \in E, \quad f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

**Définition (Produit scalaire)** 1.b

On dit qu'une application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ est un *produit scalaire* (sur $E$) si $f$ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.

On appelle *espace préhilbertien (réel)* un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

Exemple (Produits scalaires)

(1) Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$. L'application
$$(u, v) \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$
est un produit scalaire, appelé *produit scalaire canonique* de/sur $\mathbb{R}^n$.

(2) Soit $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k$ des polynômes réels. On pose
$$(P|Q) = \sum_{k\geqslant 0} a_k b_k,$$
somme bien définie puisque $(a_n b_n)$ est presque nulle. On définit ainsi un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbb{R}[X]$, dit *canonique*.

(3) Produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b])$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ : $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$.

(4) Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues et $2\pi$-périodiques. L'application :
$$(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur $E$.

(5) Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ préhilbertien, alors le produit scalaire sur $E$ induit une structure préhilbertienne sur $F$.

i

Définition (Espace euclidien)

Un *espace euclidien* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

1.c

Exemple (Espaces euclidiens)

(1) Les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, munis de leurs produits scalaires usuels sont des espaces euclidiens.

(2) L'espace $\mathcal{C}^0([0, 1])$, muni du produit scalaire ci-dessus, n'est pas euclidien, car il n'est pas de dimension finie. Cependant, ses sous-espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces euclidiens pour la structure induite.

ii

Un même espace peut être muni de plusieurs produits scalaires. Pour $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$,le produit scalaire canonique est aussi dit *usuel*. On parle ainsi de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) euclidien usuel.

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur $E$. On a :
$$\forall (u, v) \in E^2, \quad (u|v)^2 \leqslant (u|u)(v|v).$$
De plus, il y a égalité si et seulement si $(u, v)$ est liée.

1.a

**Démonstration**

□

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^n u_i^2)(\sum_{i=1}^n v_i^2).$$

Dans le cas intégral, on reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz déjà vue :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t\right).$$

**Exercice (Produit scalaire canonique matriciel)** 1

Faire la première question de l'exercice 4 de TD.

### 1.2. Norme et distance associées à un produit scalaire

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur $E$. On définit, pour tout vecteur $u$ de $E$, la norme de $u$ (associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$), par :

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)}$$

Cette application vérifie les propriétés suivantes[1] :

(1) $\forall\, u \in E, \|u\| \geqslant 0$ et $(\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E)$ (axiome de séparation).

(2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, u \in E, \|\lambda u\| = |\lambda|\, \|u\|$ (homogénéité).

(3) $\forall (u,v) \in E^2, \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire).

On dit que l'application $\|\cdot\|$ est une *norme*.

Dans le cas où l'espace est euclidien, l'application $\|\cdot\|$ définie ci-dessus est appelée *norme euclidienne* associée au (ou déduite du) produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

On peut reformuler l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'une façon géométrique, facile à retenir :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad |(u|v)| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$

On a la *seconde inégalité triangulaire* : $\forall (u,v) \in E^2, |\,\|u\| - \|v\|\,| \leqslant \|u+v\|$ (ou encore $|\,\|u\| - \|v\|\,| \leqslant \|u-v\|$, ce qui montre que la norme est une fonction 1-lipschitzienne).

**Exemple (Norme euclidienne)** iii

Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, la norme euclidienne est donc donnée par

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

On reconnaît en particulier la norme usuelle dans le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Ces propriétés constituent la définition générale d'une norme

Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, tous vecteurs $u$ et $v$ de $E$, on a :

$$\|\alpha u+\beta v\|^2=\alpha^2\|u\|^2+2\alpha\beta(u|v)+\beta^2\|v\|^2$$

**Proposition (Identité du parallélogramme)**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. On a :

$$\forall(u,v)\in E^2, \|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2).$$

1.b

**Illustration**

**Proposition (Identités de polarisation)**

Pour tout $(u,v)\in E^2$ :

$$\begin{aligned}(u|v) &= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2-\|u-v\|^2\right).\end{aligned}$$

1.c

Ainsi, grâce à ces identités de polarisation, il y a autant d'information dans la norme euclidienne que dans le produit scalaire : la connaissance de la norme nous permet de retrouver le produit scalaire dont elle est issue.

Cependant, toutes les normes ne sont pas issues d'un produit scalaire, une condition nécessaire étant qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme :

**Exercice (Norme non euclidienne)**

(Facultatif, car un peu hors-sujet) Donner un exemple de norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, non issue d'un produit scalaire.

2

Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $E$. L'application $d: E^2\to\mathbb{R}$ définie par $d(u,v)=\|u-v\|$ (qui se lira : distance de $u$ à $v$) vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\forall\, u,v\in E,\quad d(u,v)\geqslant 0$ et $(d(u,v)=0\Leftrightarrow u=v)$.

(2) $\forall\, u,v\in E,\quad d(u,v)=d(v,u)$.

(3) $\forall\, u,v,w\in E,\quad d(u,v)\leqslant d(u,w)+d(w,v)$ (inégalité triangulaire).

On dit que $d$ est une *distance*, associée à la norme $\|\cdot\|$ (ou au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$).

## 2. Orthogonalité

### 2.1. Familles orthonormales et orthogonales

$E$ est ici un espace préhilbertien (réel).

**Définition (Vecteur unitaire)**

Un vecteur $u$ de $E$ est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si $\|u\| = 1$.
Si $u$ est un vecteur non nul de $E$, on appelle *normalisé* de $u$ le vecteur $\frac{u}{\|u\|}$.

2.a

**Définition (Vecteurs orthogonaux)**

Deux vecteurs $u$ et $v$ de $E$ sont dits *orthogonaux* si $(u|v) = 0$. On note alors parfois $u \perp v$.

2.b

**Exemple (Vecteurs orthogonaux)**

(1) Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul (d'après l'axiome de séparation).
(2) Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de $E$ est donc *a fortiori* le vecteur nul.
(3) Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$, des polynômes respectivement pair et impair sont orthogonaux.
(4) Pour le produit $(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, des fonctions respectivement paire et impaire sont orthogonales.
(5) Si on munit $E$ de deux produits scalaires, deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour l'un mais pas pour l'autre (donner un exemple).

i

**Définition (Famille orthogonale, orthonormée)**

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $E$ est *orthogonale* si les $u_i$ sont orthogonaux deux à deux. Si de plus ils sont unitaires, la famille est alors dite *orthonormale* (ou *orthonormée*).

2.c

**Exemple (Familles orthonormées)**

Dans tous les exemples de produits scalaires canoniques (*i.e.* dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}[X]$), la base canonique de l'espace sous-jacent est une base orthonormée, d'où leur nom.

ii

**Proposition (Expression d'un produit scalaire en base orthonormée)**

On suppose que $E$ est un espace euclidien de dimension $n$, et que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $E$. Soit $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ des vecteurs de $E$ donnés avec leurs décompositions respectives dans $\mathcal{B}$. On a :

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

En particulier,

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

2.a

Attention ! L'expression du produit scalaire *dans une base orthonormée* est très agréable, mais cette formule n'est *pas valable* pour une base quelconque.

**Exercice (Produit scalaire orthonormalisant une base)** 3

Montrer, réciproquement, que si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si on pose

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

pour tous vecteurs $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ de $E$, alors on obtient un produit scalaire sur $E$, pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormale.

Ainsi, pour toute base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, il existe un unique produit scalaire rendant cette base orthonormée.

La famille $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est orthonormale si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $(u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

**Proposition (Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls)** 2.b

Une famille orthogonale constituée de vecteurs tous non nuls est libre. En particulier, toute famille orthonormée de $E$ est libre.

**Démonstration**

□

Ainsi, une base orthonormée de $E$ euclidien de dimension $n$ n'est rien d'autre qu'une famille orthonormée, de cardinal $n$.

**Proposition (Relation de Pythagore)** 2.c

Soit $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille orthogonale. On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$$

**Démonstration**

□

La réciproque est vraie pour $p = 2$ (si $\|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$, alors $(u_1, u_2)$ est orthogonale), mais pas pour $p \geqslant 3$.

La question de l'existence d'une base orthonormale se pose naturellement, ainsi que celle de l'obtention d'une telle base.

**Lemme** de l'ajout orthonormé à un hyperplan

Soit $E$ euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose disposer d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ d'un hyperplan $\mathcal{H}$ de $E$. Il existe alors deux vecteurs (opposés) permettant de compléter $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de $E$.

2.d

**Démonstration**

$\square$

**Illustration**

**Corollaire** (Complétion d'une famille orthonormée en une base orthonormée)

Soit $E$ euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille orthonormée de $E$ se complète en une base orthonormée de $E$.

2.e

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Existence d'une base orthonormale)**

Tout espace euclidien de dimension non nulle admet une base orthonormée.

2.f

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée)**

Soit $E$ un espace euclidien, de base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout vecteur $u$ de $E$, on a :

$$u = \sum_{i=1}^{n} (u|e_i)e_i.$$

2.g

**Démonstration**

$\square$

Attention ! Cette formule n'est *a priori* valable que si la base est *orthonormée*.

### 2.2. Orthogonal d'une partie de $E$

$E$ désigne un espace préhilbertien réel, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

**Définition (Orthogonal d'une partie)**

Soit $A$ une partie de $E$. On appelle *orthogonal* de $A$ (dans $E$), et on note $A^{\perp}$ ou $A^{\circ}$, l'ensemble des vecteurs de $E$ orthogonaux à tous les vecteurs de $A$.
Deux parties non vides $A$ et $B$ de $E$ sont dites *orthogonales* si

$$\forall (a,b) \in A \times B, \quad (a|b) = 0$$

2.d

Illustration

Exemple (Orthogonal d'une partie)

(1) $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

(2) Les sous-espaces de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ constitués respectivement des fonctions paires et impaires sont orthogonaux pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_{[-1,1]} fg$.

(3) Si deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$ sont supplémentaires orthogonaux, alors on obtient une base orthonormée de $E$ en concaténant des base orthonormées de $F$ et de $G$.

iii

Proposition (Propriétés de l'orthogonal)

Soit $A$ et $B$ deux parties de $E$.

(1) $A$ et $B$ sont orthogonales si et seulement si $A \subset B^\perp$ (si et seulement si $B \subset A^\perp$).

(2) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

(3) $A \subset A^{\perp\perp}$.

(4) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E$ (même si $A$ n'en est pas un).

(5) $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$. En particulier, si $F$ est engendré par $(f_1, \dots, f_k)$, alors $u \in F^\perp$ si et seulement si $u$ est orthogonal à tous les vecteurs $f_1, \dots, f_k$.

(6) $F$ et $F^\perp$ sont en somme directe.

2.h

Démonstration

$\square$

**Proposition (Supplémentaire orthogonal)**

On suppose ici $E$ euclidien. On a $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F^{\perp\perp} = F$.

2.i

**Démonstration**

□

Ces formules sont généralement fausses dans un espace préhilbertien réel :

**Définition (Supplémentaire orthogonal)**

On suppose $E$ euclidien. Le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$ de $E$ est appelé le *supplémentaire orthogonal* de $F$ (dans $E$).

2.e

Dans ce cadre, il y a bien unicité du supplémentaire *orthogonal* de $F$, qui est souvent à privilégier par rapport aux autres supplémentaires si la structure euclidienne de $E$ intervient.

### 2.3. Formes linéaires sur un espace euclidien

$E$ est un espace euclidien.

Soit $a \in E$. L'application $\varphi_a \ : x \mapsto (a|x)$ est une forme linéaire sur $E$. Son noyau est $E$ si $a = 0_E$, et l'hyperplan $(\mathbb{R}a)^{\perp}$ sinon.

**Proposition (Isomorphisme explicite entre $E$ et son dual)**

L'application $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme de $E$ sur son dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
En particulier, pour toute forme linéaire $f$ sur $E$, il existe un unique vecteur $a$ de $E$ tel que $f = \varphi_a$, *i.e.*

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (a|x).$$

2.j

Démonstration

$\square$

Exemple (Produit vectoriel)

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, fixons deux vecteurs $u$ et $v$. L'application $x \mapsto \det(u, v, x)$ (det désigne le déterminant dans la base canonique) est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, ce qui conduit à la définition du produit vectoriel $u \wedge v$.

iv

En dimension infinie, toute forme linéaire n'est pas nécessairement le produit scalaire par un vecteur donné, donner un exemple :

### 2.4. Projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien

$E$ désigne un espace euclidien, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

Définition (Projecteur orthogonal)

Le projecteur $p_F$ sur $F$ parallèlement à $F^\perp$ est appelée *projecteur orthogonal* sur $F$.
La symétrie $s_F$ par rapport à $F$ parallèlement à $F^\perp$ est appelée *symétrie orthogonale* par rapport à $F$.
On appelle *réflexion* de $E$ toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $E$.

2.f

Ces définitions sont licites car $F$ et $F^\perp$ sont supplémentaires dans $E$.

Proposition (Expression d'une projection orthogonale en base orthonormée)

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de $F$, alors, pour tout vecteur $u$ de $E$, on a

$$p_F(u) = \sum_{k=1}^{p} (e_k|u)e_k.$$

2.k

Démonstration

□

On a $p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E - p_F$, $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$, et $s_{F^\perp} = -s_F$. Cela permet par exemple d'exprimer simplement une réflexion :

**Exercice (Expression d'une réflexion)** 4

Soit $H$ un hyperplan de $E$, d'orthogonal dirigé par un vecteur $a$.

**1** On suppose $a$ unitaire. Exprimer $r(u)$ en fonction de $u$ et de $a$, où $u \in E$ et $r$ est la réflexion par rapport à $H$.

**2** Donner une formule lorsque $a$ n'est plus supposé unitaire.

**Proposition (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)** 2.1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Il existe alors une unique base orthonormale $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $E$ vérifiant :

(1) $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

(2) $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad (f_k | e_k) > 0$.

**Définition (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)** 2.g

Dans ce contexte, on dit que $\mathcal{C}$ est l'*orthonormalisée de (Gram-)Schmidt* de $\mathcal{B}$.

Illustration

Démonstration

$\square$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

On peut interpréter ce procédé de manière géométrique : $f_1$ est le normalisé de $e_1$, et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $f_k$ est le normalisé de $e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)$, où $p_{F_{k-1}}$ désigne le projecteur orthogonal sur $F_{k-1} = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$. Puisque $(f_1, \dots, f_{k-1})$ est une base orthonormée de $F_{k-1}$, on a

$$p_{F_{k-1}}(e_k) = \sum_{i=1}^{k-1} (e_k|f_i) f_i,$$

de sorte que

$$f_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k|f_i) f_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k|f_i) f_i \right\|}.$$

2.1

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est coûteux, c'est pourquoi il constitue un dernier recours : il vaut mieux trouver des informations pertinentes sur la structure euclidienne avant d'y faire appel.

Exercice (Matrice de passage à l'orthonormalisée de Schmidt)

Dans le contexte de la proposition précédente, que dire de la matrice $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}}$ ?

5

Exercice (Une symétrie orthogonale est auto-adjointe)

Soit $s$ une symétrie orthogonale de $E$.

**1** Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $(s(u)|v) = (u|s(v))$.

**2** En déduire que pour tout $(u, v) \in E^2$, $(s(u)|s(v)) = (u|v)$.

6

Exercice (Réflexion échangeant deux vecteurs distincts de même norme)

Soit $a, b \in E$, $a \neq b$, $\|a\| = \|b\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant $a$ et $b$.

7

**Définition (Distance d'un vecteur à un sous-espace)**

Soit $u \in E$. Soit $p$ le projecteur orthogonal sur $F$. La quantité $d(u, F) = \|u - p(u)\|$ est appelée *distance* du vecteur $u$ au sous-espace vectoriel $F$.

2.h

**Proposition (Interprétation de la distance d'un vecteur à un sous-espace)**

On a

$$d(u, F) = \min\{\|u - x\|, x \in F\}$$

2.m

**Illustration**

**Démonstration**

$\square$

**Calcul pratique de distance**

Comment, en pratique, calculer la distance d'un vecteur $u$ à un sous-espace $F$ ? Déjà, si on travaille en dimension finie, on a $d(u,F) = \|p_{F^\perp}(u)\|$, et il est donc parfois avantageux de s'intéresser à $F^\perp$ (si par exemple $F$ est un hyperplan et qu'il est facile de trouver un vecteur non nul de $F^\perp$).
Ensuite, on peut tenter de trouver une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de $F$, afin d'exprimer $p_F(u)$. On a même un raccourci dans ce cas, car le théorème de Pythagore permet de donner la formule :

$$d(u,F)^2 = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{p} (u|e_i)^2.$$

Une autre approche consiste à déterminer $p_F(u)$ sans chercher une base orthonormée de $F$, mais en le caractérisant comme unique vecteur $v$ de $F$ tel que $u - v$ soit orthogonal à tout vecteur de $F$ : on prend alors une base (non orthonormée) $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de $F$, on décompose $v$ dans $\mathcal{B}$ : $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$, et on résout le système d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, d'équations $(v|e_j) = (u|e_j)$ ($j$ parcourant $[\![1,p]\!]$). Une fois $v$ déterminé, on calcule $d(u,F) = \|u - v\|$.

2.2

**Exercice (Un calcul de distance)**

**1** Pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculer la distance de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ à $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, puis à $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
**2** Pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_{[-1,1]} fg$ sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$, calculer la distance de $\cos$ à $\text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$, où $f_k\ (t) = t^k$ pour tout $(k,t) \in [\![0,2]\!] \times [-1,1]$.

8

## 3. Automorphismes orthogonaux

### 3.1. Groupe orthogonal

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien non nul.

**Définition (Endomorphisme orthogonal)**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que l'endomorphisme $f$ de $E$ est *orthogonal* s'il conserve le produit scalaire, *i.e.* :

$$\forall\, u, v \in E, \quad (f(u)|f(v)) = (u|v)$$

3.a

Tout endomorphisme orthogonal est en fait un automorphisme :

Exemple (Endomorphismes orthogonaux)

(1) Les applications $\mathrm{Id}_E$ et $-\mathrm{Id}_E$ sont des automorphismes orthogonaux de $E$.

(2) Plus généralement, toute symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal.

(3) Le seul projecteur orthogonal qui soit un endomorphisme orthogonal de $E$ est $\mathrm{Id}_E$.

i

Proposition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de $E$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

3.a

Démonstration

□

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de $E$ est appelé *groupe orthogonal* de $E$ et noté $O(E)$.

3.b

Proposition (Caractérisation des automorphismes orthogonaux)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ conserve la norme ($\forall\, u \in E, \|f(u)\| = \|u\|$).

(2) $f$ est orthogonal.

(3) $f$ transforme toute base orthonormale de $E$ en une base orthonormale.

(4) $f$ transforme une base orthonormale de $E$ en une base orthonormale.

3.b

Démonstration

$\square$

Exercice (Orthogonal d'un sous-espace invariant par un automorphisme orthogonal)

Soit $\varphi \in O(E)$, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $\varphi$. Montrer qu'alors $F$ est globalement invariant par $\varphi$, *i.e.* $\varphi(F) = F$, et que $F^\perp$ est également globalement invariant par $\varphi$. 9

Définition (Automorphismes orthogonaux positifs ou négatifs)

Soit $E$ un espace euclidien, $f \in O(E)$. On dit que $f$ est un *automorphisme orthogonal positif*, ou une *rotation (vectorielle)* (resp. un *automorphisme orthogonal négatif*), si $\det(f) > 0$ (resp. $\det(f) < 0$).
On note $SO(E)$ ou $O^+(E)$, et appelle *groupe spécial orthogonal de E*, l'ensemble des automorphismes orthogonaux positifs de $E$, $O^-(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux *négatifs* de $E$. 3.c

Démonstration

Justification du fait que $SO(E)$ soit bien un groupe (pour la composition) :

$\square$

Évidemment, $O^-(E)$ n'est pas un groupe pour la composition :

### 3.2. Matrices orthogonales

$n$ désigne un entier naturel non nul.

**Proposition (Matrices orthogonales)**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $M\,{}^tM = I_n$.

(2) ${}^tMM = I_n$.

(3) $M$ est inversible, et $M^{-1} = ({}^tM)$.

(4) Les vecteurs colonnes de $M$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (euclidien canonique).

(5) Les vecteurs lignes de $M$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (euclidien canonique).

3.c

**Définition (Matrice orthogonale)**

Lorsqu'une des (donc toutes les) conditions ci-dessus est réalisée, on dit que la matrice $M$ est *orthogonale*.

3.d

**Démonstration**

$\square$

**Proposition (Groupe orthogonal d'indice $n$)**

L'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales de taille $n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3.d

**Définition (Groupe orthogonal d'indice $n$)**

Le groupe $O(n)$ est appelé *groupe orthogonal* d'indice $n$.

3.e

Démonstration

□

Une matrice de $O(n)$ est nécessairement de déterminant 1 ou $-1$, mais la réciproque est fausse (si $n \geqslant 2$) :

**Définition (Groupe spécial orthogonal)**

Le *groupe spécial orthogonal d'indice $n$*, noté $SO(n)$ ou $O^+(n)$, est l'ensemble des matrices orthogonales de taille $n$ de déterminant 1.
On pose également $O^-(n) = \{M \in O(n), \det M = -1\}$.
Les matrices de $SO(n)$ sont dites orthogonales *positives*, Les matrices de $O^-(n)$ sont dites orthogonales *négatives*

3.f

Démonstration

Justification du fait que $SO(n)$ soit un groupe multiplicatif :

□

Bien sûr, $O^-(n)$ n'est pas un groupe multiplicatif :

Changer deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice orthogonale positive (resp. négative) la change en une matrice orthogonale négative (resp. positive). De même si on change une colonne (ou une ligne) en son opposée.

**Exemple (Matrices orthogonales)**

(1) La matrice

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

(2) Les matrices

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

où $\alpha$ décrit $\mathbb{R}$, sont orthogonales. Nous verrons plus tard qu'il s'agit des seules de taille 2.

ii

Exercice (Coefficients manquants d'une matrice orthogonale positive)

Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.

10

Proposition (Lien entre automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales)

Soit $f$ un endomorphisme de $E$, et $M$ la matrice de $f$ dans une base *orthonormale*. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ est un automorphisme orthogonal de $E$.

(2) $M$ est une matrice orthogonale.

3.e

Démonstration

$\square$

Attention ! Le lien entre automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales s'effectue en *base orthonormée*.

Les groupes $O(E)$ et $O(n)$ donc sont isomorphes par choix d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $E$ via $f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$. De même pour $SO(E)$ et $SO(n)$.

Les matrices orthogonales sont les matrices de passage entre bases orthonormales.

Si $f \in O(E)$, alors $\det f = \pm 1$ (la réciproque est fausse), de sorte que $SO(E) = \{f \in O(E), \det(f) = 1\}$ et $O^-(E) = \{f \in O(E), \det(f) = -1\}$.

$\mathrm{Id}_E \in SO(E)$, mais $-\mathrm{Id}_E$ appartient à $SO(E)$ ou $O^-(E)$ selon la parité de $\dim E$

Exercice (Négativité des réflexions)

Montrer qu'une réflexion est toujours un automorphisme orthogonal négatif.

11

## 4. Automorphismes orthogonaux du plan

On s'intéresse dans cette sous-section au cas où $E$ est euclidien de dimension 2. On suppose notre espace orienté, *i.e.* muni d'une base que l'on qualifie de directe. L'application det désignera le déterminant dans n'importe quelle base orthonormée directe.

La matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est donc orthogonale positive si l'orientation est inchangée, orthogonale négative sinon.

Pour tout réel $\alpha$, on note

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Proposition (Groupe (spécial) orthogonal d'indice 2)

4.a

On a

$$O(2) = \{R(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{S(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

et

$$SO(2) = \{R(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration

$\square$

Les rotations non triviales (*i.e.* distinctes de l'identité) n'admettent aucun vecteur non nul invariant. Tout autre automorphisme orthogonal de $E$ admet un vecteur non nul invariant.

L'application $R : \alpha \mapsto R(\alpha)$ est un morphisme surjectif du groupe commutatif $(\mathbb{R}, +)$ sur $SO(2)$, donc $SO(2)$ est commutatif. Le noyau de $R$ est $2\pi\mathbb{Z}$.

Les automorphismes orthogonaux négatifs du plan euclidien sont donc les réflexions (ici, les hyperplans sont des droites). Plus précisément, si $S(\alpha)$ est la matrice dans $(e_1, e_2)$ de $s \in O(E)$, alors $s$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}(\cos\frac{\alpha}{2}e_1 + \sin\frac{\alpha}{2}e_2)$.

Illustration

**Exercice ($O(2)$ est engendré par les réflexions)**

Montrer que tout produit de deux réflexions est une rotation, que, réciproquement, toute rotation s'écrit comme produit de deux réflexions.
En particulier, le groupe $O(2)$ est engendré par ses réflexions.

12

**Proposition (Mesure d'angle d'une rotation)**

Pour toute rotation vectorielle $r$ de $E$ (espace euclidien de dimension 2), il existe un réel $\alpha$, unique modulo $2\pi$, tel que dans toute base orthonormée directe de $E$, la matrice de $r$ soit égale à $R(\alpha)$.

4.b

**Définition (Mesure d'angle d'une rotation)**

On dit que $\alpha$ est une *mesure de l'angle* de la rotation $r$.

4.a

**Démonstration**

□

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de même norme non nulle, il existe une unique rotation vectorielle $r$ telle que $r(\vec{u}) = \vec{v}$. Si cette rotation est $r(\alpha)$, alors :

$$\vec{v} = \cos(\alpha)\vec{u} + \sin(\alpha)\vec{u}',$$

où $\vec{u}'$ est choisi afin que $(\vec{u}, \vec{u}')$ soit une base orthonormée directe de $E$.

**Définition (Mesure d'angle entre deux vecteurs non nuls)**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on appelle *mesure* de l'angle (orienté) des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, noté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, une mesure $\alpha$ de l'unique rotation transformant $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ en $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, et l'on note alors

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \alpha \ [2\pi]$$

4.b

La relation de Chasles angulaire se déduit de la relation $R(\alpha + \alpha') = R(\alpha)R(\alpha')$. On retrouve bien entendu les autres propriétés vues en début d'année.

**Proposition (Détermination de l'angle d'une rotation)**

4.c

On se donne deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et soit $\alpha$ une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ : on a

$$\cos\alpha = \vec{u}\cdot\vec{v} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \det(\vec{u},\vec{v})$$

En particulier, si $r$ est une rotation d'angle de mesure $\alpha$, alors pour tout vecteur unitaire $a$, on a

$$\cos\alpha = (a|r(a)) \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \det(a, r(a))$$

**Démonstration**

□

Que faire si $u$ et $v$ ne sont pas unitaires ?

**Proposition (Effet d'un automorphisme orthogonal sur les angles orientés)**

4.d

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, et $f$ un automorphisme orthogonal de $E$.

(1) Si $f$ est une rotation, on a

$$\widehat{(f(\vec{u}),f(\vec{v}))} \equiv \widehat{(\vec{u},\vec{v})}\ [2\pi]$$

(2) Si $f$ est une réflexion, on a

$$\widehat{(f(\vec{u}),f(\vec{v}))} \equiv -\widehat{(\vec{u},\vec{v})}\ [2\pi]$$

**Démonstration**

On se ramène au cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires. Soit $\alpha$ (resp. $\beta$) une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ (resp. $\widehat{(f(\vec{u}),f(\vec{v}))}$). Comme $f$ conserve le produit scalaire, $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$. Par définition du déterminant, $\det(f(\vec{u}),f(\vec{v})) = \det(f)\det(\vec{u},\vec{v})$. Ainsi, $\sin(\beta) = \det(f)\sin(\alpha)$, d'où le résultat.

□

## 5. Automorphismes orthogonaux de l'espace

**Exercice** (Quelques préliminaires sur les valeurs propres)

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que $u$ admet $\lambda$ pour *valeur propre* si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est par injectif, *i.e.* s'il existe un vecteur $x$ *non nul* de $E$ tel que $u(x) = \lambda x$ : un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de $u$ pour la valeur propre $\lambda$ (autrement dit, c'est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$).

**1** Montrer que si $n$ est impair, alors $u$ admet toujours au moins une valeur propre.

**2** On suppose $E$ euclidien et $u$ orthogonal.

**1** Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $u$, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.

**2** Montrer que si deux vecteurs $x, y$ de $E$ vérifient $u(x) = x$ et $u(y) = -y$, alors $x \perp y$.

13

Cette fois ci, $E$ est un espace euclidien orienté de dimension 3, et det désignera le déterminant dans toute base orthonormée directe.

**Proposition** (Orientation d'un plan vectoriel de l'espace par un vecteur normal)

Soit $P$ un plan vectoriel de $E$, et $a$ un vecteur normal à $P$, unitaire. Il existe alors une unique orientation de $P$ telle que, pour tout base orthonormale directe $(e_1, e_2)$ de $P$, $(e_1, e_2, a)$ soit une base orthonormale directe de $E$.

5.a

**Illustration**

**Définition** (Orientation d'un plan vectoriel de l'espace par un vecteur normal)

On dit que le vecteur $a$ (ou l'axe $\mathbb{R}a$ orienté par $a$) définit une *orientation* de $P$, ou que $P$ est *orienté* par $a$.

5.a

Démonstration

$\square$

Plus généralement si $a$ est un vecteur non nul orthogonal à $P$, il définit une orientation de $P$ (la même que $\frac{a}{\|a\|}$).

Soit $f$ un automorphisme orthogonal de $E$. Nous allons étudier $f$ en examinant le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par $f$, *i.e.* $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$. Soit $F = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$, et $m = \dim F$. Bien sûr, $F$ est stable (et même invariant point par point) par $f$, et $f$ est orthogonal, donc $F^\perp$ est stable par $f$, (*i.e.* $f(F^\perp) \subset F^\perp$), et même globalement invariant par $f$. Ces stabilités font que l'on pourra considérer les endomorphismes induits par $f$ sur $F$ et sur $F^\perp$.

(1) Si $m = 3$, alors $f = \operatorname{Id}_E$ (en particulier, $f$ est une rotation).

(2) Si $m = 2$, alors $f$ est une réflexion par rapport à $F$, $f$ est un automorphisme orthogonal négatif :

(3) Si $m = 1$, alors $F^\perp$ est globalement invariant par $f$, mais seul son vecteur nul est invariant par $f$ : la restriction de $f$ à ce plan euclidien est donc une rotation non triviale. Soit $e_3$ un vecteur unitaire de $F$, orientant $F^\perp$. La matrice de $f$ dans une base orthonormale directe $(e_1, e_2, e_3)$ où $(e_1, e_2)$ est une base orthonormale directe de $F^\perp$ s'écrit donc (pour un certain réel $\alpha$)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice ne dépend pas du choix de $(e_1, e_2)$ (base orthonormée directe de $F^\perp$).

Il s'agit d'une rotation vectorielle.

**Définition (Axe d'une rotation non triviale de l'espace)** 5.b

Dans ce contexte, $f$ est appelée *rotation de $E$ d'axe $F$ orienté par $e_3$, et de mesure $\alpha$* (définie modulo $2\pi$).

$f$ est donc aussi la rotation de $E$ d'axe $F$ orienté par $-e_3$ et de mesure $-\alpha$ (définie modulo $2\pi$).

Pour trouver $\cos(\alpha)$, on peut utiliser la trace :

$$\operatorname{tr}(A) = 1 + 2\cos(\alpha).$$

**Exemple (Demi-tour)** i

Une rotation d'angle de mesure $\pi$ est appelée *demi-tour*. Dans ce cas particulier, l'orientation de l'axe de rotation n'est pas primordiale.

Si $r$ est une rotation vectorielle de $E$ d'axe dirigé par un vecteur unitaire $a$ et d'angle de mesure $\alpha$ (modulo $2\pi$), l'image d'un vecteur $u$ orthogonal à l'axe est donnée par

$$r(u) = (\cos\alpha)u + (\sin\alpha)a \wedge u.$$

(car si $u$ est unitaire, $(u, a \wedge u, a)$ est orthonormée directe).

Cette formule permet en particulier de calculer une mesure de l'angle d'une rotation, car

$$\cos(\alpha) = (u|r(u)) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \det(u, r(u), a)$$

**Exercice** (Expression analytique d'une rotation vectorielle)

**1** En conservant les notations ci-dessus, donner l'image d'un vecteur quelconque $u$ de $E$ par $r$.

**2** Vérifier que pour tout vecteur $u$ de $E$ non colinéaire à $a$, $\det(u, r(u), a)$ et $\sin(\alpha)$ sont de même signe.

14

Grâce à cette dernière observation, il est facile de déterminer une mesure d'angle d'une rotation.

Toute rotation peut s'exprimer comme la composée de deux réflexions, par rapport à des plans dont l'intersection est l'axe de la rotation, l'une des deux étant arbitraire (outre cette condition). Réciproquement, tout produit de deux réflexions est soit l'identité, soit une rotation par rapport à l'axe intersection des plans invariants par les deux réflexions.

(4) Si $m = 0$, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ n'est pas trivial. Soit $a$ un vecteur unitaire de ce noyau, et $F$ la droite vectorielle engendrée par $a$. Alors l'étude menée plus haut donne l'allure de la matrice de $f$ dans $(e_1, e_2, a)$, où $(e_1, e_2)$ est une base orthonormée directe du plan $F^\perp$ orienté par $a$ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$f$ est un automorphisme orthogonal négatif.

On a cette fois-ci

$$\mathrm{tr}(A) = 2\cos(\alpha) - 1$$

et $\det(u, f(u), a)$ est du signe de $\sin(\alpha)$ lorsque $u$ n'est pas colinéaire à $a$.

Un tel automorphisme est parfois appelé *antirotation* ou *symétrie-rotation* (d'axe $F$ orienté par $a$, d'angle de mesure $\alpha$).

$-\mathrm{Id}_E$ est un exemple de tel automorphisme (on ne parle pas d'axe d'antirotation dans ce cas).

En pratique, comment savoir si $A \in O(3)$ est positive ou négative ? En notant $C_1, C_2$ et $C_3$ les colonnes de $A$, il suffit de voir si $C_1 \wedge C_2 = C_3$ ($A$ est alors positive) ou $C_1 \wedge C_2 = -C_3$ ($A$ est alors négative).

Il est trivial de distinguer le cas où $m = 3$ du cas où $m = 1$ (cas des automorphismes orthogonaux positifs).

Il est facile de distinguer le cas où $m = 2$ du cas où $m = 0$ (cas des automorphismes orhogonaux négatifs) :

## 6. Feuille de TD 18 : Espaces euclidiens

On se placera parfois implicitement dans $\mathbb{R}^p$ euclidien canonique (pour un certain entier naturel non nul $p$). Sauf mention contraire, $E$ désigne un espace euclidien.

On vérifiera que les applications qualifiées de produits scalaires en sont vraiment.

### 6.1. Produits scalaires

**Exercice 1 (Exemples de produits scalaires)** 0

**1** Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0,1])$ en posant :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^1([0,1])^2, < f, g >= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

**2** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

**Exercice 2 (Relations entre orthogonaux)** 0

Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que :
**1** Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
**2** $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
**3** $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
**4** $(F^\perp)^\perp = F$.

**Exercice 3 (Recherche de base orthonormée)** 0

**1** Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire donné par

$$(P|Q) = \int_0^2 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

**2** Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^4 P(i)Q(i)$$

Chercher une base orthonormée de $E$.

**Exercice 4 (Produit scalaire canonique matriciel)** 1

Pour tous éléments $A$, $B$ de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.
**1** Vérifier que c'est un produit scalaire. Pourquoi l'appelle-t-on produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
**Remarque :** la même formule définit plus généralemet un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dit canonique.
**2** Déterminer l'orthogonal de l'espace des matrices scalaires, des matrices symétriques.
**3** Soit $P \in O(n)$. Montrer que les applications

$$\phi_P : A \longmapsto AP \text{ et } \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP$$

sont orthogonales.
**4** Réciproquement, si $\phi_P$ ou $\psi_P \in O(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in O(n)$ ? (réponses différentes pour $\phi$ et $\psi$).

Exercice 5 (Encore les fonctions paires et impaires) 1

Soit $[-a,a]$ un segment centré en 0, et $\mathcal{C}([-a,a])$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[-a,a]$, à valeurs réelles. On munit $\mathcal{C}([-a,a])$ du produit scalaire classique $(f,g) \mapsto \int_{[-a,a]} fg$. Soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $\mathcal{C}([-a,a])$.

**1** Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux et supplémentaires dans $\mathcal{C}([-a,a])$.

**2** Expression de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 6 (Étude d'orthogonal en dimension infinie) 2

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire : $(f|g) = \int_{t=0}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$, et $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$. En déduire que $E$ est de dimension infinie.

Exercice 7 (Calculs de distances) 0

**1** *(X PC 09)*On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P|Q) = \sum_i a_i b_i$.
Soit $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

**i** Trouver une base orthonormale de $H$.

**ii** Calculer $d(X, H)$.

**2** Soit $\alpha = \inf\{\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c - |x|\right)^2 dx : a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

**i** Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, (\cdot,\cdot))$, un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ et $v \in E$ tel que $\alpha = d(v,F)^2$.

**ii** Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v,p)^2$ et calculer $\alpha$.

**Réponse :** $\alpha = \frac{1}{96}$.

**3** *(Mines MP 09)* Déterminer min $\left\{\int_{-1}^{1} (t^4 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{d}t, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

**Réponse :** $\frac{128}{11025}$.

**4** *(Mines MP 09)* Soit $f\ : t \in ]0,1] \mapsto t\ln(t)$, prolongée par continuité en 0. Calculer $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (f(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$ et déterminer les couples $(a,b)$ qui réalisent ce minimum.

**Réponse :** le minimum cherché vaut $\frac{1}{108}$.

Exercice 8 (Vecteurs de la sphère unité et produit scalaire contraint *(X MP 09)*) 4

Soit $\lambda < 1$ et $A$ une partie de la sphère unité de $E$ telle que pour tout couple $(a,a')$ d'éléments distincts de $A$, on ait : $< a, a' > \leqslant \lambda$. Montrer que $A$ est finie.

## 6.2. Endomorphismes d'espaces euclidiens

Exercice 9 (Endomorphisme conservant l'orthogonalité *(TPE MP 08, Mines MP 09)*) 0

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2, < x,y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0$. Montrer que $f$ est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

Exercice 10 (Expression du rang d'un projecteur orthogonal *(CCP PSI 08)*) 2

Soit $p$ un projecteur orthogonal de $E$.

**1** Montrer que $\|p(x)\|^2 =< p(x), x >$ pour tout $x \in E$.

**2** Montrer que, pour toute base orthonormée $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $E$, $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 11 (Composées de symétries orthogonales) 2

**1** Soit $F, G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $F \perp G$. On note $s_F$ et $s_G$ les symétries orthogonales respectives par rapport à $F$ et $G$. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

**2** Soit $F, G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $F \subset G$. On note $s_F$ et $s_G$ les symétries orthogonales respectives par rapport à $F$ et $G$. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$.

Exercice 12 (Équivalences de propriétés d'un automorphisme orthogonal) 2

Soit $f \in O(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

**1** $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.

**2** $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$.

**3** $\forall x, y \in E, (f(x)|y) = -(x|f(y))$.

Exercice 13 (Caractérisations d'un projecteur orthogonal) 2

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

**1** $p$ est un projecteur orthogonal.

**2** $\forall x, y \in E, (x|p(y)) = (p(x)|y)$.

**3** $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 14 (Une somme inversible d'endomorphismes *(X PC 09)*) 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2, < u(x), y >=< x, v(y) >$. Montrer que $u + v$ est inversible.

## 6.3. Matrices orthogonales

Exercice 15 (Fonction à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *(X MP 08)*) 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout réel $t$, $\Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 (Matrice égale à sa comatrice) 3

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice ?

**Exercice 17 (Orthonormalisée de Gram-Schmidt)** 0

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,0,2)$ et $e_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée $(f_1, f_2, f_3)$ de Gram-Schmidt.

**Exercice 18 (Matrice d'une symétrie orthogonale)** 0

Donner la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$ donnée par le système :

$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

**Exercice 19 (Expressions analytiques d'endomorphismes de l'espace)** 0

Donner l'expression analytique de

**1** La projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y + z = 0$.
**2** La rotation d'axe orienté par $(1, 0, -1)$, d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.
**3** La rotation d'axe orienté par $(1, 1, 1)$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.
**4** La réflexion par rapport au plan d'équation $2x + 2y + z = 0$.

**Exercice 20 (Transformations de l'espace)** 0

Reconnaître les transformations géométriques linéaires dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 21 (Matrice circulaire de rotation)** 3

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que $M$ est une matrice de rotation si et seulement si $a, b, c$ sont les racines d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + \lambda$ avec $\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

CHAPITRE XIX

# Fractions rationnelles

## Sommaire



Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres $F$ et $G$ (éventuellement indicées) désigneront des polynômes, $P$, $Q$ désigneront des polynômes.

## 1. Corps des fractions rationnelles

### 1.1. Définition

On sait que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre. On peut alors définir une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$, en posant

$$(P_1, Q_1)\mathcal{R}(P_2, Q_2) \Leftrightarrow P_1Q_2 = P_2Q_1$$

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$ pour la relation $\mathcal{R}$. Tout élément de $\mathbb{K}(X)$ est appelée *fraction rationnelle*.

Si $F \in \mathbb{K}(X)$ est la classe d'équivalence de $(P, Q)$, on note $F = \frac{P}{Q}$. Ainsi, on a

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \Leftrightarrow (P_1, Q_1)\mathcal{R}(P_2, Q_2) \Leftrightarrow P_1Q_2 = P_2Q_1$$

Le couple $(P, Q)$ est appelé *représentant* de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$.

On définit des lois d'addition et de multiplication de la façon suivante :

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$$

et

$$\frac{P_1}{Q_1}\frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$$

Pour légitimer ces définitions, il faut en fait vérifier que ces opérations ne dépendent pas des représentants choisis pour les deux fractions rationnelles :

Démonstration

□

Proposition (Corps des fractions rationnelles)

$\mathbb{K}(X)$ muni de ces lois est un corps.

1.a

Démonstration

□

Définition (Corps des fractions rationnelles)

Le corps $\mathbb{K}(X)$ s'appelle *corps des fractions rationnelles* à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1.a

Plus généralement, pour tout anneau intègre $A$, on peut définir son *corps des fractions*. Nous avons également effectué cette construction pour passer de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$.

De plus, on a un morphisme injectif canonique d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathbb{K}(X)$, qui à $P$ associe $\frac{P}{1}$ et la notion de fraction rationnelle étend donc bien celle de polynôme. On confondra un polynôme et sa fraction rationnelle associée.

$\mathbb{K}(X)$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension infinie (puisque $\mathbb{K}[X]$ l'est déjà).

### 1.2. Propriétés

**Définition (Conjuguée d'une fraction rationnelle)**

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes. On appelle *conjuguée* de la fraction rationnelle la fraction $\frac{\overline{P}}{\overline{Q}}$.

1.b

**Démonstration**

Justification de cette définition :

□

**Définition (Représentant irréductible d'une fraction rationnelle)**

On appelle *représentant irréductible* d'une fraction rationnelle $F$ tout représentant $(P, Q)$ de $F$, où $P \wedge Q = 1$.

1.c

Par abus de langage, on dit que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est mise sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$.

**Proposition (Forme irréductible d'une fraction rationnelle)**

(1) Toute fraction rationnelle admet une représentation irréductible.

(2) Si $\frac{P}{Q}$ est une forme irréductible d'une fraction rationnelle $F$, et si $F = \frac{P_1}{Q_1}$, alors il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P_1 = RP \quad \text{et} \quad Q_1 = RQ$$

(3) Si $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P_1}{Q_1}$ sont des formes irréductibles de $F$, alors il existe un scalaire non nul $\lambda$ tel que

$$P_1 = \lambda P \quad \text{et} \quad Q_1 = \lambda Q$$

En particulier, $P_1$ et $P$ sont associés, de même que $Q_1$ et $Q$.

1.b

**Démonstration**

□

**Définition** (Mise sous forme canonique d'une fraction rationnelle)

On appelle *forme canonique* (ou *représentant irréductible unitaire*) de $F \in \mathbb{K}(X)$ l'unique représentant irréductible de $F$ dont le dénominateur est unitaire.

1.d

**Démonstration**

Justification de cette définition :

$\square$

**Exemple** (Forme canonique d'une fraction rationnelle)

(1) La forme canonique de 0 est $\frac{0}{1}$.

(2) La forme canonique de $\frac{X^6-X^2}{3X^4-2X}$ est :

(3) si $F \in \mathbb{C}(X)$ vérifie $F = \overline{F}$, alors sa forme canonique est constituée de polynômes réels :

i

**Définition** (Degré d'une fraction rationnelle)

Si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle, la quantité $\deg P - \deg Q \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ne dépend pas du représentant $(P, Q)$ de $F$ choisi. On l'appelle *degré* de $F$, et on la note $\deg F$.

1.e

**Démonstration**

$\square$

La fonction degré sur $\mathbb{K}(X)$ étend bien celle de $\mathbb{K}[X]$. L'unique fraction rationnelle de degré non entier est la fraction rationnelle nulle.

Proposition (Degré d'une fraction rationnelle)

On se donne deux fractions rationnelles $F_1$ et $F_2$ de $\mathbb{K}(X)$. On a :

(1) $\deg(F_1+F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2)$, une condition suffisante d'égalité étant $\deg(F_1) \neq \deg(F_2)$.

(2) $\deg(F_1F_2) = (\deg F_1) + (\deg F_2)$.

1.c

Démonstration

$\square$

## 2. Fonctions rationnelles

On se donne une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ mise sous forme irréductible.

Définition (Pôles et racines d'une fraction rationnelle)

(1) On appelle *racine* de $F$ toute racine de $P$.

(2) On appelle *pôle* de $F$ toute racine de $Q$.

2.a

Démonstration

Justification de cette définition :

$\square$

Un scalaire ne peut être à la fois racine et pôle d'une fraction rationnelle $F$ (mais il peut être ni l'un ni l'autre).

Si $F = \frac{P_1}{Q_1}$ pour certains polynômes $P_1$ et $Q_1$, alors l'ensemble des racines (resp. des pôles) de $F$ est un sous-ensemble de l'ensemble des racines de $P_1$ (resp. de $Q_1$).

Définition (Ordre de multiplicité d'une racine ou d'un pôle d'une fraction rationnelle)

Si $a$ est une racine (resp. un pôle) de $F$, son *ordre de multiplicité* est celui de $a$ dans $P$ (resp. $Q$).

2.b

Si $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ admet $\alpha$ comme pôle (resp. racine) d'ordre $n$, alors $\overline{\alpha}$ est pôle (resp. racine) d'ordre $n$ de $\overline{F}$.

**Exercice (Pôles et racines d'une fraction rationnelle)** 1

Donner les racines et pôles complexes, avec leur ordre de multiplicité, de

$$F = \frac{(X^6-1)X^3}{(X^4-1)(X^3-1)}$$

**Définition (Fonction rationnelle)** 2.c

Soit $F = \frac{P}{Q}$ mise sous forme irréductible, et soit $A$ l'ensemble des pôles de $F$ (*i.e.* l'ensemble des racines de $Q$). On définit la *fonction rationnelle*, notée encore $F$, de $\mathbb{K} - A$ dans $\mathbb{K}$, par :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{K} - A, F(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$$

Cela étend bien le lien entre polynômes et fonctions polynomiales. Une fonction rationnelle est définie en tout point de $\mathbb{K}$, sauf un nombre fini. Si $F = \frac{P_1}{Q_1}$, sous forme non nécessairement irréductible, et si $Q_1(\alpha) \neq 0$, alors $F(\alpha) = \frac{P_1(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.

**Exercice (Fonction rationnelle)** 2

Donner la fonction rationnelle complexe associée à

$$F = \frac{X^3 - X}{(X^2-X)(X+3)}$$

**Définition (Composée d'une fraction rationnelle par un polynôme)** 2.d

Si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle, et $R$ est un polynôme non constant, alors la fraction rationnelle $\frac{P \circ R}{Q \circ R}$ ne dépend pas du représentant $(P, Q)$ choisi pour $F$. Cette fraction rationnelle est notée $F(R)$, et appelée *composée* de $F$ (à droite) par $R$.

**Démonstration**

□

Le degré de $F(R)$ est $\deg F \deg R$. Cette définition poserait des problèmes si $R$ était constant.

**Définition (Parité et imparité d'une fraction rationnelle)** 2.e

$F \in \mathbb{K}(X)$ est dite *paire* (resp. *impaire*) si $F(-X) = F(X)$ (resp. $F(-X) = -F(X)$).

**Exercice (Parité et imparité d'une fraction rationnelle)** 3

Soit $F$ une fraction rationnelle.

(1) Montrer que $F$ est paire si et seulement si on peut en retrouver un couple constitué de polynômes pairs la représentant.

(2) Montrer que $F$ est impaire si et seulement si on peut en retrouver un couple constitué d'un polynôme pair et d'un polynôme impair, la représentant.

## 3. Étude locale d'une fraction rationnelle

### 3.1. Partie entière d'une fraction rationnelle

**Proposition (Partie entière d'une fraction rationnelle)** 3.a

Soit $F \in \mathbb{K}[X]$. Il existe un unique couple $(P, \varphi) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = P + \varphi \quad \text{et} \quad \deg \varphi < 0$$

**Définition (Partie entière d'une fraction rationnelle)** 3.a

Dans le contexte de la proposition précédente, $P$ est appelé *partie entière* de la fraction rationnelle $F$.

**Démonstration**

$\square$

Retenir la façon dont on a obtenu la partie entière (on remarque d'ailleurs que cette méthode fonctionne même si la fraction rationnelle n'est pas mise sous forme irréductible).

La partie entière d'une fraction rationnelle paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).

**Exemple (Partie entière d'une fraction rationelle)**

(1) Si $\deg F < 0$, alors la partie entière de $F$ est nulle.
(2) Si $\deg F \geqslant 0$, alors le degré de sa partie entière est $\deg F$.
(3) La partie entière de la fraction rationnelle $\frac{X^4-3X^3-X^2+X-1}{X^2-2X+1}$ est :

i

### 3.2. Partie polaire d'une fraction rationnelle relativement à un pôle

**Proposition (Partie polaire d'une fraction rationnelle relativement à un pôle)**

Soit $F$ une fraction rationnelle admettant $\alpha$ pour pôle d'ordre $r \geqslant 1$. Alors il existe un unique $r$-uplet de scalaires $(\lambda_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ et une unique fraction rationnelle $G$ n'admettant pas $\alpha$ pour pôle, tels que :

$$F = \sum_{p=1}^{r} \frac{\lambda_p}{(X-\alpha)^p} + G$$

3.b

**Définition (Partie polaire d'une fraction rationnelle relativement à un pôle)**

Dans le contexte de la proposition précédente, on appelle *partie polaire* de la fraction rationnelle $F$ relativement au pôle $\alpha$ l'expression

$$\sum_{p=1}^{r} \frac{\lambda_p}{(X-\alpha)^p}.$$

3.b

**Démonstration**

□

Les pôles de $G$ sont les pôles de $F$ (sauf $\alpha$), avec mêmes ordres de multiplicité respectifs.
Retenir la manière dont on a obtenu la partie polaire.

**Exemple (Partie polaire)**

(1) Lorsque le pôle est d'ordre 1 (on parle alors de *pôle simple*), on peut multiplier tout par $X-\alpha$ et évaluer en $\alpha$ (voir aussi l'exercice de cours 5 ci-dessous).

(2) Lorsque le pôle est d'ordre 2 (on parle alors de *pôle double*), on peut calculer $\lambda_2$ comme précédemment, et considérer $F-\frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2}$, dont $\alpha$ n'est pas pôle ou pôle simple.

(3) Si l'unique pôle est 0, il est très facile de trouver la partie polaire relative, même si l'ordre de 0 est élevé.

(4) Si l'unique pôle est $\alpha \neq 0$, on peut toujours se ramener au cas précédent par translation de l'indéterminée.

ii

**Exercice (Partie polaire)**

Calculer la partie polaire de $F=\frac{X^5}{(X-1)^4}$.
**Réponse :** $(F=X+4+\frac{10}{X-1}+\frac{10}{(X-1)^2}+\frac{5}{(X-1)^3}+\frac{1}{(X-1)^4})$

4

**Exercice (Cas d'un pôle simple)**

Soit $F=\frac{P}{Q}$ mise sous forme irréductible, $\alpha$ un pôle simple de $F$. Montrer que la partie polaire de $F$ relativement à $\alpha$ est $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)(X-\alpha)}$. Généraliser au cas où $F=\frac{G}{Q}$, où $G\in\mathbb{K}(X)$ n'admet pas $\alpha$ pour racine, et où $\alpha$ est racine simple de $Q$.

5

### 3.3. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Dans ce paragraphe, on suppose $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

**Théorème (Décomposition en éléments simples, cas complexe)**

Soit $F\in\mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, dont les différents pôles sont $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, d'ordres respectifs $r_1,\dots,r_n$.
Il existe un unique polynôme $E\in\mathbb{C}[X]$, et une unique famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant r_i}$ tels que :

$$F=E+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}\right)$$

3.c

**Définition (Décomposition en éléments simples, cas complexe)**

Dans le contexte de ce théorème, on appelle *décomposition en élément simples* (dans $\mathbb{C}(X)$) de la fraction $F$ l'expression :

$$E+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}\right)$$

3.c

Démonstration

$\square$

Toute fraction rationnelle $F$ est donc somme de sa partie entière et des parties polaires de $F$ relativement à ses différents pôles.

### 3.4. Pratique de la décomposition

Le calcul de la partie entière est aisé, on se concentre sur celui des parties polaires.

**Utilisation des développements limités :** C'est la méthode de la démonstration du cours, à utiliser quand aucune astuce n'apparaît.

**Decomposition des fractions à coefficients réels :** Si la fraction rationnelle $F$ à décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ est réelle, alors sa partie entière est réelle, et si $\alpha$ est un pôle non réel de $F$ de partie polaire

$$\sum_{p=1}^{r} \frac{\lambda_p}{(X-\alpha)^p}$$

alors $\overline{\alpha}$ est pôle de $F$ de partie polaire

$$\sum_{p=1}^{r} \frac{\overline{\lambda}_p}{(X-\overline{\alpha})^p}$$

À utiliser pour réduire le nombre de coefficients à calculer.

**Decomposition des fractions paires ou impaires :** On peut aussi utiliser la parité ou l'imparité d'une fraction rationnelle pour trouver des relations simples entre les $\lambda_{i,j}$.

Plus généralement, si on trouve une transformation simple laissant $F$ invariante, cela nous donne une information sur les parties polaires et éventuellement sur la partie entière.

**Les coefficients de plus grand poids :** Si $\alpha_i$ est un pôle d'ordre $r_i$, il ne doit y avoir aucune difficulté à calculer $\lambda_{i,r_i}$ :

**Exploitation des limites de fractions rationnelles :** Voir les nombreux exemples.

**Évaluation :** On peut aussi évaluer en différents points. À utiliser s'il reste peu de coefficients à calculer, pas dès le départ.

Exercice (Décompositions en éléments simples)

Décomposer en élements simples les fractions rationnelles suivantes :

**1** $F = \frac{X^3+X^2-X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

**2** $F = \frac{X^2-4}{(X^2-3)}$.

**3** $F = \frac{1}{X^3(X^2-1)}$.

**Réponse :** $F = -\frac{1}{X^3} - \frac{1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)}$.

**4** $F = \frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.

**Réponse :** $F = X + 1 - \frac{1}{X^2} + \frac{4}{X} - \frac{2}{X-\frac{1}{2}}$.

**5** $F = \frac{2X^5-8X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.

**Réponse :** $F = 2 + \frac{1}{X^3} - \frac{2}{X^2} + \frac{3}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1}$.

6

## 4. Compléments

### 4.1. Dérivée logarithmique

Proposition (Décomposition en éléments simples d'une dérivée logarithmique)

Soit
$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{r_i}$$
un polynôme complexe (avec $\lambda \neq 0$).
La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ (la *dérivée logarithmique* de $P$) est alors :
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{X-\alpha_i}$$

4.a

Démonstration

$\square$

### 4.2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle réelle

Si $F \in \mathbb{R}[X]$, et si $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ est un pôle d'ordre $r$ de $F$, alors la somme des décompositions polaires de $F$ relatives à $\alpha$ et $\overline{\alpha}$ est :
$$\chi = \frac{P_1}{(X-\alpha)^r} + \frac{\bar{P}_1}{(X-\bar{\alpha})^r} = \frac{\pi}{(X^2-sX+p)^r}$$
où $\pi \in \mathbb{R}_{2r-1}[X]$, $s = \alpha + \bar{\alpha}$, $p = \alpha\bar{\alpha}$.

Or $(1, X, (X^2 - sX + p), X(X^2 - sX + p), (X^2 - sX + p)^2, \dots, X(X^2 - sX + p)^{r-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{2r-1}[X]$. Ainsi, on peut écrire :

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i X + \mu_i}{(X^2 - sX + p)^i}$$

ce qui permet de trouver une décomposition (en fait dans $\mathbb{R}[X]$) de $F$, où tous les polynômes sont réels. C'est la *décomposition de $F$ dans $\mathbb{R}[X]$*.

# 5. Feuille de TD 19 : Fractions rationnelles

## 5.1. Décomposition en éléments simples

**Exercice 1 (Décompositions élémentaires en éléments simples)** 0

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle $F$ donnée par :

**1** $\frac{X^5}{(X-1)^4}$.

**2** $\frac{X^3+X^2-X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

**3** $\frac{X^2-4}{X^2-3}$.

**4** $\frac{1}{X^3(X^2-1)}$.

**5** $\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.

**6** $\frac{2X^5-8X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.

**Exercice 2 (Une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$)**

Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F = \frac{2X^8+5X^6-12X^5+30X^4+36X^2+24}{X^4(X^2+2)^3}.$$

**Exercice 3 (Décomposition en éléments simples par développement limité)** 2

Soit $x_1, \ldots, x_n$, $n$ scalaires distincts deux à deux. On pose

$$P(X) = (X-x_1)\ldots(X-x_n) \text{ et } F(X) = \frac{1}{P}$$

Décomposer $F$ et $F^2$ en éléments simples (on exprimera les coefficients en fonction des $P'(x_i)$ et $P''(x_i)$).

**Exercice 4 (Décompositions en éléments simples plus difficiles)** 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ :

**1** *(Mines MP 05)* $\frac{1}{X(X+1)\ldots(X+n)}$.

**2** *(Mines MP 05)* Soit $P$ un polynôme unitaire de degré $n$ et $Q = \prod_{i=0}^{n}(X-i)$.

**i** Décomposer $P/Q$ en éléments simples.

**ii** Montrer que : $\max\{|P(k)|, 0 \leqslant k \leqslant n\} \geqslant n!/2^n$.

**3** $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

**4** $\frac{1}{X^2(X-1)^n}$.

Exercice 5 (Sommes et fractions rationnelles) 0

Calculer :
**1** $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\dots$
**2** $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{9\times11}+\frac{1}{13\times15}+\dots$

Exercice 6 (Reprise d'un exercice sur les polynômes) 2

**1** *(X PC 08)* Soit $P=X^3+2X^2+X+1$. Déterminer le nombre de racines réelles de $P$. On note $x_1,x_2,x_3$ les racines de $P$. Déterminer : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$, $\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}+\frac{1}{x_3-2}$
**2** On note $w_1,\dots,w_{n-1}$ les racines de $X^n-1$ différentes de 1. Calculer : $\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-w_i}$, $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-w_i}$.

Exercice 7 (Fraction rationnelle à coefficients rationnels *(Centrale MP 06)*) 3

Soit $F\in\mathbb{C}(X)$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ non pôle de $F$, $F(n)\in\mathbb{Q}$. Montrer que $F\in\mathbb{Q}(X)$.

Exercice 8 (Sommes classiques et fractions rationnelles) 2

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ à racines simples : $x_1,\dots,x_n$.
**1** *(Centrale MP 05, X MP 07)* Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ à racines simples : $x_1,\dots,x_n$. Calculer : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P'(x_k)}$.
**2** On suppose $P(0)\neq 0$. Montrer : $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iP'(x_i)}=-\frac{1}{P(0)}$.
**3** *(Centrale MP 05)* Calculer : $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{P''}{P'}\right)(x_k)$.
**4** *(Centrale MP 05)* Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\geqslant 2$. On note $x_1,\dots,x_n$ les racines de $P$ comptées avec leurs multiplicités, et on suppose que $x_1$ est une racine simple. On note $y_2,\dots,y_n$ les racines de $P'$ comptées avec leurs multiplicités. Montrer que :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_1-x_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x_1-y_k}.$$

Exercice 9 (Utilisation de la dérivée logarithmique) 1

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P)\geqslant 2$.
**1** *(Centrale MP 06)*
**i** *(Théorème de Gauss-Lucas)* Montrer que les zéros de $P'$ sont dans l'enveloppe convexe des zéros de $P$.
**ii** On suppose que toute racine de $P$ est de partie réelle positive. Montrer qu'il en va de même des racines de $P'$.
**iii** On suppose de plus que $P$ possède des racines non imaginaires pures. Montrer que toute racine imaginaire pure de $P'$ est racine de $P$.
**2** Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que si les racines de $P$ sont réelles et simples, alors le polynôme $Q={P'}^2-PP''$ n'a pas de racines réelles.

CHAPITRE XX

# Espaces affines

## Sommaire



Ici, le corps des scalaires est celui des réels, et $E$ désigne un espace vectoriel.

## 1. Notion d'espace affine : distinguer point et vecteur

Nous avons déjà un cadre algébrique pour parler de géométrie : celui des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Pourtant, comme son nom l'indique, ce cadre est surtout satisfaisant pour parler ... de vecteurs. Nous aimerions également pourvoir parler de points d'un espace. Cela nous conduit à nous pencher sur ce qui distingue vecteurs (formant l'ensemble structuré $E$) et points (formant un ensemble structuré noté $\mathcal{E}$). En réalité, la différence ne tiendra pas tant à la nature de ces objets qu'aux opérations permises sur lesdits objets.

Nous aimerions entre autres pouvoir parler de droites et de plans qui ne passent pas par l'origine. En fait, la notion de point doit être indépendante de l'origine. Quelles opérations peut-on définir si on supprime l'origine ?

Déjà, il nous sera interdit de parler de la somme de deux points, ou de la multiplication d'un point par un scalaire :

Illustration

En revanche, nous pourrons ajouter un vecteur $u$ à un point $M$, obtenant le *translaté* $M + u$ du point $M$ par le vecteur $u$ :

Illustration

Partant, nous pourrons définir la différence $B - A$ de deux points, dont le résultat sera un vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Étant donné l'espace vectoriel $E$, on appelle *espace affine* associé à $E$ et on note $\mathcal{E}$ l'ensemble $E$, muni de l'opération

$$S : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times E & \to & \mathcal{E} \\ (M, u) & \mapsto & M + u \end{array}$$

On a donc, pour tout $(M, u, v) \in \mathcal{E} \times E \times E$ :

$$M + (u + v) = (M + u) + v.$$

De plus, $M \mapsto M + u$ est une permutation de $\mathcal{E}$, appelée *translation selon le vecteur $u$*, notée $t_u$, de bijection réciproque $t_{-u}$.

Ainsi,

$$T : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{S}_{\mathcal{E}} \\ u & \mapsto & t_u \end{array}$$

est un morphisme[1] de $(E, +)$ sur $(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}, \circ)$, tel que pour tout $(M, N) \in \mathcal{E}^2$, il existe un unique $u \in E$ tel que $N = M + u$. Ce vecteur $u$ est noté $N - M$, ou $\overrightarrow{MN}$.

Pour tout $M_0 \in \mathcal{E}$, l'application

$$I_{M_0} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & E \\ M & \mapsto & M - M_0 \end{array}$$

est une bijection, qui permet d'identifier $\mathcal{E}$ et $E$ par le choix de l'origine $M_0$.

En pratique, nous identifierons $\mathcal{E}$ et $E$ par choix de l'origine $0_E$ (sauf mention contraire).

Pour toute partie $\Omega$ de $\mathcal{E}$, et $u \in E$, on note $\Omega + u$ l'image de $\Omega$ par $t_u$, *i.e.*

$$\Omega + u = \{\omega + u,\ \omega \in \Omega\}$$

Pour toute partie $G$ de $E$, et tout $M \in \mathcal{E}$, on note $M + G$ l'ensemble

$$M + G = \{M + g,\ g \in G\}.$$

Nous pouvons également définir le barycentre d'une famille pondérée (finie) de points de $\mathcal{E}$, de poids total non nul (ce qui a été fait dans chapitre de géométrie plane se généralise aisément). On définit donc également les notions de segment, de convexité, d'enveloppe convexe, etc.

## 2. Sous-espaces affines

**Définition (Sous-espace affine)**

On appelle *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ toute partie de $\mathcal{E}$ de la forme $M_0 + F$, où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, et $M_0 \in \mathcal{E}$.
$M_0 + F$ est appelé *sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par $M_0$ et dirigé par $F$*.

2.a

1. En particulier, l'ensemble des translations de selon un vecteur de $E$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.

Exemple (Sous-espace affine)

(1) L'ensemble vide n'est pas un sous-espace affine.
(2) Tout singleton est un sous-espace affine, dirigé par $\{0_E\}$.
(3) $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de lui-même.
(4) En prenant $M_0 = 0_E$, tout sous-espace vectoriel de $E$ peut être vu comme un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ (ses éléments sont des vecteurs ou des points, selon le point de vue).
(5) Les sous-espaces affines du plan sont les singletons, les droites, le plan.
(6) L'ensemble des solutions de $y' - y = x - 1$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

i

Proposition (Description d'un sous-espace affine)

Pour tout point $M$ du sous-espace affine $\mathcal{F}$ dirigé par $F$, on a

$$\mathcal{F} = M + F$$

et

$$F = \{N - M, N \in \mathcal{F}\} = \{\overrightarrow{MN}, N \in \mathcal{F}\}$$

2.a

Démonstration

□

Définition (Direction d'un sous-espace affine)

La *direction* de l'espace affine $\mathcal{F} = M_0 + F$ est le sous-espace vectoriel $F$ de $E$.

2.b

Cette définition est licite (*i.e.* existe, est unique, et ne dépend pas de $M_0 \in \mathcal{F}$) d'après la proposition précédente.

Le choix d'une origine $M_0 \in \mathcal{F}$ fournit une bijection entre $\mathcal{F}$ et $F$, ce qui permet d'identifier points et vecteurs. Cependant, cette identification n'est pas systématique.

Définition (Droites et plans affines)

La *dimension* d'un sous-espace affine est la dimension de sa direction. On appelle *droite affine* (resp. *plan affine*, resp. *hyperplan affine*) de $\mathcal{E}$ tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dont la direction est une droite vectorielle (resp. un plan, resp. un hyperplan). Tout vecteur engendrant la direction d'une droite affine $\mathcal{D}$ est appelé *vecteur directeur* de $\mathcal{D}$.

2.c

**Définition (Parallélisme de sous-espaces affines)**

Soit $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$, de directions respectives $W$ et $W'$. On dit que $\mathcal{W}$ est *parallèle* à $\mathcal{W}'$ si $W \subset W'$. On dit que $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ sont *parallèles* si $W = W'$.

2.d

**Illustration**

Deux sous-espaces affines sont donc parallèles si et seulement si chacun est parallèle à l'autre. Cela définit une relation d'équivalence.

En revanche, la relation « être parallèle à » est réflexive et transitive, mais non symétrique : ce n'est pas une relation d'équivalence.

**Exemple (Parallélisme)**

(1) Un sous-espace affine réduit à un point est parallèle à tout autre sous-espace affine.
(2) Deux droites affines sont parallèles si et seulement si elles admettent un vecteur directeur commun.
(3) Un plan n'est jamais parallèle à une droite.
(4) Deux sous-espaces parallèles sont soit disjoints, soit égaux.
(5) L'intersection de deux sous-espaces affines non parallèles l'un à l'autre peut être vide.

ii

**Proposition (Intersection de sous-espaces affines)**

L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ de $\mathcal{E}$ de directions respectives $W$ et $W'$, *si elle n'est pas vide*, est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction $W \cap W'$.

2.b

Démonstration

$\square$

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire)

Soit $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$, et $b \in F$. L'ensemble $\Omega$ des solutions de l'équation linéaire $u(x) = b$, *s'il n'est pas vide*, est un sous-espace affine de $E$.

2.c

Démonstration

$\square$

En particulier, si cette équation admet au moins deux solutions, alors elle en admet une infinité.

Si $b \neq 0_F$, $\Omega$ n'est en aucun cas un sous-espace vectoriel de $E$.

La solution générale de l'équation $u(x) = b$, s'écrit donc : solution particulière + solution générale de l'équation homogène associée.

On retrouve dans un cadre plus général la démarche de résolution des équations différentielles linéaires vues en début d'année.

## 3. Applications affines

On considère deux espaces vectoriels $E$ et $F$, et les sous-espaces affines associés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

### 3.1. Définition et exemples

Définition (Application affine)

Une application $f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est dite *affine* s'il existe une application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$$

L'application linéaire $\varphi$ est alors unique, appelée *application linéaire associée* à (ou *partie linéaire* de) $f$, et notée $\tilde{f}$ ou $\vec{f}$.

3.a

Autrement dit, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine si et seulement si il existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $(M, u) \in \mathcal{E} \times E$ :

$$f(M + u) = f(M) + \tilde{f}(u).$$

**Définition (Transformation affine)** 3.b

On appelle *transformation affine* de $\mathcal{E}$ toute application affine bijective de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

**Exemple (Applications affines)** i

(1) Toute application linéaire est affine et est sa propre partie linéaire.

(2) Toute application constante est affine, de partie linéaire nulle.

(3) Toute translation est une transformation affine, et sa partie linéaire est l'identité.

(4) L'application $(x, y) \mapsto (3x + y + 2, 5x - 2y + 1, x + y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est affine de partie linéaire $(x, y) \mapsto (3x + y, 5x - 2y, x + y)$.

Une application affine $f$ (de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$) est entièrement déterminée par sa partie linéaire $\tilde{f}$ et l'image d'un point donné $\Omega$ (puisque pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) = f(\Omega) + \tilde{f}(\overrightarrow{\Omega M})$) : ainsi, pour prouver que deux applications affines (ayant même source et même but) sont égales, on pourra montrer qu'elle coïncident en un point et qu'elles ont même partie linéaire.

Une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une transformation affine si et seulement si sa partie linéaire est un automorphisme de $E$.

**Définition (Homothétie affine)** 3.c

Une application $h$ de $\mathcal{E}$ dans lui-même est une *homothétie (affine)* s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $M \in \mathcal{E}$ :

$$h(M) = \Omega + \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}$$

Le réel $\lambda$ est défini de manière unique (sauf dans le cas sans intérêt où $E$ est de dimension nulle), et est appelé *rapport* de $h$.

(1) Si $\lambda = 1$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, et $\Omega$ peut être choisi quelconque.

(2) Si $\lambda \neq 1$, alors $\Omega$ est unique, et est appelé le *centre* de l'homothétie $h$.

Toute homothétie affine est une application affine, de partie linéaire l'homothétie vectorielle de même rapport.

Une application affine de partie linéaire une homothétie vectorielle n'est pas toujours une homothétie affine :

Cependant, si la partie linéaire d'une application affine est une homothétie de rapport différent de 1, alors c'est une homothétie affine :

Toute homothétie affine de $\mathcal{E}$, de rapport non nul, est une transformation affine.

**Exercice (Sous-espaces affines supplémentaires)** 1

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$, de directions respectives $F$ et $G$, supplémentaires dans $E$ (on dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des *sous-espaces affines supplémentaires*). Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.

**Définition (Projecteurs et symétries affines)**

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines supplémentaires de directions respectives $F$ et $G$. Soit $\Omega$ un point de $\mathcal{F}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, soit $u_F$ et $u_G$ les vecteurs de $F$ et $G$ tels que $M = \Omega + u_F + u_G$. On pose

$$p(M) = \Omega + u_F \quad \text{et} \quad s(M) = \Omega + u_F - u_G.$$

On définit ainsi des applications affines $p$ et $s$, respectivement appelées *projecteur affine* sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ (ou à $G$) et *symétrie affine* par rapport à $\mathcal{F}$, parallèlement à $\mathcal{G}$ (ou à $G$).

3.d

**Illustration**

**Démonstration**

□

### 3.2. Propriétés

**Proposition (Description des applications affines)**

Une application est affine si et seulement si elle est somme d'une application constante et d'une application linéaire.

3.a

Autrement dit, une application de $E$ dans $F$ est affine si et seulement si elle s'écrit $t \circ \varphi$, où $t$ est une translation dans $F$, et $\varphi$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

**Proposition (Propriétés des applications affines)**

Soit $f\ :\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ une application affine.

(1) Pour tout sous-espace affine $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$, $f(\mathcal{E}')$ est un sous-espace affine, de direction $\tilde{f}(E')$.

(2) Pour tout sous-espace affine $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$, $f^{-1}(\mathcal{F}')$, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\tilde{f}^{-1}(F')$.

(3) $f$ conserve l'alignement et le parallélisme.

(4) $f$ conserve les barycentres.

(5) La composée licite $g\circ f$ d'applications affines est une application affine, de partie linéaire $\tilde{g}\circ\tilde{f}$.

3.b

**Démonstration**

□

L'ensemble des transformations affines de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ :

L'ensemble constitué des homothéties affines de rapport non nul et des translations dans $\mathcal{E}$ est un groupe, appelé groupe des *homothéties-translations* de $\mathcal{E}$ (observez le léger abus).

## 4. Espaces affines euclidiens

Ici, $E$ désigne un espace euclidien (et affine) orienté de dimension $n\geqslant 1$. En particulier, $E$ est muni d'une norme, et même d'une distance.

### 4.1. Isométries

**Définition (Isométrie)**

Une application $f$ de $\mathcal{E}$ dans lui-même est appelée *isométrie* si elle conserve la distance, *i.e.* :

$$\forall\, M,N\in\mathcal{E},\quad d(f(M),f(N))=d(M,N)$$

4.a

Exemple (Isométries)

(1) Toute translation est une isométrie, tout automorphisme orthogonal de $E$ est une isométrie.
(2) Toute composée d'isométries est une isométrie.
(3) Une homothétie affine est une isométrie si et seulement si elle admet 1 ou $-1$ pour rapport, *i.e.* est l'identité ou une symétrie centrale.

i

Une isométrie est nécessairement injective :

Proposition (Caractérisation des isométries)

Soit $f$ une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) $f$ est une isométrie.
(2) $f$ est affine, de partie linéaire un automorphisme orthogonal de $E$.

4.a

Démonstration

$\square$

Proposition (Groupe des isométries)

L'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe du groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$.

4.b

Démonstration

□

Définition (Déplacement, antidéplacement)

On appelle *déplacement* de $\mathcal{E}$ toute isométrie de $\mathcal{E}$ dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal positif (*i.e.* une rotation vectorielle). Les autres isométries de $\mathcal{E}$ sont parfois appelées *antidéplacements*.

4.b

L'ensemble des déplacements de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de l'ensemble des isométries de $E$.

Définition (Rotation affine)

On appelle *rotation affine* de $\mathcal{E}$ tout déplacement de $\mathcal{E}$ admettant un point fixe.

4.c

### 4.2. Réflexions

Définition (Projecteurs et symétries affines orthogonaux)

Un projecteur ou une symétrie affine est dit(e) orthogonal(e) si sa partie linéaire est un projecteur ou symétrie orthogonal(e).

4.d

Définition (Réflexion affine)

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ (dirigé par $H$). On appelle *réflexion* affine par rapport à $\mathcal{H}$ la symétrie affine orthogonale par rapport à $\mathcal{H}$.

4.e

Illustration

La partie linéaire d'une réflexion affine est une réflexion vectorielle, mais la réciproque est fausse :

**Exercice (Hyperplan médiateur)**

Étant donnés deux points distincts $A$ et $B$ de $\mathcal{E}$, il existe une réflexion affine et une seule échangeant $A$ et $B$.
L'hyperplan affine de cette réflexion est appelé *hyperplan médiateur* de $[AB]$, et est constitué des points à égale distance de $A$ et de $B$. En dimension 2, on retrouve simplement la médiatrice du segment $[AB]$.

2

### 4.3. Isométries du plan affine euclidien

**Définition (Rotation affine du plan)**

Une *rotation (affine)* de $\mathcal{E}$ est une application $f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle qu'il existe $\Omega \in E$ et $r \in \mathrm{SO}(E)$, vérifiant :

$$\forall M \in E, \quad f(M) = \Omega + r(\overrightarrow{\Omega M})$$

(1) Si $r = \mathrm{Id}_E$, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

(2) Si $r \neq \mathrm{Id}_E$, de mesure d'angle $\alpha$, alors $\Omega$ est unique, et on dit que $f$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle de mesure $\alpha$.

4.f

**Proposition (Description des déplacements du plan)**

Tout déplacement du plan est soit une rotation, soit une translation.

4.c

**Démonstration**

Montrer que si la partie linéaire n'est pas l'identité, alors le déplacement admet un (unique) point fixe.

□

Tout déplacement du plan est la composée de deux réflexions.

**Illustration**

Toute isométrie du plan est composée de réflexions.

### 4.4. Similitudes du plan

**Définition (Similitude)** 4.g

On appelle *similitude* de $\mathcal{E}$ toute application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui multiplie les distances par un réel strictement positif donné, ce réel étant appelé *rapport* de la similitude (ce rapport est unique si $E \neq \{0_E\}$).

**Exemple (Similitudes)** ii

(1) Les homothéties de rapport non nul et les isométries sont des similitudes.
(2) La composée de deux similitudes en est une.

Toute similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie, et est en particulier affine :

Une similitude est dite *directe* (resp. *indirecte*) si le déterminant de son application linéaire associée est strictement positif (resp. strictement négatif).

Une similitude de rapport $\lambda$ change une surface de $\mathcal{E}$ d'aire $A$ en une surface d'aire $\lambda^2 A$ (Ne pas s'étendre sur le sens de cette phrase).

Les similitudes directes conservent les angles orientés, les similitudes indirectes les changent en leurs opposés.

Écriture complexe d'une similitude directe.

Pour calculer une mesure de l'angle et le rapport d'une similitude directe distincte d'une translation, on peut utiliser l'écriture complexe.

Étant donnés deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ de longueur non nulle, il existe une similitude directe et une seule transformant $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$ (tous les éléments caractéristiques de cette similitude se trouvent avec les nombres complexes).

### 4.5. Isométries de l'espace affine euclidien

Ici, $E$ est un espace euclidien (et affine) orienté de dimension 3.

**Définition (Rotation affine dans l'espace)** 4.h

On appelle *rotation (affine) de $\mathcal{E}$ d'axe $\mathcal{D}$* une droite affine de $\mathcal{E}$ tout déplacement $\rho$ de $\mathcal{E}$, différent de l'identité, et laissant chaque point de $\mathcal{D}$ invariant. Soit $\Delta$ la direction de $\mathcal{D}$. Soit $a$ un vecteur directeur de $\Delta$, et $\alpha$ une mesure de l'angle de $\tilde{\rho}$ (d'axe orienté par $a$). $\rho$ est appelée appelée rotation d'*axe* $\mathcal{D}$ orienté par $a$ et de *mesure d'angle* $\alpha$.

Illustration

Expression de la rotation : $\forall\, M \in E, \quad \rho(M) = p(M) + r(\overrightarrow{p(M)M})$, où $p(M)$ est le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{D}$.

**Exemple (Rotation affine de l'espace)** iii

Demi-tour d'axe $\mathcal{D}$.

**Proposition (Rotation affine de l'espace)** 4.d

Toute rotation affine de $\mathcal{E}$ distincte de l'identité est une rotation affine par rapport à un axe.

Démonstration

$\square$

**Définition (Vissage)** 4.i

On appelle *vissage* dans $\mathcal{E}$ toute composée $t \circ \rho = \rho \circ t$, où $\rho$ est une rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté $a$ d'angle de mesure $\alpha$ non nul modulo $2\pi$, et $t$ est une translation de vecteur $u$ non nul colinéaire à $a$. Un tel vissage est appelé vissage d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $a$, d'angle de mesure $\alpha$ et de vecteur $u$.

Illustration

Pour certains auteurs, les rotations et les translations sont des vissages.

**Lemme sur les rotations affines de l'espace**

Si on compose une rotation affine d'axe $\mathcal{D}$ avec une translation de vecteur $u$ orthogonal à l'axe $\mathcal{D}$, alors le déplacement obtenu est une rotation affine d'axe parallèle à $\mathcal{D}$.

4.e

Démonstration

□

**Proposition (Description des déplacements de l'espace)**

Tout déplacement de l'espace est soit une translation, soit une rotation, soit un vissage.

4.f

Démonstration

□

Pour déterminer les éléments caractéristiques d'un vissage $v$, on étudie d'abord sa partie linéaire, puis on détermine le vecteur comme projeté orthogonal de $\overrightarrow{Mv(M)}$ (où $M$ désigne un point quelconque de l'espace). Une fois ce vecteur connu, on détermine aisément l'axe du vissage.

## 5. Feuille de TD 20 : Espaces affines

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine. On munit parfois l'espace affine dont il est question d'une structure euclidienne orientée, canonique dans le cas de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

### 5.1. Sous-espaces affines

**Exercice 1 (Exemples de sous-espaces affines)** — 0

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines :

**1** $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + t = 2 \wedge x - y - 2z + t = 1\}$.

**2** $\{P \in \mathbb{R}[X], X^2P'' - 3XP' + 4P = 4 - X\}$.

**3** $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f'' + f' + f = e^x\}$.

**Exercice 2 (Caractérisation des sous-espaces affines)** — 2

**1** Montrer qu'une partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ en est un sous-espace affine si et seulement si il contient la droite passant par deux quelconques de ses points.

**2** Montrer qu'une partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ en est un sous-espace affine si et seulement si il comprend tout barycentre d'une famille pondérée (de poids total non nul) de ses points.

**Exercice 3 (Application affine laissant la sphère unité invariante (X MP 07))** — 3

Soit $E$ un espace affine euclidien et $f : E \to E$ une application affine telle que $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est la sphère centrée en $0_E$ de rayon 1. Montrer que $f$ est une isométrie de $E$ fixant $0_E$.

### 5.2. Applications affines

**Exercice 4 (Exemples d'applications affines)** — 0

**1** Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + y + 3z + 2, x - y - z - 3) \end{array}$$

est affine, et donner sa partie linéaire.

**2** Montrer que l'application

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1([-1, 1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & 2\int_{-1}^{1}(f(t) - t^2 + 1)\mathrm{d}t + f'(0) + 3 \end{array}$$

est affine, et donner sa partie linéaire.

**Exercice 5 (Conjugaison d'une homothétie affine)** — 0

Soit $h$ une homothétie affine de $\mathcal{E}$, de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$. Soit $f$ une transformation affine de $\mathcal{E}$. Décrire $f \circ h \circ f^{-1}$.

Exercice 6 (Projecteurs affines) 2

**1** Donner un exemple d'application affine dont la partie linéaire est un projecteur non trivial, mais qui n'est pas un projecteur affine.

**2** Montrer qu'une application affine $f$ de $\mathcal{E}$ dans lui-même est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

**3** Donner et prouver des énoncés analogues pour les symétries affines.

Exercice 7 (Point fixe et transformations affines) 2

**1** Soit $G$ un sous-groupe fini du groupe affine de $\mathcal{E}$. Montrer l'existence d'un point fixé par tout élément de $G$.

**2** Soit $f$ une transformation affine de $\mathcal{E}$ telle que $f^p = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f$ admet un point fixe.

Exercice 8 (Application affine laissant un point et son image à distance fixe) 3

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine telle que $d(M, f(M)) = d(N, f(N))$ pour tous points $M$ et $N$ de $\mathcal{E}$ (muni d'une structure euclidienne). Montrer que $f$ est une translation.

### 5.3. Espaces affines de petite dimension

Exercice 9 (Isométrie du plan échangeant deux points distincts) 0

Montrer que toute isométrie du plan qui échange deux points distincts est une symétrie affine orthogonale.

Exercice 10 (Expression analytique d'une application affine) 0

Donner l'expression analytique

**1** de la symétrie affine par rapport au plan d'équation $x + 2y + z = 1$, de direction $\mathbb{R}(1, 1, 1)$.

**2** du projecteur affine par rapport au plan d'équation $x + 2y + 3z = 1$ parallèlement à $\mathbb{R}(1, 0, 2)$.

**3** du projecteur affine orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 3z = 4$.

**4** de la symétrie affine orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y - z = 4$.

**5** du projecteur affine orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$.

**6** de la rotation de centre $\Omega(2, 1)$ d'angle de mesure $2\pi/3$.

Exercice 11 (Isométrie du plan donnée par son expression analytique) 0

Décrire géométriquement l'application donnée analytiquement par

**1** $(x, y) \mapsto \frac{1}{5}(3x - 4y + 20, 4x + 3y - 10)$.

**2** $(x, y) \mapsto (-y + 1, -x + 2)$.

Exercice 12 (Expression analytique d'isométries de l'espace) 0

**1** Donner l'expression analytique du vissage de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et passant par $A(1, 2, 3)$, de vecteur $\vec{u}$, d'angle de mesure $\pi/3$.

**2** Donner l'expression analytique de la rotation affine de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\vec{u} = (1, 0, 2)$ passant par $A(-1, 2, -1)$, d'angle de mesure $\pi/4$.

Exercice 13 (Applications affines définies analytiquement) 0

Décrire géométriquement les applications d'expressions analytiques

**1** $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{2}\left(x - y\sqrt{2} + z + 2, x\sqrt{2} - z\sqrt{2} - 2\sqrt{2}, x + y\sqrt{2} + z - 2\right)$.

**2** $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x - y + 2z, 2x + 2y - z, -x + 2y + 2z + 3)$.

**3** $(x, y, z) \mapsto (3x + 4y + 2z - 4, -2x - 3y - 2z + 4, 4x + 8y + 5z - 8)$.

**4** $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{7}(2x + 3y + 6z - 1, 3x - 6y + 2z + 9, 6x + 2y - 3z + 4)$.

Exercice 14 (Groupe des isométries du plan conservant une figure) 2

**1** Déterminer le groupe des isométries du plan laissant globalement invariant un carré, un rectangle non carré, un cercle, un polygone régulier à $n$ côtés.

**2** Soit $G$ le groupe des isométries du plan laissant globalement invariant une partie $\Delta$ du plan. On suppose ce groupe fini. Montrer que $G$ ne contient que des déplacements, ou contient autant de déplacements que d'antidéplacements.

Exercice 15 (Sous-groupes finis du groupe des déplacements du plan) 4

Montrer que tout sous-groupe fini du groupe des déplacements du plan est cyclique (*i.e.* engendré par un de ses éléments).

# Quatrième partie

# Analyse et géométrie différentielle

CHAPITRE XXI

# Nombres réels, suites numériques

## Sommaire



Le corps des nombres réels comble certaines « insuffisances » du corps des nombres rationnels. Par exemple, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{Q}, |x| \leqslant \sqrt{2}\}$$

est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$, mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Cet ensemble en admet une dans $\mathbb{R}$.

Les suites constituent une fausse retrouvaille : le cours est beaucoup plus approfondi qu'en Terminale, et il s'agit du premier vrai cours d'analyse de l'année. Il faudra notamment vous méfier de votre intuition !

## 1. Le corps des nombres réels

### 1.1. Structures algébriques sur le corps des réels

La construction de $\mathbb{R}$ est hors-programme. Recensons quelques-unes de ses propriétés, plus ou moins connues. Tout d'abord, $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un surcorps de $\mathbb{Q}$ : on peut donc y effectuer des calculs comme nous en avons l'habitude.

Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ est également muni d'une relation d'ordre total (prolongeant celle de $\mathbb{Q}$), compatible avec l'addition et la multiplication (par un réel positif) :

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, ((x \leqslant y) \Rightarrow (x + z \leqslant y + z)) \wedge ((x \leqslant y \wedge 0 \leqslant z) \Rightarrow (xz \leqslant yz))$$

On dit alors que $\mathbb{R}$ est un *corps totalement ordonné.*

$\mathbb{R}$ est aussi muni de la fonction valeur absolue ($x \mapsto \max\{x, -x\}$), prolongeant celle de $\mathbb{Q}$, et vérifiant :

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (axiome de séparation) ;

(2) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad |xy| = |x||y|$ (homogénéité) ;

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$ (seconde et première inégalités triangulaires[1]).

Cette fonction valeur absolue permet de définir la *distance* de deux nombres réels $x$ et $y$ par $d(x, y) = |x - y|$. L'application $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ vérifie, pour tous réels $x$, $y$ et $z$ :

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiome de séparation) ;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;

(3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

### 1.2. La propriété de la borne supérieure

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $A$ est *majorée* (dans $\mathbb{R}$) s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $a \leqslant c$ .

Supposons $A$ majorée, et soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $b$ est la borne supérieure de $A$ (dans $\mathbb{R}$) si $b$ est le plus petit des majorants de $A$, *i.e.* $b$ majore $A$ et pour tout réel $c$ majorant $A$, on a : $b \leqslant c$. L'ordre sur $\mathbb{R}$ étant total, cela revient à écrire :

$$(\forall a \in A, a \leqslant b) \wedge \left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A, b - \varepsilon < a\right)$$

$\mathbb{R}$ se distingue de $\mathbb{Q}$ par la propriété fondamentale suivante :

**Fait (Propriété fondamentale du corps des réels)**

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

**Corollaire (Propriété de la borne inférieure)**

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure. 1.a

**Démonstration**

Soit $A$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, mettons par $a$. L'ensemble $-A$ est non vide et majoré (par $-a$), donc admet une borne supérieure $b$. On vérifie aisément que $-b$ est un minorant de $A$, et que pour tout réel $\varepsilon$ strictement positif, $-b + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $A$ : $A$ admet $-b$ pour borne inférieure dans $\mathbb{R}$. □

**Proposition (Le corps des réels est archimédien)**

$\mathbb{R}$ est *archimédien* : soit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un entier naturel $n$ tel que : $na > x$. 1.b

**Démonstration**

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il n'existe pas de tel entier $n$. L'ensemble $A = \{na, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide, majoré par $x$, et admet donc une borne supérieure $b$. Comme $b$ est un majorant de $A$, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$na \leqslant b$$

En particulier, pour tout entier naturel $n$,

$$(n + 1)a \leqslant b$$

$b - a$ est donc un majorant de $A$, ce qui est absurde. □

1. La seconde se déduit de la première.

**Corollaire (Puissances d'un nombre supérieur à un)**

Étant donnés deux réels $a$ et $x$, avec $a > 1$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n > x$.

1.c

**Démonstration**

Écrivons $a = 1 + h$ ($h > 0$). D'après la formule du binôme de Newton [a], on a, pour tout entier naturel $n$ :

$$(1+h)^n \geqslant nh$$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier $n$ tel que $nh > x$, d'où le résultat.

a. Ou par récurrence, entraînez-vous à le montrer ainsi.

□

**Exercice (Borne supérieure)**

Faire l'exercice 6 de TD.

1

### 1.3. La droite numérique achevée. Intervalles

En vue d'unifier et simplifier certains résultats, sur les suites notamment [2], on introduit la droite numérique achevée.

**Définition (Droite numérique achevée)**

On introduit deux symboles $+\infty$ et $-\infty$. On appelle *droite numérique achevée* l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

On prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x \leqslant +\infty \quad \text{et} \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leqslant x$$

1.a

Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée (resp. minorée), on pose $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$) [3].

On prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations d'addition et de multiplication sur $\mathbb{R}$, comme on s'y attend. Par exemple, $3 + (+\infty) = +\infty$, $-2(-\infty) = +\infty$, ou $(-\infty)(-\infty) = +\infty$. On a cependant aussi des formes indéterminées, comme $-\infty + (+\infty)$, $0(+\infty)$, $0(-\infty)$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a \leqslant b$.

**Définition (Intervalle)**

On définit comme attendu les intervalles $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, b]$. Par exemple :

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\}.$$

On définit aussi $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, et $]-\infty, +\infty[$. Les intervalles $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ et $]-\infty, +\infty[$ sont dits *ouverts*. Les intervalles $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ sont dits *fermés*.

1.b

Nous donnerons une définition plus générale et satisfaisante des notions d'ouverts et fermés lors du cours sur les fonctions (voir aussi l'exercice 5 de TD). Observons ici que $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont les seuls intervalles ouverts et fermés, et que des intervalles sont ni ouverts ni fermés, comme $[0, 1[$ par exemple.

La *longueur* d'un intervalle $I$ (non vide) est $\sup(I) - \inf(I)$.

2. Par exemple : toute suite croissante converge vers sa borne supérieure.
3. On a simplement pris les bornes dans $\overline{\mathbb{R}}$. En fait, toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Définition (Segment)

Un *segment* est un intervalle du type $[a, b]$.

1.c

Un intervalle est un segment si et seulement si il est fermé, borné, et non vide.

Définition (Partie réelle convexe)

Une partie $X$ de $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si elle contient le segment joignant deux quelconques de ses points.

1.d

Proposition (Intervalles et convexes)

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$.

1.d

Démonstration

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe : le montrer pour $[a, b[$.

Réciproquement, soit $I$ un convexe de $\mathbb{R}$. Si $I$ est de cardinal 0 ou 1, c'est un intervalle : supposons que $I$ comprenne au moins deux éléments. Si $I$ est borné, soit $a = \inf I$ et $b = \sup I$. On a $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. On va montrer que $]a, b[\subset I$. Soit $c \in ]a, b[$ : par définition de $a$ et de $b$, il existe deux éléments $x$ et $y$ de $I$ tels que $x < c < y$. Par convexité de $I$, $c \in [x, y] \subset I$. On a donc $]a, b[\subset I \subset [a, b]$ : dans les quatre cas possibles, $I$ est bien un intervalle.
Si par exemple $I$ est minoré et non majoré, soit $a = \inf I$. On montre que $]a, +\infty[\subset I$. Soit $c \in ]a, +\infty[$ : il existe deux éléments $x$ et $y$ de $I$ tels que $x < c < y$. Par convexité de $I$, $c \in I$. Dès lors, $I$ vaut $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$ : dans tous les cas, c'est un intervalle. De même dans les autres cas.

$\square$

### 1.4. Valeurs approchées, densité des rationnels

Proposition (Partie entière)

Étant donnés $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif $n$ tel que $na \leqslant x < (n + 1)a$.

1.e

**Démonstration**

Existence : comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on peut trouver un entier $k$ tel que $x < ka$. L'ensemble $\Omega = \{k' \in \mathbb{Z}, k'a \leqslant x\}$ est donc majoré par $k$, et le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ montre encore qu'il est non vide. Son plus grand élément $n$ est tel que $na \leqslant x < (n+1)a$.
Unicité :

□

On définit la *relation de congruence modulo* $a$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \equiv y\,[a]) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}, \quad y = x + na).$$

D'après la proposition précédente, pour tout réel $x$, il existe un unique $y \in [0, a[$ tel que $x \equiv y[a]$.

**Définition (Partie entière)** 1.e

Si $x$ est un réel, l'unique entier relatif $n$ vérifiant $n \leqslant x < n+1$ s'appelle la *partie entière* de $x$, et se note $E(x), [x]$, ou $\lfloor x \rfloor$.

C'est la fonction `floor` de Maple.

**Définition (Approximations décimales)** 1.f

Soit $x$ un réel, et $n$ un entier naturel. Il existe un unique entier relatif $m_n$ tel que

$$m_n 10^{-n} \leqslant x < (m_n + 1)10^{-n}$$

Le réel $\alpha_n = m_n 10^{-n}$ (resp. $\beta_n = (m_n + 1)10^{-n}$) est appelé *approximation décimale* de $x$ à $10^{-n}$ près par *défaut* (resp. par *excès*).

La fonction $n \mapsto \alpha_n$ (resp. $n \mapsto \beta_n$) est croissante (resp. décroissante) :

Nous verrons plus tard que ces deux suites sont adjacentes, et que leur limite commune est $x$.

**Définition (Partie dense de réels)** 1.g

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit $A$ *dense* dans $\mathbb{R}$ si $A$ rencontre tout intervalle de longueur non nulle.

$A$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, où $a < b$, $A \cap ]a,b[ \neq \emptyset$, ou encore : entre deux réels quelconques, on peut trouver un élément de $A$.

Illustration

**Proposition** (Densité des rationnels dans les réels)

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1.f

**Démonstration**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$.
Soit $n$ un entier naturel tel que $10^{-n} < b - a$, et $m_n$ l'entier tel que :

$$m_n 10^{-n} \leqslant a < (m_n + 1)10^{-n}$$

On a $a < (m_n + 1)10^{-n} \leqslant a + 10^{-n} < b$.

□

**Proposition** (Densité des irrationnels dans les réels)

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

1.g

**Démonstration**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$. Il existe un nombre rationnel $r$ dans l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$. Le nombre irrationnel $r + \sqrt{2}$ appartient à $]a, b[$.

□

**Exercice** (Sous-groupes additifs réels)

Faire l'exercice 3 de TD.

2

## 2. Suites de nombres réels : premières définitions

**Définition** (Suite de nombres réels)

On appelle *suite de nombres réels* toute famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$. Leur ensemble est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite sera le plus souvent notée sous forme indicée, *i.e.* on écrira $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
$u_n$ est appelé le *terme* de *rang* (ou d'*indice*) $n$ de $u$, ou *terme général*.
$u_0$ est appelé *terme initial*.

2.a

**Définition (Suite stationnaire)** 2.b

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est dit *constante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n.$$

La suite $u$ est dite *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, *i.e.*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Notre étude portant principalement sur le comportement à l'infini, nous ne faisons pas de grande différence entre une suite constante et une suite stationnaire. Plus généralement, il faut bien comprendre que le comportement à l'infini d'une suite n'a aucun lien avec son comportement en un nombre fini d'indices fixés. En particulier, le comportement à l'infini d'une suite n'est pas modifié si on en change ou même supprime un nombre fini de termes.

**Définition (Opérations sur les suites)** 2.c

Si $u$ et $v$ sont deux suites de nombres réels, la *somme* $u+v$ de ces suites est la suite de terme général $u_n+v_n$. On définit ainsi une loi de composition interne d'addition sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la suite $\lambda u$, suite dont le terme général est $\lambda u_n$. Cela définit une loi de multiplication scalaire $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors $\lambda u + \mu v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *i.e.* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stable par combinaison linéaire.

**Théorème (Structure d'espace vectoriel sur les suites)** 2.a

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, muni de la loi de composition interne d'addition et de la loi externe de multiplication scalaire est un espace vectoriel réel : pour toutes suites réelles $u$ et $v$, tous réels $\lambda$ et $\mu$, on a :

(1) $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ est un groupe commutatif ;

(2) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ ;

(3) $1.u = u$ ;

(4) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$ ;

(5) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

**Définition (Produit de suites)** 2.d

Soit $u$ et $v$ deux suites réelles. Le *produit* $uv$ de $u$ et de $v$ est la suite réelle de terme général $u_n v_n$.

**Proposition (Structure d'anneau sur les suites)** 2.b

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

En outre, pour tout réel $\lambda$, toutes suites réelles $u$ et $v$, on a :

$$(\lambda u)v = \lambda(uv).$$

On dit alors que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{R}$-*algèbre* (c'est une sorte de super-structure combinant espaces vectoriels et anneaux).

**Définition (Ordre sur les suites)** 2.e

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On écrit $u \leqslant v$ lorsque $u_n \leqslant v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Selon nos conventions, $u < v$ signifie $u \leqslant v$ et $u \neq v$. En particulier, $0 < u$ (ou $u > 0$) signifie que la suite est à termes positifs ou nuls, non tous nuls : elle n'est pas forcément à termes tous strictement positifs.

Cet ordre n'est pas total :

On définit comme on l'a fait plus généralement dans le chapitre sur les relations d'ordre les notions de suites majorées, minorées, bornées, de suites monotones, strictement monotones. Au passage, on peut noter qu'une suite $u$ est bornée si et seulement si $|u|$ est majorée.

Pour la croissance d'une suite $u$, la définition est

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}, \quad (m \leqslant n) \Rightarrow (u_m \leqslant u_n).$$

On lui préfère souvent l'assertion équivalente suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$

**Exercice (Stabilité de sous-ensembles de suites)** 3

Déterminer si les sous-ensembles suivants de suites réels sont des sous-espaces vectoriels (parties non vides stables par combinaisons linéaires) ou des sous-anneaux (parties comprenant l'élément unité stables par différence et par produit) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :

(1) L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ des suites réelles bornées.

(2) L'ensemble des suites réelles majorées.

(3) L'ensemble des suites réelles majorées ou minorées.

(4) L'ensemble des suites réelles croissantes.

(5) L'ensemble des suites réelles monotones.

(6) L'ensemble des suites réelles sommes d'une suite croissante et d'une suite décroissante.

## 3. Limite d'une suite de nombres réels

**Définition (Limite d'une suite de nombres réels)** 3.a

On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* (ou *tend*) vers un réel $l \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N) \Rightarrow (|u_n - l| \leqslant \varepsilon).$$

S'il existe un réel $l$ tel que la suite converge vers $l$, on dit que la suite est *convergente*, ou encore qu'elle *admet une limite finie*. Une suite non convergente est dite *divergente*.

**Exercice (Convergence d'une suite réelle)** 4

Proposer des réécritures variées du fait qu'une suite réelle $u$ converge vers le réel $l$.

**Illustration**

**Exercice (Divergence d'une suite réelle)** 5

Écrire dans le registre formel le fait qu'une suite réelle $u$ diverge.

Changer la valeur de la suite $u$ en un nombre fini d'indices ne change rien à son éventuelle convergence. Cette définition traduit donc bien le caractère asymptotique de cette notion.

**Définition (Divergence d'une suite réelle vers plus ou moins l'infini)** 3.b

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* (ou *tend*) vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

$$(\text{resp. } \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant M)$$

Dans le cas où la suite $u$ tend vers une limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$, on note indifféremment $\lim\limits_{n\infty} u_n = l$,$u_n \to_{n\infty} l$, $u \to l$, ou encore $\lim u = l$.

**Exercice (Divergence d'une suite réelle vers l'infini)** 6

Proposer des réécritures variées du fait qu'une suite réelle $u$ diverge vers $+\infty$.

**Proposition (Unicité de la limite)** 3.a

Une suite admet au plus une limite.

Démonstration

□

Ne pas oublier qu'« en général », une suite réelle n'admet pas de limite (finie ou non). La notation $\lim_n u_n$ ne peut être employée que si on a établi (ou supposé) l'existence de cette limite. Pour bien distinguer le type de divergence, on dit parfois qu'une suite réelle divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$ est *divergente de première espèce*, et que les suites n'admettant pas de limite sont *divergentes de seconde espèce*.

Exemple (de limites pour des suites classiques)

(1) La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ tend vers 0 : en effet, soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Il existe un entier $N$ à partir duquel $n+1 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}(>0)$, et donc $0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$.

(2) Toute suite stationnaire est convergente. Dans ce cas précis, on peut même exceptionnellement remplacer $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ par $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, et inverser $\forall \varepsilon, \exists N$ en $\exists N, \forall \varepsilon$.

(3) La suite $(a^n)$ est constante de valeur 1 si $a = 1$, tend vers $+\infty$ si $a > 1$ (pour tout réel $M$, il existe un entier $N$ tel que $a^N \geqslant M$. Pour tout entier $n \geqslant N$, on aura $a^n \geqslant M$), et tend vers 0 si $|a| < 1$ : en effet, c'est évident si $a = 0$. Si, $a \neq 0$, et si on fixe un réel strictement positif $\varepsilon$, il existe un entier $N$ à partir duquel $\frac{1}{|a|^n} \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, *i.e.* $|a|^n \leqslant \varepsilon$.

(4) La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$. En effet, si $M$ est un réel fixé, il existe un rang $N$ à partir duquel $n \geqslant M^2$, et donc $\sqrt{n} \geqslant M$.

i

Exercice (Caractérisation séquentielle de la densité)

Faire l'exercice 2 de TD.

7

## 4. Limites et ordre

Proposition (Toute suite convergente est bornée)

Toute suite convergente est bornée.

4.a

**Démonstration**

Soit $u$ une suite convergente, vers un réel $l$. On prend $\varepsilon = 1$ dans l'assertion de convergence de $u$ vers $l$ : il existe un rang $N$ à partir duquel $u_n$ est compris entre $l-1$ et $l+1$. Bien sûr, l'ensemble $\{u_k, k \in [\![0, N]\!]\}$ est borné, car fini, mettons minoré par $m$ et majoré par $M$. La suite $u$ est alors majorée par $\max(M, l+1)$, et minorée par $\min(m, l-1)$.

□

**Proposition (Suite convergeant vers un réel strictement positif)** 4.b

Toute suite de nombres réels, convergeant vers un nombre réel strictement positif, est minorée à partir d'un certain rang par un nombre réel strictement positif.

**Démonstration**

Soit $u$ une telle suite, de limite $l > 0$. Appliquons l'assertion de convergence de $u$ vers $l$ pour $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Il existe un rang $N$ à partir duquel $u_n$ est compris entre $\frac{l}{2}$ et $\frac{3l}{2}$, et est donc en particulier minorée par le nombre strictement positif $\frac{l}{2}$.

□

Ce résultat est relativement fin. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs, mais il n'existe pas de rang à partir duquel son terme général est minoré par un nombre strictement positif.

**Proposition (De l'ordre de deux suites à l'ordre de leurs limites)** 4.c

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, de limites respectives $l$ et $l'$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose $u \leqslant v$. On a alors $l \leqslant l'$.

**Démonstration**

Il n'y a rien à montrer si $l = -\infty$ ou $l' = +\infty$. Si $l = +\infty$, alors nécessairement $l' = +\infty$. De même si $l' = -\infty$.
On se place désormais dans le cas où $l$ et $l'$ sont finis. Soit $\varepsilon > 0$. À partir d'un certain rang $N$ (resp. $N'$), on a $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ (resp. $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon$). Cela nous donne, pour $n \geqslant \max(N, N')$ :

$$l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant l' + \varepsilon$$

et donc $l \leqslant l' + 2\varepsilon$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $l \leqslant l'$.

□

Une inégalité stricte ne nous apporterait rien : si $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la conclusion est toujours $l \leqslant l'$, l'égalité pouvant se produire :

**Proposition (Principe des gendarmes)** 4.d

Soient $u, v, w$ trois suites réelles. On suppose que $v \leqslant u \leqslant w$, et que $v$ et $w$ convergent vers un même réel $a$. La suite $u$ est alors convergente, vers $a$.

**Démonstration**

Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif quelconque. Il existe un rang $N_v$ (resp. $N_w$) à partir duquel $|v_n - a| \leqslant \varepsilon$ (resp. $|w_n - a| \leqslant \varepsilon$). À partir du rang $\max(N_v, N_w)$, on aura :

$$a - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant a + \varepsilon$$

La suite $u$ converge donc vers $a$. □

Notez que la convergence de $u$ ne fait pas partie des hypothèses. Il reste en revanche valable si $v$ et $w$ divergent toutes deux vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), mais on a plus généralement :

**Exercice (Ordre et limites infinies)** 8

Soit $u$ et $v$ deux suites réelles. On suppose $u \leqslant v$. Montrer que si $u$ tend vers $+\infty$ (resp. $v$ tend vers $-\infty$), alors $v$ tend vers $+\infty$ (resp. $u$ tend vers $-\infty$).

**Exercice (Convergence vers 0)** 9

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $|u| \leqslant w$ et si $w_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.

On en déduit que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels [4] (avec des notations précédentes, $|x - \alpha_n| \leqslant 10^{-n}$).

## 5. Opérations algébriques sur les limites

Dans la pratique, on utilise très souvent ces résultats pour prouver l'existence de certaines limites, plutôt que de revenir à la définition.

**Lemme (Opérations algébriques lorsqu'une suite tend vers l'infini)** 5.a

Soit $u$ une suite réelle tendant vers $+\infty$ :

(1) Si $v$ est minorée, alors $u + v$ tend vers $+\infty$ ;

(2) Si $v$ est minorée par un nombre strictement positif à partir d'un certain rang, alors $uv$ tend vers $+\infty$.

**Démonstration**

(1) Soit $M$ un réel quelconque. Si $v$ est minorée par $m_v$, et que $u$ tend vers $+\infty$, il existe un rang $N$ à partir duquel $u_n \geqslant M - m_v$. À partir de ce rang, on a $(u + v)_n \geqslant M$.

(2) Soit $M$ un réel positif quelconque. Si $v$ est minorée par un nombre strictement positif $m_v$ à partir d'un certain rang $N_v$, et que $u$ tend vers $+\infty$, il existe un rang $N_u$ à partir duquel $u_n \geqslant \frac{M}{m_v}$. À partir du rang $\max(N_u, N_v)$, on a $u_n \geqslant \frac{M}{m_v}$ et $v_n \geqslant m_v > 0$, et donc $u_n v_n \geqslant \frac{M v_n}{m_v} \geqslant M$.

□

4. En fait, il s'agit d'une reformulation de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

**Lemme** (Produit d'une suite de limite nulle et d'une suite bornée)

Le produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée est une suite convergeant vers 0.

5.b

**Démonstration**

Soit $u$ tendant vers 0 et $v$ bornée (disons $|v| \leqslant M$, où $M > 0$). Soit $\varepsilon > 0$ : il existe un rang $N$ à partir duquel $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$, et donc $|u_n v_n| \leqslant \varepsilon$.

□

**Théorème** (Opérations algébriques sur les limites)

On considère deux suites $u$ et $v$ de limites respectives $l$ et $l'$, éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

(1) La suite $|u|$ tend vers $|l|$ (en notant $|\pm\infty| = +\infty$).

(2) Si $l + l'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $u + u'$ tend vers $l + l'$.

(3) Si $ll'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $uv$ tend vers $ll'$.

(4) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lambda u$ tend vers $\lambda l$ (la limite vaut 0 si $\lambda = 0$).

(5) Si $l \neq 0$, alors il existe un rang à partir duquel $u_n$ ne s'annule pas, et $\lim\limits_n \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$ (en posant $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

(6) Si $\frac{l'}{l}$ n'est pas une forme indéterminée, alors la suite $\frac{v_n}{u_n}$, définie à partir d'un certain rang, tend vers $\frac{l'}{l}$.

5.c

**Démonstration**

(1) Si $l$ est infini, c'est immédiat. Si $l$ est fini, cela résulte clairement de la seconde inégalité triangulaire ($||u_n| - |l|| \leqslant |u_n - l|$).

(2) Si $l$ ou $l'$ est infini, et que $l + l'$ n'est pas une forme indéterminée, par exemple si $l = +\infty$ et $l'$ est fini ou vaut $+\infty$ : $u$ tend vers $+\infty$, et $v$ est minorée, donc un résultat précédent prouve que $u + v$ tend vers $+\infty$.

Si $l$ et $l'$ sont finis : fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N_u$ (resp. $N_v$) à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (resp. $|v_n - l'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$). À partir du rang $\max(N_u, N_v)$, on a $|(u_n + v_n) - (l + l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'| \leqslant \varepsilon$.

(3) Si par exemple $l = +\infty$, on écarte le cas où $l' = 0$. Si par exemple $l'$ est un réel strictement positif ou vaut $+\infty$, $v$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif, et le produit tend donc vers $+\infty$ (de même si $l' < 0$).

Si $l$ et $l'$ sont finis, il suffit d'observer que $uv = (u - l)v + l(v - l') + ll'$ (et d'utiliser un lemme précédent).

(4) Cas particulier du résultat précédent.

(5) Si $l = \pm\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, *i.e.* $\left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon$.

Si $l \neq 0$, on écrit $\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{u-l}{ul}\right|$. Il existe un rang à partir duquel $\left|\frac{1}{ul}\right|$ est majorée par un réel strictement positif, donc bornée.

(6) On écrit $\frac{v}{u} = \frac{1}{u}v$.

□

On en déduit la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$, pour $u$ et $v$ tendant vers $l$ et $l'$ respectivement ($l' \neq 0$).

Dans les cas indéterminés, on ne peut rien dire :

**Corollaire (Somme d'une suite convergente et d'une suite divergente)**

Si $u$ converge et $v$ diverge, alors $u + v$ diverge.

5.d

**Démonstration**

Sachant que $u$ converge, on a l'implication : si $u + v$ converge, alors $v$ converge (car $v = (u + v) - u$). C'est la contraposée de l'assertion cherchée. □

Il se peut très bien que $u + v$ (ou $uv$) admette une limite sans que ni $u$ ni $v$ en admettent[5] :

**Exercice (Stabilité de sous-ensembles de suites et limite)**

L'ensemble des suites convergentes (resp. convergentes de limite nulle) est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (et de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$) ?

10

**Lemme (Suite tendant vers 0 par valeurs supérieures)**

Si $\lim u = 0^+$, *i.e.* si $u$ admet 0 pour limite, et si tous les termes de $u$ sont strictement positifs à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u}$ (définie à partir d'un certain rang éventuellement) tend vers $+\infty$.

5.e

**Démonstration**

Soit $M > 0$ : il existe un rang $N$ à partir duquel $0 < u_n \leqslant \frac{1}{M}$, donc $\frac{1}{u_n} \geqslant M$. □

On a une assertion analogue si $\lim u = 0^-$.

## 6. Suites extraites

**Définition (Suite extraite)**

Soit $u$ et $v$ deux suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. On dit que $v$ est *extraite* de $u$ (ou que $v$ est une *sous-suite* de $u$) s'il existe une application $\varphi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, appelée *extractrice*, telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

6.a

On rappelle que si $\varphi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on a $\varphi(n) \geqslant n$, pour tout entier naturel $n$.

5. D'une manière générale, si une partie d'un ensemble est stable par une opération, il est fréquent que son complémentaire ne le soit pas

**Exemple (Suites extraites)**

Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $u$.
Les suites $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$, $(u_{3n})$ sont extraites de $u$, grâce aux extractrices respectives :

i

**Théorème (Suite extraite d'une suite convergente)**

Supposons qu'une suite $u$ converge vers un réel $l$. Toute suite extraite de $u$ converge également vers $l$.

6.a

**Démonstration**

Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif quelconque. Il existe un rang $N$ à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. À partir de ce rang $N$, on a $|v_n - l| \leqslant \varepsilon$, d'après le rappel.

□

Un raisonnement analogue montre que toute suite extraite d'une suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

**Corollaire (Condition suffisante de divergence)**

Une suite admettant une suite extraite divergente (resp. divergente de seconde espèce) est divergente (resp. divergente de seconde espèce).

6.b

**Corollaire (Condition suffisante de divergence de seconde espèce)**

Une suite admettant deux suites extraites convergeant vers deux limites différentes est divergente de seconde espèce.

6.c

Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce.
En revanche, si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ tendent vers une même limite, alors $u$ tend vers cette limite.

**Exercice (De la convergence de sous-suites à la convergence)**

Faire l'exercice 27 de TD.

11

## 7. Suites monotones. Théorèmes des segments emboîtés et de Bolzano-Weierstrass.

**Théorème de la limite monotone (pour les suites)**

Soit $u$ une suite réelle croissante. Si cette suite est majorée, alors elle est convergente, vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Sinon, elle tend vers $+\infty$.
Soit $u$ est une suite réelle décroissante. Si cette suite est minorée, elle est convergente, vers $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Sinon, elle tend vers $-\infty$.

7.a

**Démonstration**

Supposons $u$ croissante non majorée. Si $M$ est un réel fixé, il existe donc un entier $N$ tel que $u_N \geqslant M$. Par croissance de $u$, on aura $u_n \geqslant M$ à partir du rang $N$ : $u$ diverge vers $+\infty$.
Supposons $u$ croissante majorée, et soit $l$ la borne supérieure de son image ($l$ est réelle). Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de $l$, il existe un entier $N$ tel que $l - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant l$. À partir du rang $N$, on aura $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$, par croissance de $u$.
Le cas où $u$ est décroissante se ramène au précédent en considérant $-u$.

□

**Définition (Suites adjacentes)** 7.a

Deux suites $u$ et $v$ sont *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si leur différence tend vers 0

**Lemme (Suites adjacentes)** 7.b

Supposons $u$ croissante, $v$ décroissante, et $u - v$ de limite nulle. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

**Démonstration**

□

**Proposition (Suites adjacentes)** 7.c

Soit $u$ et $v$ deux suites adjacentes, avec $u$ croissante et $v$ décroissante. Les suites $u$ et $v$ sont alors convergentes, et ont même limite $l$. De plus $l$ est l'unique réel $x$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant x \leqslant v_n$$

**Démonstration**

La suite $u$ (resp. $v$) est croissante majorée (par $v_0$) (resp. décroissante minorée (par $u_0$)). Chacune de ces suites est donc convergente, mettons vers $l_u$ et $l_v$ respectivement. Comme $\lim(v - u) = 0$, $l_u = l_v$.
$l$ vérifie bien les inégalités de l'énoncé. Réciproquement, par passage à la limite dans ces inégalités, seul $l$ peut vérifier ces inégalités.

□

À nouveau, tout réel $x$ est limite d'une suite de nombres rationnels, puisque les suites des approximations de $x$ à $10^{-n}$ près par défaut et par excès sont adjacentes, et encadrent $x$ à tout rang.

**Théorème des segments emboîtés**

On considère une suite $(I_n)_n$ de segments de $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite est décroissante pour l'inclusion, et que la suite $(d_n)$ (où $d_n$ est la longueur du segment $I_n$) tend vers 0. Alors l'intersection des segments $I_n$ est un singleton.

7.d

**Démonstration**

Pour chaque entier naturel $n$, on écrit $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ (avec $\alpha_n \leqslant \beta_n$). Notons en particulier que $d_n = \beta_n - \alpha_n$. D'après les hypothèses de l'énoncé, les suites $\alpha = (\alpha_n)$ et $\beta = (\beta_n)$ sont respectivement croissante et décroissante, et $\lim(\beta - \alpha) = 0$. Ces suites sont adjacentes, elles admettent donc admettent une limite commune $l$.
Par définition, l'intersection des segments $I_n$ est l'ensemble des réels $x$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n$$

Cette intersection est donc le singleton $\{l\}$.

$\square$

Voici maintenant un résultat fondamental d'analyse (vous pouvez d'ailleurs essayer de suivre sa longue descendance tout au long de l'année) :

**Théorème de Bolzano-Weierstrass**

De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.

7.e

Le grand principe de cette démonstration est d'exploiter la notion de suite dichotomique d'intervalles. Par suite d'intervalles, on entend une famille d'intervalles indexée par $\mathbb{N}$ : à chaque entier naturel $n$, on va associer un intervalle $I_n$. La suite $(I_n)$ de ces intervalles sera dite *dichotomique* car, pour tout entier naturel, $I_{n+1}$ sera obtenu à partir de $I_n$ en coupant ce dernier en deux. Pour chaque entier naturel $n$, $I_n$ sera un segment $[\alpha_n, \beta_n]$, $\alpha_n \leqslant \beta_n$.

Démonstration

**Première étape :** Considérons une suite réelle bornée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, disons majorée par $M$, et minorée par $m$. On pose $\alpha_0 = m$, et $\beta_0 = M$ (et donc $I_0 = [m, M]$). Notons

$$\Omega_0 = \{n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I_0\}$$

Bien sûr, $\Omega_0 = \mathbb{N}$.
On introduit l'ensemble

$$\left\{n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\alpha_0, \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}\right]\right\}$$

(attention, c'est une partie de $\mathbb{N}$, et non une partie de $I_0$ (penser au cas des suites constantes)).
Si cet ensemble est infini, on pose $I_1 = \left[\alpha_0, \frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right]$. S'il est fini, on pose $I_1 = \left[\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}, \beta_0\right]$. Dans tous les cas, l'ensemble

$$\Omega_1 = \{n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I_1\}$$

est infini.
On construit ainsi, par récurrence, une suite d'intervalles $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\Omega_p = \{n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I_p\}$$

soit infini : si, pour un certain entier naturel $p$, $I_p$ est supposé construit, on introduit l'ensemble

$$\left\{n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\alpha_p, \frac{\alpha_p + \beta_p}{2}\right]\right\}$$

Cet ensemble peut être infini, auquel cas on pose $I_{p+1} = \left[\alpha_p, \frac{\alpha_p+\beta_p}{2}\right]$, ou fini, auquel cas on pose $I_{p+1} = \left[\frac{\alpha_p+\beta_p}{2}, \beta_p\right]$. Dans tous les cas, $\Omega_{p+1}$ est infini.
Pour tout entier naturel $p$, le diamètre de $I_p$ est $\frac{M-m}{2^p}$, donc tend vers 0 lorsque $p$ tend vers $+\infty$.
D'après le théorème des segments emboîtés, l'intersection $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} I_p$ est un singleton $\{l\}$.

□

Démonstration

**Seconde étape :** construisons maintenant une suite extraite de $u$, tendant vers $l$.
Pour tout entier naturel $n$, on formule l'hypothèse de récurrence suivante :
$(\mathcal{H}_n)$ : on a trouvé une suite strictement croissante d'entiers naturels $(i_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, telle que $i_k \in \Omega_k$, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.
L'amorçage de cette propriété est immédiat (on peut prendre n'importe quel entier pour $i_0$).
Fixons un entier naturel $n$, supposons $\mathcal{H}_n$, et déduisons-en $\mathcal{H}_{n+1}$ : l'ensemble $\Omega_{n+1}$ étant infini, l'ensemble $\Omega_{n+1} \setminus [\![0, i_n]\!]$ n'est pas vide (il est même infini). On choisit un élément $i_{n+1}$ dans cet ensemble, et l'hypothèse $\mathcal{H}_{n+1}$ s'en déduit aisément.
Ainsi, en considérant l'application $\varphi : n \mapsto i_n$, on dispose d'une suite extraite $v = (v_n)$ de $u$, telle que, pour tout entier naturel $n$, $\alpha_n \leqslant v_n \leqslant \beta_n$. Encadrée par deux suites de limite $l$, la suite $v$, extraite de $u$, converge (vers $l$) : le théorème de Bolzano-Weierstrass est prouvé.

□

**Corollaire (Compacité de tout segment)**

Soit un segment $[a, b]$ et une suite $(x_n)$ de points de ce segment. Il existe alors une suite extraite de $(x_n)$ qui converge vers un point $l$ du segment $[a, b]$.

7.f

**Démonstration**

Étant bornée, on peut extraire de la suite $(x_n)$ une suite convergente. La limite de cette suite est comprise (au sens large), entre $a$ et $b$, et $(x_n)$ converge donc vers un point du segment $[a, b]$.

$\square$

**Sur la compacité**

Ce résultat exprime la *compacité* de tout segment de $\mathbb{R}$. Aucun autre intervalle non vide ne vérifie cette propriété.

7.1

## 8. Relations de comparaison

La première question que l'on se pose devant une suite réelle est celle de sa convergence, ou de sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$. En admettant que cela soit le cas, il peut être intéressant de savoir *comment* cette suite tend vers sa limite, « à quelle vitesse ». Par exemple, les suites $(n)$, $(n + 12)$ et $(n^2)$ tendent toutes les trois vers $+\infty$, mais les deux premières semblent aller « à la même allure », beaucoup plus lentement que la troisième. L'objectif de cette partie est de formaliser et exploiter tout cela.

On considère une suite $(b_n)$ de nombres réels *tous non nuls*, et une suite de réels $(a_n)$.

**Définition (Suite négligeable devant une autre)**

La suite $(a_n)$ est dite *négligeable* devant $(b_n)$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)$ tendant vers 0, telle que $a_n = b_n\varepsilon_n$ pour tout entier naturel $n$. On note alors $a_n = o(b_n)$.

8.a

Cela revient donc à dire que la suite de terme général $\frac{a_n}{b_n}$ tende vers 0.

**Définition (Suite dominée par une autre)**

La suite $(a_n)$ est dite *dominée* par $(b_n)$ (on dit également que $(b_n)$ *domine* $a_n$) s'il existe un réel $M$ tel que $|a_n| \leqslant M|b_n|$ pour tout entier naturel $n$. On note alors $a_n = O(b_n)$.

8.b

Cela revient à dire que la suite de terme général $\frac{a_n}{b_n}$ soit bornée.

**Définition (Équivalence des suites)**

On suppose que $(a_n)$ est à termes tous non nuls. La suite $(a_n)$ est dite *équivalente* à la suite $(b_n)$ si $a_n - b_n = o(b_n)$, *i.e.* il existe une suite $(\varepsilon_n)$ tendant vers 0, telle que $a_n = b_n(1 + \varepsilon_n)$ pour tout entier naturel $n$. On note alors $a_n \sim b_n$.

8.c

Cela revient à dire que la suite de terme général $\frac{a_n}{b_n}$ tende vers 1.
L'équivalence des suites est une relation d'équivalence.

**Lien entre les relations de comparaison**

Toute suite convergente étant bornée, si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ ou $a_n \sim b_n$, alors $a_n = \mathrm{O}(b_n)$.

8.1

**Cas d'une suite s'annulant**

On peut rencontrer ces notations pour une suite $(b_n)$ s'annulant (c'est le cas des suites $(n)$ et $(n^2)$ de l'introduction). On remplace alors souvent la condition « pour tout entier naturel $n$ » par « à partir d'un certain rang », ce qui conforte le caractère asymptotique de ces relations.
Attention cependant, ces notions n'ont pas grand intérêt si la suite $(b_n)$ est nulle à partir d'un certain rang, car alors la suite $(a_n)$ (dominée par, négligeable devant ou équivalente à $(b_n)$) est nulle à partir d'un certain rang. C'est pourquoi vous ne verrez jamais l'expression $a_n \sim 0$ par exemple. En pratique, on n'utilise ces notions que pour des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

8.2

**Exemple (Relations de comparaison)**

(1) Dire que $a_n = O(1)$ signifie qu'elle est bornée. Dire que $a_n = o(1)$ signifie qu'elle est de limite nulle.

(2) $n \sim n + 12$ et $n = \mathrm{o}(n^2)$.

(3) Si une suite $(a_n)$ tend vers $l \in \mathbb{R}^*$, alors $a_n \sim l$.

(4) On considère $p, q \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q \in \mathbb{R}$, où $a_p$ et $b_q$ sont non nuls. On a :
$$\frac{a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + b_0} \sim \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}$$

i

**Aspect formel de ces relations**

Il faut bien comprendre que les notations $\mathrm{o}(b_n)$ et $\mathrm{O}(b_n)$ ne désignent pas des suites précises, mais plutôt des ensembles de suites. C'est pourquoi certains préfèrent écrire par exemple $a_n \in \mathrm{o}(b_n)$. Cependant, nous conservons la notation consacrée, afin par exemple d'effectuer des opérations algébriques. Par exemple, on écrira
$$n^2 + n + \cos(n) + \mathrm{o}(n^2) = n^2 + \mathrm{o}(n^2),$$
mais on ne peut pas simplifier par « $\mathrm{o}(n^2)$ », puisque ce symbole désigne deux suites différentes.
Autre exemple : s'il est vrai qu'un « $\mathrm{o}(1/n)$ » est un « $\mathrm{o}(1)$ », la réciproque est fausse :

8.3

L'emploi de ces relations nécessite un temps d'adaptation, et recèle quelques dangers. Par chance, les formules qui suivent se démontrent très facilement de tête, il suffit donc de procéder à une vérification simple pour éviter les erreurs.

**Proposition (Propriétés des relations de comparaison)**

Si $a_n = o(b_n)$ et $b_n = O(c_n)$ (ou si $a_n = O(b_n)$ et $b_n = o(c_n)$), alors $a_n = o(c_n)$. La relation $o$ est transitive, et $O$ est réflexive, transitive.

8.a

Si les deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont équivalentes, et si $(b_n)$ admet une limite $l$ (finie ou infinie), alors la suite $(a_n)$ tend vers $l$.

**Proposition (Équivalence de suites et signe)** 8.b

On considère deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ équivalentes de nombres réels non nuls. Alors, à partir d'un certain rang, $a_n$ et $b_n$ ont même signe.

**Démonstration**

Une suite tendant vers 1 est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. $\square$

**Proposition (Opérations algébriques sur les relations de comparaison)** 8.c

Si $a_n \sim b_n$, et si $a'_n \sim b'_n$, alors
$$a_n a'_n \sim b_n b'_n$$
et
$$\frac{a_n}{a'_n} \sim \frac{b_n}{b'_n}$$
Si $(a_n)$ et $(b_n)$ sont deux suites équivalentes de réels strictement positifs, et si $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé, alors
$$a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$$

**Démonstration**

Le produit et le quotient de deux suites tendant vers 1 est une suite tendant vers 1.
Si $\alpha$ est un réel quelconque, et $u$ de limite 1, alors $u^\alpha$ est de limite 1. $\square$

**Sommation des équivalents** 8.4

Attention ! Il n'y a pas de résultat général sur la somme (ou différence) d'équivalents.
Ce n'est pas parce que $a_n \sim b_n$ et $a'_n \sim b'_n$ que $a_n + a'_n \sim a'_n + b'_n$. Cela peut être vrai comme faux :

Pour cette raison, il n'y a aucun intérêt à écrire par exemple $\cos \frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{2n^2}$ (bien que ce soit vrai), mais il est beaucoup plus intéressant d'écrire $\cos \frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$
En revanche, si $u_n = \alpha_n + w_n$, où $w_n = \mathrm{o}(\alpha_n)$, alors $u_n \sim \alpha_n$ :

**Composition des relations de comparaison**

Si $a_n \sim b_n$, et si $f$ est une fonction telles que $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ soient définies, il n'y a aucune raison que ces suites soient équivalentes :

Il est notamment interdit de prendre des logarithmes ou exponentielles d'équivalents sans précaution.

8.5

**Exercice (Logarithme d'un équivalent)**

On considère deux suites équivalentes de réels strictement positifs $(a_n)$ et $(b_n)$. On suppose qu'elles tendent vers une limite (commune) $l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\}$. Montrer qu'alors $(\ln(a_n))$ et $(\ln(b_n))$ sont équivalentes.
Montrer que ce résultat tombe en défaut si la limite commune vaut 1.

12

**Proposition (Comparaison des suites de référence)**

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in ]1, +\infty[$. On a :

$$(\ln n)^\beta = o(n^\alpha), n^\alpha = o(a^n), a^n = o(n!)$$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_-^*$, $a \in ]0, 1[$. On a :

$$\frac{1}{n!} = o(a^n), a^n = o(n^\alpha), n^\alpha = o((\ln n)^\beta)$$

8.d

**Démonstration**

Tout est connu depuis le cours sur les fonctions usuelles, sauf les assertions portant sur $n!$. Soit $a$ un réel, $a > 1$. Il existe un entier naturel $N$ non nul tel que $N \geqslant 2a$. Bien sûr, on aura $n \geqslant 2a$ dès le rang $N$, et par conséquent, pour tout entier $n \geqslant N$ :

$$\prod_{k=N}^{n} k \geqslant \prod_{k=N}^{n} (2a) = 2^{n-N+1} a^{n-N+1}$$

Il vient donc :

$$\frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{2^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1}{2^n}$$

pour tout entier naturel $n \geqslant N$, ce qui montre que $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ est de limite nulle.

□

**Exercice (Équivalents simples de suites)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls tendant vers 0. Montrer qu'alors $\sin u_n \sim u_n$, $\tan u_n \sim u_n$, $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$, $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

13

## 9. Brève extension aux suites complexes

**Définition (Suites complexes)** 9.a

Une *suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes* est une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}$.
La *partie réelle* (resp. *partie imaginaire*) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite réelle, notée $\mathrm{Re}(u)$ (resp. $\mathrm{Im}(u)$), de terme général $\mathrm{Re}(u_n)$ (resp. $\mathrm{Im}(u_n)$).
La suite *conjuguée* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\bar{u}$, est la suite de terme général $\bar{u}_n$.
La *suite des modules* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $|u|$, est la suite réelle de terme général $|u_n|$.

**Opérations sur les suites complexes** 9.1

On définit bien sûr des opérations sur l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes, qui lui confèrent une structure d'anneau commutatif et de $\mathbb{C}$-espace vectoriel (et même de $\mathbb{C}$-algèbre).

**Définition (Suite complexe bornée)** 9.b

Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *bornée* s'il existe un réel positif $M$ tel que $|u_n| \leqslant M$, pour tout entier naturel $n$.

**Suites bornées : reformulations** 9.2

Cela revient à dire que la suite des modules soit bornée, ou encore à ce que les suites des parties imaginaire et réelle le soient (d'après les encadrements $|z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$, valables pour tout nombre complexe $z$).

**Définition (Convergence d'une suite complexe)** 9.c

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* (ou *tend*) vers un nombre complexe $l$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_n u_n = l$, ou $\lim u = l$.

**Proposition (Convergence d'une suite complexe)** 9.a

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(l)$.

**Démonstration**

Cela résulte clairement des encadrements :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|, \quad |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|.$$

□

**Convergence d'une suite complexe**

(1) La définition est exactement la même que pour une suite réelle, le module remplaçant la valeur absolue (et les disques remplaçant les segments). Bien des propriétés des suites réelles sont encore valables pour les suites complexes ;

(2) Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$ revient à dire que la suite *réelle* de terme général $|u_n - l|$ tend vers $0$ ;

(3) Si $u$ converge vers $l$, alors sa suite conjuguée converge vers $\bar{l}$ ;

(4) Si $u$ converge vers $l$, alors sa suite des modules converge vers $|l|$ (d'après la seconde inégalité triangulaire), mais la réciproque est évidemment fausse (on peut prendre l'indéfectible exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$) ;

(5) Toute suite complexe convergente est bornée (la réciproque est fausse) ;

(6) Nous ne définissons pas de notion de suite complexe divergeant vers l'infini (que serait cet infini dans le cas complexe ?)

9.3

**Théorème (Opérations algébriques, suites complexes)**

On considère deux suites complexes $u$ et $v$ de limites complexes respectives $l$ et $l'$.

(1) $|u|$ converge vers $|l|$ et $\bar{u}$ converge vers $\bar{l}$.

(2) $(u+v)$ converge vers $l+l'$.

(3) $uv$ converge vers $ll'$.

(4) si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda u$ converge vers $\lambda l$.

(5) si $l \neq 0$, alors il existe un rang à partir duquel $u_n$ ne s'annule pas, et $\frac{v}{u}$ converge vers $\frac{l'}{l}$.

9.b

**Démonstration**

Tout est facile, et résulte de ces mêmes propriétés pour le cas réel, et de la proposition 9. Vérifions-le pour le produit (cas le plus « compliqué ») : les parties réelle et imaginaire de la suite produit $uv$ sont de termes généraux respectifs :

$$\operatorname{Re}(u_n)\operatorname{Re}(v_n) - \operatorname{Im}(u_n)\operatorname{Im}(v_n) \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(u_n)\operatorname{Im}(v_n) + \operatorname{Im}(u_n)\operatorname{Re}(v_n).$$

D'après les résultats algébriques sur les suites réelles, ces suites convergent respectivement vers :

$$\operatorname{Re}(l)\operatorname{Re}(l') - \operatorname{Im}(l)\operatorname{Im}(l') \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(l)\operatorname{Im}(l') + \operatorname{Im}(l)\operatorname{Re}(l').$$

La suite $uv$ converge donc vers $ll'$.

□

**Pas d'ordre sur les suites complexes**

N'ayant pas d'ordre agréable sur $\mathbb{C}$, nous n'avons donc pas défini la croissance d'une suite de nombres complexes, et le principe des gendarmes ou le théorème de la limite monotone par exemple sont inutilisables dans $\mathbb{C}$. Cela dit, on peut se ramener au cas réel en évaluant $|u_n - l|$ (si on connaît $l$). On ne parle pas non plus de suites complexes adjacentes.

9.4

**Théorème de Bolzano-Weierstrass complexe**

Néanmoins, le théorème de Bolzano-Weierstrass est encore valable pour les suites complexes. 9.5

**Relations de comparaison pour les suites complexes**

On peut également définir des relations de comparaison sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. 9.6

## 10. Questionnaire 8 : Suites

Dans ce qui suit, $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ et $w = (w_n)$ désignent des suites réelles, $l$ un réel.

**1** Si $A$ est une partie de $\mathbb{R}$, alors
**a** $A$ admet des bornes supérieure et inférieure dans $\bar{\mathbb{R}}$.
**b** $\inf A \leqslant \sup A$.

**2** Si $A$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, bornée, alors
**a** elle admet des bornes supérieure et inférieure.
**b** $\inf A \leqslant \sup A$.
**c** $\inf A < \sup A$.
**d** $\sup A \in A$.
**e** $\sup A \notin A$.

**3** Si une suite réelle est minorée par 0 et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

**4** Si $uv$ converge, alors $u$ ou $v$ converge.

**5** Si $|u|$ converge, alors $u$ converge.

**6** Si $u$ et $v$ admettent une limite, alors $u + v$ admet une limite.

**7** Si $u$ et $w$ convergent, et si $u \leqslant v \leqslant w$, alors $\lim u \leqslant \lim v \leqslant \lim w$.

**8** Si $u$ ne tend pas vers $+\infty$, alors on peut en extraire une suite majorée.

**9** Si $u$ tend vers $+\infty$, alors on peut en extraire une suite croissante.

**10** Si $u$ est bornée, et si toutes ses sous-suites convergentes tendent vers un même réel, alors $u$ est convergente.

**11** Si $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0, alors $u$ est bornée.

**12** Si $u$ est croissante, majorée, non constante, alors elle converge vers un réel $l$, et $u_n < l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**13** Si toutes les suites extraites de $u$ convergent, la suite $u$ converge-t-elle ?

**14** Si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'assertion $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ est vraie pour une infinité d'entiers naturels $n$, la suite $u$ converge-t-elle vers $l$ ?

**15** La convergence de $u$ vers $l$ équivaut-elle à

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N) \Rightarrow \left(|u_n - l| \leqslant \frac{1}{N}\right) \ ?$$

**16** Une suite convergente est-elle équivalente à toutes ses suites extraites ?

**17** Si $u$ tend vers 0 et si $u_{n+1} \sim u_n$, $u$ est-elle équivalente à toutes ses suites extraites ?

**18** Si $w \leqslant u \leqslant v$ et $w_n \sim v_n$, a-t-on $u_n \sim v_n$ ?

**19** Si $u + v$ et $uv$ convergent, $u$ et $v$ convergent-elles ?

**20** Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n - v_n) = 0$ ?

**21** Si $\varphi$ et $\psi$ sont deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et si $u$ converge vers un réel non nul, a-t-on $u_{\varphi(n)} \sim u_{\psi(n)}$ ?

**22** Si la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge, la suite $u$ converge-t-elle vers 0 ?

**23** Si $u$ tend vers 0, la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge-t-elle ?

**24** Si une suite complexe est bornée et croissante pour l'ordre lexicographique, est-elle convergente ?

**25** Si une suite complexe est bornée et croissante pour un ordre total sur $\mathbb{C}$, est-elle convergente ?

# 11. Feuille de TD 21 : Nombres réels, suites numériques

## 11.1. Borne supérieure, corps des nombres réels

**Exercice 1 (Borne supérieure et suites)** 0

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une suite $(a_n)$ d'éléments de $A$, de limite $\sup(A)$.

**Exercice 2 (Caractérisation séquentielle de la densité)** 1

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel $x$, il existe une suite d'éléments de $A$, de limite $x$.

**Exercice 3 (Sous-groupes de $\mathbb{R}$)** 1

Soit $G$ un sous-groupe de $\mathbb{R}$ additif, non réduit à 0. Notons $a$ la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$ (on dit que $G$ est *discret*). Montrer que si $a = 0$, alors $G$ est dense dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* rencontre tout intervalle $]\alpha, \beta[$, où $\alpha < \beta$).

**Exercice 4 (Automorphismes de corps classiques)** 1

**1** Montrer que tout endomorphisme du groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est linéaire, *i.e.* de la forme $x \mapsto \alpha x$ pour un certain rationnel $x$.

**2** Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres rationnels.

**3** Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres réels.

**Exercice 5 (Caractérisation séquentielle des fermés de $\mathbb{R}$)** 2

Une partie $U$ de $\mathbb{R}$ est dite *ouverte* si pour tout élément $u$ de $U$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]u-\varepsilon, u+\varepsilon[ \subset U$.
Une partie $F$ de $\mathbb{R}$ est dite *fermée* si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.
Montrer qu'une partie $F$ de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de $F$ appartient à $F$.

**Exercice 6 (Autour de la borne supérieure)** 2

Soit $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

**1** On suppose $B$ bornée et $A$ incluse dans $B$. Montrer que $A$ et $B$ admettent des bornes supérieures et inférieures (dans $\mathbb{R}$), et que

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

**2** On suppose que, pour tout couple $(a, b) \in A \times B$, $a \leqslant b$. Montrer que $A$ admet une borne supérieure, $B$ une borne inférieure, et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

**3** On suppose $A$ et $B$ majorées. On note $A + B$ l'ensemble des réels s'écrivant comme somme d'un élément de $A$ et d'un élément de $B$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

### 11.2. Convergence, divergence

**Exercice 7 (Expression formelle de la convergence)** 0

Soit $l$ un réel, et $(u_n)$ une suite réelle. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes à la convergence de la suite $(u_n)$ vers $l$ ?
**1** $\forall \varepsilon \in ]0,1[, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
**2** $\forall \varepsilon > 1000, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
**3** $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in [\![1000, +\infty[\![, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
**4** $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
**5** $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon$.
**6** $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

**Exercice 8 (Étude élémentaire de convergence ou de divergence)** 0

**1** Étudier la convergence des suites suivantes : $u = \left(n - \sqrt{n^2 - n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = \left(\frac{n\sin(n)}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
**2** On considère $k$ réels $A_1, \ldots, A_k$, avec $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_k \geqslant 0$. Évaluer

$$\lim_{n\to\infty} (A_1^n + \cdots + A_k^n)^{\frac{1}{n}}$$

**3** Étant donné $x$ réel, étudier la suite indexée par $\mathbb{N}^*$, de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx)$$

**4** Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ converge (on pourra considérer la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ $(n \geqslant 1)$).
**5** Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{E(\sqrt{k+1}) - E(\sqrt{k})}{k+1}.$$

**6** Soit $\alpha$ un nombre irrationnel positif, et $(p_n, q_n)$ une suite de couples d'entiers naturels non nuls, telle que $\lim_n \frac{p_n}{q_n} = \alpha$. Montrer que les suites $(p_n)$ et $(q_n)$ divergent vers $+\infty$.

**Exercice 9 (Suite convergente d'entiers relatifs)** 0

Montrer que toute suite de nombres entiers relatifs convergente est stationnaire.

**Exercice 10 (Taux comparés)** 0

Soient $u$ et $v$ deux suites à valeurs strictement positives, telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer les implications suivantes :

$$(\lim v_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0) \text{ et } (\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim v_n = +\infty).$$

**Exercice 11 (Série harmonique)** 1

Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 12 (Théorème de Cesàro)** 1

On considère une suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ et la suite des *moyennes* $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$, de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

**1** Montrer que si la suite $u$ croît, il en est de même de $v$.
**2** Montrer que si $u$ tend vers une limite finie ou infinie $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $v$ tend vers $l$ (c'est le théorème de Cesàro).
**3** Montrer, en donnant un contre-exemple, que la réciproque est fausse.
**4** Soit $(u_n)$ une suite de réels strictement positifs, telle que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers un réel $\lambda$. Montrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\lambda$.

**Exercice 13 (Image des entiers par la fonction sinus)** 3

**1** Montrer que le sous-groupe $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (on admettra que $\pi$ est irrationnel). En déduire que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
**2** Retrouver ce résultat par un raisonnement élémentaire.

**Exercice 14 (Suite d'entiers naturels)** 4

**1** Montrer que si l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective, alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
**2** Soit $\varphi$ une permutation de $\mathbb{N}^*$ telle que la suite $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_n$ soit convergente. Que dire alors de $\lim_n \frac{\varphi(n)}{n}$ ?

## 11.3. Relations de comparaison, comportement à l'infini

**Exercice 15 (Équivalents simples)** 0

Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, de $\frac{e^n+n!}{n+1}$, $\frac{e^n+e^{-n}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}$, $e^{n^2+n!+\frac{1}{n}}$.

**Exercice 16 (Équivalents et convergence)** 0

**1** Montrer que la suite de terme général $\frac{n+3\sin(n)}{2n+(-1)^n}$ converge.
**2** Montrer que la suite de terme général $\frac{E(\ln(n))}{\ln(n^2+n)}$ converge.

Exercice 17 (Algorithme de Babylone, ou de Héron d'Alexandrie) 1

On définit la suite $u = (u_n)$ par son terme initial $u_0 = \frac{5}{2}$, et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$$

Montrer que $u$ converge vers une limite $l$ que l'on calculera, et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in ]0,1[$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n - l < \alpha\left(\gamma^{(2^n)}\right)$$

**Remarque :** la vitesse de convergence est remarquable, on dit qu'elle est (au moins) *quadratique*. Nous reverrons cette suite dans un cadre plus général ultérieurement.

Exercice 18 (suite de Fibonacci) 1

On définit la *suite de Fibonacci*, $(u_n)$, par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n > 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

**1** Chercher les suites géométriques vérifiant la relation de récurrence (mais pas nécessairement les conditions initiales).

**2** Grâce à la question précédente, trouver une fonction $f$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$.

**3** En déduire un équivalent simple de $(u_n)$, et la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 19 (Équivalent d'une suite) 2

Soit $(u_n)$ une suite de réels de limite nulle et telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

**1** Montrer que si l'on suppose $(u_n)$ décroissante, alors $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

**2** Montrer que ce résultat peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus $(u_n)$ décroissante.

Exercice 20 (Équivalents plus durs) 2

Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=0}^{n} k!$.

Exercice 21 (Exemple de suite implicite) 2

**1** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution, que nous noterons $u_n$.

**2** Étudier la monotonie de $(u_n)$. En déduire la limite de cette suite.

**3** Montrer que $u_n \sim n$.

**4** Montrer que $u_n - n \sim -\ln(n)$.

Exercice 22 (Une autre suite implicite) 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n = 1$. Étudier $(u_n)$. Donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n$.

Exercice 23 (Une suite implicite avec tangente) 3

Si $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n$ la solution de $\tan x = x$ qui appartient à $[n\pi, n\pi + \pi/2[$. Donner un développement de $x_n$ à la précision $1/n^2$.

### 11.4. Suites extraites

Exercice 24 (Extraction d'une suite non majorée) 0

Montrer que toute suite réelle non majorée admet une suite extraite divergeant vers $+\infty$.

Exercice 25 (Extraction convergente d'une suite monotone) 0

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite est convergente est elle-même convergente.

Exercice 26 (Suite extraite de suite extraite) 0

Soit $u = (u_n)$ une suite de réels, et soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $u$ : il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, pour tout entier naturel $n$. Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $v$ ($\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_{\psi(n)}$). Montrer que $w$ est une suite extraite de $u$, et exprimer le terme général $w_n$ de $w$ en fonction de $u$, $\varphi$ et $\psi$ (et $n$).

Exercice 27 (De la convergence de sous-suites à la convergence) 2

Soit $(u_n)$ une suite réelle. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $u$ converge.

Exercice 28 (Infinité de sous-suites convergentes) 2

Donner un exemple de suite $(u_n)$ divergente, telle que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la suite extraite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**Exercice 29 (Critère spécial des séries alternées)** 2

Soit $u = (u_n)$ une suite de réels positifs décroissante, de limite nulle. On pose, pour tout entier $n$ :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

**1** Montrer que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est convergente (on pourra montrer que les suites extraites $(v_{2n})$ et $(v_{2n+1})$ sont adjacentes).
**2** Soit $l = \lim_n v_n$. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - l| \leqslant u_{n+1}$.

**Exercice 30 (Moyenne arithmético-géométrique)** 3

Soit $a, b$ deux réels, avec $0 < a \leqslant b$. On considère les suites $u$ et $v$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que $u$ et $v$ sont adjacentes. Leur limite commune est appelée *moyenne arithmético-géométrique* de $a$ et $b$.

## 11.6. Suite de nombres complexes

**Exercice 31 (Théorème de Bolzano-Weierstrass complexe)** 2

Énoncer et montrer un théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes.

**Exercice 32 (Suite récurrente complexe)** 3

Soit $(z_n)$ la suite complexe définie par son terme initial $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + |z_n|\right),$$

pour tout entier naturel $n$.
Étudier la convergence de $(z_n)$.

CHAPITRE XXII

# Fonctions numériques

## Sommaire



Dans ce chapitre, nous allons enfin définir avec rigueur des notions que vous employez depuis longtemps déjà, comme celle de continuité par exemple. Vous verrez notamment que cette notion est plus compliquée qu'il n'y paraît, et que l'analyse est pleine d'exemples contre-intuitifs (il existe par exemple des fonctions continues en tout irrationnel, et discontinues en tout rationnel (mais pas l'inverse !), des fonctions continues partout et dérivables nulle part).

La notion de limite (et donc celles de continuité, de dérivabilité) est une notion *locale* (on étudie *a priori* l'existence d'une limite en un point, et tout dépend de la conduite de la fonction au voisinage de ce point). D'une manière générale, il faudra bien distinguer les résultats locaux des résultats globaux.

On peut effectuer une analogie avec les suites : pour savoir si une suite admet une limite, on se moque totalement de ce qu'il se passe en un nombre fini d'indices. Ici, on se moque de ce qu'il se passe hors d'un voisinage de $a$. Plus généralement, la plupart des démonstrations de ce chapitre ressembleront aux démonstrations analogues effectuées pour les suites (voir par exemple les propriétés algébriques sur les limites), et nous verrons même que nous pourrions utiliser ces dernières pour prouver la plupart des résultats de ce chapitre.

On laissera le lecteur généraliser les définitions et résultats à d'autres domaines de définition qu'un intervalle.

## 1. Préliminaires topologiques

**Définition (Voisinage d'un réel)** 1.a

Soit $a$ un réel. On appelle *voisinage* de $a$ dans $\mathbb{R}$ toute partie $A$ de $\mathbb{R}$ contenant un segment de diamètre non nul, centré en $a$, c'est-à-dire telle que :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset A.$$

On dit alors que $a$ est *intérieur* à $A$.
L'intérieur de $A$ est l'ensemble des points intérieurs à $A$, c'est-à-dire dont $A$ est voisinage.

Par exemple, $]0,1[$ est l'intérieur de $[0,1]$, de $]0,1[$, de $[0,1[$, ou encore de $]0,1[\cup\mathbb{N}$.

**Exercice (Caractérisation des voisinages)** 1

Montrer qu'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $a$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle contient un intervalle ouvert (et borné) non vide centré en $a$ :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset A$$

Montrer que $A$ est un voisinage de $a$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle contient un intervalle ouvert comprenant $a$.

**Définition (Ouverts et fermés)** 1.b

On appelle *ouvert* de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$, voisinage de chacun des ses points. On appelle *fermé* de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$, dont le complémentaire dans $\mathbb{R}$ est un ouvert ;

Nous avons déjà vu des exemples d'ouverts et de fermés de $\mathbb{R}$, lors de la définition des intervalles réels. Cependant, il faut comprendre que le statut des notions d'ouvert et de fermé a changé, et qu'il faudrait donc prouver qu'un intervalle précédemment dit ouvert est effectivement ouvert en ce nouveau sens. Cela permet également de comprendre pourquoi $[1,+\infty[$ était dit fermé (bien qu'il semble « ouvert » en $+\infty$).

**Définition (Voisinage de l'infini)** 1.c

On appelle *voisinage de $+\infty$* dans $\mathbb{R}$ toute partie $A$ de $\mathbb{R}$ contenant un ensemble du type $[M,+\infty[$, pour un certain réel $M$, *i.e.* tel que :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad [M,+\infty[\subset A.$$

On définit de manière analogue un *voisinage de $-\infty$*.

On peut observer que si une partie $B$ de $\mathbb{R}$ contient un voisinage de $a$, alors c'est un voisinage de $a$.

**Exercice (Sur les voisinages)** 2

**1** Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que l'intersection de deux (et, par récurrence, d'un nombre fini non nul) voisinages de $a$ est un voisinage de $a$.

**2** Soient $a$ et $b$ deux éléments distincts de la droite numérique achevée. Montrer qu'il existe des voisinages respectifs $\mathcal{V}_a$ et $\mathcal{V}_b$ de $a$ et $b$, tels que $\mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_b = \emptyset$.

Intersection et réunion d'ouverts, de fermés

(1) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Cependant, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert ;

(2) Par passage au complémentaire, une intersection quelconque de fermés est un fermé, une union finie de fermés est fermée. Cependant, une union quelconque de fermés n'est pas nécessairement fermée (si tel était le cas, comme les singletons sont fermés, et que tout ensemble est réunion de singletons, tout ensemble serait fermé !).

1.1

Dans ce chapitre, $I$ désignera un intervalle d'intérieur non vide (car la notion de limite n'a d'intérêt que pour un point non « isolé »), $a$ sera un élément de $I$ ou une extrémité de $I$ (éventuellement infinie), et toutes les fonctions considérées seront définies sur $I$, et à valeurs réelles (sauf mention contraire). Suite à notre choix de $a$, tout voisinage de $a$ rencontrera $I$ (on dit que $a$ est *adhérent* à $I$, et on note $\overline{A}$ et appelle *adhérence* de $A$ l'ensemble des points adhérents à $a$) .

Dans un souci d'unification, on dit (abusivement) qu'une propriété portant sur une fonction définie sur $I$ est vraie au voisinage de $a$ si elle est vraie sur l'intersection de $I$ avec un voisinage de $a$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple, nous dirons que la fonction logarithme est à valeurs strictement négatives au voisinage de 0 (bien qu'elle ne soit pas définie sur un voisinage de 0).

On déduit du travail précédent que si un nombre fini d'assertions sont vraies au voisinage de $a$, leur conjonction est encore vraie [1] au voisinage de $a$ (ce résultat sera largement utilisé dans la suite). Pour les suites, le résultat analogue est : si un nombre fini d'assertions sont vraies à partir d'un certain rang, alors leur conjonction est vraie à partir d'un certain rang.

## 2. Premières définitions

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions définies sur $I$ et à valeurs réelles.

Définition (Opérations sur les fonctions)

Soit $f, g \in \mathbb{R}^I$. La *somme* de $f$ et $g$, notée $f+g$ est définie par

$$\forall x \in I, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

On définit ainsi une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^I$.
Le *produit* de $f$ et $g$, noté $fg$ est défini par

$$\forall x \in I, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

On définit ainsi une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^I$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le *produit* de $\lambda$ et de $f$, noté $\lambda f$, est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

C'est une loi de multiplication externe.

2.a

1. En revanche, cela est faux en général pour une conjonction d'une infinité d'assertions vraies au voisinage de $a$, donnez des exemples.

Structure d'anneau sur l'ensemble des fonctions numériques sur $I$

Ces définitions sont bien licites grâce aux lois de composition interne d'addition et de multiplication sur $\mathbb{R}$. Ceci explique pourquoi on part d'un intervalle (presque) quelconque, mais que l'ensemble d'arrivée est le *corps* des réels. D'ailleurs, $\mathbb{R}^I$, muni des lois d'addition et de multiplication, est un anneau (son élément nul est la fonction identiquement nulle sur $I$, et son élément unité est l'application constante de valeur 1 sur $I$). Si $g$ est inversible (dans cet anneau), c'est-à-dire si $g$ ne s'annule pas, alors on pourra noter $\frac{1}{g}$ son inverse (et on notera $\frac{f}{g}$ le produit de $f$ par l'inverse de $g$).

2.1

Proposition (Structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des fonctions numériques sur $I$)

$\mathbb{R}^I$, muni des lois d'addition et de multiplication externe, est un espace vectoriel.

2.a

Démonstration

Les vérifications sont immédiates. Elles résultent des définitions des lois considérées, et des propriétés de $\mathbb{R}$.

$\square$

Définition (Relation d'ordre sur l'ensemble des fonctions numériques sur $I$)

On définit une *relation d'ordre* $\leqslant$ sur $\mathbb{R}^I$ par

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^I, \quad (f \leqslant g) \Leftrightarrow (\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x))$$

2.b

Relation d'ordre sur l'ensemble des fonctions numériques sur $I$

(1) Cet ordre n'est évidemment pas total.
(2) Cet ordre est compatible avec l'addition et la multiplication, au sens où :

(3) Que signifie l'assertion $f \neq g$ ?
(4) Que signifie l'assertion $f < g$ ? Bien faire attention à notre convention.

2.2

Définition (Valeur absolue, inf et sup)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit la fonction *valeur absolue* de $f$, notée $|f|$ par

$$\forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$. On définit les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ par

$$\forall x \in I, \quad \sup(f, g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$$

et

$$\forall x \in I, \quad \inf(f, g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$$

2.c

Fonction bornée

Une fonction $f$ est bornée si et seulement si il existe un réel positif $K$ tel que $|f(x)| \leqslant K$, pour tout $x \in I$. Autrement dit, $f$ est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

2.3

Définition (Extremum global d'une fonction)

Une fonction $f$ admet un *maximum* s'il existe un élément $x_0$ de $I$ pour lequel on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

Pour un tel $x_0$, on dit que $f$ *présente* (ou *admet*) son maximum en $x_0$. On note $f(x_0) = \max\limits_{x \in I} f(x)$, ou $f(x_0) = \max\limits_{I} f$.
Une fonction $f$ à valeurs réelles admet un *minimum* s'il existe un élément $x_0$ de $I$ pour lequel on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

Pour un tel $x_0$, on dit que $f$ *présente* (ou *admet*) un minimum en $x_0$. On note $f(x_0) = \min\limits_{x \in I} f(x)$, ou $f(x_0) = \min\limits_{I} f$.
Une fonction $f$ admet un *extremum* (en $x_0 \in I$) si elle admet un maximum ou un minimum (en $x_0$).

2.d

Une fonction n'admet pas forcément d'extremum :

Une fonction peut présenter un (même) maximum en plusieurs points distincts :

Illustration

Une fonction $f$ présente un minimum en $x_0 \in I$ si et seulement si $-f$ présente un maximum en $x_0 \in I$.

Définition (Extremum local d'une fonction)

Une fonction $f$ admet un *maximum* (resp. *minimum*, *extremum*) *local* en $x_0 \in I$ si $f$ admet un maximum (resp. minimum, extremum) en $x_0$ au voisinage de $x_0$, *i.e.* il existe un intervalle non vide $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ tel que $f_{|]x_0-\alpha,x_0+\alpha[\cap I}$ présente un maximum (resp. minimum, extremum) en $x_0$.

2.e

Évidemment, un extremum global d'une fonction est un extremum local, mais la réciproque est fausse :

Illustration

Définition (Borne supérieure, borne inférieure)

La *borne supérieure* (resp. la *borne inférieure*) de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est la borne supérieure (resp. inférieure) de $f(I)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On les note respectivement $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x\in I} f(x)$) ou $\sup\limits_{I} f$ (resp. $\inf\limits_{I} f$)).

2.f

Si $f$ est strictement monotone, elle est nécessairement injective. En particulier, sa restriction à l'arrivée à $f(I)$ est une bijection.

L'assertion de stricte croissance de $f$ est équivalente à

$$\forall\, x, y \in I, \quad (x < y) \Leftrightarrow (f(x) < f(y))$$

En particulier, si $f$ est une bijection strictement monotone (ou plus simplement une bijection monotone), alors sa réciproque $f^{-1}$ est également (strictement) monotone, de même monotonie que $f$ ;

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont deux applications, avec $f(I) \subset J$, alors on peut définir $g \circ f$ (remarquer le léger abus de notation) ;

On a quelques résultats sur la monotonie de la composition ou du produit de fonctions monotones. Le plus simple est de les retrouver soi-même, au brouillon ou de tête :

Par exemple, la composée (licite) $g \circ f$ de deux fonctions monotones est monotone (croissante si $g$ et $f$ ont même monotonie, décroissante dans le cas contraire : penser à la règle des signes).

Si $f$ et $g$ sont croissantes ET positives, alors $fg$ est croissante :

Attention : ceci est faux si $f$ et $g$ sont seulement supposées croissantes !

Définition (Parité, imparité)

On suppose ici que $-I = I$ (*i.e.* l'intervalle $I$ est centré en 0). Soit $f \in \mathbb{R}^I$. $f$ est dite *paire* (resp. *impaire*) si, pour tout point $x$ de $I$, $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

2.g

**Proposition (Parité, imparité)**

$I$ est supposé centré en 0. Les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ des fonctions respectivement paires et impaires de $\mathbb{R}^I$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^I$. Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}^I$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2.b

On a de plus des formules donnant $f_p$ et $f_i$, les parties paire et impaire de $f$ :

**Définition (Fonction périodique)**

Soit $T$ un réel strictement positif. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *$T$-périodique* si, pour tout réel $x$ :

$$f(x+T) = f(x).$$

On dit alors que $T$ est *une période* de $f$.

2.h

On étend parfois cette définition à un réel quelconque $T$. L'ensemble des périodes de $f$ est alors un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, donc soit dense, soit de la forme $T_0\mathbb{Z}$, pour un certain $T_0 \in \mathbb{R}_+$. Dans ce dernier cas, et si $T_0 > 0$, on dit que $T_0$ est *la* période de $f$.

**Illustration**

L'ensemble des fonctions $T$-périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En revanche, l'ensemble des fonctions périodiques n'est pas stable par somme :

**Définition (Fonction lipschitzienne)**

Soit $k$ un réel positif ou nul. Une fonction $f$ est *lipschitzienne* de rapport $k$ ou *$k$-lipschitzienne* si

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

2.i

Illustration

Fonction lipschitzienne

Cette notion n'est pas du tout anecdotique, elle apparaît dans de nombreux théorèmes d'analyse ;
Une fonction $k$-lipschitzienne est une fonction dont tous les taux d'accroissement sont compris entre $-k$ et $k$ : on se doute déjà que le caractère $k$-lipschitzien sera lié à la fonction dérivée de $f$ (si elle existe).

2.4

## 3. Étude locale d'une fonction

**Définition (Limite d'une fonction en un point)**

Soit $a$ un point de $I$, ou une extrémité finie de $I$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet

- $l \in \mathbb{R}$ pour *limite* en $a \in \mathbb{R}$ si
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$$
- $+\infty$ pour *limite* en $a \in \mathbb{R}$ si
$$\forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow (f(x) \geqslant M)$$
- $-\infty$ pour *limite* en $a \in \mathbb{R}$ si
$$\forall\, M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall\, x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow (f(x) \leqslant M)$$

3.a

Illustration

Illustration

Une fonction n'admet pas forcément de limite en un point donné, même si elle y est définie !

Définition (Limite d'une fonction en plus ou moins l'infini)

On suppose que $I$ est un voisinage de $+\infty$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet
- $l \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad (x \geqslant c) \Rightarrow (|f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$$
- $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad (x \geqslant c) \Rightarrow (f(x) \geqslant M)$$
- $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad (x \geqslant c) \Rightarrow (f(x) \leqslant M)$$

On définit de même la notion de limite en $-\infty$.

3.b

Illustration

Définition (Limite d'une fonction en un point de la droite numérique achevée)

Dans tous les cas, on dit que $f(x)$ *tend vers* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $x$ tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ou que $f$ tend vers $l$ en $a$, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{a} f$ la limite $l$, on note également $f(x) \to_{x \to a} l$, ou $f \to_a l$.

3.c

Comme d'habitude, on justifiera l'existence d'une limite avant d'employer cette notation.

Pour une fonction on précise évidemment la valeur de la limite, mais aussi *la valeur en laquelle on a cette limite* (par exemple : $f$ tend vers 0 *en* 3). Pour une suite, cela n'était pas nécessaire, car on regardait toujours le comportement « à l'infini ».

Une fonction admet donc une limite finie $l$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ l'assertion $|f(x)-l| \leqslant \varepsilon$ est vraie au voisinage de $a$.

Une fonction admet donc $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si, pour tout réel $M$, l'assertion $f(x) \geqslant M$ (resp. $f(x) \leqslant M$) est vraie au voisinage de $a$.

Lorsque $l \in \mathbb{R}$, la relation $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $a$ équivaut à $f(x) - l \to_{x \to a} 0$. On peut donc se ramener à une limite nulle (dans le cas où on connaît $l$).

Lorsque $a \in \mathbb{R}$, la relation $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $a$ équivaut à la relation $f(a+h) \to_{h \to 0} l$. On peut donc se ramener à une étude de limite en 0.

L'expression « au voisinage de $a$ » pour les fonctions est l'analogue de l'expression « à partir d'un certain rang » pour les suites. Le lien entre limite d'une suite et limite d'une fonction est en fait beaucoup plus profond que cela, comme nous le verrons ultérieurement. En fait, nous pourrions montrer beaucoup des résultats de ce chapitre à l'aide des résultats déjà obtenus sur les suites.

**Unification de la notion de limite** — 3.1

La notion de voisinage permet de regrouper les différentes notions de limites : dire que $f$ admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, c'est dire que pour tout voisinage $\mathcal{V}_l$ de $l$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de $a$ tel que $f(\mathcal{V}_a \cap I) \subset \mathcal{V}_l$.

Si $a$ est en outre un élément intérieur à $I$, dire que $f$ admet $l$ pour limite en $a$, c'est dire que l'image réciproque de tout voisinage de $l$ est un voisinage de $a$.

**Proposition (Unicité de la limite)** — 3.a

La fonction $f$ admet au plus une limite en $a$.

**Démonstration**

En effet, deux éléments distincts $l$ et $l'$ de la droite numérique achevée admettent des voisinages disjoints $\mathcal{V}_l$ et $\mathcal{V}_l'$. Supposer que $f$ ait pour limites $l$ et $l'$ en $a$ entraînerait l'existence d'un voisinage $\mathcal{V}_a$ de $a$ tel que $f(\mathcal{V}_a \cap I) \subset \mathcal{V}_l \cap \mathcal{V}_{l'} = \emptyset$, ce qui est absurde, puisque $a$ est adhérent à $I$.

□

**Démonstration**

Pour ceux qui ont peur de la démonstration précédente, montrons ce résultat dans le cas particulier où $a$ est réel (les autres sont analogues). Raisonnons par l'absurde, en supposant que $f$ est de limites distinctes finies $l$ et $l'$ en $a$. On choisit $\varepsilon = \frac{|l'-l|}{3} > 0$. Il existe deux réels strictement positifs $\delta$ et $\delta'$ tels que pour tout point $x$ de $I$, on ait :

$$(|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow (|f(x)-l| \leqslant \varepsilon) \quad \text{et} \quad (|x-a| \leqslant \delta') \Rightarrow (|f(x)-l'| \leqslant \varepsilon)$$

Il existe un point $x$ de $I$ tel que $|x-a| \leqslant \min(\delta, \delta')$. Pour un tel $x$, on a les deux inégalités $|f(x)-l| \leqslant \varepsilon$ et $|f(x)-l'| \leqslant \varepsilon$. L'inégalité triangulaire donne alors $|l'-l| \leqslant \frac{2|l'-l|}{3}$, ce qui est absurde.

□

**Exercice (Unicité de la limite)** 3

Pour vous entraîner, montrer à la main qu'une fonction ne peut avoir pour limites $+\infty$ et $-\infty$ en $a \in \mathbb{R}$.

**Définition (Continuité ponctuelle)** 3.d

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et $a \in I$. On dit que $f$ est *continue* en $a$ si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque $x$ tend vers $a$.

Lorsque $a \in I$, dire que $f$ admet une limite finie en $a$ équivaut à la continuité de $f$ en ce point (car la seule limite envisageable en $a$, c'est $f(a)$).

**Définition (Prolongement par continuité)** 3.e

Si $a$ est une extrémité finie de $I$ n'appartenant pas à $I$, et si $f$ admet une limite finie $l$ en $a$, on pose

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in I, \text{ et } \tilde{f}(a) = l$$

La fonction $\tilde{f}$ ainsi définie sur $I \cup \{a\}$ est continue en $a$. On dit que $f$ se *prolonge par continuité en* $a$, et $\tilde{f}$ est appelée le *prolongement par continuité* de $f$ en $a$.

Par définition, lorsque $a$ est une extrémité finie de $I$ n'appartenant pas à $I$, $f$ a une limite finie si et seulement si $f$ se prolonge par continuité en ce point. Il n'y avait pas lieu de définir un prolongement par continuité si $a$ ou $l$ n'était pas fini.

**Exercice (Prolongement par continuité)** 4

Montrer que la fonction $f\ : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^2 \cos(1/x)$ est prolongeable par continuité en 0.

**Définition (Limites à gauche et à droite)** 3.f

Soit $a$ un point intérieur à $I$. On dit que $f$ admet une *limite à gauche* (resp. une *limite à droite*) en $a$ si la restriction de $f$ à $I \cap ]-\infty, a[$ (resp. à $I \cap ]a, +\infty[$) admet une limite en $a$. Cette limite est alors notée $\lim_{a^-} f$ (resp. $\lim_{a^+} f$). On dit que $f$ est *continue à gauche* (resp. *à droite*) en $a$ si $f$ admet $f(a)$ pour limite à gauche (resp. à droite) en $a$.

Bien remarquer que pour les limites à gauche et à droite, les intervalles considérés sont $I \cap ]-\infty, a[$ et $I \cap ]a, +\infty[$, et non $I \cap ]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ (en fait, si on prend ces derniers ensembles, on tombe sur les continuité à gauche et à droite de $f$ en $a$, ce qui est différent).

**Proposition (Continuités à gauche et à droite)** 3.b

Une fonction $f$ est continue en un point $a$ intérieur à $I$ si et seulement si elle est continue en $a$ à droite et à gauche.

**Démonstration**

Si $f$ est continue en $a$, elle y est évidemment continue à droite et à gauche. Si réciproquement $f$ est continue à droite et à gauche en $a$, soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Il existe des réels strictement positifs $\delta_+$ et $\delta_-$ tels que

$$(\forall\, x \in [a-\delta_-, a[, |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon) \quad \text{et} \quad (\forall\, x \in ]a, a+\delta_+], |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon)$$

En posant $\delta = \min(\delta_+, \delta_-)$, on a, pour tout $x$ de $[a-\delta, a+\delta]$ :

$$|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$$

(c'est évidemment vrai pour $x = a$).

□

Ne surtout pas confondre limites à gauche et droite, et continuité à gauche et droite : une fonction peut admettre une même limite finie à gauche et à droite en un point sans être continue à gauche ou droite en ce point.

**Illustration**

## 4. Limite et ordre

**Proposition (Limite finie et bornitude locale)**

Toute fonction admettant une limite finie $l$ en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de ce point.

4.a

**Démonstration**

Il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans l'assertion formelle affirmant que $\lim_a f = l$.

□

**Proposition (Limite strictement positive et minoration)**

Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif.

4.b

**Démonstration**

Soit $l$ la limite strictement positive d'une fonction $f$ en $a$. On prend $\varepsilon = \frac{l}{2}$ (on choisit une bonne valeur de $\varepsilon$). L'assertion $f(x) \in [\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}]$ est vraie pour $x$ voisin de $a$, et la fonction $f$ est en particulier minorée par le nombre réel strictement positif $\frac{l}{2}$ au voisinage de $a$.

□

**Proposition (De la comparaison des fonctions à celle des limites)** 4.c

On suppose que les fonctions $f$ et $g$ admettent respectivement pour limites $l$ et $l'$ en $a$ et que $f \leqslant g$ au voisinage de $a$. On a alors $l \leqslant l'$.

**Démonstration**

Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif quelconque. Comme les assertions $l - \varepsilon \leqslant f(x)$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant l' + \varepsilon$ sont vraies au voisinage de $a$, leur conjonction l'est également, et donc $l - \varepsilon \leqslant l' + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on a $l \leqslant l'$.

□

Des inégalités strictes ne nous apporteraient rien. Cependant, on a :

**Proposition (Conservation d'inégalités strictes)** 4.d

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$. On suppose que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque $x$ tend vers $a$. Soient $k$ et $k'$ deux réels tels que $k < l < k'$. Alors l'assertion $k < f(x) < k'$ est vraie pour $x$ voisin de $a$.

**Démonstration**

Prendre $\varepsilon = \min(\frac{k'-l}{2}, \frac{l-k}{2})$.

□

**Proposition (principe des gendarmes)** 4.e

Si $g \leqslant f \leqslant h$, et si $g$ et $h$ tendent vers $b \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a$, alors $f(x)$ tend vers $b$ lorsque $x$ tend vers $a$.

**Démonstration**

Seul le cas d'une limite finie $b$ est intéressant. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Les assertions $g(x) \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ et $h(x) \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ sont vraies pour $x$ voisin de $a$, donc l'assertion $f(x) \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ est vraie pour $x$ voisin de $a$.

□

## 5. Opérations algébriques sur les limites

**Proposition** (Condition suffisante pour qu'un produit tende vers 0) — 5.a

Le produit d'une fonction bornée au voisinage de $a$ par une fonction tendant vers 0 en $a$ est une fonction tendant vers 0 en $a$.

**Démonstration**

On suppose que $f$ est bornée au voisinage de $a$ : il existe un réel strictement positif $M$ tel que $|f|$ soit majorée par $M$ au voisinage de $a$. On suppose que $g$ est de limite nulle en $a$. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif quelconque. $|g|$ est majorée par $\frac{\varepsilon}{M}$ au voisinage de $a$. $|fg|$ est donc majorée par $\varepsilon$ au voisinage de $a$. $\square$

**Proposition** (Conditions suffisantes pour qu'une somme ou un produit tende vers l'infini) — 5.b

Soit $f$ une fonction tendant vers $+\infty$ en $a$ :

(1) Si $g$ est minorée au voisinage de $a$, alors $f+g$ tend vers $+\infty$ en $a$.

(2) Si $g$ est minorée par un nombre strictement positif au voisinage de $a$, alors $fg$ tend vers $+\infty$ en $a$.

**Démonstration**

$\square$

**Théorème** (Opérations algébriques sur les limites) — 5.c

On considère deux fonctions $f$ et $g$ de limites respectives $l$ et $l'$, éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) $\lim\limits_a |f| = |l|$ (en notant $|\pm\infty| = +\infty$).

(2) $\lim\limits_a (f+g) = l + l'$ (si $l+l'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$).

(3) $\lim\limits_a (fg) = ll'$ (si $ll'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$).

(4) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda l$ (la limite vaut 0 si $\lambda = 0$).

(5) Si $l' \neq 0$, alors $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, et $\lim\limits_a \frac{1}{g} = \frac{1}{l'}$ (en posant $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

(6) Si outre $\frac{l}{l'}$ n'est pas indéterminée, alors $\lim\limits_a \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$.

**Démonstration**

Laissée au lecteur, qui pourra s'inspirer de ce qui a été fait sur les suites, ou même l'utiliser :

$\square$

**Exercice (Continuité du sup)**

Montrer que $\sup(f, g)$ est continue en $a$ si $f$ et $g$ le sont.

5

Soit $a \in \bar{I}$ (*i.e.* $I$ rencontre tout voisinage de $a$). L'ensemble des fonctions tendant vers une limite finie (resp. vers 0) en $a$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.

**Proposition (Limite d'une composée)**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, avec $f(I) \subset J$. On suppose que $f$ admet une limite $b$ en $a$, et que $g$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en $b$. Alors $g \circ f$ admet $l$ pour limite en $a$.

5.d

**Démonstration**

Soit $\mathcal{V}_l$ un voisinage de $l$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_b$ de $b$ tel que $g(J \cap \mathcal{V}_b) \subset \mathcal{V}_l$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ tel que $f(I \cap \mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_b$. On a alors $(g \circ f)(I \cap \mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_l$.

$\square$

**Corollaire (Continuité ponctuelle d'une composée)**

Si $f$ est continue en $a$, et si $g$ continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $a$.

5.e

## 6. Limites et monotonie

**Théorème de la limite monotone, aux bornes**

On suppose que $I = ]\alpha, \beta[$ ($\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha < \beta$), et que $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone. Alors $f$ admet des limites (éventuellement infinies) en $\alpha$ et $\beta$. Plus précisément, si $f$ est croissante, alors (les bornes sont prises dans $\overline{\mathbb{R}}$)

(1) $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = \sup\limits_I f$.

(2) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \inf\limits_I f$.

Si $f$ est décroissante, alors

(1) $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = \inf\limits_I f$.

(2) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \sup\limits_I f$.

6.a

**Démonstration**

$\square$

**Théorème de la limite monotone, en un point intérieur**

On suppose que $a$ est intérieur à $I$, et que $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone. Alors $f$ admet une limite finie $l^-$ à gauche et une limite finie $l^+$ à droite en $a$. Plus précisément, si $f$ est croissante, alors

(1) $\lim\limits_{x \to a^-} f = \sup\limits_{I \cap ]-\infty, a[} f$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f = \inf\limits_{I \cap ]a, +\infty[} f$

(2) $l^- \leqslant f(a) \leqslant l^+$

Si $f$ est décroissante, alors

(1) $\lim\limits_{x \to a^-} f = \inf\limits_{I \cap ]-\infty, a[} f$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f = \sup\limits_{I \cap ]a, +\infty[} f$.

(2) $l^- \geqslant f(a) \geqslant l^+$.

6.b

**Démonstration**

$\square$

**Illustration**

Une fonction monotone est continue en un point intérieur à $I$ si et seulement si ses limites à gauche et à droite en ce point sont égales.

## 7. Caractérisation séquentielle de la continuité

**Proposition (Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite)** 7.a

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $l$ en $a$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)$ d'éléments de $I$ tendant vers $a$, la suite des images $(f(u_n))$ tend vers $l$.

**Démonstration**

On se place dans le cas où $a$ et $l$ sont finis.
On suppose que $f$ est de limite $l$ en $a$. Soit $u$ une suite d'éléments de $I$, de limite $a$. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Il existe un réel strictement positif $\delta$ tel que, pour tout $x$ de $I$ :

$$|x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$$

Il existe un entier $N$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - a| \leqslant \delta$. On a donc, pour tout $n \geqslant N$, $|f(u_n)-l| \leqslant \varepsilon$ : la suite de terme général $f(u_n)$ tend donc vers $l$.
Montrons la réciproque par contraposition : on suppose que $f$ n'est pas de limite $l$ en $a$, et on va construire une suite $(u_n)$ d'éléments de $I$ telle que $(f(u_n))$ ne tende pas vers $l$.
Comme $f$ ne tend pas vers $l$ en $a$, on a :

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \delta \wedge |f(x)-l| > \varepsilon)$$

Pour un tel $\varepsilon$, on choisit les valeurs suivantes de $\delta$ : $\delta_n = 2^{-n}$. Pour chaque entier $n$, il existe $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| \leqslant \delta_n$ et $|f(u_n)-l| > \varepsilon)$. La suite $(u_n)$ tend vers $a$, et $(f(u_n))$ ne tend pas vers $l$.

□

Cette caractérisation s'utilise surtout dans le sens direct, pour déterminer la limite d'une suite, ou, par contraposition, pour montrer que $f$ n'admet pas de limite, en exhibant $(u_n)$ tendant vers $a$ telle que $(f(u_n))$ diverge (ou en exhibant de suites $(u_n)$ et $(v_n)$ tendant vers $a$ telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'aient pas la même limite). Par exemple, on l'utilise souvent pour l'étude des suites récurrentes : si $(u_n)$ d'itératrice $f : I \to I$ tend vers un point $l$ de $I$ en lequel $f$ est continue, alors $l$ est un point fixe de $f$, *i.e.* $f(l) = l$.

**Exercice (Limite de sinus en l'infini)** 6

Faire l'exercice 1 de TD.

Cette caractérisation permet aussi d'étudier des équations fonctionnelles, en itérant la relation fonctionnelle souhaitée :

**Exercice (Équations fonctionnelles)** 7

Faire la première question de l'exercice 15 de TD.

Grâce à cette proposition, l'étude de limites de fonctions ne ressemble pas seulement à l'étude de limite d'une suite, elle en *résulte*.

En fait, cette proposition est surtout utilisée pour caractériser la continuité (et l'importance de ce corollaire justifie l'appellation de théorème) :

**Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité)** 7.b

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)$ d'éléments de $I$ convergeant vers $a$, la suite des images $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Ce critère est très utile pour prouver la non continuité d'une fonction : il suffit en effet pour ce faire d'exhiber au choix

(1) une suite convergeant vers $a$, mais d'image ne convergeant pas vers $f(a)$ ;

(2) une suite convergeant vers $a$, mais d'image divergente ;

(3) ou deux suites convergeant vers $a$, mais dont les images par $f$ ont des limites différentes.

Dans les deux derniers cas, on prouve même qu'aucun changement de la valeur de $f$ en $a$ ne rendra $f$ continue en $a$.

**Exercice (Continuité ponctuelle, ou pas)** 8

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0. La fonction $g = \text{Id} \times f$ est-elle continue en 0 ?

## 8. Fonctions continues sur un intervalle

### 8.1. Définition et premiers exemples

**Définition (Continuité sur un intervalle)** 8.a

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue sur $I$* si elle est continue en tout point de $I$. On note $\mathcal{C}(I)$ (ou $\mathcal{C}^0(I)$) l'ensemble des fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{R}$.

**Sur la quantification de la continuité globale** 8.1

$f$ est continue sur $I$ si et seulement si :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in I, \quad (|x-y| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Bien remarquer qu'*a priori*, l'$\eta$ est fonction de $\varepsilon$ et de $x$, et que cette assertion n'a pas de raison d'être équivalente à

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in I, \quad (|x-y| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

De l'étude menée précédemment, on déduit des résultats généraux sur les fonctions continues sur un intervalle :

**Proposition (Structure sur l'ensemble des fonctions continues sur $I$)**

$\mathcal{C}(I)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}^I$.

8.a

On a aussi, par exemple, si $f, g$ sont continues sur $I$ et si $g$ ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ continue sur $I$.

**Proposition (Composée d'applications continues)**

Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont continues sur $I$ et $J$ respectivement, alors $g \circ f$ est continue sur $I$.

8.b

**Exemple (Fonctions globalement continues)**

(1) Une fonction lipschitzienne est continue sur $I$ :

(2) Les fonctions constantes, l'identité, les fonctions polynomiales, la fonction valeur absolue, sont continues sur $\mathbb{R}$.

(3) La fonction carré, bien que non lipschitzienne, est continue. De même pour la fonction racine carrée (sur $\mathbb{R}_+$).

(4) Les fonctions usuelles (sinus, cosinus, tangente, exponentielle, logarithme, etc.) sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

(5) Une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) est continue sur tout intervalle où elle est définie.

(6) Si $f, g$ sont continues sur $I$, alors $|f|, \sup(f, g), \inf(f, g)$ le sont.

(7) Si $J$ est un intervalle contenu dans $I$, et que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur $I$, alors $f_{|J}$ est continue sur $J$.

(8) Si $a$ est une extrémité finie de $I$ n'appartenant pas à $I$, et si $f$ est continue sur $I$, et admet une limite finie en $a$, alors le prolongement par continuité de $f$ en $a$ est une fonction continue sur $\{a\} \cup I$.

(9) Si $f$ et $g$ sont continues sur $]a, b]$ et $[b, c[$ respectivement, et si $f(b) = g(b)$, alors la fonction $h$ définie par recollement sur $]a, c[$ est continue sur $]a, c[$.

(10) La fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $I$.

i

La continuité globale permet de prouver des résultats par des arguments de densité : par exemple, si une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur une partie dense $\Omega$ de $\mathbb{R}$, alors elle est identiquement nulle.

**Exercice (Fonction continue périodique non constante)**

Faire l'exercice 11 de TD.

9

### 8.2. Le théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose

(1) $f$ continue sur $[a, b]$ ;

(2) $f(a)f(b) \leqslant 0$.

Il existe alors un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

8.c

**Démonstration**

On écarte le cas évident où $f$ s'annule en $a$ ou $b$. Quitte à considérer $-f$ plutôt que $f$, on peut supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Considérons l'ensemble

$$\Omega = \{x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant 0\}$$

$\Omega$ est une partie non vide (elle comprend $a$) et majorée (par $b$) de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure $c$. Par définition de la borne supérieure, et en prenant $\varepsilon = 2^{-n}$, il existe une suite d'éléments de $\Omega$ tendant vers $c$. Par continuité de $f$ en $c$, la suite des images tend vers $f(c)$, et $f(c) \leqslant 0$. Comme $c < b$, on a $f(x) > 0$ pour tout $x \in ]c, b[$. Par continuité à droite en $c$, on obtient $f(c) \geqslant 0$. Il en résulte $f(c) = 0$.

□

**Illustration**

**Le théorème des valeurs intermédiaires par dichotomie**

Il existe une démonstration par dichotomie, en construisant une suite $([a_n, b_n])$ de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0, et tels que $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$ pour tout $n$. La limite commune $c$ des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ vérifie donc $f(c) = 0$.

8.2

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme un résultat d'existence, pas d'unicité (il n'y a d'ailleurs pas toujours unicité).

**Exercice (Polynôme réel de degré impair)**

Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle.

10

Corollaire ((Reformulation du théorème des valeurs intermédiaires))

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$. Soit $t$ un élément du segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. Il existe alors un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = t$.

8.d

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $x \mapsto f(x) - t$.

□

Exercice (Théorème des valeurs intermédiaires)

**1** Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'elle admet un point fixe.

**2** Faire l'exercice 5 de TD.

**3** Montrer qu'une fonction continue injective $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone.
**Indication :** on pourra considérer, pour $a \in I$ fixé, l'ensemble $I_a$ des taux d'accroissements de $f$ entre $a$ et un point quelconque de $I \setminus \{a\}$.

11

Théorème (Image continue d'un intervalle)

L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

8.e

Démonstration

On démontre que l'image d'un convexe est un convexe, ce qui nous ramène au corollaire précédent.

□

### 8.3. Fonctions continues sur un segment

Théorème (Image continue d'un segment)

L'image continue d'un segment est un segment.

8.f

**Démonstration**

On considère une application $f$ continue sur un segment $[a, b]$. $f(I)$ est donc un intervalle. Notons $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$. On sait que $]m, M[ \subset f(I)$ (par définitions des bornes supérieure et inférieure, et convexité d'un intervalle). Montrons que $m$ et $M$ sont des éléments de $f(I)$ (en particulier, $m$ et $M$ sont finis), ce qui impose $f(I) = [m, M]$.
Montrons que $M \in f(I)$ (on démontre de manière analogue que $m \in f(I)$). Que $M$ soit fini ou pas, il existe une suite $(y_n)$ d'éléments de $f(I)$ tendant vers $M$. Pour chaque entier naturel $n$, il existe un élément $x_n$ de $[a, b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite $(x_n)$ est une suite de $[a, b]$, et admet donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$, convergente, vers un élément $c$ de $[a, b]$. La suite des images de cette suite extraite est une suite extraite de $(y_n)$, donc tend vers $M$. Par continuité de $f$ en $c$, on a $f(c) = M$ : $M$ est un élément de $f(I)$.
De même pour $m$. Finalement, $f(I) = [m, M]$.

$\square$

L'image continue d'un intervalle est un intervalle, et l'image continue d'un segment est un segment. Il ne faut pas pour autant croire que l'image continue d'un intervalle soit un intervalle de même nature :

**Théorème (Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes)** 8.g

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes, *i.e.* il existe $c$ et $c'$ éléments de $[a, b]$ tels que

$$f(c) = \sup_{[a,b]} f \text{ et } f(c') = \inf_{[a,b]} f$$

**Exercice (Minoration d'une fonction continue sur un segment)** 12

On suppose $I = [a, b]$, que $f$ est continue sur $I$, et que pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe alors $\alpha > 0$ tel que $f(x) \geqslant \alpha$. Montrer que ceci peut tomber en défaut si $I$ n'est pas un segment.

### 8.4. Réciproque d'une fonction continue strictement monotone

**Lemme Condition suffisante de continuité pour une fonction monotone** 8.h

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone sur un intervalle $I$. Si $f(I)$ est un intervalle, alors $f$ est continue sur $I$.

**Démonstration**

On sait que $f$ admet des limites à gauche (resp. à droite) en tout point où cela a un sens. Si l'image est un intervalle, les limites à gauche et à droite éventuelles en $a$ doivent valoir $f(a)$.

$\square$

**Théorème de la bijection réciproque** 8.i

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$, et on suppose que la fonction $f$ est

(1) continue sur $I$ ;

(2) strictement monotone sur $I$.

La fonction $f$ réalise alors une bijection de l'intervalle $I$ vers l'intervalle $J$, et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que $f$.

**Démonstration**

La fonction $f$ est clairement une bijection de $I$ sur $J$ (l'injectivité résulte de la stricte monotonie). La continuité de la réciproque résulte du lemme.

$\square$

**Exemple (Continuité de la racine $n$-ième)** ii

La fonction racine $n$-ième sur $\mathbb{R}_+$ si $n$ est pair et $\mathbb{R}$ si $n$ est impair est continue.

**Exercice (Bijection réciproque continue)** 13

Montrer que l'application $f \ : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto xe^x + \ln(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, et que sa bijection réciproque est continue sur $\mathbb{R}$.

## 9. Uniforme continuité

**Définition (Uniforme continuité)** 9.a

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *uniformément continue* sur $I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in I^2, \quad (|x-y| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Un $\eta$ pour un tel $\varepsilon$ est appelé *module d'uniforme continuité* pour $f$ et $\varepsilon$.

Illustration

Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
Une fonction uniformément continue sur $I$ est continue sur $I$.
Nous verrons des exemples montrant que les deux réciproques sont fausses. Cependant, on a une réciproque partielle :

**Théorème de Heine** 9.a

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

**Démonstration**

On considère une fonction continue sur un segment $[a,b]$. On raisonne par l'absurde, en supposant :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in I, \quad (|x-y| \leqslant \eta \text{ et } |f(x)-f(y)| > \varepsilon)$$

On construit deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ telles que $(x_n - y_n)$ tende vers 0 (on prend $\eta = 2^{-n}$), et dont la suite des images vérifie $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de $(x_n)$ une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente, vers un point $c$ du segment $[a,b]$. La suite $(y_{\varphi(n)})$ tend également vers $c$, et on arrive, par continuité de $f$ en $c$, à l'absurdité $0 \geqslant \varepsilon$.

□

**Exercice (Continuité (uniforme) et caractère lipschitzien)** 14

**1** Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
**2** Montrer que la fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$ mais non uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

## 10. Fonctions à valeurs complexes

**Définition (Parties réelle et imaginaire d'une fonction)**

Soit $\mathbb{C}^I$ l'ensemble des fonctions d'un intervalle $I$, et à valeurs complexes. Soit $f \in \mathbb{C}^I$ : la *partie réelle* (resp. la *partie imaginaire*) de $f$ dans $\mathbb{C}$, notée $\mathrm{Re}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$) est la fonction définie, pour tout élément $x$ de $I$, par :

$$(\mathrm{Re}(f))(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \quad (\text{resp. } (\mathrm{Im}(f))(x) = \mathrm{Im}(f(x))).$$

10.a

**Utilité des parties réelle et imaginaire d'une fonction**

Nous allons voir que dans la plupart des cas, l'étude de $f$ se ramène à celle de ses parties réelle et imaginaire.

10.1

**Définition (Conjuguée, module d'une fonction)**

On définit l'application *conjuguée de $f$*, notée $\bar{f}$ par

$$\forall x \in I, \quad \bar{f}(x) = \overline{f(x)}$$

On définit l'application *module de* $f$, notée $|f|$, par

$$\forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

10.b

**Définition (Fonction bornée à valeurs complexes)**

Une fonction est dite *bornée* si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, \quad |f(x)| \leqslant M$$

10.c

**Fonction bornée à valeurs complexes**

Une fonction $f \in \mathbb{C}^I$ est bornée si et seulement si l'application $|f|$ est bornée, si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont (grâce aux inégalités habituelles).

10.2

**Définition (Limite d'une fonction à valeurs complexes)**

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ *admet $l \in \mathbb{C}$ pour limite en $a$* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow (|f(x)-l| \leqslant \varepsilon)$$

On note alors $\lim_a f = l$, etc.

10.d

**Limite d'une fonction à valeurs complexes**

(1) La définition est donc formellement la même que dans le cas réel.

(2) $f$ admet $l$ pour limite en $a$ (fini) si et seulement si la fonction réelle $|f - l|$ admet 0 pour limite en $a$.

(3) Pas de limite *valant* $\pm\infty$, mais on peut toujours avoir une limite *en* $\pm\infty$. En ce sens, l'étude est simplifiée.

(4) Une fonction admet au plus une limite en un point donné.

10.3

**Proposition (Limite d'une fonction complexe et caractère localement borné)**

Toute fonction complexe admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.

10.a

**Démonstration**

Prendre $\varepsilon = 1$ dans l'assertion formelle exprimant $\lim_a f = l$.

□

**Proposition (Limite d'une fonction complexe et parties réelle et imaginaire)**

$f$ admet $l = l_r + il_i$ $(l_r, l_i \in \mathbb{R})$ pour limite en $a$ si et seulement si $\lim_a(\operatorname{Re} f) = l_r$ et $\lim_a(\operatorname{Im} f) = l_i$.

10.b

**Démonstration**

Résulte des inégalités

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

□

**Définition (Continuité ponctuelle d'une fonction complexe)**

$f$ est *continue* en $a \in I$ si $\lim_a f = f(a)$ (*i.e.* $f$ admet une limite finie en $a$).

10.e

**Proposition (Continuité et parties réelle et imaginaire)**

$f$ est continue en $a$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

10.c

**Démonstration**

Corollaire immédiat de la proposition précédente.

□

**Théorème (Opérations algébriques pour les fonctions complexes)** 10.d

On suppose que $f$ et $g$ tendent respectivement vers $l \in \mathbb{C}$ et $l' \in \mathbb{C}$ en $a$.

– La fonction $|f|$ a une limite en $a$ et
$$\lim_{a} |f| = |l|$$
– La fonction $\bar{f}$ a une limite en $a$ et
$$\lim_{a} \bar{f} = \bar{l}$$
– La fonction $(f+g)$ a une limite en $a$ et
$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = l + l'$$
– La fonction $(fg)$ a une limite en $a$ et
$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = ll'$$
– Lorsque $l' \neq 0$, la fonction $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, la restriction de $g$ à ce voisinage a une limite en $a$ et
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l'}$$
De plus,
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$$

**Démonstration**

On se ramène essentiellement au cas réel, quitte à considérer parties réelle et imaginaire. Alternativement, on peut d'abord montrer la caractérisation séquentielle de la continuité (toujours valable), et se ramener ainsi au cas déjà traité des suites complexes.

□

On ne détaille pas toutes les extensions possibles des définitions liées aux éléments de $\mathbb{R}^I$ (limite à gauche et à droite, dont on ne se sert pratiquement pas dans le cas des fonctions à valeurs complexes).

**Notation (Fonctions complexes continues sur un intervalle)** 10.f

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur $I$ à valeurs complexes, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{C}^I$, continues en tout point de $I$.

**Structures sur l'ensemble des fonctions complexes continues sur un intervalle** 10.4

Il s'agit d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (comprend la fonction nulle, et est stable par combinaison linéaire : si $f$ et $g$ sont continues sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\lambda$, $\mu$ deux nombres complexes, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur $I$), d'un anneau, en bref d'une $\mathbb{C}$-algèbre.

Il n'y a pas lieu de définir la croissance de $f$, et beaucoup de théorèmes n'ont pas d'analogue immédiat dans le cas complexe. À titre d'exemple, le théorème des valeurs intermédiaires, qui stipule (sous une de ses formes) que l'image continue d'un convexe est un convexe, ne fonctionne plus : l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$, bien que continue, envoie le convexe $\mathbb{R}$ sur le cercle unité (évidemment non convexe).

## 11. Questionnaire 9 : Fonctions

Sauf mention contraire, $f$ et $g$ sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

**1** Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, alors $f$ est croissante au voisinage de $+\infty$.

**2** Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ alors $f$ n'est pas injective.

**3** Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ alors $f$ est surjective.

**4** Si $f^2$ est continue, alors $f$ est continue.

**5** Si $fg$ est continue, alors en tout réel, $f$ ou $g$ est continue.

**6** Si $f$ et $g$ sont uniformément continues, alors $fg$ l'est.

**7** Si $f$ définie sur $[0,1[$, est uniformément continue, alors elle est bornée.

**8** Si $f$ définie sur $[0,1[$, est uniformément continue, alors elle est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

**9** Si $f$ est uniformément continue sur deux intervalles $I$ et $J$, alors elle est uniformément continue sur la réunion $I \cup J$.

**10** Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, où $\alpha < \beta$. Si la restriction de $f \; : ]\alpha, \beta[ \to \mathbb{R}$ à tout segment inclus dans $]\alpha, \beta[$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, $f$ vérifie-t-elle nécessairement cette propriété $\mathcal{P}$ ? On traitera cette question lorsque $\mathcal{P}$ est successivement le fait d'être borné, continu, uniformément continu, etc.

# 12. Feuille de TD 22 : Fonctions numériques

## 12.1. Limites

**Exercice 1 (Limite de sinus en l'infini)** 0

Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

**Exercice 2 (Fonctions périodiques et limite en l'infini)** 0

Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques admettant une limite en $+\infty$.

## 12.2. Continuité

**Exercice 3 (Cardinal de l'image d'un intervalle par une fonction continue)** 0

Soit $I$ un intervalle réel, $f$ une application continue de $I$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(I)$ est infini ou $f$ est constante.

**Exercice 4 (Fonction continue de valeur absolue constante)** 0

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I$, telle que $|f|$ soit constante sur $I$. Montrer que $f$ est constante sur $I$.

**Exercice 5 (Enfin une application concrète)** 0

Un homme parcourt 8 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure durant lequel il a parcouru 4 kilomètres.

**Exercice 6 (Prolongements par continuité)** 0

Déterminer le prolongement par continuité des fonctions suivantes (on pourra utiliser des résultats sur les dérivées) :

**1** $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$.

**2** $g : x \mapsto \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$.

**3** $h : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$.

**Exercice 7 (Continuité du max et du min)** 1

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$. Montrer que $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues.

Exercice 8 (Points fixes) 1

**1** Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue, alors $f$ admet un point fixe.
**2** Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est croissante, alors $f$ admet un point fixe.
**3** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que $f$ admet un unique point fixe.
**4** Soit $I$ un segment et $f$ une application continue telle que $f(I) \subset I$. Montrer que $f$ admet au moins un point fixe.
**5** Même question, en supposant cette fois $I \subset f(I)$.

Exercice 9 (Minimum et monotonie) 2

On pose $f : x \mapsto |x| \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que $f$ est continue et minimale en 0, mais que pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ n'est pas monotone.

Exercice 10 (Minoration, majoration, encadrement) 2

**1** Montrer qu'une fonction continue sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ est minorée par un réel strictement positif.
**2** Soit $f$ une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ ayant une limite finie $l_-$ en $-\infty$ et une limite finie $l_+$ en $+\infty$. Montrer que $f$ est bornée, puis que si $l_- = l_+$, alors $f$ atteint sa borne inférieure ou sa borne supérieure.
**3** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$ : $0 < f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$ : $C\,f(x) \leqslant g(x)$.

Exercice 11 (Fonction continue périodique non constante) 2

Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, périodique et non constante admet une plus petite période (strictement positive).

Exercice 12 (Borne supérieure d'une fonction continue sur l'intérieur d'un segment) 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer : $\sup\limits_{[a,b]} f = \sup\limits_{]a,b[} f$.

Exercice 13 (Lieu de continuité original) 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle en tout irrationnel, et valant $\frac{1}{q}$ en tout rationnel $\frac{p}{q}$ mis sous sa forme canonique. Donner le lieu de continuité de $f$.

Exercice 14 (Fonction continue passant d'un rationnel à un irrationnel, et réciproquement) 5

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

**Exercice 15 (Équations fonctionnelles)** — 1 à 4

**1** Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x^2) = f(x).$$

**2** Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

**3** Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

**4** Trouver toutes les fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}$ admettant pour périodes 1 et $\sqrt{2}$.

**5** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et involutive (*i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$). Montrer que $f$ est l'application identique sur $\mathbb{R}$.

**6** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax+b) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $a$ est fixé différent de 1 et $-1$, et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est constante.

**7** Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\lim\limits_{0} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et : $\forall\, x, y > 0, \quad f(xf(y)) = yf(x)$.

**Indication :** étudier les points fixes de $f$.

## 12.3. Fonctions lipschitziennes

**Exercice 16 (Opérations sur les fonctions lipschitziennes)** — 0

**1** Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes l'est.

**2** Montrer que la composée de deux fonctions lipschitziennes l'est.

**3** Montrer que si $f$ et $g$ sont lipschitziennes sur un domaine borné, alors leur produit est lipschitzien.

**4** Soit $f$ une fonction lipschitzienne sur un segment, ne s'annulant pas. Montrer que $\frac{1}{f}$ est lipschitzienne.

**Exercice 17 (Théorème du point fixe de Picard)** — 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $k$-lipschitzienne avec $0 \leqslant k < 1$ ($f$ est dite *contractante*).

**1** Montrer que $f$ admet au plus un point fixe.

**2** On fixe $u_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite récurrente $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pout tout entier naturel $n$ converge vers un (donc le) point fixe de $f$. Estimer la vitesse de convergence de $(u_n)$ vers $x$.

**Indication :** on pourra montrer que la suite $(u_n)$ est de Cauchy.

## 12.4. Uniforme continuité

**Exercice 18 (Exemple d'uniforme continuité)** — 0

Montrer que $x \mapsto x\ln(x)$ est uniformément continue sur $]0,1]$.

### Exercice 19 (Uniforme continuité et caractère lipschitzien) — 1

**1** Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

**2** Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue mais non lipschitzienne.

**3** Donner un exemple de fonction continue non uniformément continue.

### Exercice 20 (Uniforme continuité et périodicité) — 2

Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

### Exercice 21 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité) — 2

**1** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que si $(x_n)$ et $(y_n)$ sont des suites d'éléments de $I$ telles que $\lim\limits_{n}(y_n - x_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n}(f(y_n) - f(x_n)) = 0$.

**2** Réciproquement, cette propriété séquentielle entraîne-t-elle l'uniforme continuité de $f$ ?

**3** Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

### Exercice 22 (Uniforme continuité et limite en l'infini) — 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue, telle que $f(n) \to +\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

### Exercice 23 (Uniforme continuité et limite finie en un point adhérent) — 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ continue, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f$ admet une limite finie en $b$. Montrer que $f$ est uniformément continue sur $[a, b[$.

### Exercice 24 (Contrôle d'une fonction uniformément continue) — 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \alpha|x| + \beta.$$

CHAPITRE XXIII

# Dérivation

## Sommaire



Dans tout ce chapitre, les applications considérées sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (sauf mention expresse du contraire).

## 1. Dérivée en un point, fonction dérivée

### 1.1. Premières définitions

**Définition (Taux d'accroissement)**

Soit $x$ et $y$ deux points distincts de $I$. On appelle *taux d'accroissement* de $f$ entre $x$ et $y$ la quantité

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

1.a

Définition (Dérivabilité ponctuelle)

On dit que $f$ est *dérivable* en un point $a$ de $I$ si

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $a$ ($x \in I \setminus \{a\}$).
le cas échéant, cette limite est appelé *nombre dérivé* (ou *dérivée*) de $f$ en $a$ et est notée $f'(a)$, ou $D(f)(a)$, ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

1.b

Interprétation géométrique : soit $a \in I$, et $x \in I \setminus \{a\}$. Dire que $f$ est dérivable en $a$, c'est dire que la droite $(AM)$ ($A(a, f(a))$, $M(x, f(x))$) possède une position limite *non verticale* $\Delta$, de coefficient directeur $f'(a)$, lorsque $x$ tend vers $a$. On dit que $\Delta$ est la *tangente* à $\Gamma$ (graphe de $f$) en son point d'abscisse $a$ :

Illustration

Une équation de $\Delta$ est $y = f(a) + (x-a)f'(a)$.

Interprétation cinématique de la dérivée

$f'(a)$ est la limite en $a$ des taux d'accroissement de $f$ en $a$ : le taux d'accroissement de $f$ entre $x$ et $a$ peut s'interpréter comme la vitesse moyenne algébrique entre les instants $x$ et $a$ (on voit $f$ comme une fonction d'une variable temporelle dont les valeurs sont des distances) : la dérivée de $f$ en $a$ s'interprète donc comme la vitesse instantanée de $f$ en $a$.

1.1

On peut toujours se ramener à une étude en 0 en posant $x = a + h$.

Proposition (Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1)

$f$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si existe un réel $l$ et une application $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, de limite nulle en $a$, et tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + (x-a)l + (x-a)\varepsilon(x)$$

Le cas échéant, le réel $l$ vaut $f'(a)$.

1.a

Démonstration

Si $f$ s'écrit comme dans l'énoncé, alors en divisant par $x - a$, on constate que $f$ est dérivable en $a$, de nombre dérivé $l$ (et donc $l = f'(a)$). Réciproquement, on pose $l = f'(a)$, puis on définit sans avoir le choix la fonction $\varepsilon$ (y compris en $a$) :

On vérifie que $\lim_a \varepsilon = 0$ et que $f$ s'écrit comme annoncé. $\square$

Illustration

Corollaire (De la dérivabilité à la continuité)

Si $f$ est dérivable en $a$, alors elle est continue en $a$.

1.b

La réciproque est fausse, donnez des exemples :

Voici quelques exemples de calculs de dérivées (certaines preuves utilisent des résultats ultérieurs) :

Exemple (Dérivée ponctuelle)

(1) Si $f$ est constante, sa dérivée en tout point $a \in \mathbb{R}$ est nulle. Plus généralement, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'application affine $f : x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = \alpha$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction puissance $n$-ième $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = na^{n-1}$. On peut le voir avec la formule du binôme de Newton

$$(a+h)^n - a^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k a^{n-k} = nha^{n-1} + h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} a^{n-k}$$

ou avec la formule sans nom.

(3) La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.

(4) La fonction logarithme ln, définie comme primitive, est dérivable sur son domaine, et pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(a) = 1/a$.

(5) La fonction exponentielle est dérivable en tout réel $a$ et $\exp'(a) = \exp(a)$.

i

Exercice (Dérivées des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques)

Rappeler, en tout point où cela a un sens, les dérivées des fonctions trigonométriques (éventuellement hyperboliques) et leurs réciproques.

1

### 1.2. Opérations sur les applications dérivables en un point

Proposition (Linéarité de la dérivation)

Soient $f$ et $g$ deux applications dérivables au point $a$. Pour tous scalaires $\alpha, \beta$, l'application $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable en $a$, et

$$h'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

1.c

Démonstration

□

Cette *linéarité* de la dérivation peut s'interpréter comme une linéarité de la dérivation dans certains espaces vectoriels fonctionnels : notons $\mathcal{D}_a(I)$ l'ensemble des fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$, dérivables en $a$. La proposition précédente permet d'affirmer que

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{D}_a(I) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f'(a) \end{array}$$

est linéaire (c'est donc une forme linéaire).

Proposition (Dérivation d'un produit)

Soient $f$ et $g$ deux applications dérivables en un point $a$. Alors $h = fg$ est dérivable en $a$, et

$$h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

1.d

Démonstration

On introduit [a] par « relation de Chasles » un terme mixte, en écrivant $f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))$, puis on revient à la définition de la dérivée en $a$.

a. Entrainez-vous à le montrer en utilisant la proposition 1.a page 538.

□

**Proposition (Dérivée d'un quotient)** 1.e

Si $g$ est dérivable en $a$, avec $g(a) \neq 0$, alors $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, $h = \frac{1}{g}$ (définie au voisinage de $a$) est dérivable en $a$, et

$$h'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

Si en outre $f$ est dérivable en $a$, alors $h = \frac{f}{g}$ (définie au voisinage de $a$) est dérivable en $a$, avec

$$h'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

**Démonstration**

Supposons $g$ dérivable en $a$, avec $g(a) \neq 0$. $g$ est dérivable donc continue en $a$, et $g(a) \neq 0$ : $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$.
Revenir alors [a] à la définition pour la première formule. Le second résulte quant à lui du premier point et de la dérivation d'un produit.

[a] Alternativement, on aurait pu voir $1/g$ comme $\text{inv} \circ g$ (où inv est la fonction inverse), puis utiliser le résultat suivant.

□

**Proposition (Dérivée d'une composée)** 1.f

Soit $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ une application dérivable en un point $a$ de $I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une application dérivable en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable au point $a$, et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)(g' \circ f)(a)$$

**Démonstration**

Utiliser les développements limités (proposition 1.a)

□

**Proposition (Dérivation et bijection réciproque)** 1.g

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue strictement monotone sur $I$, dérivable en $a$, et telle que $f'(a) \neq 0$. L'application $f$ est alors une bijection de $I$ sur l'intervalle $J = f(I)$, $f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$, et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Démonstration

□

Illustration

Pour retrouver cette formule (mais non pour la démontrer), on peut également dériver la relation $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$ en $a$.

On retrouve les dérivées des applications réciproques des fonctions trigonométriques.

Proposition (Dérivée d'une puissance)

1.h

Soit $f$ dérivable en $a$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f^n$ est dérivable en $a$, et

$$(f^n)'(a) = nf'(a)f^{n-1}(a)$$

Cette formule reste valable si $n \in \mathbb{Z}$ si en outre $f(a) \neq 0$.

Démonstration

□

Exercice (Calculs de dérivées, dérivabilité)

2

Faire la première question de l'exercice 2 de TD.

### 1.3. Dérivée à gauche, dérivée à droite

Comme pour la notion de limite, il existe des notions de dérivabilité à gauche et à droite :

**Définition (Dérivabilité ponctuelle à gauche ou à droite)**

Soit $a \in I$, distinct de l'extrémité gauche de $I$ (resp. de l'extrémité droite de $I$). On dit que $f$ est *dérivable à gauche (resp. à droite)* en $a$ si l'application $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en $a$.
Si elle existe, cette limite est appelée *(nombre) dérivé(e) à gauche (resp. à droite)* en $a$, et notée $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).

1.c

$f$ est dérivable à gauche (resp. à droite) en $a$ si et seulement si $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ (resp. $f_{|I\cap[a,+\infty[}$) est dérivable en $a$. Par conséquent, la dérivabilité à gauche (resp. à droite) entraîne la continuité à gauche (resp. à droite).

**Illustration**

$f$ est dérivable en $a$ (intérieur à $I$) si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en $a$, et si $f'_g(a) = f'_d(a)$. La dérivée vaut alors cette valeur commune.
Bien sûr, les résultats généraux sur les opérations entre fonctions dérivables en $a$ admettent des analogues pour les fonctions seulement dérivables à gauche en $a$, ou seulement dérivables à droite en $a$, peu utilisés en pratique (faites seulement attention à la composition).

**Exercice (Une caractérisation de la dérivabilité)**

Faire l'exercice 8 de TD.

3

## 2. Dérivabilité sur un intervalle

### 2.1. Définition et premières propriétés

**Définition (Dérivabilité sur un intervalle)**

On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si $f$ est dérivable en tout point de $I$. L'application, notée $f' : I \to \mathbb{R}$, qui à tout point de $I$ associe son nombre dérivé est appelée *fonction dérivée* de $f$. Elle peut également être notée $D(f)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
On note $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ (ou simplement $\mathcal{D}(I)$) l'ensemble des fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $I$.

2.a

La dérivabilité sur $I$ est donc une accumulation de propriétés locales : comme pour la continuité, cette accumulation va permettre de trouver des propriétés *globales*.

**Définition (Fonction continûment dérivable)**

On dit que $f \in \mathbb{R}^I$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ si $f$ est dérivable sur $I$ et si $f'$ est continue sur $I$. On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications. On dit également que $f$ est *continûment dérivable*.

2.b

Bien sûr, une application $f$ dérivable sur $I$ (et *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$) est continue sur $I$.

Comme conséquence des résultats sur la dérivabilité en un point, on obtient les résultats suivants sur les opérations entre applications dérivables sur $I$.

**Proposition (Fonction dérivée d'une combinaison linéaire)**

Soient $f$ et $g$ deux applications dérivables sur $I$. Pour tous scalaires $\alpha, \beta$, l'application $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur $I$, et

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

2.a

**Proposition (Fonction dérivée d'un produit)**

Soient $f$ et $g$ deux applications dérivables sur $I$. Alors $fg$ est dérivable sur $I$, et

$$(fg)' = f'g + fg'$$

2.b

**Proposition (Fonction dérivée d'un quotient)**

Si $g$ ne s'annule pas sur $I$ et est dérivable sur $I$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $I$, et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Si en outre $f$ est dérivable sur $I$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I$, et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

2.c

**Proposition (Fonction dérivée d'une composée)**

Soit $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ une application dérivable sur $I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur $I$, et

$$(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$$

2.d

**Proposition (Fonction dérivée d'une puissance)**

Soit $f$ dérivable sur $I$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f^n$ est dérivable sur $I$, et

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}$$

Cette formule reste valable si $n \in \mathbb{Z}$ si en outre $f$ ne s'annule pas.

2.e

Proposition (Fonction dérivée et bijection réciproque)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue strictement monotone sur $I$, dérivable sur $I$. Alors $f$ est une bijection de $I$ sur l'intervalle $J = f(I)$, et pour tout $a$ tel que $f'(a) \neq 0$, $f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$, et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

2.f

Exercice (Effets de la dérivation)

Faire l'exercice 1 de TD.

4

Bien sûr, ces résultats admettent des analogues pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Structurellement, on en déduit notamment que $\mathcal{C}^1(I)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

### 2.2. Extremums d'une fonction dérivable. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Proposition (Extemum local et dérivée)

Si $f$ admet un extremum local en $a$ intérieur à $I$, et si $f$ est dérivable en $a$, alors :

$$f'(a) = 0$$

2.g

Démonstration

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de $a$ tel que $f_{|\mathcal{V}}$ admette un extremum local en $a$ (disons un maximum, pour fixer les idées). Soit $x \in \mathcal{V} \setminus \{a\}$. Le taux d'accroissement de $f$ entre $x$ et $a$ est positif ou nul si $x < a$, et négatif ou nul si $x > a$. On a donc $f'_g(a) \geqslant 0$ et $f'_d(a) \leqslant 0$. Par dérivabilité de $f$ en $a$, on a donc $f'(a) = 0$.

□

Illustration

La réciproque est bien sûr fausse :

Illustration

Attention à la condition $a$ intérieur à $I$ :

Illustration

**Théorème de Rolle** 2.h

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

**Démonstration**

Si $f$ est constante, le résultat est clair (tout point $c$ de $]a, b[$ convient). Supposons donc $f$ non constante. Continue sur le segment $[a, b]$, la fonction $f$ est bornée et atteint ses bornes $m$ et $M$. N'étant pas constante, l'une de ces bornes ne vaut pas la valeur commune de $f$ en $a$ et $b$ : l'une de ces bornes est atteinte en un point $c$ de $]a, b[$. La fonction $f$ présente un extremum global donc local en le point $c$ intérieur à $]a, b[$ : $f$ est de dérivée nulle en $c$.

$\square$

Illustration

Aucune hypothèse n'est superflue (y compris le fait que $f$ soit à valeurs réelles) :

**Exercice (Tangente passant par un point donné)**

Faire la troisième question de l'exercice 13 de TD.

5

**Théorème (Égalité des accroissements finis)**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c$ dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

2.i

**Démonstration**

On introduit une fonction auxiliaire $\varphi$, à laquelle on souhaite appliquer le théorème de Rolle. On cherche $\varphi$ sous la forme

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - k(x - a) \end{array}$$

pour un certain réel $k$. On choisit donc $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Le théorème de Rolle appliqué à $\varphi$ donne le résultat annoncé.

$\square$

Illustration

Le travail principal a donc été effectué pour le théorème de Rolle : l'égalité des accroissements finis en est à la fois une extension et un corollaire.

Il n'y a aucune raison que les « $c$ » dont il est question dans ces deux théorèmes soient uniques.

Comme corollaire, voici l'importante inégalité des accroissements finis :

**Théorème (Inégalité des accroissements finis)** 2.j

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
On suppose qu'il existe des réels $m$ et $M$ tels que $m \leqslant f' \leqslant M$. Pour tous élements $x$ et $y$ de $[a, b]$ vérifiant $x \leqslant y$, on a :

$$m(y - x) \leqslant (f(y) - f(x)) \leqslant M(y - x)$$

**Démonstration**

Soit $x$ et $y$ des éléments de $[a, b]$. Si $x = y$, l'assertion est évidente. Sinon, il existe $c$ strictement compris entre $x$ et $y$ tel que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$. Le résultat s'ensuit immédiatement. □

**Corollaire (Caractère lipschitzien et dérivation)** 2.k

Soit $f$ une application continue sur $I$, dérivable sur l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de $I$. La fonction $f$ est $k$-lipschitzienne sur $I$ si et seulement si

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \quad |f'(x)| \leqslant k$$

**Démonstration**

Si $f$ est $k$-lipschitzienne, on fixe $x \in \overset{\circ}{I}$, et on fait tendre $y$ vers $x$ dans $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, ce qui donne $|f'(x)| \leqslant k$. Si réciproquement $|f'| \leqslant k$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors l'inégalité des accroissements finis donne immédiatement le résultat. □

**Exemple (Fonction continûment dérivable)** i

(1) La fonction arctan est donc 1-lipschitzienne [a].

(2) Une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est donc $(\max |f'|)$-lipschitzienne.

a. Cela peut vous aider à montrer que $f$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ est uniformément continue

### 2.3. Étude aux bornes

**Proposition (Fonctions continûment dérivables, étude aux bornes)** 2.1

Soit $f$ une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. On suppose que $f'$ possède une limite finie $l$ en $a$ à droite. Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, avec $f'(a) = l$.

**Démonstration**

Il ne reste qu'à prouver la dérivabilité de $f$ en $a$ et que $f'(a) = l$ ($f'$ sera alors continue en $a$). Soit $x \in ]a, b[$. Il existe $c_x \in ]a, x[$ tel que $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} = f'(c_x)$. Comme $c_x$ tend vers $a$ lorsque $x$ tend vers $a$, on constate que $f$ est dérivable en $a$, et que $f'(a) = l$. $\square$

**Illustration**

Si on remplace la condition « $f'$ possède une limite finie $l$ en $a$ à droite » par « $f'$ possède une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ en $a$ à droite », alors la courbe représentative de $f$ admet au point $(a, f(a))$ une demi-tangente verticale (la démonstration est analogue).

Illustration

On a bien sûr un résultat analogue en $b$. On utilise souvent cette proposition sous la variante suivante :

**Théorème du prolongement continûment dérivable**

On suppose $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, admettant une limite finie en $a$, ainsi que sa dérivée. La fonction $f$ est alors prolongeable par continuité en $a$, en une application de classe $\mathcal{C}^1$.

2.m

En réalité, on pourrait supprimer la condition $f$ admet une limite finie en $a$ (elle résulte des autres), mais c'est un peu délicat à montrer.

**Exercice (Dérivation, dérivabilité)**

Faire l'exercice 2 de TD.

6

### 2.4. Dérivabilité et monotonie

**Proposition (Dérivation et constance)**

Toute application constante $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle $I$, et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$. Réciproquement, si $f$ est continue sur $I$, dérivable sur l'intérieur de l'intervalle $I$ et si $f'$ est l'application nulle, alors $f$ est constante sur $I$.

2.n

**Démonstration**

Un sens est trivial, l'autre résulte aisément de l'égalité des accroissements finis. □

On aurait aussi pu appliquer le corollaire 2.k de la page 548 dans le cas particulier où $k = 0$.

**Proposition (Fonctions de même dérivée)**

$f, g$ dérivables sur un intervalle $I$ ont des dérivées égales si et seulement si elles diffèrent d'une constante, *i.e.* :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad g(x) = f(x) + \lambda$$

2.o

Attention aux fonctions définies sur autre chose qu'un intervalle (d'ailleurs, cette remarque est valable pour tout le cours d'analyse).

**Proposition (Dérivée et monotonie)** 2.p

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. L'application $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$ si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$).

**Démonstration**

Si $f$ est croissante, alors tous les taux d'accroissements de $f$ entre deux réels sont positifs ou nuls. Pour tout $x$ de $I$, le nombre dérivé $f'(x)$ est donc positif ou nul. Réciproquement, si $f' \geqslant 0$, alors l'égalité des accroissements finis montre que tout taux d'accroissement de $f$ est positif ou nul, *i.e.* $f$ est croissante. Considérer $-f$ si $f$ est décroissante.

□

**Proposition (Dérivée et stricte monotonie)** 2.q

Soit $f$ une application dérivable et monotone.
L'application $f$ est strictement monotone sur $I$ si et seulement si le lieu de non annulation de $f'$ est dense dans $I$ (*i.e.* $f'$ n'est nulle sur aucun sous-intervalle de $I$ d'intérieur non vide).

**Démonstration**

Sachant que $f$ est monotone, $f$ est strictement monotone si et seulement si elle est injective si et seulement si il n'existe pas $a$ et $b$ distincts tels que $f(a) = f(b)$, si et seulement si il n'existe pas $a$ et $b$ distincts tels que $f$ soit constante sur [a,b], si et seulement si $f$ n'est constante sur aucun sous-intervalle de longueur non nulle, si et seulement si $f'$ n'est nulle sur aucun sous-intervalle de longueur non nulle.

□

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

**Corollaire (Condition suffisante de stricte monotonie)** 2.r

Si $f$, dérivable sur $I$, est de dérivée à valeurs strictement positives (resp. strictement négatives), alors $f$ est strictement croissante (resp. est strictement décroissante).

Attention cependant, cette condition suffisante n'est pas nécessaire : donner un exemple de fonction strictement monotone (et dérivable) dont la dérivée s'annule une fois (puis une infinité de fois)

Illustration

Encore une fois, faites attention si vous ne travaillez pas sur un intervalle : la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$, bien que de dérivée strictement négative en tout réel non nul, n'est pas décroissante.

**Exercice (Produit de fonctions dérivables, croissantes et positives)** 7

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, dérivables, croissantes et positives. Montrer [a] que $fg$ est croissante.

*a.* Vous l'avez fait sans supposer les fonctions dérivables au chapitre sur les fonctions numériques

**Exercice (Fonction à dérivée logarithmique bornée (X PC 09))** 8

Faire l'exercice 7 de TD dans le cas où $f$ est de signe constant.

## 3. Dérivées successives

### 3.1. Premières définitions

**Définition (Dérivée d'ordre $n$)** 3.a

Soit $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f^{(0)} = f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est définie et dérivable sur $I$, on pose :

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe, on dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$, et $f^{(n)}$ est appelée *(application) dérivée n-ième*, ou *dérivée d'ordre $n$* de $f$ sur $I$.
L'application $f^{(n)}$ peut également être notée $D^n(f)$ ou encore $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

On note souvent $f''$ et $f'''$ pour les dérivées seconde et troisième de $f$ (lorsqu'elles existent).

Une fonction $n$ fois dérivable (pour $n \geqslant 1$) est continue, ainsi que $f^{(k)}$, pour tout $k < n$.

Si $f$ est dérivable $n$ fois sur $I$, alors pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}$ est dérivable $n-k$ fois sur $I$, et $f^{(n)} = (f^{(k)})^{(n-k)}$.

**Définition (Fonction $k$ fois continûment dérivable)**

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application $k$ fois dérivable. On dit que $f$ est de *classe $\mathcal{C}^k$* sur $I$, ou que $f$ est *$k$ fois continûment dérivable* sur $I$, si, de plus, $f^{(k)}$ est continue sur $I$.
On note $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^k(I)$) l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $\mathbb{R}$.
On dit que $f$ est de *classe $\mathcal{C}^\infty$* sur $I$, ou que $f$ est *indéfiniment dérivable* sur $I$, si elle est $k$ fois dérivable, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $I$ dans $\mathbb{R}$.

3.b

Une application appartenant à $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ n'est donc rien d'autre qu'une application continue de $I$ dans $\mathbb{R}$. Bien entendu, pour tout $k \geqslant 1$, on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$$

De plus

$$\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$$

En particulier, toutes les dérivées d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont continues.

**Exemple (La fonction inverse est indéfiniment dérivable)**

La fonction inverse $inv$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. sur $\mathbb{R}_-^*$), et, pour tout entier naturel $k$, tout réel non nul $x$ :

$$inv^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

i

### 3.2. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$

Dans ce paragraphe, $k$ désigne un entier non nul. On laissera le lecteur déduire de ces résultats les analogues pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Proposition (Classe et combinaisons linéaires)**

Soient $f, g$, $k$ fois dérivables, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est $k$ fois dérivable sur $I$, et

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\lambda f + \mu g$ l'est également.

3.a

**Proposition (Formule de Leibniz)**

Soient $f, g$ $k$ fois dérivables. La fonction $fg$ est alors $k$ fois dérivable sur $I$, et :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $fg$ l'est également.

3.b

Démonstration

$\square$

**Proposition (Classe et composition)**

Soit $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ de classe $k$ fois dérivable sur $I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ $k$ fois dérivable sur $J$. Alors $g \circ f$ est $k$ fois dérivable sur $I$. Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $g \circ f$ l'est également.

3.c

Notez que l'on ne donne pas de formule pour $(g \circ f)^{(k)}$ (c'est trop laid).

**Proposition (Classe et inverse)**

Si $f$ est $k$ fois dérivable et $f$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\frac{1}{f}$ est $k$ fois dérivable. Si $f$ est en outre de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\frac{1}{f}$ l'est également.

3.d

Démonstration

$\square$

**Proposition (Classe et bijection réciproque)**

Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$$

ou que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) < 0$$

Alors $f$ réalise une bijection de $I$ sur $J = f(I)$, et sa bijection réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

3.e

Démonstration

$\square$

Exemple (Fonctions indéfiniment dérivables)

Les applications polynomiales, exponentielle, cosinus, sinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
Les applications $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les applications $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Les applications arcsin et arccos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. La fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Les applications argsh, argch, argth sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $]1,+\infty[$ et $]-1,1[$ respectivement.

ii

Exercice (Dérivées successives)

Faire l'exercice 10 de TD.

9

# 4. Fonctions convexes

## 4.1. Définition, premières propriétés, lemme des trois pentes

On rappelle qu'une partie $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe si elle contient le segment joignant deux quelconques de ses points.

On observe également que si $x, y, z \in \mathbb{R}$, où $x < z$ et $y \in [x, z]$, alors $y = \lambda x + (1-\lambda)z$, avec $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$ et $(1-\lambda) = \frac{y-x}{z-x}$.

Définition (Fonction convexe)

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Une application $f$ est dite *concave* si $-f$ est convexe, *i.e.* pour tous points $a$ et $b$ de $I$, tout scalaire $\lambda \in [0,1]$ :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

4.a

Pour toute fonction $f$, on a égalité ci-dessus en prenant $\lambda \in \{0,1\}$ : une fonction est donc convexe si et seulement si les inégalités ci-dessus ont lieu pour tout $\lambda \in ]0,1[$.

**Interprétation géométrique :** la convexité signifie que « tout sous-arc est sous sa corde ». Plus précisément, soit $A$ (resp. $B$) le point de $\Gamma$ d'abscisse $a$ (resp. $b$).

Fixons $\lambda \in [0,1]$ :

(1) $f(\lambda a + (1-\lambda)b)$ est l'ordonnée du point de $\Gamma$ d'abscisse $\lambda a + (1-\lambda)b$.

(2) $\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ est l'ordonnée du point $((A,\lambda),(B,(1-\lambda))$

Lorsque $\lambda$ parcourt $[0,1]$, $((A,\lambda),(B,(1-\lambda)))$ décrit la corde $[AB]$.

Illustration

Bien entendu, la concavité signifie que tout sous-arc est au-dessus de sa corde.

Exemple (Fonctions convexes)

(1) Les applications affines sont à la fois convexes et concaves. Ce sont les seules.

(2) Si $f_1, \ldots, f_n$ sont convexes, alors pour tous réels *positifs ou nuls* $\alpha_i$ ($i \in [\![1,n]\!]$), l'application $\sum_{k=1}^{n} \alpha_i f_i$ est convexe.

i

Proposition (Inégalité de convexité généralisée)

Soit $f$ une fonction convexe sur $I$. Alors pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, pour tous points $x_1, \ldots, x_n$ de $I$, tous réels positifs ou nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de somme 1, on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

4.a

Démonstration

On montre ce résultat par récurrence :

$\square$

**Proposition (Épigraphe et convexité)** 4.b

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On considère l'ensemble :

$$\Omega = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, \quad y \geqslant f(x)\}$$

(on l'appelle *épigraphe* de $f$ sur $I$). L'application $f$ est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

**Démonstration**

On suppose $f$ convexe. Fixons deux points $(x_0, y_0)$ et $(x_1, y_1)$ de l'épigraphe de $f$. Soit $\lambda \in [0, 1]$, $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1$. On a $y_0 \geqslant f(x_0)$ et $y_1 \geqslant f(x_1)$, donc $\lambda y_0 \geqslant \lambda f(x_0)$ et $(1 - \lambda)y_1 \geqslant (1 - \lambda)f(x_1)$, puis $y \geqslant \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_1) \geqslant f(x)$.

□

$f$ est concave si et seulement si la partie de $\mathbb{R}^2$ située sous la courbe de $f$ est convexe.

**Illustration**

**Lemme des trois pentes** 4.c

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. L'application $f$ est convexe si et seulement si pour tous points $x$, $y$, $z$ de $I$, tels que $x < y < z$ :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

**Démonstration**

Soit $x < y < z$ trois éléments de $I$. L'inégalité

$$f(y) \leqslant \frac{z - y}{z - x} f(x) + \frac{y - x}{z - x} f(z)$$

est équivalente à chacune des deux inégalités suivantes :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \text{et} \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

La fonction $f$ est convexe si et seulement si la première inégalité a lieu pour tous éléments $x$, $y$, $z$ de $I$, $x < y < z$. On a donc prouvé un peu mieux que prévu.

□

Illustration

Cette interprétation graphique permet de retrouver ce résultat très rapidement.

Interprétation fonctionnelle : $f$ est convexe si et seulement si, pour tout point $a$ de $I$, l'application $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$. Ce résultat, important pour les démonstrations à venir, peut s'interpréter comme la croissance des pentes dont on a fixé une extrémité.

Illustration

### 4.2. Convexité et régularité

La continuité et la dérivabilité des applications convexes est hors programme. Voici en exercice (facultatif) les propriétés qu'on peut montrer :

**Exercice (Convexité et régularité)**

Une fonction convexe sur $I$ est continue sur $\overset{\circ}{I}$, dérivable à gauche et à droite en tout point $a$ de $\overset{\circ}{I}$, et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
Montrer qu'elle n'est pas nécessairement continue en les extrémités de $I$, et que si elle l'est, elle n'y est pas forcément dérivable.

10

On se limite[1] aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

1. Citez néanmoins une fonction classique convexe non de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition (Caractérisations de la convexité d'une fonction continûment dérivable)

4.d

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) L'application $f$ est convexe.

(2) $f'$ est croissante.

(3) La courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes, *i.e.* :

$$\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a).$$

Illustration

Démonstration

Procéder par implications cycliques :

□

Corollaire (Caractérisation pratique de la convexité)

4.e

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur $I$. La fonction $f$ est convexe (resp. concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (resp. $f'' \leqslant 0$).

Dans la pratique, c'est souvent ce résultat que l'on utilise pour prouver la convexité d'une fonction.

Interprétation graphique d'un *point d'inflexion* $a$ ($f''(a) = 0$, et $f''$ change de signe au point $a$) : exemples de sin, sh, th.

**Illustration**

**Exemple (Fonctions convexes)**

(1) L'application exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (ainsi que ch), l'application ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) L'application sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (et même sur $[0, \pi]$). Il en résulte l'encadrement très utile :

$$\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

(3) Les applications $x \mapsto a^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

(4) L'application $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est concave si $\alpha \in [0, 1]$ et convexe si $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup [1, +\infty[$.

ii

## 5. Brève extension aux valeurs complexes

$I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On considère un élément $a$ de $I$, et $f : I \to \mathbb{C}$.

**Définition (Dérivabilité ponctuelle d'une fonction à valeurs complexes)**

On dit que $f$ est *dérivable* en $a$ si le quotient [a]

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

possède une limite finie (complexe) lorsque $x$ tend vers $a$ (en appartenant à $I \setminus \{a\}$). Lorsqu'elle existe, cette limite s'appelle *nombre dérivé* de $f$ en $a$ et se note $f'(a)$, $D(f)(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

a. Pour une fonction complexe, parler de taux d'accroissement n'aurait pas grand sens

5.a

**Proposition (Caractérisation de la dérivabilité par les parties réelle et imaginaire)**

La fonction $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en $a$, et on a alors :

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i\,(\operatorname{Im} f)'(a)$$

5.a

**Démonstration**

Il suffit de décomposer $f$ en $\mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$.

□

Grâce à cette proposition, beaucoup des résultats valables pour les fonctions réelles et la dérivabilité s'étendent aux fonctions complexes, par exemple :

**Proposition** (De la dérivabilité à la continuité, cas complexe)

Si $f$ est dérivable en $a$, alors elle est continue en $a$.

5.b

Les opérations sur les fonctions dérivables, et les formules associées, sont encore valables : une combinaison linéaire (resp. le produit, le quotient, la composée (faire attention, la première application doit être à valeurs réelles)) de fonctions dérivables l'est. On en déduit des propriétés structurelles pour l'ensemble des fonctions de $I$ dans $\mathbb{C}$, dérivables en un point fixé $a$ de $I$.

**Définition** (Dérivabilité sur un intervalle d'une fonction à valeurs complexes)

On dit que $f$ est *dérivable sur $I$* si $f$ est dérivable en tout point de $I$. L'application, notée $f' : I \to \mathbb{C}$, qui à tout point de $I$ associe son nombre dérivé est appelée *fonction dérivée* de $f$. Elle peut également être notée $D(f)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $I$ dans $\mathbb{C}$, dérivables sur $I$.

5.b

**Proposition** (Dérivée nulle d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f$ dérivable sur $I$. $f$ est constante si et seulement si sa dérivée est identiquement nulle sur $I$.

5.c

**Démonstration**

$f$ est constante si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

□

Comme dans le cas réel, il est important de travailler sur un intervalle.
Bien sûr, les résultats sur les opérations et les fonctions dérivables s'étendent (combinaison linéaire, produit, continuité de toute fonction dérivable, etc.).

**Proposition** (Dérivabilité, conjugaison, et exponentielle)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur $I$. Les fonctions $\bar{f}$ et $e^f$ le sont alors également, $(\bar{f})' = \overline{f'}$ et $(e^f)' = f'e^f$.

5.d

Démonstration

□

On définit de même les notions de dérivées successives.

Proposition (Dérivées successives et parties réelle et imaginaire)

$f$ admet une dérivée $n$-ième sur $I$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des dérivées $n$-ièmes sur $I$, et on a alors :

$$(\mathrm{Re}(f))^{(n)} = \mathrm{Re}(f^{(n)}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{Im}(f))^{(n)} = (\mathrm{Im}(f^{(n)})).$$

5.e

On définit encore les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), et les ensembles $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$. Chacun d'entre eux est un espace vectoriel complexe, et un anneau. La formule de Leibniz est toujours valable.

On retrouve les formules $\sin(x + n\frac{\pi}{2}) = \sin^{(n)}(x)$ et $\cos(x + n\frac{\pi}{2}) = \cos^{(n)}(x)$, en remarquant que

$$\frac{\mathrm{d}^n e^{ix}}{\mathrm{d}x^n} = i^n e^{ix} = e^{i(x+n\pi/2)}.$$

Nous avons vu que le théorème de Rolle (et donc l'égalité des accroissements finis) n'est pas valable pour une fonction à valeurs complexes (exemple de $f : x \mapsto e^{ix}$ entre 0 et $2\pi$). Il n'y a pas non plus lieu d'étudier la monotonie d'une fonction à valeurs complexes.

Cependant, l'inégalité des accroissements finis est toujours valable :

Théorème (Inégalité des accroissements finis, cas complexe)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et qu'il existe $M$ tels que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant M$$

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$$

5.f

Démonstration

Nous ne prouvons pas ce théorème à ce stade du cours (il est facile à prouver une fois l'outil intégral disponible). Cependant, il n'est pas difficile d'en montrer une forme légèrement plus faible, et tout aussi utile :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant 2M|b - a|$$

En effet, les fonctions $|\mathrm{Re}(f)|$ et $|\mathrm{Im}(f)|$ sont majorées par $M$, et l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ donnent

$$|\mathrm{Re}(f)(b) - \mathrm{Re}(f)(a)| \leqslant M|b - a| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}(f)(b) - \mathrm{Im}(f)(a)| \leqslant M|b - a|$$

L'inégalité triangulaire complexe donne alors le résultat annoncé.

□

## 6. Questionnaire 10 : Dérivation

**1** Si $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $f$ est dérivable et strictement croissante, alors $f'$ tend vers 0 en $+\infty$.

**2** Si $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$, alors $f$ est strictement croissante au voisinage de 0.

**3** Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 uniquement ?

**4** Si $f$, définie sur un segment, est continue et convexe, alors elle est lipschitzienne.

**5** Si $f$, définie sur un segment, est dérivable deux fois, alors elle est lipschitzienne.

**6** Si $f$ et $g$ sont convexes, alors $f \circ g$ l'est.

**7** Si $f$ est définie sur un segment, dérivable, et strictement croissante, alors $f'$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois.

**8** Toute fonction convexe sur un segment est bornée.

**9** Si $f$ est convexe sur $]\alpha, \beta[$, alors elle est lipschitzienne sur tout segment inclus dans $]\alpha, \beta[$.

# 7. Feuille de TD 23 : Dérivation

Sauf mention contraire, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle $I$ d'intérieur non vide, et à valeurs réelles.

## 7.1. Dérivabilité, calcul de dérivées

**Exercice 1 (Effets de la dérivation)** 0

On considère une fonction dérivable $f$. Que dire de sa dérivée si $f$ est paire ? impaire ? périodique ?

**Exercice 2 (Dérivation, dérivabilité)** 0

**1** Dériver, en tout point où cela est possible, $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}$.
**2** La fonction $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?
**3** Montrer que

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \sin\frac{1}{x} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement $\tilde{g}$ est dérivable en 0, mais non de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 3 (Dérivée et comportement asymptotique)** 2

Soit $f\ : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
**1** On suppose que $f'$ tend vers $l \in \mathbb{R}_+^*$ en $+\infty$. Que dire du comportement asymptotique de $f$ en $+\infty$ ?
**2** On suppose que $f'$ tend vers 0 en $+\infty$. Que dire du comportement asymptotique de $f$ en $+\infty$ ?
**3** On suppose que $f$ tend vers 0 en $+\infty$. Que dire du comportement asymptotique de $f'$ en $+\infty$ ? Que dire si on suppose en outre $f$ monotone (X PC 09) ?

**Exercice 4 (Signe de la dérivée)** 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$, et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose que $f$ ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f'(a)f'(b) \leqslant 0$.

**Exercice 5 (Équations fonctionnelles et dérivation)** 2

**1** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Montrer que $f$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. Réciproque ?
**2** Déterminer l'ensemble $E$ des fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout réel $x$ : $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$.
**3** (Centrale MP 09) Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ f = f$.

**Exercice 6 (Idées reçues sur les dérivées)** 2

**1** Donner un exemple de fonction strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée s'annule une infinité de fois.

**2** Donner un exemple de fonction dérivable en 0, de dérivée strictement positive en 0, mais non croissante au voisinage de 0.

**Exercice 7 (Fonction à dérivée logarithmique bornée (X PC 09))** 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. On suppose que $f(a) = 0$ et qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, x \in [a,b], |f'(x)| \leqslant k|f(x)|$. Montrer que $f$ est identiquement nulle.

**Exercice 8 (Une caractérisation de la dérivabilité)** 3

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue en 0, $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = l$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall\, h, k \in ]0, \delta[, \quad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - l \right| \leqslant \varepsilon$$

**Exercice 9 (Centrale PSI 09)** 3

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites réelles de limite $a$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $x_n \neq y_n$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

**1** On suppose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n < a$ et $y_n > a$. Quelle est la limite de $(u_n)$ ?

**2** On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $a$. Que dire de $(u_n)$ ?

**3** Que se passe-t-il dans le cas général ?

## 7.2. Dérivées successives

**Exercice 10 (Dérivées successives)** 0

Calculer, pour tout entier naturel $n$, la dérivée d'ordre $n$ de

**1** $x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$.

**2** $\cos^3$.

**3** $x \mapsto 1/(x^2 - 1)$.

**Exercice 11 (Application combinatoire de la formule de Leibniz)** 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant $n$ fois la fonction $x \mapsto x^n(1-x)^n$, trouver $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

**Exercice 12 (Fonction non nulle dont tous les moments sont nuls en 0)** 2

Montrer que l'application $f \ : x \mapsto e^{-1/x^2}$ se prolonge en une application $g$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### 7.3. Théorèmes de Rolle, des accroissements finis

**Exercice 13 (Applications directes du théorème de Rolle)** 0

**1** Soit $f$ continue sur $[a, +\infty[$ (pour un certain $a \in \mathbb{R}$), et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in ]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
**2** Soit $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant une même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer $f'$ s'annule.
**3** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R}\backslash[a, b]$, il existe une tangente au graphe $\Gamma$ de $f$ passant par le point $(d, 0)$.

**Exercice 14 (Rolle itéré)** 1

$n$ désigne un entier naturel non nul.
**1** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.Montrer que si $f$ s'annule en $n+1$ points distincts, alors $f'$ s'annule en $n$ points distincts sur $[a, b]$
**2** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $n$ fois dérivable. Montrer que si $f$ s'annule en $n+1$ points distincts, alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
**3** Soit $f \ : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $n$ fois dérivable. Si $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$
**4** Montrer que si un polynôme réel $P$ possède (au moins) $n$ racines réelles distinctes ($n \geqslant 2$), alors son polynôme dérivé $P'$ possède (au moins) $n-1$ racines réelles distinctes.
**5** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, tous réels $a$ et $b$, le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.
**6** Soit $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, $T$-périodique ($T > 0$), s'annulant au moins $n$ fois sur $[0, T[$. Montrer que $f'$ s'annule au moins $n$ fois sur $[0, T[$.
**7** Que dire d'une fonction polynomiale coïncidant avec la fonction sinus en une infinité de points ?

**Exercice 15 (Égalité de Taylor-Lagrange)** 1

Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, dérivable $n+1$ fois sur $]a, b[$, alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

**Indication :** considérer la fonction auxiliaire

$$g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A,$$

où $A$ est une constante préalablement fixée, afin d'appliquer le théorème de Rolle.

Exercice 16 (Règle de l'Hospital (X PC 09)) 1

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables, $g'$ ne s'annulant pas sur $]a, b[$.

**1** Montrer l'existence de $c \in ]a, b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

**2** En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $a$ ($x > a$), alors il en est de même pour $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$.

**3** Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 17 (Théorème de Darboux) 1 et 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 18 (Prolongement dérivable) 2

Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+x)}{x} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0. Soit $F$ ce prolongement. Montrer que $F$ est dérivable en 0.

Exercice 19 (Application de l'égalité des accroissements finis) 3

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, vérifiant $f(1) - f(0) = 1$. Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, il existe des éléments distincts $x_1, \ldots, x_n$ de $[0, 1]$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n.$$

Exercice 20 (ENS 09) 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. Montrer que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n \to \infty} f^n(x) = 0\}$ est un ouvert.

## 7.4. Convexité

Exercice 21 (Fonction convexe périodique) 0

Que dire d'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et périodique ?

Exercice 22 (Fonction convexe bornée) 0

**1** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que $f$ est décroissante.

**2** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que $g$ est constante.

Exercice 23 (Comparaison des moyennes harmonique, géométrique, arithmétique) 1

**1** On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs.
– La *moyenne arithmétique* de ces réels est $a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$
– La *moyenne géométrique* de ces réels est $g = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$
– La *moyenne harmonique* de ces réels est $h = n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{-1}$
Montrer que $h \leqslant g \leqslant a$.
**Indication :** on pourra utiliser la concavité du logarithme pour prouver $g \leqslant a$, et utiliser ce résultat pour prouver $h \leqslant g$.
**2** Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs ($n \geqslant 2$). Montrer que : $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.
**3** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 24 (Convexité et bijection réciproque (Centrale PC 09)) 2

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ convexe et injective. On pose $J = f(I)$.
**1** Montrer que $f$ est strictement monotone sur $I$.
**2** Montrer que la réciproque de $f$ est convexe ou concave. Donner deux exemples.

Exercice 25 (Condition suffisante de changement de concavité (X MP 09)) 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f''(c) = 0$. Que dire si $f$ est seulement supposée deux fois dérivable ?

CHAPITRE XXIV

# Suites récurrentes

## Sommaire



Dans ce chapitre, $I$ désigne un intervalle réel d'intérieur non vide, et $f : I \to I$ est une application.

## 1. Introduction

On se propose d'étudier les suites définies par $u_0 \in I$, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Nous donnerons ainsi, selon les hypothèses émises sur $f$ (régularité, monotonie, etc.), des conséquences générales sur de telles suites récurrentes.

L'étude d'une telle suite récurrente est étroitement liée à celle des points fixes de $f$ (du moins si $f$ est continue), d'après le fait suivant :

**Proposition (Suite récurrente et point fixe)** 1.a

Si $(u_n)$ converge vers $l \in I$, et si $f$ est continue en $l$, alors $l$ est un point fixe de $f$ (*i.e.* $f(l) = l$).

**Démonstration**

□

En particulier, si $f$ est continue sur un intervalle *fermé*, la suite $(u_n)$ ne peut converger qu'en un point fixe de $f$ (et donc si en outre $f$ n'a pas de point fixe, la suite $(u_n)$ ne peut converger).

Attention, il se peut que $f$ soit continue sur $I$, n'ait qu'un seul point fixe, et que $(u_n)$ converge, sans que $(u_n)$ converge vers ce point fixe. Par exemple, la fonction carré sur $]0,1]$ n'admet qu'un point fixe (à savoir 1), mais pour tout $u_0 \in ]0,1[$, la suite $(u_n)$ converge vers 0.

Cette proposition simple relie points fixes de $f$ et suites récurrentes définies par $f$ : chacun de ces deux thèmes peut contribuer à l'étude de l'autre. Nous verrons plus loin (paragraphe sur l'approximation) comment ces suites récurrentes permettent de trouver des points fixes (ou des zéros) d'une fonction.

**Cas plus compliqués de suites récurrentes**

On rappelle qu'on a considéré une fonction de $I$ dans $I$, donc telle que l'ensemble de définition soit stable par l'application. Dans le cas général d'une fonction réelle d'une variable réelle, il n'y a aucune raison que ce soit le cas : il est alors essentiel, pour prouver que la suite récurrente est bien définie, de trouver une partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle l'itératrice est définie, stable par l'application, et comprenant le terme initial.
Dans l'optique d'obtenir des renseignements supplémentaires, on privilégiera les « petites » parties.

1.1

## 2. Quelques exemples classiques

On donne ici quelques exemples classiques (qu'il faut connaître, ou savoir rapidement retrouver), dont l'étude ne pose aucune difficulté (sauf peut-être celle des suites homographiques).

### 2.1. Suites arithmétiques

**Définition (Suite arithmétique)**

Une suite *arithmétique* est une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant pour itératrice une fonction du type $f : x \mapsto x + r$ (pour un certain $r \in \mathbb{R}$). Le nombre $r$ est appelé *raison* de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.a

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$. Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = u_0 + nr$. On en déduit le comportement asymptotique de $(u_n)$.

De plus, pour tout entier naturel $n$ :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r$$

### 2.2. Suites géométriques

**Définition (Suite géométrique)**

Une suite *géométrique* est une suite récurrente admettant pour itératrice une fonction du type $f : x \mapsto rx$, pour un certain $r \in \mathbb{R}$. Le nombre $r$ est appelé *raison* de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.b

Une suite géométrique dont le premier terme est non nul a une unique raison.

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $r$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 r^n$$

(avec la convention $0^0 = 1$ si besoin est, c'est-à-dire lorsque $r = n = 0$).

On en déduit le comportement asymptotique d'une suite géométrique.

De plus, si $r \neq 1$, on a, pour tout entier naturel $n$ :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Si $r = 1$, la somme vaut $(n+1)u_0$ : on peut retrouver ce résultat en faisant tendre $r$ vers 1, en reconnaissant la limite d'un taux d'accroissement.

Il faudra bien prendre garde, lors de la sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique, à sa raison (on traitera à part le cas où $r = 1$).

### 2.3. Suites affines

**Définition (Suite affine)** 2.c

Une suite *affine* est une suite récurrente admettant pour itératrice une fonction du type $f : x \mapsto ax + b$, pour certains réels $a, b$.

On suppose $a \neq 1$, et on pose $l = \frac{b}{1-a}$. $l$ est un point fixe de $f$ (*i.e.* $f(l) = l$), la suite de terme général $u_n - l$ est géométrique de raison $a$ et on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

La suite $(u_n)$ est convergente si et seulement si $|a| < 1$ ou $u_0 - \frac{b}{1-a} = 0$ (et elle converge alors vers $l$).

Pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) + (n+1)\frac{b}{1-a}$$

Ne pas apprendre ces formules par cœur : ce qu'il faut retenir de cette proposition, c'est qu'en présence d'une suite affine ni arithmétique, ni géométrique, on se ramène à une suite géométrique en considérant $u_n - l$, où $l$ est le point fixe de $f$.

### 2.4. Suites homographiques

**Définition (Suite homographique)** 2.d

Une suite *homographique* est une suite (éventuellement finie), définie par une application homographique, *i.e.* du type $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, où $a, b, c, d$ sont réels, et $(c, d) \neq (0, 0)$.

Dans notre étude, on suppose que $c$ et $ad - bc$ sont non nuls, puisque ces cas particuliers ont déjà été traités.
Une telle suite peut être finie : c'est le cas de la suite définie par $u_0 = \frac{1}{10}$, et $f : x \mapsto \frac{-2x}{2x+1}$ .

Pour savoir quelles valeurs initiales ne donnent qu'une suite finie, il suffit de trouver la bijection réciproque de $f$ : les valeurs cherchées sont celles de la suite récurrente de terme initial $-\frac{1}{2}$, associée à $f^{-1}$.

On suppose maintenant que notre suite est infinie.

On considère le polynôme

$$P = cX^2 + (d-a)X - b$$

(les racines de ce polynôme sont les points fixes de $f$).

(1) Si $P$ n'a pas de racine réelle, $(u_n)$ diverge.

(2) Si $P$ admet deux racines réelles distinctes $\alpha$ et $\beta$, alors $(u_n)$ est constante si $u_0 \in \{\alpha, \beta\}$, et sinon la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ est géométrique, d'où son comportement asymptotique.

(3) Si $P$ admet une racine double, $\alpha$, alors la suite est constante si $u_0 = \alpha$, et sinon, $(u_n)$ ne prend pas la valeur $\alpha$, et on peut poser $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$. Cette dernière suite est alors arithmétique. Il en résulte que $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

### 2.5. Suites définies par une relation $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$

Soit $\alpha$ et $\beta$ deux nombres complexes.
On cherche à décrire l'ensemble $\Omega_{\alpha,\beta}$ des suites complexes $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n,$$

pour tout entier naturel $n$.

L'ensemble $\Omega_{\alpha,\beta}$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (il comprend la suite nulle, est stable par somme, et par multiplication scalaire [1]).

**Proposition** (Dimension d'un espace de suite récurrentes linéaires) **2.a**

$\Omega_{\alpha,\beta}$ est un plan vectoriel.

**Démonstration**

Montrer que $\varphi\ : u \in \Omega_{\alpha,\beta} \mapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

Reste maintenant à trouver une base de $\Omega_{\alpha,\beta}$.
On considère l'*équation caractéristique*

$$X^2 - \alpha X - \beta = 0 \quad (\mathcal{C})$$

On montre aisément que si $r$ est solution de $\mathcal{C}$, alors toute suite géométrique de raison $r$ est un élément de $\Omega_{\alpha,\beta}$.

**Premier cas :** si $\mathcal{C}$ possède deux solutions distinctes $r_1$ et $r_2$, alors les suites $(r_1^n)$ et $(r_2^n)$ (avec la convention $0^0 = 1$ si besoin est) ont pour deux premiers termes respectifs $1, r_1$, et $1, r_2$. Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0,$$

on peut affirmer :

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \operatorname{Vect}(\{(r_1^n), (r_2^n)\}).$$

1. On peut aussi le voir comme noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Exemple (Suite de Fibonacci)

La *suite de Fibonacci* $(F_n)$ est définie par $F_0 = F_1 = 1$, et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (pour tout entier naturel $n$). Elle appartient donc à $\Omega_{1,1}$, dont l'équation caractéristique $X^2 - X - 1 = 0$ a pour solutions $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc des scalaires $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait : $F_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
Pour déterminer $\lambda$ et $\mu$, on considère les deux premiers termes, ce qui fournit le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases}$$

dont l'unique couple solution est $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{r_1}{\sqrt{5}}, -\frac{r_2}{\sqrt{5}}\right)$. On a donc, pour tout entier naturel $n$ :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

**Remarque :** si on prend $n = -1$, on obtient formellement $F_{-1} = 0$, ce qui donne encore $F_1 = F_0 + F_{-1}$.

i

**Deuxième cas :** si $\alpha = \beta = 0$. $\Omega_{0,0}$ est l'ensemble des suites complexes dont tous les termes sauf (éventuellement) les deux premiers sont nuls.

**Troisième cas :** si $\mathcal{C}$ admet une unique solution non nulle $r$, alors $r^2 - \alpha r - \beta = 0$, mais aussi $2r - \alpha = 0$. On dispose d'un élément non nul $(r^n)$ de $\Omega_{\alpha,\beta}$, mais cela ne suffit pas. On vérifie à la main que la suite de terme général $nr^n$ est élément de $\Omega_{\alpha,\beta}$. En effet, pout tout entier naturel $n$ :

$$(n+2)r^{n+2} - \alpha(n+1)r^{n+1} - \beta n r^n = r^n\left(n(r^2 - \alpha r - \beta) + r(2r - \alpha)\right) = 0$$

Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & r \end{vmatrix} = r \neq 0,$$

on a bien

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \mathrm{Vect}(\{(r^n), (nr^n)\}).$$

Exemple (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Une suite complexe $(u_n)$ appartient $\Omega_{4,-4}$ si et seulement si il existe des constantes complexes $\lambda$ et $\mu$ telles que, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = (\lambda + \mu n)2^n$$

ii

Pour finir, signalons que cette étude, très similaire à celle des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants, est valide dans le cas de suites réelles, la seule situation inédite étant celle où $\mathcal{C}$ admet deux solutions complexes non réelles conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$. Dans ce cas, on a :

$$\Omega_{\alpha,\beta} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\{(r^n\cos(n\theta)), (r^n\sin(n\theta))\}\right)$$

Exemple ()

$$\Omega_{0,-4} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left\{\left(2^n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right), \left(2^n\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\right\}\right)$$

iii

Ce traitement du cas réel n'a d'intérêt que si l'on veut décrire toutes les suites réelles appartenant à $\Omega_{\alpha,\beta}$. Si seule l'une d'entre elles nous concerne, on peut la voir comme une suite complexe, puis simplifier son expression.

## 3. Étude générale

On suppose la fonction $f$ continue sur $I$.

Quelques recommandations générales concernant une telle étude : il est essentiel de faire un dessin (au moins au brouillon), sur lequel doivent apparaître la première bissectrice, les points fixes de $f$, le graphe de $f$, les premiers termes de la suite.

Illustration

### 3.1. Propriétés élémentaires

On peut donner les variations de la suite récurrente $(u_n)$ à partir de certaines propriétés de $f$ (non liées à la régularité de $f$) :

**Proposition** (Comparaison de l'itératrice avec l'identité)

Si $f - \mathrm{Id}_I \geqslant 0$ (resp. si $f - \mathrm{Id}_I \leqslant 0$), alors $u$ est croissante (resp. décroissante).

3.a

Illustration

Il est donc important de déterminer si le graphe de $f$ est au-dessus ou en dessous de la première bissectrice en un point donné. Des considérations de convexité ou concavité peuvent parfois y aider.

**Proposition** (Lorsque l'itératrice est croissante)

Si $f$ est croissante, alors $u$ est monotone. Plus précisément, la suite $(u_n)$ est croissante si $u_0 \leqslant f(u_0)$, décroissante si $u_0 \geqslant f(u_0)$.

3.b

Démonstration

□

Attention, si $f$ est croissante, la suite $u$ ne l'est pas nécessairement !

Dans l'optique de prouver la convergence d'une suite récurrente définie par une fonction croissante, on peut chercher à majorer ou minorer (selon que la suite soit croissante ou décroissante) la suite $(u_n)$. La connaissance des points fixes de $f$ nous facilite grandement la tâche.

Illustration

Proposition (lorsque l'itératrice est décroissante)

Si $f$ est décroissante sur $I$, alors les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones de monotonies contraires.

3.c

Démonstration

□

Illustration

## 3.2. Applications contractantes

**Définition (Application contractante)**

Une application est dite *contractante* si elle est $k$-lipschitzienne, pour un certain $k \in [0, 1[$.

3.a

Toute application contractante est (uniformément) continue car lipschitzienne.

**Mauvaise écriture de la contractance**

Une fonction $f$ contractante sur $I$ vérifie :

$$\forall x, y \in I, \quad (x \neq y) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < |x - y|),$$

mais la réciproque est fausse, et les conclusions des résultats suivants ne sont pas applicables à une fonction non contractante vérifiant pourtant cette propriété.

3.1

**Théorème du point fixe de Picard**

Soit $I$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et $f$ une application contractante sur $I$. Alors :

(1) $f$ admet un unique point fixe $l$ dans $I$.

(2) Toute suite récurrente définie par $f$ est convergente, vers $l$, dans $I$, avec une vitesse au pire géométrique.

3.d

**Démonstration**

On suppose $f$ $k$-lipschitzienne, pour un certain $k \in [0,1[$.
L'unicité du point fixe en cas d'existence est claire (si $l$ et $l'$ sont des points fixes de $f$, alors $(1-k)|l-l'| \leqslant 0$, or $(1-k)>0$, donc $l=l'$).
$f$ admet donc au plus un point fixe $l$.
Soit $u_0 \in I$. Une récurrence immédiate montre que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$|u_{n+1}-u_n| \leqslant k^n |u_1-u_0|.$$

Pour tous entiers naturels $n$ et $m$ ($m$ non nul), on a donc :

$$|u_{n+m}-u_n| = \left|\sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i+1}-u_{n+i}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} |u_{n+i+1}-u_{n+i}| \leqslant k^n|u_1-u_0| \sum_{i=0}^{m-1} k^i \leqslant k^n \frac{|u_1-u_0|}{1-k}$$

La suite $(u_n)$ est donc de Cauchy, donc convergente. Sa limite $l$ appartient à $I$ (puisque $I$ est fermé), et donc $l$ est un point fixe de $f$. Cela montre à la fois l'existence d'un point fixe, et la convergence de $(u_n)$ vers ce point fixe.
Une récurrence immédiate montre que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$|u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l|.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)$ converge, avec une vitesse au pire géométrique, vers l'unique point fixe $l$ de $f$.

□

Pour affirmer l'existence d'un point fixe, le théorème des valeurs intermédiaires suffit dans le cas où $I$ est un segment (la démonstration est donc beaucoup plus simple dans ce cas).

**Corollaire (Cas suffisant de convergence au pire géométrique)** 3.e

Si $f$ est dérivable sur $I$, de dérivée majorée, en valeur absolue, par un nombre $k \in [0,1[$, alors $f$ admet un unique point fixe, et toute suite récurrente définie par $f$ est convergente vers l'unique point fixe de $f$, avec une vitesse au pire géométrique.

**Démonstration**

D'après l'inégalité des accroissements finis (ou, plus directement encore, son corollaire), l'application $f$ est contractante.

□

Si $l$ est un point fixe de $f$, en lequel $f$ est dérivable, et que $|f'(l)|<1$, on dit que le point fixe $l$ est *attractif*. En effet, si le terme initial $u_0$ est suffisamment proche de $l$, alors la suite $(u_n)$ converge, avec une vitesse au pire géométrique, vers $l$. Dans le même contexte, une relation comme $f'(l)=0$ favorise encore la rapidité de convergence, et on dit que le point fixe $l$ est *superattractif*.

**Illustration**

**Proposition (La convergence vers un point répulsif est rare)**

Une suite récurrente $(u_n)$ définie par $f$, convergeant vers un point fixe $l$ de $f$, en lequel $f$ est dérivable et tel que $|f'(l)| > 1$ (un tel point est dit *répulsif*), est nécessairement stationnaire.

3.f

**Démonstration**

Si la suite $(u_n)$ prend la valeur $l$, alors elle est stationnaire de valeur $l$. Supposons (par l'absurde) que $(u_n)$ tende vers $l$ sans prendre la valeur $l$. On a alors

$$\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \frac{f(u_n) - l}{u_n - l} \to f'(l).$$

Il existe donc un rang $N$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait :

$$|u_{n+1} - l| \geqslant |u_n - l|.$$

On a donc, pour tout entier $n \geqslant N$ : $|u_n - l| \geqslant |u_N - l|$, ce qui est absurde.

□

**Illustration**

**Exercice (Algorithme de Héron d'Alexandrie)**

Étude de l'algorithme de Héron d'Alexandrie (ou de Babylone). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $u$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\alpha}{u_n}\right) \end{cases}$$

**1** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{\alpha}$.

**2** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

**3** Montrer que la suite $(u_n)$ converge vers $\sqrt{\alpha}$ :

**4** Montrer que pour tout entier naturel non nul $n_0$, tout entier $n \geqslant n_0$,

$$|u_n - \sqrt{\alpha}| \leqslant 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(u_{n_0} - \sqrt{\alpha})\right)^{2^{n-n_0}}.$$

On dit que la convergence est au pire *quadratique*. La raison en est que le point fixe est superattractif.

1

## 4. Application à l'approximation

Dans ce paragraphe, on étudie des méthodes pour trouver des solutions d'une équation $f(x) = 0$.

### 4.1. Méthode de dichotomie

**Proposition (Méthode de dichotomie)** 4.a

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, et telle que $f$ ne s'annule qu'en un seul point $c \in ]a, b[$. On construit deux suites récurrentes $(a_n)$ et $(b_n)$ en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, et, pour tout entier naturel :

(1) si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geqslant 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ ;

(2) si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Ces deux suites convergent vers $c$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |c - a_n| \leqslant \frac{b-a}{2^n} \quad \text{et} \quad |c - b_n| \leqslant \frac{b-a}{2^n}$$

**Démonstration**

Les deux suites ainsi construites sont clairement adjacentes, et leur limite commune $c$ vérifie, par continuité de $f$ en $c$, $f(c) = 0$. Enfin, pour tout entier naturel $n$, on a $|a_n - c| \leqslant |a_n - b_n|$, $|b_n - c| \leqslant |a_n - b_n|$. Comme $|a_n - b_n| = \frac{b-a}{2^n}$, on a le résultat voulu. $\square$

**Illustration**

On rappelle que cette méthode permet de donner une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.

### 4.2. Méthode de Newton

On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, que $f'$ ne s'annule pas, et que $f$ admet un unique zéro $a$. Soit $\Gamma$ le graphe de $f$.

Cette méthode est fondée sur l'espoir (pas toujours justifié) que si $x_0$ est une valeur approchée de $a$, alors l'intersection de la tangente de $\Gamma$ en $(x_0, f(x_0))$ avec l'axe des abscisses fournit une meilleure approximation de $a$ que $x_0$.

Attention, cet espoir n'est pas, en général, vraiment fondé.

Illustration

Une équation de la tangente de $\Gamma$ en $x_0$ est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ Nous sommes donc conduits à poser $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Plus généralement, on introduit la fonction

$$\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

et on pose, pour tout entier naturel $n$ : $\quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

$a$ est l'unique point fixe de $\varphi$. De plus, pour tout réel $x$, $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. $a$ est donc un point fixe superattractif de $\varphi$.

On a vu en exercice que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un réel $c_x$ compris entre $a$ et $x$, tel que :

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\varphi''(c_x) = a + \frac{(x-a)^2}{2}\varphi''(c_x)$$

Si l'on a une majoration $|\varphi''| \leqslant M$ (on l'a toujours sur un segment donné comprenant $a$), on trouve donc

$$|\varphi(x) - a| \leqslant \frac{1}{2}M|x-a|^2$$

que l'on peut écrire

$$\frac{1}{2}M|\varphi(x) - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}M|x-a|\right)^2$$

et donc par récurrence, pour tout entier naturel $p$ :

$$|x_p - a| \leqslant \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}M|x_0 - a|\right)^{2^p}$$

La méthode fonctionne donc bien si l'on choisit $x_0$ tel que $\frac{1}{2}M|x_0 - a| < 1$, donc pour $u_0$ suffisamment proche de $a$ : la vitesse de convergence est grande, on dit qu'elle est *quadratique*.

**Exercice (Application de la méthode de Newton)** 2

Soit $\alpha > 0$. On cherche à approcher $\sqrt{\alpha}$ avec la méthode de Newton, en prenant la fonction $f : x \mapsto x^2 - \alpha$. Que remarque-t-on ?

**Proposition (Condition suffisante de convergence)** 4.b

Dans le cas d'une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$, admettant au moins un zéro, telle que $f''$ ne s'annule pas, et si la valeur initiale est telle que $f(x_0)f''(x_0) \geqslant 0$, on a convergence.

Démonstration

Traitons le cas où $f(x_0) < 0$ et $f''(x_0) < 0$. La fonction $f$ est donc concave, admet au plus deux zéros $a$ et $b$, $a \leqslant b$, et $f'$ est décroissante. Supposons par exemple $x_0 < a$. On a $f'(a) \geqslant 0$ (sinon, $f$ aurait un zéro avant $a$), donc $f'$ est positive sur $[x_0, a]$ : $f$ est croissante sur $[x_0, a]$. De plus, le graphe de $f$ est sous ses tangentes, donc $x_0 \leqslant x_1 \leqslant a$. Par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant a$. La suite est croissante et majorée par $a$, donc convergente, vers un point fixe de $\varphi$, donc vers $a$.

$\square$

Illustration

## 5. Questionnaire 11 : Suites récurrentes

$I$ désigne un intervalle réel d'intérieur non vide, et $f$ est une application de $I$ dans lui-même. Pour tout $x_0 \in I$, on peut donc définir la suite $(x_n)$ de terme initial $x_0$ vérifiant la relation $x_{n+1} = f(x_n)$.

**1** On suppose que la suite $(x_n)$ converge vers $l$.

(1) (V/F) $l \in I$.

(2) (V/F) Si $l \in I$, alors $l$ est un point fixe de $f$.

(3) (V/F) Soit $(m_n)$ une suite d'entiers naturels. La suite définie par son terme initial $v_0 = x_0$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = f^{m_n}(v_n)$ converge.

**2** On se place dans le cas où $I = ]0, 1]$.

(1) (V/F) S'il existe $x_0 \in I$ tel que $(x_n)$ converge vers 0, alors $f$ est prolongeable par continuité en 0.

(2) (V/F) Si pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)$ converge vers 0, alors $f$ est prolongeable par continuité en 0.

(3) (V/F) Si $f$ est continue sur $I$, et s'il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $(x_n)$ converge vers 0, alors $f$ est prolongeable par continuité en 0.

(4) (V/F) Si $f$ est continue sur $I$, et si pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)$ converge vers 0, alors $f$ est prolongeable par continuité en 0.

## 6. Feuille de TD 24 : Suites récurrentes

### Exercice 1 (Étude élémentaire de suites récurrentes) 0

**1** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer la convergence de $(x_n)$.

**2** Étudier la convergence de la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = a > 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

**3** Étudier les suites récurrentes définies par un terme initial et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f$ est successivement la fonction sinus, la fonction cosinus, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, la fonction $x \mapsto 1+x^2$.

**4** *(X PC 09)* Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^3+3}{3u_n+1}$.

### Exercice 2 (Suites récurrentes linéaires, ou presque) 0

Pour chacune des suites suivantes, expliciter le terme général en fonction de l'indice.
**1** $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**2** $(u'_n)$ définie par $u'_0 = 0$, $u'_1 = 2$ et $u'_{n+2} = 2u'_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**3** $(v_n)$ définie par $v_1 = 1$, $v_2 = 4$ et $v_{n+2} = \frac{v_{n+1}^3}{v_n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**4** $(w_n)$ définie par : $w_1 = 1$, $w_2 = 3$ et $w_{n+2} = -w_{n+1} + 6w_n + 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**5** $(z_n)$ définie par : $z_1 = 1$, $z_2 = 3$ et $z_{n+2} = 2z_{n+1} - z_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### Exercice 3 (Suites homographiques) 0

**1** Étudier la suite $(u_n)$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$.
**2** Étudier la duite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n-4}{u_n-3}$.
**3** Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et l'itératrice $x \mapsto a + \frac{b}{x}$. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux solutions réelles $\alpha, \beta$, avec $|\alpha| > |\beta|$. Étudier la suite $(u_n)$.

### Exercice 4 (Comportement asymptotique de suites récurrentes) 2

**1** Soit $s > 0$ et $a_0 \in ]0, 1/s[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = a_n - s a_n^2$. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{sn}$.
**Indication :** on pourra écrire : $\frac{1}{na_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}}\right) + \frac{1}{na_0}$.

**2** *(X PC 08)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner un équivalent de $u_n$.

**3** *(INT PSI 08)* On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$. Étudier la convergence de $u_n$. Trouver un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers l'infini.

**4** *(ENS Lyon MP 09)* La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Donner un équivalent de $u_n$.

**Exercice 5 (Suite récurrente et fonction lipschitzienne (ENS Cachan MP 08))** 3

Soit $f$ une fonction 1-lipschitzienne de $[0,1]$ dans lui-même, $(x_n)$ la suite définie par $x_0 \in [0,1]$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x_n)$ converge.

**Exercice 6 (Suite récurrente à l'envers)** 3

Rappeler le domaine de définition de la fonction arccos. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(u_{n+1})$. Que dire de $u_0$ ?

CHAPITRE XXV

# Intégration

## Sommaire



Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un segment (réel). Nous ne définirons pas d'intégrale sur un autre type d'intervalle. On fixe $I = [a, b]$ un segment réel, avec $a < b$.

L'intégrale est un outil fondamental en analyse. Sa définition et sa construction ne sont pas simples. En fait, il existe plusieurs théories d'intégration, les plus connues d'entre elles étant celles de Riemann et de Lebesgue. Heureusement, les calculs d'intégrales coïncident dans les cas simples, comme celui de l'intégration d'une fonction continue sur un segment. Nous nous intéresserons à l'intégrale au sens de Riemann, sans entrer en détail dans les problèmes qu'elle soulève.

La théorie de l'intégration de Riemann a pour but de donner un sens rigoureux aux calculs d'aires (algébriques) sous une courbe, comme vous l'avez vu en Terminale. Un objectif majeur de ce chapitre est de pouvoir associer à une fonction continue sur un segment un nombre représentant cette aire, son intégrale sur ce segment.

Pour ce faire, nous allons être menés à définir l'intégrale d'une classe plus générale de fonctions, les fonctions continues par morceaux. Pourquoi se compliquer la vie avec des fonctions non continues ? En fait, l'approche de Riemann consiste d'abord à définir l'intégrale d'une fonction en escalier (constituée de morceaux d'applications constantes) – qui est loin d'être nécessairement continue – à en décrire les propriétés, puis à étendre cette notion à une classe plus large (pour nous, les fonctions continues par morceaux).

L'intégrale d'une fonction en escalier est très naturelle si on veut que l'intégrale représente une aire : elle consiste essentiellement à sommer des aires algébriques de rectangles. Nous verrons ensuite qu'une fonction continue par morceaux $f$ sur un segment peut être approchée aussi finement que l'on veut par deux fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$. Ce résultat fondamental nous permettra de définir l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$.

Dans ce chapitre, le lien entre intégrale et primitive n'est pas encore effectué, il n'est donc pas permis de l'utiliser. Toutefois, certains exercices y font appel, et on admettra donc ce résultat fondamental pour les résoudre.

## 1. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

### 1.1. Fonctions en escalier

**Définition (Subdivision)** 1.a

On appelle *subdivision* de $[a,b]$ toute suite finie de points de $[a,b]$ $(x_0,\dots,x_n)$ vérifiant $(x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). Pour une telle suite, l'ensemble $\{x_0,\dots,x_n\}$ est appelé le *support* de cette subdivision (et comprend donc toujours $a$ et $b$).
La quantité $h = \max(x_{k+1} - x_k)$ est appelée le *pas* de la subdivision.

Se donner une subdivision revient à se donner son support, puisqu'une subdivision est une suite strictement croissante.

**Exemple (Subdivision)** i

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la subdivision $(a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n},\dots,a+n\frac{b-a}{n} = b)$, appelée *subdivision à pas constant*. Cette subdivision est appelée ainsi, car son pas est l'écart entre deux points consécutifs quelconques de son support.

**Définition (Subdivision plus fine qu'une autre)** 1.b

Soit $\sigma$ et $\sigma'$ deux subdivisions de $[a,b]$. On dit que $\sigma$ est *plus fine* que $\sigma'$ si le support de $\sigma$ contient le support de $\sigma'$.

Ceci définit un ordre (partiel) $\leqslant$ sur l'ensemble $\Omega$ des subdivisions de $[a,b]$. Pour toutes subdivisions $\sigma$ et $\sigma'$ de $[a,b]$, on peut définir la subdivision, notée (abusivement) $\sigma \cup \sigma'$, de support l'union des supports de $\sigma$ et de $\sigma'$. Cette subdivision $\sigma\cup\sigma'$ est plus fine que $\sigma$ et que $\sigma'$, et si $\nu$ est une subdivision plus fine que $\sigma$ et que $\sigma'$, alors elle est plus fine que $\sigma\cup\sigma'$.

Donner un exemple de « calcul » de $\sigma\cup\sigma'$, montrant en outre qu'une subdivision de support de cardinal 4 n'est pas nécessairement plus fine qu'une subdivision de support de cardinal 3.

**Définition (Fonction en escalier)** 1.c

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que $\varphi$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ de [a,b] et $n$ réels $\lambda_1$, ..., $\lambda_n$ tels que :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \forall\, t \in ]x_k, x_{k+1}[, \quad \varphi(t) = \lambda_k$$

On dit alors que la subdivision $\sigma$ est *adaptée* (ou encore *subordonnée*) à $\varphi$.
On note $\mathcal{E}([a,b])$ (ou $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions en escalier sur [a,b].

Illustration

Exemple (Fonctions en escalier)

(1) Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont éléments de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.
(2) La fonction partie entière restreinte à tout segment [a,b] est en escalier sur ce segment, une subdivision adaptée étant celle de support $\{a, b\} \cup (\mathbb{Z} \cap [a, b])$.

ii

Nous n'avons pas précisé les valeurs en les $x_k$, qui en effet ne compteront pas dans la suite. Il faut garder présent à l'esprit que la valeur de l'intégrale d'une fonction sera inchangée si on modifie les valeurs prises par la fonction en un nombre fini de points.

Si $\sigma$ est adaptée à $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, alors toute subdivision plus fine que $\sigma$ est adaptée à $\varphi$. Se peut-il que $\sigma$ et $\sigma'$ soient adaptées à $\varphi$, mais qu'aucune ne soit plus fine que l'autre ?

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ (il suffit de prendre $\sigma_\varphi \cup \sigma_{\varphi'}$ pour constater que $\lambda\varphi + \lambda'\varphi'$ est en escalier).

De même, le produit de deux fonctions en escalier est en escalier.

Si $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, de subdivision adaptée $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$, alors $\varphi$ prend au plus $2n+1$ valeurs, et est donc bornée.

### 1.2. Intégrale d'une fonction en escalier

Définition (Intégrale d'une fonction en escalier)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision adaptée à $f$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\lambda_k$ la valeur de $f$ sur $]x_k, x_{k+1}[$.

On appelle *intégrale* de $f$ sur le segment $[a, b]$, et on note $\int_{[a,b]} f$ (ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$) le réel

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x_{k+1} - x_k).$$

1.d

Il est nécessaire, pour légitimer cette définition, de montrer que la somme ci-dessus ne dépend pas de la subdivision choisie $\sigma$ adaptée à $f$. Si cette quantité dépendait effectivement de $\sigma$, l'intégrale de $f$ sur [a,b] serait une notion ambiguë, donc mal définie.

Démonstration

Justification de cette définition :
Pour toute subdivision $\sigma$ adaptée à $f$, notons $I(\sigma)$ le réel correspondant défini ci-dessus. On prend deux subdivisions $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ et $\sigma'$, de supports respectifs $S$ et $S'$, adaptées à $f$.
**Première étape :** on suppose que $S' = S \cup \{y\}$, où $y \notin S$. Le réel $y$ est situé entre deux points consécutifs $x_k$ et $x_{k+1}$ de $S$ (pour un certain $k \in [\![0, n-1]\!]$). Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, soit $\lambda_j$ la valeur prise par $f$ sur $]x_j, x_{j+1}[$. La valeur prise par $f$ sur $]x_k, y[$ et sur $]y, x_{k+1}[$ est $\lambda_k$. On a donc :

$$I(\sigma') = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j (x_{j+1} - x_j) + \lambda_k (y - x_k) + \lambda_k (x_{k+1} - y) + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j (x_{j+1} - x_j)$$

Comme $\lambda_k (y - x_k) + \lambda_k (x_{k+1} - y) = \lambda_k (x_{k+1} - x_k)$, on a bien $I(\sigma') = I(\sigma)$.
**Deuxième étape :** d'après la première étape, on montre par récurrence (sur $\mathrm{Card}(S' \setminus S)$, en l'amorçant en 0) que si $\sigma'$ est plus fine que $\sigma$, alors $I(\sigma') = I(\sigma)$.
**Troisième étape :** dans le cas général, on considère $\sigma \cup \sigma'$. Cette subdivision étant plus fine que $\sigma$ (resp. que $\sigma'$), on a $I(\sigma) = I(\sigma \cup \sigma') = I(\sigma')$.

□

**Interprétation graphique :** l'intégrale de $\varphi$ est la somme des aires algébriques des zones rectangulaires définies par le graphe de $\varphi$. Faire un dessin.

Illustration

Exemple (Intégrale d'une application constante)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction constante, de valeur $\lambda$. On a :

$$\int_a^b f(t) \mathrm{d}t = \lambda(b - a).$$

iii

Si $\varphi$ et $\psi$ sont en escalier sur $[a, b]$, et ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales. Ce résultat restera valable pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

En particulier, une fonction nulle sauf en un nombre fini de points est d'intégrale nulle. La réciproque est évidemment fausse !

Soit $c \in ]a, b[$. Les restrictions de $\varphi$ à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escalier, et :

$$\int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \varphi$$

Il suffit en effet d'insérer – si besoin est – $c$ dans une subdivision adaptée à $\varphi$ pour obtenir ce résultat.

**Proposition (Linéarité de l'intégrale pour les fonctions escalier)**

1.a

L'application

$$\nabla : \begin{array}{rcl} \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \int_{[a,b]} \varphi \end{array}$$

est (une forme) linéaire, *i.e.*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \qquad \int_{[a,b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi$$

**Démonstration**

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$, et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à $\varphi$ et à $\psi$ (donc à $\lambda\varphi + \mu\psi$).
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On note $\alpha_k$ et $\beta_k$ les valeurs prises sur $]x_k, x_{k+1}[$ par $\varphi$ et $\psi$ respectivement. La valeur prise par $\lambda\varphi + \mu\psi$ sur cet intervalle est $\lambda\alpha_k + \mu\beta_k$.
On a

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (\lambda\alpha_k + \mu\beta_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \lambda \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \alpha_k (x_{k+1} - x_k) + \mu \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \beta_k (x_{k+1} - x_k) \\ &= \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi. \end{aligned}$$

□

**Proposition (Croissance de l'intégrale pour les fonctions en escalier)**

1.b

Soit $\varphi, \psi$ dans $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.

(1) Si $\varphi \geqslant 0$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \geqslant 0$ *(positivité de l'intégrale).*

(2) Si $\varphi \leqslant \psi$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$ *(croissance de l'intégrale).*

(3) Si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, alors $|\varphi| \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi|.$$

(4) Si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |\varphi|.$$

Démonstration

$\square$

### 1.3. Fonctions continues par morceaux

**Définition (Fonction continue par morceaux)**

1.e

On dit qu'une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ (pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$), telle que, pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ :

(1) La restriction $f_k$ de $f$ à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.

(2) Cette restriction est prolongeable par continuité aux points $x_k$ et $x_{k+1}$.

On dit que la subdivision $\sigma$ est *adaptée* (ou *subordonnée*) à $f$.
On note $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$ (ou $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$, et à valeurs réelles.

Illustration

**Fonctions continues par morceaux**

- Ne pas oublier la seconde assertion : faire des dessins de fonctions continues par morceaux et de fonctions non continues par morceaux vérifiant la première propriété ;
- Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée ;
- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à $f$ est adaptée à $f$ ;
- Conséquence : on peut trouver une subdivision adaptée à deux fonctions continues par morceaux données ;
- $\mathcal{E}([a,b]) \subset \mathcal{C}_{pm}([a,b])$ et $\mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{C}_{pm}([a,b])$ ;
- $\mathcal{C}_{pm}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ ;
- De même, le produit de deux fonctions continues par morceaux est continue par morceaux ;
- La valeur absolue d'une fonction continue par morceaux est continue par morceaux ;
- Toute restriction d'une application continue par morceaux à un segment est continue par morceaux.

1.1

## 1.4. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

**Proposition (Encadrement arbitrairement fin d'une application continue par morceaux)**

Étant donné une fonction $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions $\varphi$ et $\psi$ en escalier sur [a,b] telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$$

1.c

La démonstration s'effectue en deux étapes. On montre d'abord le résultat dans le cas où $f$ est continue sur [a,b], puis dans le cas général.

**Démonstration**

**Première étape :** on suppose $f$ continue sur [a,b]. D'après le théorème de Heine, $f$ est uniformément continue sur le segment [a,b]. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tous points $x$ et $y$ de $[a,b]$ vérifiant $|y-x| \leqslant \eta$, on ait $|f(y)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$, de pas $h$ vérifiant $h \leqslant \eta$ (il en existe, on peut même la prendre à pas constant). On définit une fonction en escalier $\chi$ de la façon suivante. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\chi$ est constante de valeur $f(x_k)$ sur $[x_k, x_{k+1}[$, et $\chi(b) = f(b)$. La fonction $\chi$ est bien en escalier, et vérifie $|f-\chi| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (pas de problème en $b$, et si on prend $x$ entre $x_k$ et $x_{k+1}$, on a $|x-x_k| \leqslant \eta$, et donc $|f(x)-\chi(x)| = |f(x)-f(x_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. En posant $\varphi = \chi - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\psi = \chi + \frac{\varepsilon}{2}$, on a bien le résultat voulu.

□

Démonstration

**Seconde étape :** on suppose $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à $f$. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. On note $\tilde{f}_k$ le prolongement par continuité de $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ sur $[x_k,x_{k+1}]$. En appliquant la première étape à $\tilde{f}_k$, on peut choisir des fonctions $\varphi_k$ et $\psi_k$ en escalier sur $[x_k,x_{k+1}]$, vérifiant $\varphi_k \leqslant \tilde{f}_k \leqslant \psi_k$ et $\psi_k - \varphi_k \leqslant \varepsilon$.
On définit $\varphi$ et $\psi$ sur $[a,b]$, coïncidant avec $f$ en tout point du support de $\sigma$, et avec $\varphi_k$ (resp. $\psi_k$) sur $]x_k,x_{k+1}[$, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$. ces fonctions sont en escalier sur [a,b], et vérifient :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$$

□

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b])$. On note $\mathcal{E}^+(f) = \{\psi \in \mathcal{E}([a,b]), f \leqslant \psi\}$ et $\mathcal{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]), \varphi \leqslant f\}$.

Proposition (Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux)

1.d

Étant donné une fonction $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$, les quantités

$$\alpha^- = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\} \quad \text{et} \quad \alpha^+ = \inf\left\{\int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$$

sont bien définies et égales.

Démonstration

Soit $\varphi$ et $\psi$ des éléments respectifs de $\mathcal{E}^-(f)$ et de $\mathcal{E}^+(f)$ (on sait que ces ensembles ne sont pas vides, d'après la proposition fondamentale, ou parce qu'une fonction continue par morceaux est bornée). On a, par croissance de l'intégrale (pour les fonctions en escalier)

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$

Fixons provisoirement $\psi$. Le réel $\int_{[a,b]} \psi$ est un majorant de la partie non vide

$$\{\int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\}$$

de $\mathbb{R}$, ce qui prouve l'existence de $\alpha^-$, mais aussi l'inégalité $\alpha^- \leqslant \int_{[a,b]} \psi$.
Faisons maintenant varier $\psi$. Le réel $\alpha^-$ est un minorant de la partie non vide

$$\{\int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}^+(f)\}$$

de $\mathbb{R}$, ce qui prouve l'existence de $\alpha^+$, mais aussi l'inégalité $\alpha^- \leqslant \alpha^+$.
Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif quelconque. Soit $\varphi$ et $\psi$ deux éléments respectifs de $\mathcal{E}^-(f)$ et $\mathcal{E}^+(f)$ vérifiant $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ (il en existe d'après la proposition fondamentale). Par croissance et linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \varepsilon(b-a)$$

et notamment

$$\alpha^+ \leqslant \int_{[a,b]} \psi \leqslant \int_{[a,b]} \varphi + \varepsilon(b-a) \leqslant \alpha^- + \varepsilon(b-a).$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\alpha^+ \leqslant \alpha^-$, et donc finalement l'égalité

$$\alpha^+ = \alpha^-.$$

□

**Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)**

Dans ce contexte, l'*intégrale* de la fonction continue par morceaux $f$ sur le segment $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]} f$ (ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$) est cette quantité commune :

$$\int_{[a,b]} f = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$$

1.f

**Caractérisation de l'intégrale**

$\int_{[a,b]} f$ est donc l'unique réel $\alpha$ vérifiant les inégalités

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \alpha \leqslant \int_{[a,b]} \psi$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}^-(f) \times \mathcal{E}^+(f)$.

1.2

Cette définition étend bien celle des intégrales des fonctions en escalier sur un segment.

On ne change pas la valeur de l'intégrale d'une fonction si on change cette dernière en un nombre fini de points.

**Interprétation graphique :** l'intégrale permet de calculer l'aire algébrique de la portion du plan délimitée par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, $y = 0$, et le graphe de $f$.

**Illustration**

**Exercice (Calcul de l'intégrale d'une fonction affine)**

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et $f\ : x \mapsto \alpha x + \beta$. Calculer, en revenant à la définition de l'intégrale,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

1

# 2. Propriétés de l'intégrale

## 2.1. Linéarité et croissance

**Proposition (Linéarité de l'intégrale)** 2.a

L'application

$$\Delta : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}_{pm}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array}$$

est une forme linéaire, *i.e.* :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}), \quad \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

**Démonstration**

**Première étape :** on montre le respect de la multiplication scalaire. Soit donc $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b])$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 0$, on a clairement $\int_{[a,b]} 0.f = 0. \int_{[a,b]} f (= 0)$.

Si $\lambda > 0$, soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}^-(f) \times \mathcal{E}^+(f)$. On a $\lambda\varphi \in \mathcal{E}^-(\lambda f)$ et $\lambda\psi \in \mathcal{E}^+(\lambda f)$. Par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier, on a donc :

$$\lambda \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} (\lambda f) \leqslant \lambda \int_{[a,b]} \psi$$

En divisant par le réel strictement positif $\lambda$, on obtient

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{[a,b]} (\lambda f) \leqslant \int_{[a,b]} \psi,$$

ce qui montre le résultat voulu (d'après la caractérisation de $\int_{[a,b]} f$).

Si $\lambda < 0$, soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}^-(f) \times \mathcal{E}^+(f)$. On a $\lambda\psi \in \mathcal{E}^-(\lambda f)$ et $\lambda\varphi \in \mathcal{E}^+(\lambda f)$, et donc, par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier :

$$\lambda \int_{[a,b]} \psi \leqslant \int_{[a,b]} (\lambda f) \leqslant \lambda \int_{[a,b]} \varphi$$

En divisant par le réel strictement négatif $\lambda$, on obtient

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{[a,b]} (\lambda f) \leqslant \int_{[a,b]} \psi,$$

ce qui montre le résultat voulu (d'après la caractérisation de $\int_{[a,b]} f$).

□

Démonstration

**Seconde étape :** on montre le respect de la somme. Soit donc $f$, $g$ continues par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\varphi_f$ et $\varphi_g$ des éléments respectifs de $\mathcal{E}^-(f)$ et de $\mathcal{E}^-(g)$. On a $\varphi_f + \varphi_g \in \mathcal{E}^-(f+g)$, et donc (également par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier) :

$$\int_{[a,b]} \varphi_f + \int_{[a,b]} \varphi_g \leqslant \int_{[a,b]} (f+g).$$

Le réel $\int_{[a,b]}(f+g) - \int_{[a,b]} \varphi_g$ est donc un majorant de $\{\int_{[a,b]} \varphi_f, \varphi_f \in \mathcal{E}^-(f)\}$. Par définition de $\int_{[a,b]} f$, on a donc $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]}(f+g) - \int_{[a,b]} \varphi_g$.
Le réel $\int_{[a,b]}(f+g) - \int_{[a,b]} f$ est donc un majorant de $\{\int_{[a,b]} \varphi_g, \varphi_g \in \mathcal{E}^-(g)\}$. Par définition de $\int_{[a,b]} g$, on a donc $\int_{[a,b]} g \leqslant \int_{[a,b]}(f+g) - \int_{[a,b]} f$, soit $\int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \leqslant \int_{[a,b]}(f+g)$.
Pour démontrer l'égalité en sens inverse, on peut au choix effectuer un raisonnement analogue avec $(\psi_f, \psi_g) \in \mathcal{E}^+(f) \times \mathcal{E}^+(g)$, ou appliquer le résultat précédent à $-f$ et $-g$.

□

Proposition (Croissance de l'intégrale)

Soit $f, g$ deux fonctions continues par morceaux sur [a,b].

(1) Si $f \geqslant 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.

(2) Si $f \leqslant g$, alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

(3) $|\int_{[a,b]} f| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

2.b

Démonstration

□

Le deuxième résultat exprime la croissance de la fonction $\Delta$.

Exercice (Une inégalité intégrale)

Faire la question 2 de l'exercice 5 de TD.

2

### 2.2. Stricte croissance de l'intégrale pour les fonctions continues

On sait que l'intégrale de la fonction nulle sur $[a, b]$ est nulle, mais si $f$ est une fonction positive d'intégrale nulle, alors $f$ n'est pas nécessairement nulle. Montrons cependant que $f$ est nulle si $f$ est en outre supposée continue :

**Proposition (Stricte croissance de l'intégrale pour les fonctions continues)** 2.c

Soit $f$ une application continue et positive sur $[a, b]$. Si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

**Démonstration**

$\square$

La réciproque est évidemment vraie, mais sans grand intérêt. La contraposée est plus intéressante : si $f$ est continue, non identiquement nulle et positive, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

Si $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, $f \leqslant g$ et $f \neq g$ (ce que l'on note dans ce cours $f < g$), alors $\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$ : la fonction $\Delta$, restreinte à $\mathcal{C}([a, b])$ est donc strictement croissante.

**Exercice (Stricte croissance de l'intégrale pour les fonctions continues)** 3

Faire quelques questions de l'exercice 2 de TD.

### 2.3. Encadrement d'une intégrale

**Proposition (Inégalités de la moyenne, cas réel)** 2.d

Si $f$ et $g$ sont continues par morceaux sur [a,b], alors :

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

En particulier,

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| (b - a)$$

Démonstration

□

Définition (Valeur moyenne d'une fonction cpm sur un segment)

On appelle *valeur moyenne* de la fonction continue par morceaux $f$ sur le segment $[a, b]$, le nombre :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

2.a

Exercice (Valeur moyenne d'une application affine)

Calculer la valeur moyenne d'une fonction affine.

4

La valeur moyenne de $f$ est encadrée par les bornes de $f$.
Interprétation graphique, lien avec les moyennes discrètes.

Illustration

Exercice (Valeurs moyennes)

Faire l'exercice 1 de TD.

5

### 2.4. Relation de Chasles

**Proposition** (Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration) **2.e**

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, et $c\in]a,b[$. $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ le sont, et on a alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

**Démonstration**

Toute restriction à un segment d'une fonction continue par morceaux est continue par morceaux. Si réciproquement $(y_0,\dots,y_p)$ et $(z_0,\dots,z_q)$ sont adaptées aux fonctions continues par morceaux $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$, alors $(y_0,\dots,y_p(=z_0=c),z_1,\dots,z_q)$ est adaptée à la fonction continue par morceaux $f$.
Soit $\varphi\in\mathcal{E}^-(f)$. On a $\int_{[a,b]}\varphi=\int_{[a,c]}\varphi+\int_{[c,b]}\varphi$, donc

$$\int_{[a,b]}\varphi \leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

Ceci étant valable pour tout $\varphi\in\mathcal{E}^-(f)$, on a :

$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

Pour montrer l'inégalité en sens inverse, on peut raisonner de manière analogue sur $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$, ou plus simplement appliquer l'inégalité trouvée à $-f$ (et exploiter la linéarité de l'intégrale).

$\square$

Si $f$ est continue par morceaux sur un segment $[\alpha,\beta]$, $\alpha\leqslant\beta$, on pose :

$$\int_\beta^\alpha f(t)\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = -\int_{[\alpha,\beta]} f$$

De plus, on pose $\int_\gamma^\gamma f(t)\mathrm{d}t=0$ pour tout $\gamma\in[\alpha,\beta]$.

La valeur moyenne est donc inchangée si on échange $a$ et $b$.

Attention, si $\alpha\leqslant\beta$, et $f\geqslant 0$, on a :

$$\int_\beta^\alpha f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Il s'ensuit la relation suivante, appelée *relation de Chasles* :

**Proposition** (Relation de Chasles) **2.f**

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in[a,b]^3,\quad \int_\alpha^\gamma f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma f(t)\mathrm{d}t$$

**Démonstration**

On égrène tous les cas possibles.

$\square$

**Corollaire (Relation de Chasles généralisée)**

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \ldots, x_n$ des points de $[a,b]$. On a

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t.$$

2.g

**Exercice (Inégalité entre valeurs moyennes)**

Faire l'exercice 4 de TD.

6

**Exercice (Équivalent de la série harmonique)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En utilisant la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$H_n \sim \ln(n).$$

7

### 2.5. Un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b])$

On peut définir une application

$$B : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{pm}([a,b])^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int_{[a,b]} fg \end{array}.$$

**Proposition (Pseudo-produit scalaire intégral)**

L'application $B$ est bilinéaire, symétrique et *positive* [a]. On dit que c'est une forme bilinéaire, car l'espace vectoriel d'arrivée est le corps des scalaires.

a. *i.e.* $\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b]), B(f,f) \geqslant 0$.

2.h

Par positivité, on peut définir une application $N : \mathcal{C}_{pm}([a,b]) \to \mathbb{R}_+$, envoyant $f$ sur $\sqrt{B(f,f)}$.

**Proposition (Pseudo-inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale)**

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b])$ et $N(f) = 0$, alors $f$ est nulle sauf en un nombre fini de points.
En particulier, si $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et $N(f) = 0$, alors $f = 0$.

2.i

Ainsi, lorsqu'on restreint $B$ à $\mathcal{C}([a,b])^2$, on obtient une application bilinéaire, symétrique, et dite *définie positive* : on dit que cette restriction est un *produit scalaire*.
On utilise les notations suivantes : pour tout $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$, on note $< f, g >= B(f,g)$ et $\|f\| = N(f)$

**Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale)**

Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continues par morceaux. On a alors :

$$\left( \int_{[a,b]} fg \right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

De plus, si $f$ et $g$ sont continues, il y a égalité si et seulement si $(f,g)$ est liée.

2.j

Démonstration

Partir de l'observation que, pour tout réel $\lambda$ : $N(f+\lambda g)^2 \geqslant 0$.

$\square$

Cette inégalité exprime simplement dans le cas continu le fait que $| < f, g > | \leqslant \|f\| \, \|g\|$. C'est d'ailleurs un bon moyen de la retenir.

## 3. Calcul approché d'une intégrale

### 3.1. Sommes de Riemann

**Définition (Subdivision pointée)**

Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, on choisit un réel $\xi_k$ dans $[x_k, x_{k+1}]$, et on note $\chi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$. Le couple $(\sigma, \chi)$ est appelée *subdivision pointée*. On parle également de la subdivision $\sigma$ pointée par la famille $\chi$ ou par les points $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$, et on dit que $\chi$ est un *pointage* de $\sigma$.

(1) Si $\sigma$ est à pas constant, on dira que la subdivision pointée est à *pas constant*.

(2) Si $\xi_k = x_k$, on dira que la subdivision est *pointée à gauche*.

(3) Si $\xi_k = x_{k+1}$, on dira que la subdivision est *pointée à droite*.

Le *pas* d'une subsivision pointée $(\sigma, \chi)$ est celui de $\sigma$.

3.a

**Définition (Somme de Riemann)**

Soit $f$ une application, définie sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles. Soit $(\sigma, \chi)$ une subdivision pointée de [a,b], $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ et $\chi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$. La quantité

$$R_{(\sigma,\chi)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

est appelée *somme de Riemann* de $f$ associée à la subdivision $\sigma$ et au pointage $\chi$ (ou aux points $\xi_k$) (ou à la subdivision pointée $(\sigma, \chi)$).
On note parfois abusivement $R_\sigma(f)$ au lieu de $R_{(\sigma,\chi)}(f)$.

3.b

Dans 97% des cas au moins, on considère le cas où la subdivision pointée est à pas constant et pointée à gauche ou à droite. Si la subdivision pointée est à pas constant, on a :

$$R_{(\sigma,\chi)}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

**Interprétation graphique :**

Illustration

Dans la suite de ce paragraphe, on considère une subdivision pointée $(\sigma, \chi)$ de [a,b].

**Lemme pour les sommes de Riemann**

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_{(\sigma,\chi)}(f) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(\xi_k)| \mathrm{d}t.$$

3.a

Démonstration

□

**Proposition (Sommes de Riemann, cas lipschitzien)**

Soit $f$ $K$-lipschitzienne sur $[a, b]$. Si $\sigma$ est une subdivision de pas $h$, alors pour toute somme de Riemann $R_\sigma(f)$ associée à la subdivision $\sigma$, on a :

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_\sigma(f) \right| \leqslant K(b-a)h$$

3.b

Démonstration

□

Cette proposition est valable en particulier pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Notons $M_1 = \sup |f'|$. On considère une subdivision pointée de pas constant $\frac{b-a}{n}$. On a :

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_n(f) \right| \leqslant M_1 \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on a donc convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale lorsque l'on fait tendre le pas des subdivision considérées vers 0 (on a même une majoration de l'erreur, donc une estimation de la vitesse de convergence). Montrons que le résultat subsiste pour une fonction continue (en perdant toutefois l'aspect quantitatif).

**Proposition (Sommes de Riemann, cas continu)**

3.c

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de pas $h \leqslant \eta$, toute somme de Riemann associée à $\sigma$, on ait :

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_\sigma(f) \right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration

$f$ est continue donc uniformément continue sur le segment $[a,b]$.
Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tous points $x, y \in [a,b]$, on ait :

$$|y - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Soit $(\sigma, \chi)$ une subdivision pointée de [a,b] de pas $h \leqslant \eta$. Pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on a $|f(t) - f(\xi_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Il vient :

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_{(\sigma,\chi)}(f) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

□

**Corollaire (Sommes de Riemann, cas continu)**

3.d

Pour tout entier naturel non nul $n$, soit $R_n(f)$ une série de Riemann associée à la subdivision de $[a,b]$ de pas constant égal à $\frac{b-a}{n}$ (peu importe la valeur des $\xi_k$). Alors

$$\lim R_n(f) = \int_{[a,b]} f$$

**Exercice (Somme de Riemann, cas continu par morceaux)** 8

(Facultatif) Montrer la convergence dans le cas d'une fonction continue par morceaux.

**Exercice (Calcul d'intégrale en passant par une somme de Riemann)** 9

Faire l'exercice 10 de TD.

**Exercice (Le théorème fondamental de l'analyse par les sommes de Riemann)** 10

Faire l'exercice 13 de TD.

**Exercice (Calcul préliminaire pour la méthode des trapèzes)** 11

Montrer que $\int_a^b (t-a)(b-t)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{6}$.

### 3.2. La méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approcher la fonction $f$ (supposée suffisamment régulière), non plus par une fonction en escalier comme dans les sommes de Riemann, mais par une fonction continue, affine par morceaux.

Plus précisément, on choisit la subdivision $\sigma_n = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ de pas constant $\frac{b-a}{n}$. On considère la fonction $\gamma_n$ affine sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$ : cette fonction est en particulier continue. L'aire du trapèze de sommet $(x_k, 0)$, $(x_{k+1}, 0)$, $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ vaut :

$$\frac{1}{2}\left(x_{k+1}-x_k\right)\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)$$

L'intégrale de la fonction $\gamma_n$ vaut :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(x_{k+1}-x_k\right)\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$$

Pour estimer avec quelle finesse cette intégrale approche celle de $f$, on utilise le :

**Lemme pour la méthode des trapèzes** 3.e

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ telle que $|f''|$ soit majorée par $M_2$ sur $I$. Soient $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leqslant \beta$. On a :

$$\left|\int_\alpha^\beta f - (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right| \leqslant \frac{M_2}{12}(\beta-\alpha)^3$$

Démonstration

Soit $g$ la fonction affine coïncidant avec $f$ en $\alpha$ et $\beta$.
La fonction
$$\varphi : t \mapsto f(t) - \varepsilon \frac{M_2}{2}(t-\alpha)(\beta - t)$$
est convexe (resp. concave) si $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$) (dérivée $\varphi''(t) = f''(t) + \varepsilon M_2$) et donc
$$\forall t \in [\alpha, \beta], f(t) - \frac{M_2}{2}(t-\alpha)(\beta - t) \leqslant g(t).$$
et
$$\forall t \in [\alpha, \beta], f(t) + \frac{M_2}{2}(t-\alpha)(\beta - t) \geqslant g(t).$$
Nous avons donc
$$\forall t \in [\alpha, \beta], |f(t) - g(t)| \leqslant \frac{M_2}{2}(t-\alpha)(\beta - t).$$
On a donc
$$\left| \int_{[\alpha,\beta]} f - \int_{[\alpha,\beta]} g \right| \leqslant \int_{[\alpha,\beta]} |f-g| \leqslant \frac{M_2}{12}(\beta - \alpha)^3$$
Il ne reste plus qu'à remarquer que $g$ étant affine, sa valeur moyenne est $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

□

En conséquence immédiate du lemme, on a donc :

Proposition (Majoration de l'erreur pour la méthode des trapèzes)

$$\left| \int_{[\alpha,\beta]} f - A_n \right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

3.f

La convergence est donc assurée (on a montré un résultat plus précis), et pouvait être déduite d'un encadrement de $A_n$ par des sommes de Riemann.

## 4. Extension de la définition d'une intégrale

### 4.1. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition (Fonction continue par morceaux sur $I$)

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* sur $I$ si elle (en fait sa restriction) est continue par morceaux sur tout segment de $I$ d'intérieur non vide.
On note $\mathcal{C}_{pm}(I)$ (ou $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $I$ (et à valeurs réelles).

4.a

**Fonction continue par morceaux sur $I$**

- On peut convenir qu'une fonction définie en un seul point est continue par morceaux, même si cela n'a pas grand intérêt.
- Une fonction continue sur $I$ est continue par morceaux sur $I$. La fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, mais n'est pas prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, car sa restriction à $[0,1]$ (par exemple) ne serait pas continue par morceaux (car non bornée).
- Toute fonction continue par morceaux sur $I$ admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en tout point où cela a un sens. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur $]0,1]$ est continue par morceaux, mais n'est pas prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$.

4.1

**Notation (Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle)**

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I)$. On note

$$\int_{[a,b]} f := \int_{[a,b]} f_{|[a,b]}$$

pour tous $a,b \in I$, $a < b$ (l'intégrale de droite a un sens car $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur le segment [a,b], ce qui donne un sens à l'intégrale de gauche).
Ensuite, on définit, pour tous $\alpha, \beta \in I$ :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{[\alpha,\beta]} f & \text{si} \quad \alpha < \beta \\ -\int_{[\beta,\alpha]} f & \text{si} \quad \beta < \alpha \\ 0 & \text{si} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

4.b

**Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle**

- Il n'y a pas grand chose à rajouter aux propriétés déjà vues, cependant : méfiez vous des bornes d'intégration inversées (pour des questions de signe), des bornes égales (par exemple, la fonction valant 1 en 0 est continue positive d'intégrale nulle sur $[0,0]$, mais pas nulle).
- En particulier, la relation de Chasles est toujours valable :
$$\forall\, \alpha,\beta,\gamma \in I, \quad \int_\alpha^\gamma f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma f(t)\mathrm{d}t,$$
de même pour la relation de Chasles généralisée.
- Nous *n'avons pas* donné de sens à $\int_I f$, sauf dans le cas où $I$ est un segment. L'année prochaine, vous verrez une notion étendue d'intégrale.

4.2

## 4.2. Intégration d'une fonction à valeurs complexes

L'idée est de se ramener au cas d'une fonction réelle à valeurs réelles, en prenant les parties réelle et imaginaire de la fonction à valeurs complexes considérée.

**Définition (Fonction complexe continue par morceaux)** 4.c

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ (pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$), telle que, pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ :
– La restriction $f_k$ de $f$ à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.
– Cette restriction est prolongeable par continuité aux points $x_k$ et $x_{k+1}$.
On dit alors que la subdivision $\sigma$ est *adaptée* (ou *subordonnée*) à $f$.
Leur ensemble est noté $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{C})$.

**Fonction complexe continue par morceaux** 4.3

– $f$ est continue par morceaux si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
– L'ensemble $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, stable par produit.

**Définition (Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux)** 4.d

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{C})$. On appelle *intégrale de la fonction $f$ sur le segment $[a,b]$* et on note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ le nombre complexe :

$$\int_{[a,b]} \mathrm{Re}\, f + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}\, f$$

**Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux** 4.4

On a donc $\int_{[a,b]} \mathrm{Re}\, f = \mathrm{Re} \int_{[a,b]} f$, $\int_{[a,b]} \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im} \int_{[a,b]} f$.

**Notation (Fonction complexe continue par morceaux sur $I$)** 4.e

On conserve les notations des autres sections, et on définit la notion de fonction continue par morceaux sur un intervalle réel d'intérieur non vide : un élément de $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{C}$, dont la restriction à tout segment est continue par morceaux.

En se ramenant aux parties réelles et imaginaires, on retrouve les propriétés vues précédemment, sauf celles qui font intervenir l'ordre (on ne parle plus de croissance de l'intégrale par exemple) :

**Proposition (Linéarité de l'intégrale complexe)** 4.a

L'application

$$\nabla : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{C}$.

**Proposition (Relation de Chasles)**

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$, et $\alpha, \beta, \gamma \in I$. On a :

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma f(t)\mathrm{d}t.$$

4.b

**Proposition (Module d'une intégrale)**

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{C})$. Alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

4.c

**Démonstration**

$|f|$ est clairement continue par morceaux si $f$ l'est (toute subdivision adaptée à $f$ le sera à $|f|$).
Il existe un réel $\theta$ tel que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = e^{i\theta} \left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right|$$

d'où (par linéarité de l'intégrale, et d'après 4.2)

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| = \int_a^b (e^{-i\theta} f(t)\mathrm{d}t) = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t)\mathrm{d}t)$$

Comme $\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) \leqslant |f|$, la croissance de l'intégrale *réelle* permet de conclure. □

Ceci permet de déduire l'inégalité de la moyenne :

**Proposition (Inégalité de la moyenne, cas complexe)**

Si $f$ et $g$ sont continues par morceaux sur [a,b], alors :

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

En particulier,

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| (b-a)$$

4.d

**Démonstration**

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leqslant \int_{[a,b]} |fg| = \int_{[a,b]} |f||g| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$$

□

# 5. Feuille de TD 25 : Intégration

Sauf mention contraire, $a$ et $b$ sont deux réels, $a < b$. On admet (provisoirement) le théorème fondamental de l'analyse, faisant le lien entre primitive et intégrale.

## 5.1. Annulation et intégrales

**Exercice 1 (Lorsque la valeur moyenne est aussi le maximum)** 0

Déterminer les fonctions $f$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues, telles que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup\limits_{[a,b]} |f|$.

**Exercice 2 (Annulation de fonction et intégrales)** 0 à 2

**1** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, d'intégrale nulle sur $[a, b]$. Montrer que $f$ s'annule.
**2** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in ]0, 1[$ tel que $f(a) = a$.
**3** Soit $f$ continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que $f$ admet au moins $n + 1$ zéros distincts dans $]0, 1[$.
**4** *(X PC 09)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$. On suppose que : $\int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f$ s'annule au moins deux fois sur $[0, \pi]$.
**5** *(Cachan 07)* Soit $f$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodique et de moyenne nulle. Montrer que $f + f''$ s'annule quatre fois au moins sur $[0, 2\pi[$.

**Exercice 3 (Nullité de fonction et intégrales)** 3 à 4

**1** Soit $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues, telles que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer $f = g = 0$.
**2** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f^2 = \int_{[0,1]} f^3 = \int_{[0,1]} f^4$. Montrer $f = 0$ ou $f = 1$.
**3** Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall g \in \mathcal{E}\left([0, 1], \mathbb{R}\right), \quad \int_{[0,1]} fg = 0.$$

Montrer que $f = 0$.
**4** *(Centrale 08)* Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b f \int_a^b g = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.
**5** Soit $f$ continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f^n(u)du$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs quand $n$ décrit $\mathbb{N}$. Montrer que $f = -1$ ou $f = 0$ ou $f = 1$.

## 5.2. Inégalités intégrales

Exercice 4 (Inégalité entre valeurs moyennes) 2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a < b < c$. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, c])$. Montrer :

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t \leqslant \max\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \frac{1}{c-b}\int_b^c f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 5 (Inégalités intégrales) 2

**1** Soit $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continues et positives, telles que $fg \geqslant 1$. Montrer

$$\left(\int_{[0,1]} f\right)\left(\int_{[0,1]} g\right) \geqslant 1.$$

**2** *(X MP 05)* Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f = 0$, $m$ le minimum de $f$ et $M$ son maximum. Prouver $\int_{[0,1]} f^2 \leqslant -mM$.

**3** *(X MP 05)* Soit $f$ et $g$ deux fonctions croissantes et continues sur $[0, 1]$. Comparer $\int_{[0,1]} fg$ et $(\int_{[0,1]} f)(\int_{[0,1]} g)$.

## 5.3. Suites et intégrales

Exercice 6 (Suites étudiées à l'aide d'intégrales) 1

**1** En remarquant que $\frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 (-x)^{k-1}\mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

**2** *(Mines MP 08)* Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$.

**3** *(Mines MP 08)* Nature de la suite de terme général $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$.

Exercice 7 (Limite de suites d'intégrales) 1

**1** *(Mines PC)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$. Que peut-on dire de la suite $(I_n)$ ?

**2** *(X PC 09)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de $(I_n)$.

**3** *(Centrale et Mines MP 05, TPE 09)* Soit $f$ une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$.

Exercice 8 (Comparaison somme intégrale) 1

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante de limite nulle en $+\infty$, telle que $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ tende vers un réel $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
**1** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n^2-1} f(\frac{k}{n})$$

En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n^2} f(\frac{k}{n})$ tend vers $l$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
**2** Application : calculer

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Exercice 9 (Lemme de Lebesgue) 1 et 4

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Montrer que la suite de terme général $\int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$ converge vers 0.
**Indication :** le montrer d'abord pour les fonctions en escalier.

## 5.4. Sommes de Riemann

Exercice 10 (Calcul d'intégrale en passant par une somme de Riemann) 0

Calculer à l'aide d'une somme de Riemann : $\int_a^b e^t\mathrm{d}t$.

Exercice 11 (Calcul de limites par les sommes de Riemann) 0

Calculer :
**1** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
**2** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}$.
**3** $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ ;

Exercice 12 (Estimation de la vitesse de convergence d'une somme de Riemann) 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. En appliquant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction arctangente (en $\frac{k}{n}$, évaluée en $\frac{k-1}{n}$), donner un équivalent de $u_n - l$.

Exercice 13 (Le théorème fondamental de l'analyse par les sommes de Riemann) 2

En utilisant les sommes de Riemann et l'égalité des accroissements finis, montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, alors $\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a)$.

Exercice 14 (Une pseudo-somme de Riemann) 4

Soit $f$ et $g$ continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

## 5.5. Divers

Exercice 15 (Extremums d'une fonction définie par des intégrales *(CCP 09)*) 2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi\ : f \in E \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \times \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\inf \Phi$ et $\sup \Phi$.

Exercice 16 (Cesàro intégral) 2

Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $f$ soit de limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

Exercice 17 (Équations fonctionnelles intégrales) 2

**1** *(X PC 09)* Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t$.

**2** *(Centrale PC 09)* Trouver les $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ telles que $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.

Exercice 18 (Fonctions définies par une intégrale) 2

**1** On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f\ : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$. Calculer la limite de $f$ en 0, en $+\infty$.

**2** Étudier en 1 la fonction $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

Exercice 19 (Équation différentielle et limite à l'infini) 4

Montrer que toute fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f + f' = 0$ est de limite nulle en $+\infty$.

CHAPITRE XXVI

# Primitives

## Sommaire



Dans ce chapitre, $I$ désigne un intervalle réel d'intérieur non vide. $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1. Primitives et intégrales d'une fonction continue

### 1.1. Définitions

**Définition (Primitive)** 1.a

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On appelle *primitive* de $f$ sur $I$ toute fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$, dérivable sur $I$, de dérivée égale à $f$.

Si $F$ est une primitive de $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, alors les primitives de $f$ sont les $F + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Le fait d'être sur un intervalle est primordial.
En particulier, si deux primitives d'une même fonction continue $f$ sur $I$ coïncident en un point, alors elles sont égales (cf. la condition de Cauchy).
Par exemple, si $a \in I$, il existe au plus une primitive de $f$ s'annulant en $a$.

**Exemple (Primitives)** i

Primitives d'une fonction polynomiale, de la fonction exponentielle, inverse.

### 1.2. Les résultats fondamentaux

**Théorème (Expression intégrale de la primitive s'annulant en $a$)** 1.a

Soit $f$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$, et $a \in I$. La fonction $F_a$ définie par :

$$\forall x \in I, F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $a$.

**Démonstration**

$\square$

**Exercice (Continuité d'une expression intégrale)** 1

Montrer, sans utiliser ce le théorème ci-dessus, le résultat plus faible suivant : $F_a$ est continue sur $I$.

**Échec de l'extension de la notion de primitive** 1.1

Que dire si $f$ est continue par morceaux ? La démonstration précédente montre que $F_a$ admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de l'intérieur de $I$, qui sont les limites à gauche et à droite de $f$ en ce point. En particulier, il se peut fort bien que $F_a$ ne soit pas dérivable en certains points (à prendre parmi les points de discontinuité de $f$).
Si une fonction continue par morceaux admet une primitive, alors elle est continue : on ne peut donc espérer étendre la notion de primitive telle qu'on l'a définie au cas d'une fonction continue par morceaux.

On en déduit plusieurs corollaires, le premier sera qualifié de théorème étant donné son importance :

**Théorème (Primitives et intégrale)** 1.b

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $a$ et $b$ deux points de $I$. Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, on a :

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$$

**Démonstration**

$\square$

On peut reformuler ce théorème ainsi : soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'.$$

**Exercice (Dérivation d'une fonction définie par une intégrale à bornes variables)**

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, et $\alpha, \beta$ dérivables sur un intervalle $J$ à valeurs dans $I$. Montrer que la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f \end{array}$$

est dérivable sur $J$ et exprimer sa dérivée en fonction de $f$, $\alpha$ et $\beta$.

2

**Exercice (Primitives des fonctions paires, impaires, périodiques)**

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
**1** On suppose $f$ impaire. Que dire des primitives de $f$ ?
**2** On suppose $f$ paire. Combien $f$ admet-elle de primitives impaires ?
**3** On suppose $f$ $T$-périodique. À quelle condition nécessaire et suffisante $f$ admet-elle (au moins) une primitive $T$-périodique ?

3

Écritures $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = [F(t)]_{t=a}^{t=b}$.
La notation $\int f$, ou $\int f(x)\mathrm{d}x$, désigne (abusivement) une primitive de $f$ (cf. Maple). On écrira par exemple

$$\int \exp(x)\mathrm{d}x = \exp(x) + C \quad (C \in \mathbb{K})$$

## 2. Méthodes de calcul de primitives

### 2.1. Intégration par parties

**Proposition (Intégration par parties)**

Si $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on a :

$$\int_{[a,b]} uv' = [uv]_a^b - \int_{[a,b]} u'v.$$

2.a

Démonstration

$\square$

Cette formule provient donc simplement de la formule de dérivation d'un produit.

Lorsqu'on applique cette méthode, bien préciser $u$, $v$ (et non pas $u$ et $v'$), et ne pas oublier de signaler que ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Quand effectuer une intégration par parties ? Cette formule est aussi utile pour se débarrasser de fonctions « compliquées » telles que ln, arcsin, arctan, etc.

Elle permet également dans certains cas d'obtenir un terme intégral que l'on arrive plus facilement à encadrer.

Il est parfois utile d'appliquer cette formule en prenant pour $u'$ ou $v'$ une fonction constante (exemple : fonction logarithme), et de l'intégrer en une fonction affine non linéaire (*i.e.* avec un terme constant).

Il arrive d'appliquer plusieurs fois d'affilée cette méthode (voire de calculer une suite d'intégrales).

Exercice (Intégration par parties)

Calculer $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$ en effectuant une intégration par parties.

4

### 2.2. Changement de variable

Proposition (Changement de variable)

Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux éléments de $J$. On a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

2.b

Démonstration

$\square$

Cette formule provient donc simplement de la formule de dérivation d'une composée.

Moyen mnémotechnique à la physicienne : si $t = \varphi(u)$, alors $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$.

Il ne faut pas oublier de changer les bornes de l'intégrale !

**Exemple (Changement de variable)**

En effectuant le changement de variable $u = \sin(t)$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 u^3 \mathrm{d}u = \frac{1}{4}.$$

On aurait aussi pu écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\mathrm{d}\sin(t) = \left[\frac{\sin^4(t)}{4}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}.$$

i

**Exercice (Intégration par parties)**

Calculer $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $u = \pi - x$.

5

**Exercice (Invariance par translation)**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Soit $\tau \in \mathbb{R}$. Vérifier

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(t-\tau)\mathrm{d}t$$

**1** Dans le cas où $f$ est continue.
**2** Dans le cas général.

6

**Exercice (Valeur moyenne d'une fonction périodique)**

Soit $f$ une fonction $T$-périodique, continue par morceaux, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
**1** Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\int_{[a,a+T]} f = \int_{[b,b+T]} f.$$

Ainsi, il est permis de définir la *valeur moyenne* d'une fonction $T$-périodique comme le réel

$$\frac{1}{T}\int_{[a,a+T]} f,$$

et ce pour n'importe quelle valeur de $a$.
**2** Calculer les valeurs moyennes de cos, sin, $\cos^2$, $\sin^2$.

7

**Exercice (Aire d'un quart de disque)**

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

8

Les changements de variable les plus simples, les changements de variable affines, permettent notamment d'exploiter la périodicité et la symétrie de la fonction considérée (périodicité, parité, imparité, décalage).

Ils permettent aussi de se ramener au cas où le segment d'intégration est $[0, 1]$ ($t = a + u(b-a)$), ou $[-1, 1]$ ($t = \frac{a+b}{2} + u\frac{a-b}{2}$) au choix.

## 3. Primitives des fonctions usuelles

On mentionne ici des primitives classiques et trop souvent oubliées.
$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$. ($\alpha \neq -1$).
$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$.
$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$ ($= \operatorname{argth}(x) + C$ sur $]-1,1[$).
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsh}(x) + C$.
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch}(x) + C$.
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)^2} = \tan(x) + C$.
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)^2} = -\operatorname{cotan}(x) + C$.
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$.
$\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)|\mathrm{d}x$.

## 4. Techniques de calcul de primitives

### 4.1. Primitives des fonctions rationnelles

Il est aisé de calculer une primitive de $x \mapsto (x-\alpha)^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ (même si $\alpha$ est complexe).
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on connaît depuis belle lurette une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$.
On peut vérifier que si $\alpha = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et $b \neq 0$, alors

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + i\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$$

Ainsi, il est facile de déterminer les primitives d'une fraction rationnelle lorsqu'on a sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

En pratique, il est fréquent de partir d'une décomposition sur $\mathbb{R}$, et la seule difficulté est de calculer une primitive de

$$\frac{\lambda X + \mu}{(X^2+bX+c)^r}$$

lorsque $b^2 - 4c < 0$.

Lorsque $r = 1$, l'idée est d'exprimer la fraction rationnelle comme combinaison linéaire de deux fonctions dont on sait calculer la primitive, à savoir

$$x \mapsto \frac{2x+b}{x^2+bx+c} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{x^2+bx+c}$$

Pour cette dernière, on pensera à écrire $X^2 + bX + c = (X + \frac{b}{2})^2 + \frac{4c-b^2}{4}$, puis on calculera une primitive grâce à un changement de variable et la relation à retenir

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Si $r \geqslant 2$, on peut :

(1) Soit se ramener au calcul de $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^r}$ et, par changement de variable, se ramener à

$$I_r = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^r}.$$

Une intégration par parties donne

$$2nI_{n+1} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)I_n$$

(2) Soit écrire $\lambda X + \mu = \alpha(X^2 + bX + c) + (\beta X + \gamma)(2X + b)$, et intégrer par parties pour la dernière, afin de se ramener au calcul de $\int \frac{\lambda' x + \mu'}{(x^2+bx+c)^{r-1}}\mathrm{d}x$. Toujours commencer par les ordres les plus élevés si on veut utiliser cette méthode.

Exercice (Un calcul barbare d'intégrale)

Calcul de

$$\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\mathrm{d}x$$

**Réponse :** La décomposition de la fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^2+2}-\frac{6}{(x^2+2)^2}-\frac{12x-16}{(x^2+2)^3}$$

Primitives

$$-\frac{1}{x^3}+\frac{2x+3}{(x^2+2)^3}+\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$$

On obtient donc pour valeur $\frac{37}{72}+2\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

9

### 4.2. Primitives des fonctions rationnelles en sinus et cosinus

On peut se ramener au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle. Ce sera aussi le cas dans la plupart des autres calculs de primitives. On mesure donc l'apport de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples à cette partie de l'analyse.

4.2.1. *Polynômes en sinus et cosinus.* Si nos fonctions sont polynomiales en sinus et cosinus, nous sommes ramenés au calcul des primitives de fonctions $\sin^m\cos^n$. Si $m$ ou $n$ est impair, on peut exploiter la relation $\cos^2+\sin^2=1$ pour avoir à intégrer une fonction $\cos^k\sin$ ou $\sin^k\cos$, ce qui se fait sans problème.

Si $m$ et $n$ sont pairs, on peut toujours linéariser l'expression.

Exercice (Polynômes en sinus et cosinus)

Calculer

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x, \int \cos^2 x\sin^2 x\mathrm{d}x$$

10

4.2.2. *Fonctions rationnelles en sinus et cosinus.* Si la fonction à intégrer est une fonction rationnelle $f$ en sinus et cosinus (obtenue à partir des fonctions sinus et cosinus en utilisant les opérations algébriques), on peut :

(1) Utiliser le changement de variable $u=\tan(t/2)$ (et donc $\mathrm{d}t=\frac{2\mathrm{d}u}{u^2+1}$).
(2) Utiliser les *règles de Bioche* (en principe hors-programme) :
   (a) Si l'expression $f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ est invariante par la transformation $x\mapsto -x$, on pose $u=\cos x$.
   (b) Si l'expression $f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ est invariante par la transformation $x\mapsto \pi-x$, on pose $u=\sin x$.
   (c) Si l'expression $f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ est invariante par $x\mapsto \pi+x$, on pose $u=\tan x$.
   (d) Il se peut que l'emploi des règles de Bioche ne soit pas la meilleure méthode.

Pour les règles de Bioche, ne pas oublier le $\mathrm{d}x$ dans l'évaluation de la transformation.
Si aucune des règles de Bioche n'est applicable, on pose $u=\tan\frac{x}{2}$.
Si les trois règles de Bioche conviennent, on peut avantageusement faire le changement de variable $u=\cos 2x$.

Exercice (Primitives de fonctions rationnelles polynomiales)

**1** Calcul de $\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$. **Réponse :** Poser $u=\tan x$. On obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-1+2\tan x}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{6}\ln\left(\tan^2 x-\tan x+1\right)-\frac{1}{3}\ln|1+\tan x|+C$$

**2** Calcul de $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$. **Réponse :** Poser $u=\tan\frac{x}{2}$, et on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

11

Dans le cas du changement de variable $u = \tan(x)$, il faut se placer sur un intervalle où la fonction tangente est définie, ce qui nécessite d'être soigneux dans certains cas, voir la question 6 de l'exercice **??**.

### 4.3. Primitives des fonctions rationnelles en cosinus et sinus hyperboliques

L'étude est similaire à celle des fonctions rationnelles trigonométriques : pour les polynômes, l'étude est identique.

Si $F(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est une fonction rationnelle en ch et sh, on utilise les règles de Bioche dans le sens suivant : si l'étude de $F(\cos, \sin)$ conduit à un changement de variable, trigonométrique, alors on effectue le changement de variable hyperbolique correspondant pour trouver une primitive de $F(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$.

Si aucune des règles de Bioche n'est applicable, on peut effectuer le changement de variable $u = \tanh \frac{x}{2}$, mais aussi tout simplement $t = e^x$.

**Exercice (Primitives de fonctions rationnelles hyperboliques)** 12

**1** Calcul de $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\, x(1+\mathrm{sh}\, x)}$. **Réponse :** $\frac{1}{2} \ln |1+\mathrm{sh}\, x| - \frac{1}{2} \ln(\mathrm{ch}\, x) + \frac{1}{2} \arctan(\mathrm{sh}\, x) + C$.

**2** Calcul de $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\,\mathrm{ch}\, x+3\,\mathrm{sh}\, x+4}$ **Réponse :** $-\frac{1}{2(2e^x+1)} + C$.

### 4.4. Compléments

**Proposition (Primitives d'une exponentielle-polynôme)** 4.a

Si $a$ est un complexe non nul et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors la fonction $x \mapsto P(x)e^{ax}$ possède une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax}$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est de même degré que $P$.

**Démonstration**

□

Soit $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour trouver une primitive de $\int P(x) \cos \omega x e^{\alpha x} \mathrm{d}x$ (resp. $\int P(x) \sin \omega x e^{\alpha x} \mathrm{d}x$), on prend la partie réelle (resp. la partie imaginaire d'une primitive de $\int P(x)e^{(\alpha+i\omega)x} \mathrm{d}x$.

Soit $F(X, Y)$ une fraction rationnelle.

Pour calculer une primitive d'une fonction du type $x \mapsto F(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, on pose le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, ce qui nous ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en $t$.

**Exercice (Primitives avec des racines)** 13

Calcul de

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}}$$

**Réponse :** $x + 1 - \frac{8}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}} + 4(x+1)^{\frac{1}{2}} - 8(x+1)^{\frac{1}{4}} + 8 \ln\left((x+1)^{\frac{1}{4}} + 1\right) + C$.

## 5. Feuille de TD 26 : Primitives

**Exercice 1 (Fractions rationnelles)** 0

Calculer

**1** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+1}$.

**2** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)}$.

**3** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2}$.

**4** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+ix}$.

**5** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

**6** *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$.

**7** *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$.

**Exercice 2 (Fonctions trigonométriques circulaires)** 0

Calculer

**1** $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \mathrm{d}x$, où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

**2** $\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

**3** $\int \cos^2 x \sin^3 x \mathrm{d}x$.

**4** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

**5** $\int_{\sqrt{2}}^{\pi+\sqrt{2}} \frac{(\cos(2t))^3}{2+\sin^2 t \cos^2 t}\mathrm{d}t$.

**6** $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}$.

**7** $\int \frac{\sin(x)\mathrm{d}x}{\sin^3(x)+\cos^3(x)}$.

**8** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

**9** $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)\mathrm{d}x}$.

**Exercice 3 (Fonctions trigonométriques hyperboliques)** 0

Calculer

**1** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x(1+\operatorname{sh} x)}$.

**2** $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x+4}$.

Exercice 4 (Racines) 0

Calculer

**1** $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\mathrm{d}x$.

**2** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

**3** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

**4** *(X MP 08)* $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\mathrm{d}x$.

**5** *(X MP 08)* $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin t}\mathrm{d}t$.

**6** $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}$.

**7** $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}\mathrm{d}x$.

Exercice 5 (Primitives diverses) 0

Trouver les primitives de $f$, où $f$ est successivement donnée par

**1** $x \mapsto x\arctan(x)^2$.

**2** $x \mapsto \frac{1}{x+x\ln(x)^2}$.

**3** $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\ln(x))$.

**4** $x \mapsto \arctan\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 6 (Calcul d'une intégrale) 2

Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))\mathrm{d}t$.

Exercice 7 (Méthode de calcul pour une intégrale *(Centrale MP 09)*) 2

Donner une méthode pour calculer $\int_0^1 \frac{t^p}{(1+t^2)^q}\mathrm{d}t$, lorsque $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 8 (Une astuce de calcul intégral *(Mines PSI 08)*) 2

Soit $f$ continue sur $[a,b]$ telle que : $\forall\, x \in [a,b], f(a+b-x) = f(x)$.

**1** Montrer que $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**2** Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{xe^{ix}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Exercice 9 (La même astuce de calcul intégral *(Centrale MP 09)*) 2

**1** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer : $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

**2** Calculer $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x$.

CHAPITRE XXVII

# Étude locale d'une fonction

## Sommaire



Dans tout ce chapitre, $I$ est un intervalle réel d'intérieur non vide, et $a$ est un point de $I$ ou une extrémité de $I$ ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Sauf mention contraire, $f$ et $g$ sont des fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$.

On étudie essentiellement ici les fonctions réelles à valeurs réelles au voisinage d'un point de $I$. L'idée est d'approcher localement la fonction par une fonction polynomiale : nous serons rapidement en mesure de donner la « meilleure » approximation locale de degré fixé, grâce aux *formules de Taylor*. Certains exemples nous montreront toutefois qu'il faudra garder un œil critique sur ces approximations.

Dans bien des situations, une approximation de la fonction est suffisamment pertinente pour l'étude que l'on s'est fixée. C'est particulièrement le cas en physique, où l'approximation permet de simplifier le problème, ou de le résoudre numériquement (de manière approchée). Tout un lexique s'est développé autour de ces notions d'approximation ou de comparaison. Il est l'analogue du lexique employé dans le cas des suites (fonction dominée par une autre, négligeable devant une autre, équivalente à une autre, tout cela en un point donné).

J'invite d'ailleurs le lecteur à réviser le cours sur les voisinages, et celui sur les relations de comparaison des suites.

## 1. Relations de comparaison

Ce paragraphe ne fait qu'introduire trois définitions simples, et en donne quelques propriétés, tout aussi simples. L'écueil possible de l'élève dans ce chapitre est de ne pas comprendre les symboles utilisés, et de leur appliquer sans précaution les règles usuelles de l'algèbre. Bien connaître la définition de ces symboles, et retrouver systématiquement de tête leurs propriétés suffit à contourner cet écueil.

### 1.1. Définitions et premiers exemples

**Définition (Relation de domination en $a$)** 1.a

On dit que $f$ est *dominée* par $g$ au voisinage de $a$ (ou en $a$), ou que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$, s'il existe un réel positif $M$ et un voisinage $\mathcal{D}_a$ de $a$ sur lequel $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$.
On note alors $f(x) = \mathrm{O}_{x \to a}(g(x))$ ou $f = \mathrm{O}_a(g)$ (ou simplement $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ ou $f = \mathrm{O}(g)$ dans le cas où $a = 0$).

Cela revient donc à dire qu'il existe un voisinage $\mathcal{D}_a$ de $a$ et une fonction $\alpha : \mathcal{D}_a \to \mathbb{R}$ bornée telle que $f(x) = \alpha(x)g(x)$, pour tout $x \in \mathcal{D}_a$.

Les notations « o » et « O » sont appelées *notations de Landau*.

**Définition (Relation de négligeabilité en $a$)** 1.b

On dit que $f$ est *négligeable* devant $g$ au voisinage de $a$ (ou en $a$), ou que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$, s'il existe un voisinage $\mathcal{D}_a$ de $a$ et une fonction $\varepsilon$ définie sur $\mathcal{D}_a$ et de limite nulle en $a$, tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_a$, on ait $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.
On note alors $f(x) = \mathrm{o}_{x \to a}(g(x))$ ou $f = \mathrm{o}_a(g)$ (ou simplement $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ ou $f = \mathrm{o}(g)$ dans le cas où $a = 0$).

**Définition (Équivalence en $a$)** 1.c

On dit que $f$ est *équivalente* à $g$ au voisinage de $a$ (ou en $a$), ou que $f(x)$ est équivalente à $g(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$, si l'application $f - g$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $a$.
On note alors $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$ ou $f \sim_a g$ (ou simplement $f(x) \sim g(x)$ ou $f \sim g$ dans le cas où $a = 0$).

Cela revient donc à dire qu'il existe un voisinage $\mathcal{D}_a$ de $a$ et une fonction $\alpha : \mathcal{D}_a \to \mathbb{R}$ de limite 1 en $a$ telle que $f(x) = \alpha(x)g(x)$, pour tout $x \in \mathcal{D}_a$.

**Situation courante pour la comparaison de fonctions** 1.1

Supposons ici, comme c'est souvent le cas, que $f$ et $g$ ne s'annulent pas au voisinage de $a$, ou qu'elles ne s'annulent qu'en $a$ sur un voisinage de $a$. Dans ce cas, $f(x) = \mathrm{O}_{x \to a}(g(x))$ (resp. $f(x) = \mathrm{o}_{x \to a}(g(x))$, $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$) signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $a$ (resp. de limite nulle en $a$, de limite 1 en $a$).

Dans la pratique, $a$ est très souvent nul, et l'on peut d'ailleurs toujours s'y ramener dans le cas où $a$ est fini, par translation de la variable.

Ces relations sont *locales*, dans la mesure où, pour comparer $f$ et $g$ en $a$, il suffit de connaître $f$ et $g$ sur un voisinage de $a$. Ces relations ne disent donc rien du comportement global de $f$ et $g$.

Nous n'emploierons **jamais** ces relations de comparaison pour comparer à la fonction identiquement nulle, car les trois assertions $f(x) = \mathrm{o}_{x \to a}(0)$, $f(x) = \mathrm{O}_{x \to a}(0)$ et $f(x) \sim_{x \to a} 0$ signifient que $f$ est identiquement nulle au voisinage de $a$, ce qui est très rarement le cas des fonctions considérées (sauf de la fonction identiquement nulle). **Pour résumer, une comparaison à la fonction nulle est très très douteux.**

**Exemple (Relation de domination)**

(1) $f(x) = \mathrm{O}_{x \to a}(1)$ signifie que $f$ est bornée au voisinage de $a$.
(2) $\sin(x) = \mathrm{O}(x)$ et $x = \mathrm{O}(\sin(x))$, $\sin(x) = \mathrm{O}_{x \to +\infty}(x)$.
(3) $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{O}(x^2)$.

i

**Exemple (Négligeabilité)**

(1) $x = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(x^2)$, mais $x^2 = \mathrm{o}_{x \to 0}(x)$.
(2) $f(x) = \mathrm{o}_{x \to a}(1)$ signifie que $f$ tend vers 0 en $a$.

ii

**Exemple (Équivalence)**

(1) $\sin(x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$. Plus généralement, si $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \sim_{x \to a} f'(a)(x-a)$.
(2) $x^2 + x \sim_{x \to +\infty} x^2$, $x^2 + x \sim_{x \to 0} x$, $x^2 + x \sim_{x \to 1} 2$.

iii

## 1.2. Propriétés

**Utilisation abusive des relations de Landau**

En pratique, nous emploierons les notations $\mathrm{O}_{x \to a}(g(x))$, $\mathrm{o}_{x \to a}(g(x))$ comme abréviations respectives pour « (la valeur en $x$ d')une fonction dominée par $g$ en $a$ » et « (la valeur en $x$ d')une fonction négligeable devant $g$ en $a$ ». Cet emploi est tout à fait abusif, puisque nous allons utiliser *la même notation pour désigner des objets différents*. Par exemple, $\sin(x) = \mathrm{o}(1)$, $x = \mathrm{o}(1)$, mais ces « égalités » ne conduisent pas à $\sin(x) = x$ ... De même,

$$\tan(x) - \sin(x) = (x + \mathrm{o}(x) - (x + \mathrm{o}(x)) = \mathrm{o}(x),$$

et non 0 (car $\mathrm{o}(x) - \mathrm{o}(x) = \mathrm{o}(x)$).

1.2

1.2.1. *Opérations et relations de comparaison.* Les démonstrations des résultats ici énoncés proviennent de propriétés élémentaires sur les fonctions numériques (du genre, le produit de fonctions bornées au voisinage de $a$ est borné au voisinage de $a$) : on laisse le lecteur les détailler.

Plutôt que d'apprendre ces résultats par cœur, on les retrouvera.

**Proposition (Propriétés de transitivité)**

(1) si $f = \mathrm{o}_a(g)$, alors $f = \mathrm{O}_a(g)$ ;
(2) si $f = \mathrm{O}_a(g)$ et $g = \mathrm{O}_a(h)$, alors $f = \mathrm{O}_a(h)$ ;
(3) si $f = \mathrm{o}_a(g)$ et $g = \mathrm{O}_a(h)$, ou si $f = \mathrm{O}_a(g)$ et $g = \mathrm{o}_a(h)$, alors $f = \mathrm{o}_a(h)$ ;
(4) si $f \sim_a g$, alors $f = \mathrm{O}_a(g)$ et $g = \mathrm{O}_a(f)$ ;
(5) si $f \sim_a g$ et $g = \mathrm{O}_a(h)$, alors $f = \mathrm{O}_a(h)$ ;
(6) si $f \sim_a g$ et $g = \mathrm{o}_a(h)$, alors $f = \mathrm{o}_a(h)$ ;
(7) si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$, alors $f \sim_a h$.

1.a

La relation $\sim_a$ est une relation d'équivalence, ce qui permet de dire que $f$ et $g$ *sont équivalentes (ou pas)* au voisinage de $a$.

Les relations $\mathrm{o}_a$ et $\mathrm{O}_a$ sont transitives, $\mathrm{O}_a$ est réflexive mais pas $\mathrm{o}_a$, et aucune d'entre elles n'est symétrique ni antisymétrique.

**Proposition (Propriétés liées aux combinaisons linéaires)** 1.b

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) Si $f = \mathrm{O}_a(h)$ et $g = \mathrm{O}_a(h)$, alors $\lambda f + \mu g = \mathrm{O}_a(h)$.
(2) Si $f = \mathrm{o}_a(h)$ et $g = \mathrm{o}_a(h)$, alors $\lambda f + \mu g = \mathrm{o}_a(h)$.
(3) Si $f \sim_a h$ et $g = \mathrm{o}_a(f)$, alors $f + g \sim_a h$.
(4) Si $g = \mathrm{o}_a(f)$, alors $f + g \sim_a f$.

Faire TRES attention lorsqu'on somme des équivalents :

**Exercice (Les équivalents ne passent pas à la somme)** 1

Montrer que l'équivalence en $a$ se comporte mal avec la somme.

**Exemple (Sommation d'équivalents)** iv

Écrire $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ n'est pas faux, mais beaucoup moins intéressant que $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$. On a d'ailleurs souvent intérêt à écrire $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

**Exercice (Équivalent d'un polynômes en 0 et en l'infini)** 2

Soit $P = \sum_{k \geqslant 0} \lambda_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, non nul, de valuation $q$ et de degré $p$. Montrer que $P(x) \sim \lambda_q x^q$ et $P(x) \sim_{x \to \pm\infty} \lambda_p x^p$.

**Proposition (Relations de comparaison et produit)** 1.c

(1) Si $f = \mathrm{O}_a(h)$ et $g = \mathrm{O}_a(k)$ alors $fg = \mathrm{O}_a(hk)$.
(2) Si $f = \mathrm{o}_a(h)$ et $g = \mathrm{O}_a(k)$ alors $fg = \mathrm{o}_a(hk)$ (en particulier : si $f = \mathrm{o}(h)$ et $g = \mathrm{o}(k)$ alors $fg = \mathrm{o}(hk)$).
(3) Si $f = \mathrm{o}_a(g)$, alors pour tout $\alpha > 0$, $f^\alpha = \mathrm{o}_a(g^\alpha)$ ($f$ et $g$ sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$).
(4) Si $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$, alors $fh \sim_a gk$.

1.2.2. *Propriétés supplémentaires sur les équivalents.*

**Proposition (Conservation locale du signe par les équivalents)** 1.d

Si $f \sim_a g$, alors $f$ et $g$ gardent le même signe au voisinage de $a$.

Il n'y a rien de tel pour les autres relations.

**Proposition (Équivalence et limites)**

(1) Si $f \sim_a g$ et si $\lim\limits_a g = l \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $\lim_a f = l$.

(2) Réciproquement, si $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = l$, avec $l$ *réel non nul*, alors $f \sim_a g$.

1.e

La réciproque ne se généralise absolument pas au cas où $l$ est infini ou nul :

**Proposition (Équivalence et puissance)**

Si $f \sim_a g$, alors pour tout $\alpha$, $f^\alpha \sim_a g^\alpha$ (si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on suppose $f$ et $g$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$).
Cas particulier : $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$.

1.f

**Proposition (Équivalence et quotient)**

Si $g_1$ et $g_2$ ne s'annulent pas au voisinage de $a$ (sauf peut-être en $a$), et si $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$, alors $\frac{f_1}{g_1} \sim_a \frac{f_2}{g_2}$.

1.g

**Proposition (Changement de variable)**

Soit $\varphi\ : J \to I$, qui tend vers $a$ en $b \in J$.

(1) Si $f$ est dominée par $g$ en $a$, alors $f \circ \varphi$ est dominée par $g \circ \varphi$ en $b$.

(2) Si $f$ est négligeable devant $g$ en $a$, alors $f \circ \varphi$ est négligeable devant $g \circ \varphi$ en $b$.

(3) Si $f \sim_a g$, alors $f \circ \varphi \sim_b g \circ \varphi$.

1.h

**Exemple (Relations de comparaison et composition à gauche)**

Attention ! La proposition précédente montre que les relations de comparaison se comportent bien avec la composition à droite (*i.e.* le changement de variable). Cependant, ces relations se comportent mal avec la composition à gauche :

(1) Bien que $(1+x) \sim (1+x^2)$, $\ln(1+x)$ et $\ln(1+x^2)$ ne sont pas équivalents en 0.

(2) De même, $x^2 \sim_{x\to+\infty} x^2 + x$, mais $\neg(e^{x^2} \sim_{x\to+\infty} e^{x^2+x})$.

(3) Également, $x = o_{x\to+\infty}(x^2)$ en $+\infty$, mais en composant à gauche par la fonction inverse,

$$\neg\left(\frac{1}{x} = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

En composant à droite par la fonction inverse, on obtient la formule valable

$$\frac{1}{x} = o_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}.$$

v

### 1.3. Quelques relations de comparaison usuelles

On montre sans difficulté les relations de comparaisons suivantes, à connaître :

**Exemple (Relations comparaison usuelles)**

(1) $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $(1+x)^m - 1 \sim mx$ et $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

(2) $x^m - 1 \sim_{x \to 1} m(x-1)$, $\ln x \sim_{x \to 1} x - 1$.

(3) Si $\alpha, \beta, \gamma$ sont strictement positifs :

  (a) $x^\beta = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(e^{\alpha x})$, $e^{\alpha x} = \mathrm{o}_{x \to -\infty}(|x|^{-\beta})$ en $-\infty$.

  (b) $\ln(x)^\gamma = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(x^\beta)$ en $+\infty$, $|\ln x|^\gamma = \mathrm{o}(x^{-\beta})$.

(4) Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle.
  - Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus bas degré.
  - Au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus haut degré.

vi

## 2. Formules de Taylor

Dans cette section, on expose les différentes formules de Taylor, qui vont justifier l'existence et permettre de calculer les développements limités de fonctions suffisamment régulières.

On fixe deux réels distincts $a$ et $b$, sans imposer $a < b$ ni $b < a$. Le segment d'extrémités $a$ et $b$ sera noté $|a, b|$ :

$$|a, b| = \{x, \exists \lambda \in [0,1], x = \lambda a + (1-\lambda) b\}.$$

### 2.1. Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $|a, b|$. On a alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

2.a

**Définition (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Cette formule est appelée *formule de Taylor avec reste intégral* à l'ordre $n$ de $f$, en $a$, appliquée en $b$.

2.a

Démonstration

Par récurrence sur $n$, en effectuant une intégration par parties du reste intégral :

$\square$

Cette formule est difficile à retenir, surtout le terme intégral. Pour ne pas se tromper, on pensera à la vérifier pour $n = 0$. Se rappeler que la puissance $n$-ième est associée à $n!$. On peut également penser à l'appliquer à $x \mapsto \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Ne pas oublier non plus l'hypothèse $f$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui est naturelle, puisqu'on intègre la fonction $x \mapsto \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$.

De ce théorème découlent toutes les autres formules de Taylor : il est donc à la fois le plus précis et le plus puissant. Comme il s'agit d'une égalité, il n'y a aucune approximation, et donc aucune perte d'information.

Exemple (Formule de Taylor avec reste intégral)

(1) Cas de la fonction exponentielle. Pour tout réel $x$ :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t.$$

(2) Cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. Pour tout $x \in ]-1, +\infty[$ :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t.$$

i

## 2.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

En corollaire immédiat de l'égalité de Taylor avec reste intégral, on obtient la puissante inégalité de Taylor-Lagrange :

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $|a, b|$. On a alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|a,b|} |f^{(n+1)}|$$

2.b

Démonstration

□

En particulier, lorsque $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$ et que $a \in I$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{O}_{x \to a}((x-a)^{n+1})$$

et *a fortiori*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}_{x \to a}((x-a)^{n}).$$

Exemple (Inégalité de Taylor-Lagrange)

(1) Cas de la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(2) Cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\lim_{n\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Pour tout $x \in ]-1, 0]$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}.$$

ii

**Exercice (Inégalité de Taylor-Lagrange)**

**1** Montrer que pour tout réel $x$,
$$x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}\leqslant \sin(x)\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$
et que
$$x-\frac{x^3}{6}-\frac{|x|^5}{5!}\leqslant \sin(x)\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{|x|^5}{5!}.$$

**2** Quelle inégalité préférez-vous ? (on pourra tracer des graphes pour comparer les encadrements)

**3** Trouver une approximation rationnelle de $\sin(1)$ à $10^{-2}$ près, puis à $10^{-5}$ près.

3

### 2.3. Formule de Taylor-Young

**Théorème (Formule de Taylor-Young)**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $I$. Pour tout $a\in I$, on peut écrire :
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\mathrm{o}_{x\to a}((x-a)^n).$$

2.c

**Démonstration**

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction auxiliaire
$$g : x\mapsto f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$$
de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$, et dont les dérivées en $a$, jusqu'à l'ordre $n$ compris, sont nulles.

$\square$

La formule de Taylor-Young est bien une conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange, mais pas aussi facilement qu'on pourrait le croire, car $f$ n'est supposée que de classe $\mathcal{C}^n$.

**Exemple (Formule de Taylor-Young)**

$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)$.

iii

## 3. Développements limités

Soit $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction, et $a\in I$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Le but d'un développement limité d'une fonction en un point est d'approcher cette dernière par une fonction polynomiale, d'une façon qui rende compte du comportement de $f$ au voisinage de $a$. Ainsi, pour une fonction $f$ continue en $a$, la fonction constante de valeur $f(a)$ est l'approximation constante la plus pertinente au voisinage de $a$. Si $f$ est dérivable en $a$, alors l'approximation affine la plus pertinente de $f$ au voisinage de $a$ est la fonction $x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$. Le but des développements limités est de formaliser et généraliser ces remarques.

Illustration

### 3.1. Définitions et propriétés élémentaires

Soit $I$ un intervalle et soit $a \in I$. On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

**Définition (Développement limité)** 3.a

On dit que $f$ admet un *développement limité à l'ordre* $n \in \mathbb{N}$ en $a$ (ou au voisinage de $a$) s'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + \mathrm{o}_{x \to a}((x-a)^n).$$

On écrit pour raccourcir que $f$ admet un $DL_n(a)$ (ou plus rarement un $DL_n(a, I)$) pour dire que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a$.

Vous rencontrerez parfois la notion de *développement limité au sens fort* à l'ordre $n$, où le $\mathrm{o}_{x \to a}((x-a)^n)$ est remplacé par $\mathrm{O}_{x \to a}((x-a)^{n+1})$, ce qui est plus précis.

En considérant la fonction $g : x \mapsto f(a+x)$, on peut toujours ramener en 0 l'étude et la recherche d'un développement limité : $f$ admet un développement limité en $a$ à l'ordre $n$ si et seulement si $g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $n$.

On suppose que $f$ admet un $DL_n(a)$.

**Proposition (Unicité de la partie régulière d'un développement limité)** 3.a

On a unicité du polynôme $P_n$ ci-dessus.

Démonstration

□

Cette unicité autorise la définition suivante :

**Définition (Partie régulière d'un développment limité)**

Dans le contexte ci-dessus, $P_n$ est appelé *partie régulière* du développement limité à l'ordre $n$ de $f$ en $a$ (ou encore partie régulière d'ordre $n$ de $f$ en $a$).

3.b

La partie régulière sera *toujours* décomposée selon la base $(1, X-a, \dots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, car c'est ainsi que le comportement local de $f$ au voisinage de $a$ se lit le mieux.

**Exemple (Développements limités d'ordre 0 et 1)**

(1) D'après la formule de Taylor-Young, toute fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^n$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $a \in I$. En particulier, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet un développement limité en $a$ à tout ordre. Cet exemple fondamental justifie les développements limités usuels à venir.

(2) $f$ admet un $DL_0(a)$ si et seulement si $f$ est continue en $a$, et sa partie régulière est alors $f(a)$.

(3) $f$ admet un $DL_1(a)$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$, et sa partie régulière est alors $f(a) + f'(a)(X-a)$.

(4) $f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ (prolongée par continuité en 0) admet un $DL_2(0)$, et n'est pourtant pas deux fois dérivable en 0.

i

**Proposition (Troncature d'un développement limité)**

Si $f$ admet un $DL_n(a)$, et si $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-a)^k$ est sa partie régulière, alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $f$ admet un $DL_p(a)$, de partie régulière $\sum_{k=0}^{p} a_k (X-a)^k$.

3.b

**Démonstration**

$\square$

Bien entendu, plus l'ordre d'un développement limité est élevé, plus l'information est précise, même s'il est fort possible que la partie régulière soit inchangée. À cet égard, on peut donner l'exemple pathologique suivant :

**Exercice (Fonction non nulle dont toutes les parties régulières en 0 sont nulles)**

On considère la fonction $f : x \mapsto \exp(-1/x^2)$, prolongée par continuité en 0. Montrer que cette fonction admet un développement limité en 0 à tout ordre, et que toutes les parties régulières sont nulles.

4

Cet exemple montre que la donnée des toutes les parties régulières en 0 ne permet pas de retrouver la fonction : il y a perte d'information. Il montre aussi qu'en général, $f(x)$ n'est pas la limite de $(P_n(x))$.

**Exercice** (Développement limité d'une fonction paire, impaire)

On suppose que $f$ admet un $DL_n(0)$, de partie régulière $P_n$. Montrer que si $f$ est paire (resp. impaire), alors le polynôme $P_n$ est pair (resp. impair).

5

Plus généralement, les relations fonctionnelles que vérifie $f$ (comme une équation différentielle par exemple) donnent des renseignements sur ses divers développements limités. On pourra regarder le DM sur la recherche du $DL_7(0)$ de la fonction tangente.

### 3.2. Développements limités usuels

Voir la feuille. Toutes ces formules n'ont pas été trouvées avec la formule de Taylor-Young, certaines d'entre elles proviennent de propriétés (à venir) des opérations sur les développements limités.

### 3.3. Opérations sur les développements limités

C'est le paragraphe le plus important en pratique. Son but est de prouver l'existence de certains développements limités, et surtout de donner des techniques pour les calculer, tout en s'affranchissant de la formule de Taylor-Young.

3.3.1. *Translation de la variable.* On a vu comment se ramener au calcul d'un développement limité en 0, mais il faut savoir repartir dans l'autre sens.

**Exercice** (Développer ailleurs qu'en 0)

Donner des développements limités à l'ordre 3 en $a$ (en lequel la fonction est définie) de ln, de exp, et de cos.

6

Dans toutes les techniques que nous allons présenter, nous nous limiterons à un développement limité en 0. Nous supposons donc ici que $I$ comprend 0.

3.3.2. *Opérations algébriques.*

**Proposition** (Développement limité d'une combinaison linéaire, d'un produit)

On considère deux fonctions $f, g$ définies sur $I$ sauf peut-être en 0, et admettant un développement limité en 0 à l'ordre $n$. Soient $P_n$ et $Q_n$ les parties régulières respectives de ces deux développements limités. On considère aussi deux réels $\lambda$ et $\mu$ quelconques.

(1) La fonction $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0, de partie régulière $\lambda P_n + \mu Q_n$.

(2) La fonction $fg$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $n$, dont la partie régulière est le polynôme $P_n Q_n$ tronqué à l'ordre $n$ (on ne garde que les termes de degré $\leqslant n$).

3.c

Démonstration

$\square$

Sauf mention contraire, les fonctions sont définies sur un intervalle $I$ comprenant 0, et $n$ désigne un entier naturel.

On peut s'économiser des calculs, en remarquant que si $P_n$ (resp. $Q_n$) est de valuation $p$ (resp. $q$), alors on peut tronquer $Q_n$ (resp. $P_n$) au degré $n-p$ (resp. $n-q$).

**Exercice (Développement limité d'un produit)** 7

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)(1-\cos x)$.
(réponse : $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$)

**Lemme pour le développement limité d'un quotient** 3.d

Soit $u : I \to \mathbb{R}$, où $I$ comprend 0. On suppose que $u$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de partie régulière $P_n$, et que $u(0) = 0$. La fonction $h : x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est alors définie au voisinage de 0 dans $I$, et admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0, de partie régulière le polynôme $1 + P_n + \cdots + P_n^n$ tronqué au degré $n$.

Démonstration

$\square$

**Proposition (Développement limité d'un inverse)**

Soit $f$ définie sur $I$, admettant un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0, de valeur non nulle en 0. La fonction $1/f$, définie au voisinage de 0, et admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0.

3.e

**Démonstration**

$f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0 : en particulier, elle est continue en 0, puis, comme $f(0) \neq 0$, $f$ ne s'annule pas sur un voisinage de 0.
En effet, il suffit d'écrire $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)} \frac{1}{1 - \frac{f(0)-f(x)}{f(0)}}$ pour se ramener au lemme.

□

La démonstration ne fait pas qu'affirmer l'existence d'un développement limité, elle donne aussi un moyen de le calculer.

**Exercice (Développement limité d'un inverse)**

Développement limité en 0 à l'ordre 7 de $\frac{1}{\cos}$.
(réponse : $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \mathrm{o}(x^7)$)

8

**Corollaire (Développement limité d'un quotient)**

Si $f$ et $g$ admettent un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0, et si $g(0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0.

3.f

**Démonstration**

□

3.3.3. *Composition.* La composition n'est pas au programme. Nous allons seulement montrer comment calculer un développement limité d'une composée sur un exemple :

**Exercice (Développement limité d'une composée)**

Développement limité en 0 à l'ordre 8 de $x \mapsto \ln(1 + x - \sin(x))$.
(réponse : $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{72}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{720}x^8 + \mathrm{o}(x^8)$)

9

En revanche, on peut utiliser sans scrupules la composition dans le cas de $f \circ g$, où $g$ est un monôme (de degré $\geqslant 1$). Si $f(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$ et $g : x \mapsto \lambda x^m$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$, $m \geqslant 1$), alors $f \circ g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $mn$, de partie régulière :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x^{km} + \mathrm{o}(x^{mn}).$$

**Exemple** (Développement limité d'une composée par un monôme) ii

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + \mathrm{o}(x^{2n}).$$

**Exercice** (Développement limité d'une composée par un monôme) 10

Développement limité de $x \mapsto \cos(6x^3)$ à l'ordre 12 en 0.
(réponse : $1 - 18x^6 + 54x^{12} + \mathrm{o}(x^{12})$)

Enfin, on précise que même si on veut développer $f \circ g$ en 0, on utilisera le développement limité de $f$ en $g(0)$ : il sera donc parfois nécessaire de développer ailleurs qu'en 0 pour développer en 0.

**Exercice** (Développement limité d'une composée induisant un développement en 1) 11

Développer $x \mapsto e^{(e^x)}$ à l'ordre 4 en 0.

3.3.4. *Dévelopement limité d'une primitive, d'une dérivée.* Nous commençons par étudier l'existence d'un développement limité pour une primitive, ce qui nous permettra d'étudier le cas d'une dérivée.

**Lemme** pour l'intégration d'un développement limité 3.g

Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $g(x) = \mathrm{o}(x^n)$. Soit $h$ la primitive de $g$ s'annulant en 0. On a alors $h(x) = \mathrm{o}(x^{n+1})$.

**Démonstration**

Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Il existe un réel strictement positif $\eta$ tel que pour tout point $t \in [-\eta, \eta]$, on ait $|g(t)| \leqslant \varepsilon |t|^n$. On en déduit alors que pour tout $x \in [-\eta, \eta]$, on a $|h(x)| \leqslant \varepsilon |x^{n+1}|$. □

**Proposition** (Intégration d'un développement limité) 3.h

Soit $f$ une fonction définie et continue sur $I$, admettant un développement limité d'ordre $n$ en 0 de partie régulière $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$. La fonction $F$ admet alors un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$, de partie régulière

$$F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$$

**Démonstration**

Appliquer le lemme précédent à la fonction $x \mapsto f(x) - P_n(x)$. □

La partie régulière de $F$ est donc la primitive de la partie régulière de $f$ prenant la valeur $F(0)$ en 0.

C'est une propriété très utile en pratique. Nous l'avons utilisée à maintes reprises pour les calculs de développements limités usuels.

Cette propriété permet remarquablement de passer de l'ordre $n$ à l'ordre $n+1$. Elle est donc souvent préférable à une méthode concurrente (exemple de $\ln \circ \cos$).

**Exemple (Intégration d'un développement limité)** iii

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1}).$$

**Exercice (Intégration d'un développement limité)** 12

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $f : x \mapsto -\ln(1-x)$.

**Corollaire (Dérivation d'un développement limité)** 3.i

Soit $f$ une fonction continûment dérivable sur $I$, admettant un développement limité en 0 à l'ordre $n \geqslant 1$, de partie régulière $P_n$. On suppose en outre que $f'$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$, de partie régulière $Q_{n-1}$. On a alors $Q_{n-1} = P_n'$.

Attention ! Le fait que $f'$ admette un développement limité à l'ordre $n-1$ fait partie des hypothèses, cela ne résulte pas du fait que $f$ en admette un à l'ordre $n$. Par exemple $f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$, prolongée par continuité en 0, admet un $DL_2(0)$, mais $f'$ n'admet pas de $DL_1(0)$ (pourquoi, au fait ?).

Notons toutefois que si $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, alors $f'$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, et admet donc un développement limité à l'ordre $n-1$ en tout point où elle est définie.

## 4. Applications des développements limités

L'intérêt principal des développements limités est sans doute de permettre le calcul de certaines limites ou des équivalents (de suites comme de fonctions), notamment en levant des formes indéterminées. Voici trois autres applications des développements limités. Remarquons aussi qu'on peut définir les notions de développement limité à gauche et à droite.

### 4.1. Positions relatives d'une courbe et de sa tangente en un point

On suppose que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n \geqslant 2$ en $x_0$ :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}_{x \to x_0}((x-x_0)^n).$$

Le graphe $\Gamma$ de $f$ admet alors une tangente au point d'abscisse $x_0$, d'équation :

$$y = a_0 + a_1(x-x_0).$$

On suppose en outre qu'au moins un des coefficients $a_2, \ldots, a_n$ n'est pas nul. On définit $m = \min\{k \in [\![2,n]\!], a_k \neq 0\}$. On a alors

$$f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) \sim_{x \to x_0} a_m(x-x_0)^m$$

Il s'ensuit la discussion suivante :

- Si $m$ est pair alors
  (1) Si $a_m > 0$, la courbe est localement au-dessus de la tangente.
  (2) Si $a_m < 0$, la courbe est localement en dessous de la tangente.
- Si $m$ est impair alors la courbe « traverse » sa tangente, et on dit que $(x_0, f(x_0))$ est un *point d'inflexion*.

Illustration

Exercice (Positions relatives d'un graphe et de sa tangente)

Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

13

## 4.2. Développements asymptotiques

La notion de développement limité s'étend au cas où $a = \pm\infty$. On suppose que $I$ est un voisinage de $+\infty$.

Définition (Développement limité en l'infini)

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre $n$ en $+\infty$ s'il des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

4.a

On définit de même la notion de développement limité en $-\infty$.

$f$ admet un développement limité en $+\infty$ à l'ordre $n$ si et seulement si $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur un intervalle $]0, \alpha[$, admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n$. Nous pouvons donc, encore une fois, nous ramener à une étude en 0.

D'après cette remarque, on a des résultats pour les développements limités en $+\infty$ analogues à ceux que nous avons trouvés pour les développements limités en 0.

La partie régulière n'est évidemment pas un polynôme (y rajouter un terme ferait bien plus qu'affiner le résultat, elle le bouleverserait).

Exercice (Développement limité en l'infini)

Donner un développement limité à l'ordre 2 de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$$

en 0, $+\infty$.

14

Supposons que l'on puisse écrire

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-1}} + \mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

(on parle de *développement asymptotique* à la précision $\frac{1}{x^{n-1}}$).

Comme dans le cas d'une tangente, $\Gamma$ admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$, dont une équation est $y = a_0 x + a_1$. S'il existe $m$ tel que

$$f(x) - a_0 x - a_1 \sim_{x\to+\infty} \frac{a_m}{x^{m-1}},$$

on peut alors situer $\Gamma$ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

**Exercice (Développement asymptotique)** 15

**1** Donner le développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^3}$ de $\sqrt[3]{1+x+x^3}$ en $+\infty$.
(réponse : $x+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{9x^3}+\mathrm{o}_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^3})$.)
**2** Donner un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^2}$ en $-\infty$ de

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}.$$

### 4.3. Application des développements limités à l'étude des points singuliers des courbes paramétrées planes

On considère une courbe paramétrée $I\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(x(t),y(t))$. On cherche à étudier l'allure au voisinage de $t_0\in I$. On se ramène au cas où $t_0=0$. On suppose que $x$ et $y$ admettent des développements limités en 0 à l'ordre $n$

$$x(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n+\mathrm{o}(t^n)$$

et

$$y(t)=b_0+b_1t+\cdots+b_nt^n+\mathrm{o}(t^n)$$

On a alors

$$\overrightarrow{M_0M(t)}=t\overrightarrow{v_1}+\cdots+t^n\overrightarrow{v_n}+(\mathrm{o}(t^n),\mathrm{o}(t^n)),$$

où $\overrightarrow{v_i}=(a_i,b_i)$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

On suppose que $(\vec{v_1},\ldots,\vec{v_n})$ engendre $\mathbb{R}^2$ (*i.e.* au moins deux de ces vecteurs ne sont pas colinéaires).

Soit $p$ le premier entier tel que $\overrightarrow{v_p}\neq\overrightarrow{0}$ (le vecteur $\overrightarrow{v_p}$ dirige donc la tangente à l'arc en $M_0$), et $q$ le premier entier (>p) tel que $(\overrightarrow{v_p},\overrightarrow{v_q})$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

Si $X(t)$ et $Y(t)$ sont les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(M_0,\overrightarrow{v_p},\overrightarrow{v_q})$, on a alors

$$X(t)\sim t^p \text{ et } Y(t)\sim t^q$$

ce qui donne les signes de $X(t)$ et $Y(t)$ au voisinage de 0.

(1) Si $p$ est impair et $q$ pair, le point est *ordinaire*.
(2) Si $p$ est impair et $q$ impair, le point est appelé *point d'inflexion*.
(3) Si $p$ est pair et $q$ impair, le point $M_0$ est appelé *point de rebroussement de première espèce*.
(4) Si $p$ est pair et $q$ pair, le point $M_0$ est appelé *point de rebroussement de seconde espèce*.

**Illustration**

Un point régulier n'est donc jamais de rebroussement. Un point stationnaire (ou singulier) peut être de l'un quelconque de ces quatre types (y compris ordinaire !).

De manière analogue, les développements limités facilitent l'étude des branches infinies des courbes paramétrées.

Exercice (Branches infinies par les développements limités)

Faire les deux dernières questions de l'exercice 9 de TD.

16

# 5. Feuille de TD 27 : Étude locale d'une fonction

## 5.1. Comparaison de fonctions

**Exercice 1 (Équivalents de fonctions)** 0

Donner des équivalents simples aux points considérés pour les fonctions définies par les formules suivantes :

**1** $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ en 0.

**2** $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$ en 0.

**3** $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$ en $\sqrt{3}$.

**4** $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ en $+\infty$.

**5** $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ en 0.

## 5.2. Formules de Taylor

**Exercice 2 (Dérivées successives en 0)** 2

Soit $f\ : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 3 (Fonction nulle sur un voisinage de $+\infty$)** 2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 1$, et : $\forall x \geqslant \frac{1}{2},\ f(x) = 0$.

**1** Montrer que $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| \geqslant 2^n n!$.

**2** Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| > 2^n n!$

**Exercice 4 (Fonction dont les dérivées sont nulles en 0)** 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

(2) $\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup\limits_{\mathbb{R}} \left|f^{(n)}\right| \leqslant \lambda^n n!$.

**1** Montrer que $f$ est nulle sur l'intervalle $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, puis sur $\mathbb{R}$.

**2** Montrer que la première condition n'est pas suffisante pour que $f$ soit nulle.

### 5.3. Calcul de développements limités

**Exercice 5 (Développements limités en 0)** 0

Donner le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions :
**1** tan à l'ordre 7.
**2** $x \mapsto \sin(\tan(x))$ à l'ordre 7.
**3** $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4.
**4** $x \mapsto \exp(\sin(x))$ à l'ordre 3.
**5** $x \mapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9.
**6** $\cos(x) \cdot \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
**7** $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
**8** $\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right)$ à l'ordre 6.
**9** $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

**Exercice 6 (Développement limité d'une réciproque)** 3

**1** Montrer que la fonction $f\ : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1-x\sin(x)}$ définit une bijection d'un voisinage de 0 sur $\mathbb{R}$.
**2** Montrer que $f^{-1}$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$, et le calculer.
**3** Même étude pour $g\ : x \mapsto 2x + \sin(x)$.

### 5.4. Utilisation des développements limités

**Exercice 7 (Calcul de limite par les développements limités)** 0

**1** Déterminer la limite en 0 de $\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.
**2** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}$.
**3** *(CCP MP)* Calculer $\lim\limits_{x\,\to\,+\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$.

**Exercice 8 (Positions relatives locales d'une courbe et de sa tangente en un point)** 0

Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

**Exercice 9 (Branches infinies de fonctions numérique par les développements limités)** 0

**1** Étudier les branches infinies de la fonction $f\ : x \mapsto x^2 \arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
**2** Étudier les branches infinies de la fonction $g\ : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.
**3** Étudier la branche infinie pour $t$ tendant vers 1 de l'arc $\Gamma$ paramétré par $x(t) = \frac{t}{\ln t}$, $y(t) = \frac{t^2}{t-1}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$.
**4** Étudier la branche infinie dans la direction $\theta = \frac{2\pi}{3}$ de la courbe d'équation polaire $r = \frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}$.

Exercice 10 (Développement asymptotique) 0

Donner un développement à la précision $\frac{1}{x^3}$ de la fonction arctangente en $+\infty$.

Exercice 11 (Étude d'arc) 0

Étudier la courbe paramétrée $f\ : t \mapsto \left(\tan(t) + \sin(t), \frac{1}{\cos(t)}\right)$.

Exercice 12 (Suite d'itératrice sinus) 1

Soit $(x_n)$ la suite récurrente de terme initial $x_0 \in ]0, \pi/2]$ et d'itératrice sinus. Calculer sa limite, et en donner un équivalent.

Exercice 13 (Équivalent par un développement limité) 2

Donner le $DL_7(0)$ de $f : x \mapsto \arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)$. En déduire un équivalent de cette fonction.

Exercice 14 (Résultat combinatoire par les développements limités) 3

**1** Développer de deux manières $(1 - e^x)^n$ en 0 à l'ordre $n + 2$.
**2** En déduire $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$ pour $p \in [\![0, n + 2]\!]$.

Exercice 15 (Suite récurrente par sinus de l'angle moitié *(Mines-Pont MP 06)*) 4

Soit $u_0 \in ]0, 2\pi[$, puis $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.
**1** Montrer que $(u_n)$ tend vers 0.
**2** Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} (2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.
**3** Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$.

CHAPITRE XXVIII

# Fonctions de plusieurs variables

## Sommaire



Nous avons étudié en détail les fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles. Nous avons aussi rencontré des fonctions d'une variable réelle, et à valeurs dans le plan euclidien, les courbes paramétrées. Cette dernière étude s'est assortie d'une terminologie physique, et plus précisément cinématique (cf. les termes de *vitesse*, d'*accélération*). En particulier, la variable était souvent considérée comme *temporelle* (cf. l'expression de *point stationnaire*), et était adaptée pour modéliser la trajectoire d'une particule.

Cependant, il est clair qu'en vue d'applications physiques, cette unique variable temporelle est largement insuffisante : vous avez vu que beaucoup de phénomènes physiques pouvaient dépendre de plusieurs variables ou paramètres. Cette insuffisance est particulièrement marquée dans tous les phénomènes de propagation (ou de diffusion). Ainsi, les fonctions de plusieurs variables interviennent en électromagnétisme (équations de Maxwell), ou en mécanique des fluides, notamment dans les équations d'Euler et de Navier-Stokes, qui décrivent les mouvements d'un fluide incompressible dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

où $u(x,t)$ représente la température en un point $x$ d'une barre, à l'instant $t$, est encore un exemple d'équation physique faisant intervenir plusieurs variables, et dont l'apport aux mathématiques fut considérable (elle est à l'origine des séries de Fourier).

Le but de ce chapitre est donc de donner les bases mathématiques sur les fonctions de deux variables réelles.

# 1. Rudiments de topologie

## 1.1. Normes et distances

Se donner une topologie sur un ensemble, c'est donner des sens aux termes intuitifs d'ouvert, fermé, intérieur, fermeture, voisinage, point adhérent, etc. Formellement, on définit une topologie sur un ensemble en donnant celles de ses parties que l'on considère comme *ouvertes*, qui doivent en outre satisfaire une certaine axiomatique.

Dans cette section, $E$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Définition (Espace vectoriel normé)** 1.a

On appelle *norme* sur $E$ toute application de $E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(1) $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ *(positivité)*.

(2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéité)*.

(3) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*.

(4) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ *(axiome de séparation)*.

On appelle *espace vectoriel normé* (en bref : *evn*) réel tout espace vectoriel réel muni d'une norme.

Dans la suite, $E$ est implicitement muni d'une norme $N$.
Si $x = 0_E$, alors $N(x) = 0$, par homogénéité.

**Exemple (Espaces vectoriels normés)** i

(1) La fonction valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour tout espace préhilbertien réel $(E, (\cdot|\cdot))$, $N_2\ : x \in E \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme, dite associée à (ou induite par) le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

(3) Si $N_1$ et $N_2$ sont des normes sur $E_1$ et $E_2$, alors $N\ : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mapsto \max(N_1(x_1), N_2(x_2))$ est une norme sur $E_1 \times E_2$, ainsi que $N'\ : (x_1, x_2) \mapsto N_1(x_1) + N_2(x_2)$.

(4) Sur $\mathbb{R}^p$ (où $p \in \mathbb{N}^*$), $N_1\ : x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} |x_i|$ et $N_\infty\ : x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto \max\{|x_i|,\ i \in [\![1, p]\!]\}$ sont des normes.

(5) Sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $N_\infty\ : f \mapsto \sup\limits_{x \in [a,b]} (|f(x)|)$ est une norme, appelée *norme infinie*. On a aussi la norme $N_1$

$$N_1\ : f \mapsto \int_{[a,b]} |f|.$$

(6) Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $N_1\ : P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \mapsto \sum_{k \geqslant 0} |a_k|$ et $N_\infty\ : P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \mapsto \max\{|a_k|, k \in \mathbb{N}\}$ sont des normes.

**Définition (Distance associée à une norme)** 1.b

Soit $x, y \in E$. On appelle *distance* de $x$ à $y$ et on note $d(x, y)$ le réel positif

$$d(x, y) = N(y - x).$$

On définit ainsi une application *distance*, de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

(1) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) \geqslant 0$ *(positivité)*.

(2) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie)*.

(3) $\forall (x, y, z) \in E^2,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire)*.

(4) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(axiome de séparation)*.

**Définition (Boules dans un evn)**

Soit $x \in E$, $R \in \mathbb{R}_+$. On appelle respectivement *boule ouverte*, *boule fermée* et sphère de rayon $R$ et de centre $x$, et on note respectivement $\mathcal{B}(x,R)$, $\overline{\mathcal{B}}(x,R)$ et $\mathcal{S}(x,R)$ les ensembles respectifs

$$\mathcal{B}(x,R) = \{y \in E,\ d(x,y) < R\},$$
$$\overline{\mathcal{B}}(x,R) = \{y \in E,\ d(x,y) \leqslant R\},$$

et

$$\mathcal{S}(x,R) = \{y \in E,\ d(x,y) = R\},$$

La *boule unité* (fermé ou ouverte) est celle de centre $0_E$ et de rayon 1.

1.c

**Illustration**

**Exercice (Boules unités)**

Dessiner la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne usuelle $N_2$, puis pour les normes $N_\infty\ : (x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$ et $N_1\ : (x,y) \mapsto |x| + |y|$.

1

**Définition (Partie bornée d'un evn)**

Une partie $\Omega$ de $E$ est dite *bornée* si on peut l'inclure dans une boule fermée centrée en $0_E$, *i.e.*

$$\exists R \in \mathbb{R}_+,\ \Omega \subset \overline{\mathcal{B}}(0_E, R),$$

ou encore

$$\exists R \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \in \Omega\ N(x) \leqslant R.$$

On appelle *diamètre* d'une partie non vide et bornée $\Omega$ de $E$ le réel

$$\sup\{d(x,y), (x,y) \in \Omega^2\}.$$

1.d

**Démonstration**

Du fait que le diamètre d'une partie non vide et bornée de $E$ soit un nombre réel :

□

Exemple (Les boules sont bornées)

(1) L'union d'un nombre fini de parties bornées est bornée.
(2) Toute partie d'une partie bornée est bornée.
(3) Toute boule est bornée :

ii

Exercice (Unicité du centre et du rayon d'une boule de rayon non nul)

Soit $(E, N)$ un evn non réduit au vecteur nul, $x, x' \in E$, $R, R' \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\overline{\mathcal{B}}(x, R) = \overline{\mathcal{B}}(x', R')$. Prouver que $x = x'$ et $R = R'$.

2

Exercice (Fonctions lipschitziennes et evn)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f$ une application de $E$ dans $F$ et $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que $f$ est *lipschitzienne de rapport* $K$ (ou $K$-*lipschitzienne*) si, pour tout $(x, y) \in E^2$ :

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leqslant K \|y - x\|_E .$$

On dit que $f$ est *lipschitzienne* si elle est $K$-lipschitzienne pour un certain $K \in \mathbb{R}_+$.
**1** Vérifier que l'application $\|\cdot\|_E$ est 1-lipschitzienne (on a normé $\mathbb{R}$ par la valeur absolue).
**2** Soit $A$ une partie non vide de $E$. Pour tout $x \in E$, on pose

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Montrer que $d_A : (E, \|\cdot\|_E) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est (bien définie et) 1-lipschitzienne.

3

## 1.2. Topologie d'un evn

Définition (Voisinage dans un evn)

On dit qu'une partie $A$ de $E$ est un *voisinage* d'un point $a$ de $E$ (ou que $a$ est *intérieur* à $A$) si $A$ contient une boule ouverte non vide centrée en $a$.

1.e

$A$ est un voisinage de $a$ si et seulement si $A$ contient une boule fermée de rayon non nul centrée en $a$.
Si $A$ est voisinage de $a$, alors $a \in A$, mais la réciproque est fausse :

Illustration

Exercice (Voisinages)

Soit $a \in E$, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
**1** Montrer que si $A \subset B$, et si $a$ est intérieur à $A$, alors $a$ est intérieur à $B$.
**2** Montrer que si $A$ et $B$ sont des voisinages de $a$, alors $A \cap B$ est un voisinage de $a$.
**3** Donner un exemple où une intersection [a] de voisinages d'un même point n'est pas un voisinage de ce point.

[a] nécessairement infinie d'après la question précédente.

4

Définition (Ouverts et fermés dans un evn)

Soit $A$ une partie de $E$. On dit que $A$ est *ouverte* (dans $E$) si $A$ est voisinage de chacun de ses points. On dit que $A$ est *fermée* (dans $E$) si son complémentaire $E \setminus A$ dans $E$ est ouvert dans $E$.

1.f

Proposition (Cohérence de terminologie pour les boules)

Les boules ouvertes (resp. fermées) d'un evn sont bien ouvertes (resp. fermées).

1.a

Illustration

Démonstration

□

Les boules ouvertes (resp. fermées) non vides ne sont pas fermées (resp. ne sont pas ouvertes).

Exemple (Ouverts et fermés d'un evn)

(1) $\emptyset$ et $E$ sont à la fois fermés et ouverts.
(2) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert (donc une intersection quelconque de fermés est un fermé).
(3) Une intersection finie d'ouverts est ouverte (donc une union finie de fermés est fermée).
(4) Une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte, et une union infinie de fermés peut ne pas être fermée :

(5) La « plupart » des parties de $E$ ne sont ni ouvertes, ni fermées.

iii

Exercice (Sous-espaces ouverts)

Déterminer les sous-espaces affines ouverts de $E$.

5

Exercice (Intérieur d'une partie)

Soit $A$ une partie de $E$. On appelle *intérieur* de $A$ et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à $A$. Montrer que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A$ (au sens de l'inclusion).

6

Illustration

**Définition (Point adhérent)** 1.g

On dit qu'un point $a$ de $\mathbb{R}^2$ est *adhérent* à une partie $A$ de $\mathbb{R}^2$ si toute boule centrée en $a$ et de rayon non nul rencontre $A$.
On appelle *adhérence* de $A$ et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à $A$.

Illustration

L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

**Exercice (Caractérisation de l'adhérence d'une partie d'un evn)** 7

Soit $A$ une partie de $E$. Montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $E$ contenant $A$.
En déduire que $A$ est fermée si et seulement si elle contient tous ses points adhérents.

### 1.3. Suites d'éléments d'un evn

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un evn (réel).

**Définition (Convergence d'une suite dans un evn)** 1.h

Soit $(x_n)$ une suite de points de $E$, $l \in E$. On dit que la suite $(x_n)$ *converge* vers $l$ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N) \Rightarrow (\|x_n - l\| \leqslant \varepsilon).$$

Dans ce cas, on dit que $l$ est la *limite* de $(x_n)$, et on note $x_n \to_n l$, ou $\lim\limits_{n\infty} x_n = l$.
On dit que $(x_n)$ *diverge* si elle ne converge pas.

Démonstration

Justification de l'unicité de la limite :

□

$(x_n)$ converge vers $l$ si et seulement si la suite *réelle* $(\|x_n - l\|)$ converge vers 0.
En général, une suite ne converge pas ! L'emploi de la notation $\lim_n (x_n)$ présuppose que la suite converge.

Exercice (Caractérisation séquentielle des fermés)

Soit $A$ une partie de $E$.

**1** Montrer que $\overline{A}$ est l'ensemble des limites possibles des suites convergentes d'éléments de $A$.

**2** En déduire une caractérisation séquentielle des fermés dans $E$.

8

On pourra vérifier que la plupart des résultats donnés sur les suites numériques subsistent dans un evn quelconque (s'ils ont un sens dans ce contexte plus large).

Comparaison de deux normes

Sauf cas trivial, un même $\mathbb{R}$-espace vectoriel peut être muni d'une infinité de normes.
Les notions de boules ouvertes et fermées et diffèrent selon la norme (voir un exercice précédent).
Il semblerait *a priori* que les topologies définies par deux normes différentes diffèrent également, *i.e.* que les ouverts définis par ces normes respectives diffèrent.
Il est facile de voir que, pour que deux normes $N_1$ et $N_2$ définissent les mêmes ouverts (et donc la même topologie), il faut et il suffit que la boule unité ouverte de chaque norme contienne une boule ouverte (non vide) de l'autre, centrée en l'origine. En termes plus explicites, cela signifie qu'il existe des réels strictement positifs $\alpha$ et $\beta$ tels que, pour tout $x \in E$, on ait

$$\alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

(on dit alors que les normes $N_1$ et $N_2$ sont *équivalentes*).
En fait, vous verrez en seconde année que *si $E$ est de dimension finie*, alors toutes les normes possibles et imaginables sur $E$ définissent les mêmes ouverts, *i.e.* sont toutes équivalentes.
En particulier, la convergence d'une suite dans un espace vectoriel réel de dimension finie ne dépend pas de la norme choisie.
Ceci est faux en dimension infinie.

1.1

### 1.4. Limite d'une fonction, continuité

On considère deux evn $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, une fonction $f$ définie sur une partie $A$ de $E$, à valeurs dans $F$, $a$ un point adhérent à $A$, et $l \in F$.

**Définition (Limite d'une fonction en un point)**

On dit que $f$ admet $l$ pour *limite* en $a$ (ou que $f$ *tend vers* $l$ en $a$) si
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, \quad \|x-a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x)-l\|_F \leqslant \varepsilon.$$
On note alors dans ce cas $f(x) \to_{x\to a} l$, $f \to_a l$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, ou $\lim\limits_a f = l$.

1.i

Comme d'habitude, il y a unicité de la limite. Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on définit aussi le fait que $f$ tende vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $a$ (de la même manière qu'en milieu d'année). Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on définit aussi le fait que $f$ admette une limite en $+\infty$ ou $-\infty$.

On a encore une caractérisation séquentielle de la limite : $f$ tend vers $l$ en $a$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)$ de points de $A$ convergeant vers $a$, la suite $(f(x_n))$ converge vers $l$.

On a encore un théorème de composition des limites.

$f$ tend vers $l$ en $a$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in E, x \in A \cap \overline{\mathcal{B}}(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in \overline{\mathcal{B}}(l,\varepsilon),$$

si et seulement si pour tout voisinage $\mathcal{V}_l$ de $l$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de $a$ tel que $f(A \cap \mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_l$.

**Définition (Continuité ponctuelle générale)**

On suppose ici $a \in A$. On dit que $f$ est continue en $a$ si elle admet une limite finie en $a$.

1.j

$f$ est continue en $a$ si et seulement si elle admet $f(a)$ pour limite en $a$, si et seulement si elle admet une limite en $a$.

On a bien sûr une caractérisation séquentielle de la continuité ponctuelle (qui sert le plus souvent à montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point donné).

Toute fonction continue en $a$ est bornée au voisinage de ce point (*i.e.* sur l'intersection de son domaine et d'un voisinage de ce point).

**Définition (Continuité globale générale)**

$f$ est dite *continue* sur $A$ si elle continue en chaque point de $A$.
On note $\mathcal{C}(A,F)$ (ou $\mathcal{C}^0(A,F)$) l'ensemble des fonctions de $A$ dans $F$, continues sur $A$.

1.k

**Exemple (Fonctions lipschitziennes)**

Les fonctions lipschitziennes sont continues sur leur domaine, et même *uniformément continues* (en un sens à définir).

iv

Sur $F$ on a une structure d'espace vectoriel, ce qui confère également à $F^A$ une structure d'espace vectoriel : on a un résultat d'opérations algébriques sur les limites (ne concernant que les combinaisons linéaires), montrant notamment que $\mathcal{C}(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de $F^A$. Ce résultat s'étend au produit et au quotient licite dans le cas où $F$ est en outre muni d'une loi de composition interne notée multiplicativement, lui conférant une structure de $\mathbb{R}$-algèbre, vérifiant en outre $\|xy\|_F \leqslant \|x\|_F \|y\|_F$ pour tout $(x,y) \in F^2$. Dans ce cas, $\mathcal{C}(A,F)$ est donc une sous-algèbre de $F^A$. Un cas particulier important où cela s'applique est celui où $F = \mathbb{R}$, voir la sous-section suivante.

La composée licite d'applications continues est continue.

Voici un exercice donnant une technique générale pour montrer qu'un ensemble est ouvert (ou fermé).

Exercice (Image réciproque et continuité)

Soit $f \in \mathcal{C}(A, F)$, où $A$ est une partie d'un evn $E$ (et $F$ est également un evn).
**1** On suppose $A$ ouvert. Montrer que l'image réciproque par $f$ de tout ouvert de $F$ est un ouvert de $E$.
**2** On suppose $A$ fermé. Montrer que l'image réciproque par $f$ de tout fermé de $F$ est un fermé de $E$.
**3** Montrer que toute conique du plan est fermée.
**4** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9

## 2. Continuité des fonctions de deux variables à valeurs réelles

### 2.1. Généralités

En pratique, dans ce cours, nous nous intéressons principalement au cas des fonctions définies sur une partie $A$ de $\mathbb{R}^2$ (euclidien usuel) et à valeurs réelles ($\mathbb{R}$ est normé par la valeur absolue). Dans ce cas, $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ est une sous algèbre de $\mathbb{R}^A$.

Dans ce contexte restreint, pour lequel l'espace but $\mathbb{R}$ est (totalement) ordonné, nous pouvons parler des notions suivantes, pour une fonction : fonction majorée, minorée, notions de maximum, minimum, extremum (global et local, éventuellement strict). Si par exemple une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ admet une limite strictement positive en $a$, alors elle est minorée par un réel strictement positif au voisinage de ce point.

En revanche, n'ayant pas défini d'ordre sur $\mathbb{R}^2$, nous n'aurons pas de notion de monotonie des fonctions de deux variables, et donc pas de théorème de la limite monotone par exemple.

Pour calculer la limite d'une fonction $f$ en $a$, on peut :

- toujours se ramener à un calcul de limite au point $(0, 0)$ par translation de la variable (ou des variables).
- si de plus on a une idée de la limite (finie) $l$, on peut avantageusement étudier $f - l$.
- utiliser les opérations algébriques (pour la plupart des points).
- pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point, utiliser la caractérisation séquentielle.
- pour une étude délicate en un point, que l'on supposera être 0, on a parfois intérêt à utiliser un passage en polaires, surtout si l'on voit apparaître un terme en $x^2 + y^2$ (les coordonnées polaires sont naturellement adaptées à la norme euclidienne, dans laquelle les boules sont des disques). En effet, pour $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ tend vers $(0, 0)$ si et seulement si $\rho$ tend vers 0.

Exemple (Fonctions continues)

Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$ sont continues, ainsi que toute fonction rationnelle sur son domaine.

i

Exercice (Limite en l'origine, ou pas)

Déterminer si les fonctions suivantes admettent une limite en l'origine :
**1** $f : (x, y) \mapsto \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$.
**2** $g : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$.
**3** $h : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.
**4** Montrer que la restriction de $h$ à toute droite passant par l'origine admet 0 pour limite en l'origine.

10

### 2.2. Une fausse piste : les applications partielles

On considère une fonction $f$ de $A$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a = (\alpha, \beta) \in A$. On pose

$$A_{x,a} = \{x \in \mathbb{R}, (x, \beta) \in A\} \text{ et } A_{y,a} = \{y \in \mathbb{R}, (\alpha, y) \in A\}$$

**Définition (Applications partielles)**

Les applications $f_{x,a}$ et $f_{y,a}$, définies par

$$f_{x,a} : \begin{array}{ccc} A_{x,a} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,\beta) \end{array} \quad \text{et} \quad f_{y,a} : \begin{array}{ccc} A_{y,a} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(\alpha,y) \end{array}$$

sont appelées respectivement *première et seconde application partielle associée* à $f$ au point $a$.

2.a

**Illustration**

**Exercice (Applications partielles)**

Donner les applications partielles de la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(x)\cos(y)$ en l'origine.

11

**Applications partielles et perte d'information**

Il faut bien comprendre la perte d'information lorsqu'on passe de la fonction $f$ aux fonctions $f_{x,a}$ et $f_{y,a}$. En gardant cette perte d'information en tête, on commettra moins d'erreur de raisonnement.
Si par exemple les applications partielles en 0 sont définies sur $\mathbb{R}$, alors on sait que $f$ est définie sur $(\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R})$, mais rien de plus. De manière générale, il faut retenir que si l'étude des fonctions de plusieurs variables est par certains aspects similaire à celle des fonctions d'une variable réelle, la première ne se réduit pas à la seconde par la seule considération des applications partielles : c'est en cela que les applications partielles constituent une fausse piste.

2.1

Si $f$ est définie au voisinage de $a$ (*i.e.* $A$ est voisinage de $a$), alors $f_{x,a}$ et $f_{y,a}$ sont définies au voisinage de $\alpha$ et $\beta$ respectivement. C'est en particulier le cas si $A$ est un ouvert.

La réciproque est fausse :

**Proposition (Continuité des applications partielles)**

Soit $f$ une application définie sur $A$, continue en $a = (\alpha,\beta) \in A$. Ses applications partielles sont alors respectivement continues en $\alpha$ et $\beta$.

2.a

Attention ! La réciproque est fausse ! Cette condition nécessaire est bien loin d'être suffisante :

### 2.3. Extension des notions et propriétés aux fonctions de deux variables réelles et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Nous pouvons étudier l'ensemble $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^2)$ des fonctions de $A$ dans $\mathbb{R}^2$, qui est encore naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel (mais pas de $\mathbb{R}$-algèbre).

Étant donné $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^2)$, on peut écrire de manière unique $f = (f_1, f_2)$, où $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions de $A$ dans $\mathbb{R}$, appelées *fonctions composantes* (ou *fonctions coordonnées*) de $f$.

On a déjà défini les notions de limite, continuités ponctuelle et globale pour de telles fonctions. On peut noter que $f$ tend vers $l = (l_1, l_2)$ en $a$ si et seulement si $f_1$ et $f_2$ tendent respectivement vers $l_1$ et $l_2$ en $a$ : l'étude de telles fonctions se ramène donc sans problème à l'étude de fonctions (coordonnées) de $A$ dans $\mathbb{R}$, ce qui contraste avec les applications partielles.

Une telle fonction $f$ est donc continue sur $A$ si et seulement si ses fonctions composantes le sont, et $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^2)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

## 3. Calcul différentiel

Dans toute cette section, $U$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, et $f$ est une application de $U$ dans $\mathbb{R}$. On note $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

### 3.1. Dérivées partielles premières

**Définition (Dérivée selon un vecteur)**

Soit $a$ un point de $U$, et $h$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On dit que $f$ admet une *dérivée en le point $a$ selon le vecteur $h$* si la fonction

$$t \mapsto \frac{f(a+th) - f(a)}{t},$$

définie au voisinage de 0 (sauf en 0), admet une limite finie $l$ en 0. Dans ce cas, $l$ est appelée *dérivée de $f$ en $a$ selon le vecteur $h$*, et noté $\mathrm{D}_h f(a)$.

3.a

**Démonstration**

Justification du fait que la fonction ci-dessus $\psi_{a,h}$ soit bien définie au voisinage de 0, sauf en 0 :

□

$f$ admet une dérivée en $a$ selon $h$ si et seulement si $\varphi_{a,h}\ : t \mapsto f(a+th)$ (fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, définie au voisinage de 0) est dérivable en 0, et on a alors $\mathrm{D}_h f(a) = \varphi'_{a,h}(0)$.

$f$ admet toujours en $a$ une dérivée selon le vecteur nul, qui est nulle : dériver selon ce vecteur présentant peu d'intérêt, on ne traitera parfois que le cas d'un vecteur non nul.

**Définition (Dérivées partielles première et seconde en un point)**

On dit que $f$ admet une *dérivée partielle (première) selon la première (resp. la seconde) variable* si $f$ admet une dérivée en $a$ selon le vecteur $e_1$ (resp. $e_2$). La dérivée partielle de $f$ en $a$ selon la première (resp. la seconde) variable, notée $D_1 f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ (resp. $D_2 f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$) est alors la dérivée de $f$ en $a$ selon $e_1$ (resp. $e_2$).

3.b

$f$ admet donc une dérivée partielle première en $a = (\alpha, \beta)$ selon la première variable si et seulement si

$$t \mapsto \frac{f(\alpha + t, \beta) - f(\alpha, \beta)}{t}$$

admet une limite finie en 0, *i.e.* $t \mapsto f(\alpha + t, \beta)$ est dérivable en 0.

$f$ admet donc une dérivée partielle première en $a = (\alpha, \beta)$ selon la première variable si et seulement si sa première application partielle en $a$, à savoir $f_{x,a}$, est dérivable en $\alpha$, et on a alors $D_1 f(a) = f'_{x,a}(\alpha)$.

De même pour la dérivée partielle première selon la seconde variable.

**Exercice (Dérivées partielles première et seconde en l'origine)** 12

**1** Montrer que

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ et } f(0, 0) = 0$$

admet des dérivées partielles premières en l'origine, mais qu'elle n'y est pas continue. Montrer que $f$ n'admet pas des dérivées selon tout vecteur.

**2** Montrer que

$$g : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ et } g(0, 0) = 0$$

est continue à l'origine, et qu'elle y admet des dérivées selon tout vecteur.

Il faut bien comprendre le rôle purement formel du $x$ et du $y$ dans les expressions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

**Exercice (Calculs simples de dérivées partielles premières)** 13

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 y^3$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x^3 - x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$.

### 3.2. Applications dérivées partielles premières, applications continûment dérivables, développement limité à l'ordre un

**Définition (Applications dérivées partielles premières)** 3.c

On suppose que $f$ admet des dérivées partielles premières en tout point de $U$. On peut donc définir des *applications dérivées partielles premières* $\frac{\partial f}{\partial x} : a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : a \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ de $U$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est de *classe* $\mathcal{C}^1$ (ou *continûment différentiable*) si ces applications dérivées partielles sont continues.
On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.

**Définition (Point critique)** 3.d

Pour une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, on appelle *point critique* pour $f$ un point en lequel les deux applications dérivées partielles (premières) s'annulent. Un point non critique est dit *régulier*.

**Exemple (Fonctions continûment différentiables)** i

Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (en particulier les applications coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$). De même pour les fonctions rationnelles sur leur domaine.

**Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions continûment différentiables)**

Soit $f$ et $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, à valeurs réelles, $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $\lambda f$, $f+g$ et $fg$ sont alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, et

$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial fg}{\partial x} = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}$$

(de même pour $\frac{\partial}{\partial y}$).

Si $g$ ne s'annule pas sur $U$, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, et

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x} = \frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}.$$

3.a

Ceci prouve notamment que $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$.
Dans la suite, la notation $f(u) = \mathrm{o}(\|u\|)$ signifie que $\lim\limits_{u \to 0_E} \frac{f(u)}{\|u\|} = 0$.

**Définition (Développement limité d'une fonction de deux variables)**

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application, et $a \in U$. On dit que $f$ admet un *développement limité* au point $a$ (à l'ordre un) s'il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que

$$f(a+h) = f(a) + \lambda h_x + \mu h_y + \mathrm{o}(\|h\|)$$

(expression définie pour tout vecteur $h = (h_x, h_y)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $a+h \in U$).

3.e

Admettre un développement limité à l'ordre 1 en $a = (x_a, y_a)$, c'est donc pouvoir être approché, à un négligeable d'ordre 1 près, par une fonction affine $(x,y) \mapsto f(a) + \lambda(x-x_a) + \mu(y-y_a)$. Le graphe de cette fonction affine est le *plan tangent* du graphe de $f$ en $a$. Il admet pour équation : $z = f(a) + \lambda(x-x_a) + \mu(y-y_a)$.

**Illustration**

**Proposition (Condition nécessaire pour admettre un développement limité à l'ordre 1 en $a$)**

Si $f$ admet un développement limité à l'ordre un au point $a$ de $U$, alors elle est continue en $a$, et y admet des dérivées selon chaque vecteur non nul. En particulier, elle admet en $a$ des dérivées partielles premières au point $a$, et, en reprenant les notations ci-dessus :

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Ainsi,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_y + \mathrm{o}(\|h\|)$$

3.b

Démonstration

□

L'existence de dérivées partielles premières au point $a$ n'implique pas l'existence d'un développement limité en ce point (la fonction peut même ne pas y être continue).

Exercice (Développement limité contre continuité et dérivées directionnelles)

Montrer que l'application

$$g\ : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ et } f(0, 0) = 0$$

est continue et admet des dérivées selon chaque vecteur non nul en l'origine, sans y admettre de développement limité à l'ordre un.

14

Théorème fondamental sur les fonctions de deux variables

Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, alors $f$ admet, en tout point $a$ de $U$, un développement limité à l'ordre un. Elle y admet donc aussi une dérivée selon tout vecteur non nul $h = (h_1, h_2)$, et

$$\mathrm{D}_h f(a) = h_1 \mathrm{D}_1 f(a) + h_2 \mathrm{D}_2 f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

3.c

Démonstration

Admise □

On a donc bien l'inclusion attendue $\mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.
De plus,

$$f(a + h) = f(a) + \mathrm{D}_h f(a) + \mathrm{o}(\|h\|).$$

Dans la suite de cette section, on se donne $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in U$, l'application $h \mapsto \mathrm{D}_h f(a)$ est donc une forme linéaire.

Définition (Gradient)

L'unique vecteur $v$ tel que

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{D}_h f(a) = (h|v)$$

est appelé *gradient* de $f$ en $a$, est noté $\overrightarrow{grad}\, f(a)$ ou $\nabla f(a)$.

3.f

On a ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ :

$$\mathrm{D}_h f(a) = (h|\,\overrightarrow{grad}\, f(a)),$$

et donc

$$f(a+h) = f(a) + (h|\overrightarrow{grad}\, f(a)) + \mathrm{o}(\|h\|).$$

Dans la base euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\overrightarrow{grad}\, f(a) = (\mathrm{D}_1 f(a), \mathrm{D}_2 f(a)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Un point est critique si et seulement si le gradient de $f$ y est nul.

L'application $\mathrm{d}f_a : h = (h_1, h_2) \mapsto \mathrm{D}_h f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, est une application (ici une forme) linéaire, appelée *différentielle de $f$ en $a$*.

On a donc

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \mathrm{o}(\|h\|).$$

L'application $\mathrm{d}f : a \in U \mapsto \mathrm{d}f_a$ est appelée *différentielle* de $f$, c'est une application de $U$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Cette application n'a aucune raison d'être linéaire (quand bien même $U$ serait un espace vectoriel).

**Exercice (Calcul de différentielles)**

Déterminer la différentielle de

**1** $f\ : (x, y) \mapsto e^{x+y}$.

**2** $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

15

**Exemple (Différentielles des projections coordonnées)**

Si $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont les deux projections coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$, on a la formule :

$$\mathrm{d}f_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\mathrm{d}y.$$

On écrit même $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.

ii

**Proposition (Composition de fonctions continûment dérivables ou différentiables)**

Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)\ : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur un intervalle réel $I$ et à valeurs dans $U$. La fonction $g = f \circ \varphi$, de $I$ dans $\mathbb{R}$, est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $I$ et

$$\forall\, t \in I, \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))\varphi_2'(t)$$

3.d

**Démonstration**

□

On a aussi les formules $g'(t) = (\overrightarrow{grad}\, f(\varphi(t))|\varphi'(t)) = \mathrm{d}f_{\varphi(t)}(\varphi'(t))$.

Corollaire (Composition de fonctions continûment différentiables)

On se donne $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V \subset \mathbb{R}^2 \to U$, de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $g = f \circ \varphi$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V$, et pour tout $b \in V$,

$$\mathrm{D}_1 g(b) = \mathrm{D}_1 f(\varphi(b))\mathrm{D}_1\varphi_1(b) + \mathrm{D}_2 f(\varphi(b))\mathrm{D}_1\varphi_2(b)$$

et

$$\mathrm{D}_2 g(b) = \mathrm{D}_1 f(\varphi(b))\mathrm{D}_2\varphi_1(b) + \mathrm{D}_2 f(\varphi(b))\mathrm{D}_2\varphi_2(b)$$

3.e

Démonstration

□

On a aussi $d(f \circ \varphi)_b = df_{\varphi(b)} \circ d\varphi_b$.

Les physiciens (et même les matheux) utilisent parfois les notations de dérivation selon une variable : si on écrit $x$ et $y$ les variables de $f$, $u$ et $v$ celles de $g$ (et de $\varphi$), on obtient la formule

Exercice (Gradient en polaires)

Exprimer le gradient en polaires.

16

### 3.3. Courbes définies comme des lignes de niveau

Considérons une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, à valeurs réelles.

Soit $a \in U$. On a donc

$$f(a+h) = f(a) + (h|\,\overrightarrow{grad}\, f(a)) + \mathrm{o}(\|h\|).$$

Pour une norme donnée (par exemple 1), et à un négligeable près, la variation $|f(a+h) - f(a)|$ est maximale pour $h$ colinéaire à $\overrightarrow{grad}\, f(a)$, et nulle lorsque $h$ est orthogonal à $\overrightarrow{grad}\, f(a)$. Ainsi, la direction du gradient indique la direction où la variation de $f$ est la plus grande, et sa norme indique l'intensité de cette variation.

Plus précisément, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons

$$\Gamma_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\}) = \{(x, y) \in U,\ f(x, y) = \lambda\},$$

partie du plan, appelée *ligne de niveau* de $f$ pour la valeur $\lambda$.

Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$, et supposons que $\Gamma_\lambda$ soit le support d'une courbe paramétrée régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$.

Soit $a$ de $\Gamma_\lambda$, de paramètre $t$ pour $\gamma$. Le vecteur $\overrightarrow{grad}\, F(a)$ est alors orthogonal à $\Gamma_\lambda$ (*i.e.* orthogonal au vecteur vitesse $\gamma'(t)$) :

Cela permet de donner une équation de la normale à $\Gamma_\lambda$ en un point non critique $a$.

**Exercice (Gradient pour la fonction norme)** 17

Donner le gradient en tout point où il est défini de la fonction norme (euclidienne canonique) $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$. Décrire les lignes de niveau.

**Exercice (Tangentes à une ellipse)** 18

Retrouver les équations des tangentes dans le cas d'une ellipse donnée par une équation réduite.

### 3.4. Application à la recherche d'extremums locaux

**Proposition (Points critiques et extrema locaux)** 3.f

Si $f : U \to \mathbb{R}$ présente un extremum local en $a$, et admet des dérivées partielles premières en ce point, alors $a$ est un point critique, *i.e.* $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

**Démonstration**

$\square$

La réciproque est fausse, et elle l'était déjà pour les fonctions d'une variable réelle :

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, il est important de se placer sur un ouvert :

**Exercice (Une recherche d'extremum)** 19

Faire les deux premières questions de l'exercice 8 de TD.

### 3.5. Dérivées partielles d'ordre 2

**Définition (Dérivées partielles d'ordre 2)** 3.g

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$. On définit les deux fonctions :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \to \mathbb{R} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} : U \to \mathbb{R}$$

(1) Si $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$.

(2) Si $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

(3) Si $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

(4) Si $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$.

Si cela est possible, on définit donc quatre applications dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (ces deux dernières sont dites *croisées*).

**Définition (Fonctions deux fois continûment différentiables)** 3.h

On dit que $f$ est de *classe $\mathcal{C}^2$* si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et si ses applications dérivées partielles secondes existent et sont continues en tout point.
On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$.

$\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exemple (Fonctions deux fois continûment différentiables)** iii

Tout fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, toute fonction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.

**Théorème de Schwarz** 3.g

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$$

**Démonstration**

Admise $\square$

**Exercice (Dérivées partielles secondes croisées)** 20

Faire l'exercice 5 de TD.

### 3.6. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles (en bref : EDP) pour une fonction de plusieurs variables est l'analogue d'une équation différentielle pour une fonction d'une seule variable : elle relie une fonction à ses différentes dérivées partielles.

Par exemple, l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ est l'ensemble des fonctions $f$ telles qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ pour laquelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi(x).$$

Si on cherche les solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 1 comme $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$ sur $\mathbb{R}^2$, on peut d'abord trouver une solution particulière, et résoudre l'équation homogène associée par changement de variables affine :

Si on cherche les solutions de l'*équation des ondes* (également appelée *équation des cordes vibrantes*) en dimension 1 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

(pour $v \in \mathbb{R}_+^*$) d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on peut effectuer le changement de variables $r = x - vt, y = x + vt$. On montre alors que la solution générale à cette EDP est

$$f(x, t) = \psi(x - vt) + \varphi(x + vt),$$

où $\psi$ et $\varphi$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

## 4. Calcul intégral

Nous ne nous étendrons pas sur la construction théorique de l'intégrale d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles.

On admet le théorème suivant :

**Théorème de Fubini**

On considère une fonction continue $f$ sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ et à valeurs réelles. On a alors :

$$\int_{x=a}^{b} \left( \int_{y=c}^{d} f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{y=c}^{d} \left( \int_{x=a}^{b} f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

4.a

On admet en particulier que $x \mapsto \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$ et $y \mapsto \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x$ sont des fonctions continues.

**Définition (Intégrale double sur un pavé)**

Cette valeur commune est appelée *intégrale* de la fonction continue $f$ sur le pavé $[a,b]\times[c,d]$, et est notée :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f \text{ ou } \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4.a

**Exemple (Fonction à variables séparées)**

Dans le cas où il existe des fonctions $\varphi : [a,b]\to\mathbb{R}$ et $\psi : [c,d]\to\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y)\in[a,b]\times[c,d],\quad f(x,y)=\varphi(x)\psi(y),$$

on dit que $f$ est une fonction à *variables séparées*, et on a dans ce cas

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f = \left(\int_{[a,b]}\varphi\right)\left(\int_{[c,d]}\psi\right).$$

i

Bien sûr, on souhaite pouvoir intégrer sur autre chose qu'un pavé (*i.e.* un rectangle de la forme $[a,b]\times[c,d]$) :

**Définition (Partie simple par tranches horizontales)**

On dit qu'une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ est une *simple par tranches horizontales* si on peut l'écrire

$$\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, a\leqslant x\leqslant b \text{ et } \varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\},$$

où $\varphi$ et $\psi$ sont des fonctions continues sur $[a,b]$.
Dans ce cas, si $f$ est une fonction continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, alors on peut définir

$$\iint_{\mathcal{D}} f = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

comme le nombre

$$\int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

4.b

On définit de même la notion de partie simple par tranches verticales.

**Illustration**

$\mathcal{D}$ peut très bien être simple par tranches horizontales et par tranches verticales, auquel cas l'intégrale reste bien définie, grâce à une extension du théorème de Fubini (qui affirme que les deux intégrales ainsi obtenues sont égales).

Attention ! Le cas d'une fonction à variables séparées n'a rien d'avantageux dans le cas où on n'intègre pas sur un pavé, par exemple sur un disque.

L'*aire* d'une partie simple $D$ est le réel positif $\iint_D 1$.

Nous avons les analogues des propriétés de l'intégrale de Riemann : linéarité, croissance, invariance par translation, additivité par rapport au domaine d'intégration.

Il existe un résultat hors-programme sur le changement de variables. La formule de changement de variables dans une intégrale vue en milieu d'année n'a *a priori* pas d'équivalent, puisqu'elle fait appel à l'ordre sur $\mathbb{R}$ (pour décrire les bornes du domaine d'intégration) et à la dérivée. Cependant, dans le cas d'un changement de variable strictement monotone, et avec le contexte habituel, on peut la réécrire sous la forme

$$\int_{\varphi(|a,b|)} f(u)\mathrm{d}u = \int_{|a,b|} f \circ \varphi(t)|\varphi'(t)|\mathrm{d}t.$$

Cette formule peut s'étendre au cas d'un changement de variables $\varphi$ dans une intégrale double.

Bien sûr, si on intègre d'un côté sur $D$, on intègrera de l'autre sur $\varphi(D)$, mais qui jouera le rôle de $|\varphi'(t)|$.

**Définition (Jacobien(ne))**

Soit $\varphi : A \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, où $A$ et $\varphi(A)$ sont des parties simples du plan, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ ses fonctions composantes. On appelle *matrice jacobienne* de $\varphi$ en $a$ la matrice de $\mathrm{d}\varphi_a$ dans la base canonique, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$

On appelle *(déterminant) jacobien* de $\varphi$ en $a$, et on note $J_\varphi(a)$ le déterminant de $\mathrm{d}\varphi_a$ dans la base canonique, *i.e.*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(a) \end{vmatrix}.$$

4.c

**Théorème de changement de variable dans une intégrale double**

Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$, où $A$ et $\varphi(A)$ sont des parties simples du plan, $f \in \mathcal{C}(\varphi(A), \mathbb{R})$. On a :

$$\iint_{\varphi(A)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A f(x(u,v), y(u,v))|J_\varphi(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

4.b

**Démonstration**

Admise. □

En pratique, ce résultat est hors-programme, mais doit être connu dans le cas d'un changement de variable affine, ou en polaires :

**Proposition (Changement de variable affine dans une intégrale double)**

On considère une transformation affine du plan, donnée par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (x,y) \end{array}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x & = & x_0 + \alpha u + \beta v \\ y & = & y_0 + \gamma u + \delta v \end{array} \right.$$

(on a donc $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$).
On considère une partie simple $A$ de $\mathbb{R}^2$, et $f$ une fonction continue de $\varphi(A)$ (que l'on suppose également simple) dans $\mathbb{R}$. On a alors

$$\iint_{\varphi(A)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A (f \circ \varphi)(u,v)|\alpha\delta - \beta\gamma|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

4.c

**Exemple (Intégrale double sur un parallélogramme)**

Lorsqu'on intègre sur un parallélogramme, on peut se ramener à intégrer sur un rectangle, en effectuant un changement de variables affine.

ii

**Illustration**

**Proposition (Changement de variable en polaires dans une intégrale double)**

On considère l'application de changement de variables en polaires

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

On considère une partie bornée simple $A$ de $\mathbb{R}_+ \times [a, a+2\pi]$ (pour un certain réel $a$). Si $f$ est continue sur $\varphi(A)$ (supposée simple), on a

$$\iint_{\varphi(A)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

4.d

On prend le plus souvent $a = -\pi$ ou $a = 0$. L'ensemble des points de $\varphi(A)$ admettant plusieurs antécédents est d'aire nulle, et ne pose donc pas de problème.

Ce changement de variables permet de passer de l'intégration sur un disque (ou sur une couronne, ou un secteur angulaire) à l'intégration sur un pavé sur un secteur angulaire.

Illustration

Exercice (Calculs d'intégrales doubles)

**1** Donner l'aire d'un secteur angulaire.
**2** Calculer $I = \iint_\Delta \frac{1}{x^2+y^2+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $\Delta$ est le disque unité.
**Réponse :** $I = \pi \ln 2$.
**3** Calculer l'aire d'une cardioïde définie par

$$\mathcal{C} = \{(r, \theta), -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r \leqslant a(1 + \cos\theta)\}$$

.
**Réponse :** $\frac{3}{2}\pi a^2$.

21

Exercice (Calcul de l'intégrale de Gauss)

Faire l'exercice 14 de TD.

22

On peut étendre sans difficulté ces notions et résultats au cas d'une intégrale triple.

Exercice (Jacobien du passage en cylindriques et en sphériques)

Donner les jacobiens pour les changements de coordonnées en cylindriques et en sphériques.

23

## 5. Feuille de TD 28 : Fonctions de plusieurs variables

### 5.1. Régularité des fonctions de deux variables

**Exercice 1 (Continuité des fonctions de deux variables)** 0

**1** Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy > -1\}$.
**i** Montrer que $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
**ii** Étudier la continuité de la fonction $f$ définie sur $U$ par

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

**2** On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$. Montrer que $g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
**3** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\begin{array}{rccl} h : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \text{ si } x \neq y, \varphi'(x) \text{ sinon.} \end{array}$$

Montrer que $h$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2 (Régularité jusqu'à la classe $\mathcal{C}^1$)** 0

**1** On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \end{array}$$

prolongée par la valeur 0 en l'origine.
Ce prolongement est-il continu ? admet-il des dérivées partielles (et des dérivées selon tout vecteur non nul) en tout point ? Est-il de classe $\mathcal{C}^1$ ?
**2** Mêmes questions avec

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

**3** Mêmes questions avec

$$\begin{array}{rccl} h : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{xy^2}{x^2+y^4} \end{array}$$

**Exercice 3 (Limite en l'origine à paramètres)** 2

Déterminer les familles $(a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant 3}$ de réels pour lesquelles

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant 3} a_{i,j} x^i y^j}{x^2+y^2} \end{array}$$

admet une limite finie en l'origine.

**Exercice 4 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)** 2

*(Mines MP 08)* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercice 5 (Dérivées partielles secondes croisées)** 2

Soit $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

**1** Étudier la continuité de $f$ et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.

**2** Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

**3** Qu'en déduire sur la régularité de $f$ ?

**Exercice 6 (Différentielle, gradient)** 2

On fixe deux points distincts $A$ et $B$ du plan. Calculer la différentielle et le gradient en tout point où cela est possible, dessiner des lignes de niveau et des lignes de courant pour :

**1** $M \mapsto AM$.

**2** $M \mapsto AM^2$.

**3** $M \mapsto AM^2 + BM^2$.

**4** $M \mapsto AM + BM$.

**5** $M \mapsto AM \cdot BM$.

**Exercice 7 (Fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ *(Mines MP 08)*)** 3

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$. La fonction $h$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ ?

## 5.2. Extrema

**Exercice 8 (Extrema d'une fonction de deux variables)** 0

**1** Chercher les extrema de $f : (x,y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$.

**2** *(Mines MP 08)* Chercher les extrema de $g : (x,y) \mapsto -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

**3** *(Mines PC 08)* Déterminer les extrema de $h : (x,y) \mapsto (3x+4y)e^{-x^2-y^2}$.

**4** *(X PC 09)* Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2-y^2)\exp(-(x^2+y^2))$. Montrer que $f$ atteint un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

## 5.3. Équations aux dérivées partielles

**Exercice 9 (EDP d'ordre 1)** 0

**1** Trouver les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$.

**2** Déterminer les applications $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a$, où $a$ est une constante réelle donnée. On utilisera le changement de variable : $u = x+y$, $v = x-y$.

**3** Même question avec $3\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y$.

Exercice 10 (Passage en polaires) 0

Résoudre les EDP suivantes au moyen d'un passage en polaires :
**1** $x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$.
**2** $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
**3** $x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 11 (EDP d'ordre 2 avec changement linéaire) 0

**1** *(Mines MP 09)* Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 0$.
**Indication :** on pourra utiliser un changement de variables linéaire du type $u = ax+by$, $v = cx+dy$.
**2** *(Mines MP 09)* Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.
**Indication :** on pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $\varphi(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$.

Exercice 12 (EDP d'ordre 2 avec changement de variables non linéaire) 2

**1** *(X PC 09)* Résoudre $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y^3$
**Indication :** poser $u = x$, $v = xy$.
**2** Soit $U$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ : $U = \{(x,y), x > 0,\ y > 0\}$. Trouver les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$.
**Indication :** on utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

## 5.4. Intégrales multiples

Exercice 13 (Calcul d'intégrales doubles) 0

**1** Si $D$ est le disque unité (fermé), calculer

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}.$$

**2** Déterminer l'aire délimitée par la cardioïde d'équation polaire

$$\rho = a(1+\cos(\theta)).$$

**3** *(X PC 09)* Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leqslant y \leqslant 4\}$. Calculer $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
**4** *(X PC 09)* Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geqslant 0, y \geqslant 0, 2y \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Calculer $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
**5** *(Mines MP 09)* Soit $a > 0$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ; x^2+y^2 \leqslant 2xa$ et $x^2+y^2 \leqslant 2ya\}$. Calculer : $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
**6** *(Mines MP 09)* Calculer de deux façons (une pour le moment) $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D$ est le disque fermé centré en $O$ et de rayon $R$.

Exercice 14 (Calcul de l'intégrale de Gauss) 1

Soit $M > 0$,

$$D_M = \{(x,y), x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant M^2\} \quad \text{et} \quad C_M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x \leqslant M, 0 \leqslant y \leqslant M\}.$$

**1** Calculer $I(M) = \iint_{D_M} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**2** Encadrer (finement) $J(M) = \iint_{C_M} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ par des intégrales du type $I(M')$ pour certaines valeurs de $M'$.

**3** En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 15 (Cet exercice est à sa place) 4 et 5

Soit $R$ un rectangle du plan subdivisé [a] en un nombre fini de rectangles $r_1, \ldots, r_n$ qui ont chacun un côté entier. Montrer que $R$ a un côté entier.

*a.* $R$ est la réunion des $r_i$, et $r_i \cap r_j$ est d'aire nulle dès que $i \neq j$

CHAPITRE XXIX

# Géométrie différentielle

## Sommaire



Les fonctions considérées dans ce chapitre sont, sauf mention contraire, de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ (où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$) et sont à valeurs dans le plan euclidien canonique orienté $\mathbb{R}^2$.

Dans ce chapitre, det désigne le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (et donc dans toute base orthonormée directe).

## 1. Étude métrique des courbes planes

Nous avons déjà défini les courbes paramétrées, qui sont des fonctions vectorielles, ainsi que le support d'une tel courbe, qui est une partie du plan. Le but de cette partie est (en gros) de dégager des propriétés géométriques intrinsèques au support, indépendamment du paramétrage servant à le décrire.

Tous les arcs paramétrés étudiés sont (sauf mention contraire) supposés réguliers à l'ordre 1, *i.e.* tous leurs points sont réguliers.

### 1.1. Paramétrage admissible, longueur d'une courbe

**Définition (Difféomorphisme)** — 1.a

Soit $f$ une bijection d'un intervalle $I$ sur $J$. On dit que $f$ est un *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme* si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$, ainsi que sa bijection réciproque.

D'après un résultat du cours sur la dérivation, $f$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si et seulement si $f$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^k$, et sa dérivée ne s'annule pas. On note qu'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme est strictement monotone.

Une application bijective strictement monotone de classe $\mathcal{C}^k$, d'un intervalle sur un autre, n'est pas nécessairement un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme :

**Homéomorphisme**

Une application bijective continue ainsi que sa réciproque est appelée *homéomorphisme*. Comme pour les $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes, une application bijective continue d'une partie de $\mathbb{R}$ sur une autre n'est pas nécessairement un homéomorphisme.

1.1

**Exercice (Parties non homéomorphes)**

Exercice facultatif (car hors-sujet)

**1** Déterminer les intervalles homéomorphes.

**2** Montrer que $[0,1]$ et $[0,1]^2$ ne sont pas homéomorphes (mais il existe une bijection continue de $[0,1]$ sur $[0,1]^2$, si si).

1

**Définition (Paramétrage admissible)**

Soit $(I,f)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$. Un arc paramétré $(J,g)$ de classe $\mathcal{C}^k$ est un *paramétrage admissible* (ou un *reparamétrage*) de $(I,f)$ s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi$ de $I$ sur $J$, tel que $f = g \circ \varphi$.
Une telle application est appelée *changement de paramétrage* de classe $\mathcal{C}^k$.

1.b

Tout changement de paramétrage est strictement monotone.
Dans la suite, on considère un arc paramétré $(I,f)$ de classe $\mathcal{C}^k$ et un de ses reparamétrages $(J,g)$.
La relation « être un reparamétrage de » est une relation d'équivalence.
Bien sûr, $(I,f)$ et $(J,g)$ ont même support. Pour $t \in I$, on note $M_f(t)$ le point de l'arc $(I,f)$ de paramètre $t$. Bien sûr, ce point correspond physiquement à $M_g(\varphi(t))$. Nous allons chercher des propriétés de ce point conservées par reparamétrage.
Si l'arc $(I,f)$ est régulier, alors $(J,g)$ est également régulier.

**Exemple (Paramétrages admissibles)**

(1) L'arc $(]-\pi,\pi[, t) \mapsto (\cos t, \sin t)$ admet le reparamétrage
$$\left(\mathbb{R}, u \mapsto \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)\right).$$
en posant $u = \tan \frac{t}{2}$.

(2) Deux arcs paramétrés ayant même support ne sont pas nécessairement un reparamétrage l'un de l'autre :

i

Lorsque $\varphi$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, on peut considérer que l'on paramètre un arc non plus par $t \in I$, mais par $\varphi(t) \in J$. C'est ce qu'on fait lors du paramétrage usuel du cercle unité privé de son point d'affixe $-1$ : on le paramètre non plus par la mesure angulaire $t \in ]-\pi,\pi[$ mais par la tangente de l'angle moitié $u = \tan(t/2) \in \mathbb{R}$.

**Lemme** préalable à la définition de la longueur d'un arc

Si $(|t_0, t_1|, f)$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, et si $(|u_0, u_1|, g)$ en est un reparamétrage, alors

$$\int_{|t_0,t_1|} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_{|u_0,u_1|} \|g'(u)\| \,\mathrm{d}u$$

1.a

**Démonstration**

□

**Définition** (Longueur d'un arc)

On appelle *longueur* de l'arc $([t_0, t_1], f)$ le réel positif

$$\int_{[t_0,t_1]} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

1.c

La longueur d'un arc est donc intrinsèque, en ce qu'elle ne dépend pas du choix d'un représentant d'une classe d'équivalence des arcs pour le reparamétrage.

Si $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ est une subdivision de $[t_0, t_1]$, la longueur de la courbe est un majorant de la somme des longueurs des segments $[M(\sigma_i)M(\sigma_{i+1})]$ :

**Illustration**

Si on écrit $f = (x, y)$, on a

$$\boxed{L = \int_{[t_0,t_1]} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t.}$$

Dans le cas particulier d'une représentation cartésienne $y = h(x)$ (où on étudie en fait l'arc paramétré $t \mapsto (t, h(t))$), on a donc :

$$\boxed{L = \int_{[x_0,x_1]} \sqrt{1 + h'(x)^2}\mathrm{d}x.}$$

Dans le cas d'une représentation polaire $f(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$, pour $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, on a :

$$\boxed{L = \int_{[\theta_0,\theta_1]} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta.}$$

Abusivement, nous parlerons de longueur d'une partie du plan, support d'un arc régulier et simple (par exemple longueur d'un segment, d'un cercle, d'une ellipse, etc.)

**Exercice (Longueur d'un arc)** 2

**1** Calculer la longueur d'un segment, d'un cercle.
**2** Calculer la longueur du graphe de ch sur le segment $[0, a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
**3** Calculer la longueur de la cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos(\theta))$ (qu'il vaut mieux paramétrer sur $[-\pi, \pi]$).

### 1.2. Orientation d'un arc paramétré

**Définition (Orientation d'un arc paramétré)** 1.d

Soit $(I, f)$ un arc paramétré, et $(J, g)$ un paramétrage admissible. On dit que le reparamétrage de $(I, f)$ à $(J, g)$ *ne change pas l'orientation* si on a pu l'obtenir à l'aide d'un changement de paramétrage strictement croissant.
L'arc paramétré est *orienté* lorsqu'on n'autorise que les reparamétrages préservant l'orientation.

**Exemple (Changement d'orientation)** ii

De changement d'orientation : parcourir un cercle ou un segment dans l'autre sens.

**Exercice (Orientation d'un arc paramétré)** 3

Exercice facultatif, car personne ne se pose (ou ne comprend) cette question pourtant légitime.
Montrer que si $(J, g)$ est un reparamétrage de $(I, f)$ via un reparamétrage $\varphi$ strictement décroissant, alors $(I, f)$ et $(J, g)$ n'ont pas même orientation.
En déduire qu'un arc régulier admet deux orientations. Qu'en est-il d'un arc non nécessairement régulier ?

**Définition (Orientation de la tangente)**

Étant donné un arc paramétré orienté $(I, f)$, on oriente la tangente en un point $M(t)$ de paramètre $t$ par le vecteur $f'(t)$.

1.e

Cette orientation est inchangée lors d'un reparamétrage préservant l'orientation.

**Définition (Repère de Frénet)**

Étant donné un arc paramétré orienté $(I, f)$, le *repère de Frénet* de l'arc orienté $(I, f)$ au point $M(t)$ de paramètre $t$ est le repère orthonormé direct $(M(t), T(t), N(t))$, où $T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ (et $N(t)$ est uniquement défini par les conditions imposées).

1.f

Le premier vecteur du repère de Frénet dirige la tangente, le second la normale.

**Illustration**

Le repère de Frénet est inchangé par un reparamétrage conservant l'orientation, *i.e.* :

### 1.3. Abscisse curviligne

**Définition (Abscisse curviligne)**

On appelle *abscisse curviligne* de l'arc orienté $(I, f)$ toute application $\sigma\ : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in I, \quad \sigma'(t) = \|f'(t)\|\,.$$

Si $\sigma$ s'annule en $t_0 \in I$, on dit que $\sigma$ est l'abscisse curviligne de $(I, f)$ d'*origine* $t_0$.

1.g

**Proposition (Abscisse curviligne et longueur)**

Soit $\sigma$ une abscisse curviligne de $(I, f)$. Pour tous points $t_1$ et $t_2$ de $I$ tels que $t_1 \leqslant t_2$, on a

$$L([t_1, t_2], f) = \sigma(t_2) - \sigma(t_1)$$

1.b

Une abscisse curviligne s'obtient intuitivement en accolant un mètre souple au support.

Illustration

La notion d'abscisse curviligne est intrinsèque pour la relation d'équivalence de reparamétrage conservant l'orientation, dans le sens où

En cas de changement d'orientation, les abscisses curvilignes nouvelles sont les opposées des anciennes.

**Exemple (Abscisse curviligne)** iii

Abscisse curviligne de la cardioïde : en prenant le point $M(0)$ comme origine des abscisses curvilignes, on a $\sigma(\theta) = 4a \sin \frac{\theta}{2}$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$.

**Proposition (Abscisse curviligne et changement de paramètre)** 1.c

Soit $(I, f)$ un arc orienté (régulier) de classe $\mathcal{C}^k$. Alors toute abscisse curviligne de $(I, f)$ est un changement de paramètre de l'arc orienté $(I, f)$.

Démonstration

$\square$

Ce paramétrage est appelé parfois *paramétrage par l'abscisse curviligne*, ou *paramétrage normal*, car

### 1.4. Courbure, rayon de courbure

Ici, $k \geqslant 2$, et on considère un arc orienté (régulier) $(I, f)$ de classe $\mathcal{C}^k$, et $s$ une abscisse curviligne de cet arc.

Soit $\varphi$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $I$ sur $J$. Pour toute fonction dérivable $\psi$ de $I$ dans $\mathbb{R}$, on note $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}$ la fonction $\frac{\psi'}{\varphi'}$. Pour tout arc paramétré $(I, f)$ de classe $\mathcal{C}^k$, on note $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}$ l'arc $t \in I \mapsto \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$.

Par exemple, si $\psi$ est également un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, alors

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}}.$$

**Théorème du relèvement** — 1.d

Il existe une fonction $\alpha$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $I$ telle que, pour tout $t \in I$ :

$$\overrightarrow{T}(t) = \cos(\alpha(t))\, e_1 + \sin(\alpha(t))\, e_2 = (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$$

**Définition (Détermination angulaire)** — 1.h

Dans ce contexte, $\alpha$ est appelée *détermination angulaire* de l'arc $f$.

**Démonstration**

Démonstration hors-programme admise. □

Si $\alpha$ est une détermination angulaire, alors les déterminations angulaires sont les $\alpha + 2n\pi$, où $n$ décrit $\mathbb{Z}$. Les déterminations angulaires d'un arc orienté sont intrinsèques.

On a les relations $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{T}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha$, et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$.

**Définition (Courbure)** — 1.i

La *courbure* de l'arc au point $M(t)$ est le réel $\gamma(t) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}(t)$.

La courbure est homogène à l'inverse d'une longueur : sa valeur absolue indique avec quelle force le support de l'arc « se courbe » en un point donné, et son signe indique dans quelle direction (babord ou tribord) il se courbe.

**Illustration**

Proposition (Repère de Frénet et courbure)

On a les formules

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \overrightarrow{N}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma \overrightarrow{T}}$$

1.e

Démonstration

□

Définition (Point birégulier, arc birégulier)

Soit $(I, f)$ un arc régulier. Un point $M(t)$ est dit *birégulier* si les vecteurs $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$ sont non colinéaires.
L'arc lui-même est dit *birégulier* lorsque tous ses points le sont.

1.j

Proposition (Points biréguliers et courbure)

Un point est birégulier si et seulement si la courbure y est non nulle.

1.f

Démonstration

□

Définition (Rayon de courbure)

Soit $M(t)$ un point birégulier. Le réel $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ est appelé *rayon de courbure* de l'arc $(I, f)$ au point $M(t)$.

1.k

Le rayon de coubure est homogène à une longueur, mais il peut être négatif.
Dans le cas d'un arc birégulier, $\alpha$ est donc un changement de paramètre $\mathcal{C}^{k-1}$.

**Centre de courbure**

On appelle *centre de courbure* en un point birégulier le point $C(t)$ donné par :

$$C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t).$$

On peut remarquer que le centre de courbure ne dépend pas de l'orientation choisie. Le cercle centré en $C(t)$ et passant par $M(t)$ est appelé *cercle osculateur* à la courbe en $M(t)$.

1.2

**Illustration**

On a les expressions suivantes de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = v\overrightarrow{T}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N},}$$

où $v$ est la vitesse scalaire (*i.e.* $v(t) = \|f'(t)\|$ pour tout $t \in I$).

On a en particulier

$$\boxed{\det\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \gamma v^3,}$$

d'où la formule

$$\boxed{\gamma(t) = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3},}$$

puis, pour un arc cartésien $f = (x, y)$

$$\boxed{\gamma = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}},}$$

pour un arc $f\ : t \mapsto (t, h(t))$

$$\boxed{\gamma = \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}},}$$

et, en polaires

$$\boxed{\gamma = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.}$$

En pratique, on utilisera ces formules pour les calculs de courbure, sauf si une détermination angulaire se trouve aisément.

Exercice (Rayon de courbure)

**1** Tracer l'arc paramétré par

$$t \mapsto M = O + 8\sin t\vec{i} + \sqrt{2}\sin 2t\vec{j}$$

**2** Calculer la longueur de cet arc paramétré.
**3** Calculer le rayon de courbure en tout point.

4

## 2. Champs de vecteurs

### 2.1. Champs de vecteurs, potentiel scalaire

Ici, $n \in \{2, 3\}$, et $U$ est un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^n$.

Définition (champ de vecteurs)

Un *champ de vecteurs* sur $U$ est une application (généralement continue) de $U$ dans $\mathbb{R}^n$.

2.a

Exemple (Le gradient est un champ de vecteurs)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. L'application $\overrightarrow{grad}\, f$ est un champ de vecteurs continu sur $U$.

i

Définition (Champ de vecteurs dérivant d'un potentiel)

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs sur $U$. On dit que $\vec{V}$ *dérive d'un potentiel scalaire* s'il existe une application $f : U \to \mathbb{R}$ (le potentiel scalaire) de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\, f$$

2.b

Le terme scalaire fait bien sûr référence aux valeurs (scalaires et non vectorielles) prises par $f$.

Proposition (Condition nécessaire pour dériver d'un potentiel)

On considère ici le cas où $n = 3$.
Soit $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\vec{V}$ dérive d'un potentiel, alors on doit avoir

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = 0, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0$$

2.a

Démonstration

□

Dans le cas d'un champ de vecteurs plan, seule la dernière relation est à considérer.

**Définition (Rotationnel)**

Le vecteur de composantes $\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)$ est appelé *rotationnel* de $\overrightarrow{V}$.

2.c

Les composantes du vecteur rotationnel se retrouvent grâce au « produit vectoriel » formel :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}.$$

**Condition nécessaire pour dériver d'un potentiel**

Ainsi, une condition nécessaire pour que $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel est qu'il soit de rotationnel nul. Nous verrons plus tard qu'en général, cette condition n'est pas suffisante. Cependant, elle l'est lorsqu'on travaille sur un *ouvert étoilé*.

2.1

**Définition (Ouvert étoilé)**

L'ouvert $U$ est appelé *ouvert étoilé* s'il existe un point $A$ tel que pour tout point $M$ de $U$, le segment $[AM]$ soit inclus dans $U$.

2.d

**Exemple (Les convexes sont étoilés)**

(1) Tout ouvert convexe est étoilé (en particulier, les boules ouvertes sont étoilées).

(2) La réciproque est fausse :

ii

On admet le résultat suivant :

**Proposition (Champ de vecteurs sur un ouvert étoilé)**

Si $U$ est un ouvert étoilé, alors tout champ de vecteurs de rotationnel nul dérive d'un potentiel.

2.b

**Dériver localement d'un potentiel scalaire**

On peut noter que tout champ de vecteurs à rotationnel nul dérive, *localement*, d'un potentiel scalaire, c'est-à-dire qu'en tout point, il existe un voisinage de ce point sur lequel le champ dérive d'un potentiel (en effet, on peut prendre pour voisinage une boule ouverte, qui est étoilée).

2.2

### 2.2. Circulation, intégrale curviligne

**Définition (Circulation)**

Si $\overrightarrow{V} = (P, Q, R)$ est un champ de vecteurs continu, défini sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$, et si cet ouvert contient le support d'une courbe paramétrée $\Gamma$ orientée régulière de classe $\mathcal{C}^1$

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} [t_0, t_1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array},$$

alors la *circulation* (ou *intégrale curviligne*) de $\overrightarrow{V}$ le long de $\Gamma$, notée $\oint_\Gamma \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$, est :

$$\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{V}(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t) \mathrm{d}t.$$

2.e

Par abus de langage, on parle souvent de circulation le long du support de l'arc $([t_0, t_1], \Gamma)$, par exemple le long d'un segment ou d'un cercle (orientés).

On a une définition analogue dans le cas d'un champ de vecteurs plan.

**Proposition (Intégration d'une intégrale curviligne)**

Si le champ $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire $f$, et si $\Gamma(t_0) = A$, $\Gamma(t_1) = B$, alors

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = f(B) - f(A)$$

2.c

**Circulation et champ dérivant d'un potentiel**

En particulier, si $\Gamma$ est un lacet ($A = B$), alors la circulation sur $\Gamma$ de tout champ de vecteurs dérivant d'un potentiel scalaire est nulle : cela donne une nouvelle condition nécessaire pour qu'un champ de vecteurs dérive d'un potentiel.
Dans un tel cas encore, la circulation ne dépend que de l'origine $A$ et de l'extrémité $B$ de $\Gamma$, pas de « l'allure » de $\Gamma$ (d'où une nouvelle condition nécessaire).

2.3

On peut étendre la notion de circulation au cas où l'arc n'est que continu, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exemple (Circulation)

Considérons le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} : (x,y) \mapsto (y,x)$, et le segment $\Gamma$ d'extrémités $(0,1)$ et $(1,0)$ parcouru dans ce sens. On calcule alors

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_{[0,1]} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_{[0,1]} (1-2t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Si on joint ces deux points par deux arêtes d'un même carré se joignant en l'origine conduisant à un chemin $\Gamma'$, on trouve également une circulation nulle :

$$\oint_{\Gamma'} \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_{[0,1]} \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_{[1,2]} \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 0$$

Ce n'est pas une grande surprise, car le champ considéré dérive du potentiel $(x,y) \mapsto xy$.

Considérons maintenant le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} : (x,y) \mapsto (-y,x)$, et le segment $\Gamma$ d'extrémités $(0,1)$ et $(1,0)$. On calcule alors

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_{[0,1]} \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_{[0,1]} -1\mathrm{d}t = -1$$

Si on passe par $\Gamma'$, on trouve une circulation nulle. La circulation dépend non seulement des extrémités choisies, mais aussi du chemin choisi liant ces extrémités : ce champ ne peut donc dériver d'un potentiel scalaire.

iii

Exercice (Un champ à rotationnel nul ne dérivant pas d'un potentiel scalaire)

En calculant sa circulation le long du cercle unité, montrer que le champ de vecteurs

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{V} : & \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right) \end{array}$$

ne dérive pas d'un potentiel scalaire. Montrer cependant qu'il est de rotationnel nul.

5

### 2.3. Formule de Green-Riemann

On considère un « domaine » $\Sigma$ du plan, et le support d'un arc fermé $\Gamma$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sans point double, entourant le domaine $\Sigma$, et orienté dans le sens trigonométrique. Nous admettons le résultat suivant :

Théorème (Formule de Green-Riemann)

Soit $\overrightarrow{V} = (P,Q)$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ contenant $\Sigma$ et le support de $\Gamma$. Alors :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2.d

Formule de Green-Riemann

Cette formule permet de montrer que la circulation sur un arc fermé d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel scalaire est nulle

On peut avoir des « trous » dans $\Sigma$, que l'on oriente alors dans le sens antitrigonométrique. On relie cette fois ci une somme d'intégrales curvilignes avec une intégrale double

2.4

**Exercice (Formule de Green-Riemann)**

Considérer le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} : (x, y) \mapsto \left(\frac{-y}{2}, \frac{x}{2}\right)$. Calculer, en utilisant la formule de Green-Riemann, la circulation de ce champ sur le cercle de centre $O$ de rayon $R$. Qu'en déduire sur le champ $\overrightarrow{V}$ ? 6

## 3. Feuille de TD 29 : Géométrie différentielle

### 3.1. Étude métrique des courbes paramétrées

**Exercice 1 (Longueur d'un arc)** 0

**1** Calculer la longueur de l'arc $f : t \mapsto (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$ sur $[0, 2\pi]$.
**2** On considère la courbe polaire d'équation

$$\rho = a\,\mathrm{th}(\theta/2).$$

**i** Tracer son support.
**ii** Calculer la longueur d'une portion de courbe pour $\theta \in [0, \alpha]$.

**Exercice 2 (Longueur et courbure)** 0

Soit $f : t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos(t)^3, \sin(t)^3)$ sur $[0, 2\pi]$ (c'est l'*astroïde*).
**1** Calculer la longueur de $f$.
**2** Calculer la courbure de $f$ en tout point régulier.

**Exercice 3 (Longueur, courbure, détermination angulaire)** 0

**1**
**i** Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, \mathrm{ch}(t))$. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de $f$.
**ii** Calculer la détermination angulaire de $f$.
**iii** En déduire la courbure de $f$.
**iv** Calculer directement la courbure de $f$.
**2** Mêmes questions avec $f : t \in ]-\pi, \pi[ \mapsto (x(t), y(t)) = (t + \sin(t), 1 + \cos(t))$.

**Exercice 4 (Un calcul de courbure pas si compliqué que ça *(Centrale MP 08)*)** 2

Déterminer la courbure, au point de paramètre $t$, de l'arc :

$$x(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), y(t) = \sqrt{1+t^2}.$$

**Exercice 5 (Courbure constante *(X PC 09)*)** 2

Déterminer les courbes ayant une courbure constante.

**Exercice 6 (Détermination de développées)** 3

Déterminer la développée (ensemble des centres de courbure) de :
**1** L'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
**2** La courbe paramétrée $t \mapsto (t, \ln(t))$. Déterminer $(a, f(a))$ tel que le rayon de courbure soit minimal.
**3** La cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos(\theta))$ (où $a > 0$).
**4** La cycloïde $f : t \mapsto (x(t), y(t)) = (a(\cos(t) + t\sin(t)), a(\sin(t) - t\cos(t)))$.

### 3.2. Champs de vecteurs

**Exercice 7 (Utilisation de la formule de Green-Riemann)** 0

Soit $D$ le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Calculer $\iint_D (x^2 + 2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ à l'aide de la formule de Green-Riemann.

**Exercice 8 (Calculs de circulation)** 0

Calculer :

**1** $\oint_\Gamma x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$, où $\Gamma$ est l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ allant $O$ à $A(2, 4)$.

**2** $\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x$, où $\Gamma$ est le cercle de centre $\Omega(a, b)$, de rayon $R > 0$, orienté dans le sens trigonométrique.

**3** $\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x$, où $\Gamma$ est le triangle $(OIJ)$ avec $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$, orienté dans le sens direct.