

AGRÉGATION INTERNE  
DE MATHÉMATIQUES  
Session 2012, épreuve 2

## – NOTATIONS ET RAPPELS –

- $\mathbf{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbf{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels.
- Pour tous entiers naturels  $p$  et  $q$  vérifiant  $p \leq q$ , l'ensemble  $\{n \in \mathbf{N} / p \leq n \leq q\}$  est noté  $\llbracket p, q \rrbracket$ .
- Définition : on dit qu'une suite  $u$  est périodique à partir d'un certain rang si

$$\exists p \in \mathbf{N}^*, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, \quad u_{n+p} = u_n.$$

- **Dans tout le problème**  $E$  désigne un espace vectoriel réel **de dimension finie** que l'on munit d'une norme notée  $\|\cdot\|$ . Sauf contre-indication, les suites étudiées dans ce problème sont à valeurs dans  $E$ .
- Pour tout élément  $x$  de  $E$  et tout réel strictement positif  $r$ ,  $\mathcal{B}(x, r)$  désigne la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ .
- Pour toute partie  $A$  de  $E$ , on note  $\overline{A}$  l'adhérence de  $A$  dans  $E$ .
- Si  $f$  est une application d'un ensemble  $A$  vers lui-même et si  $n$  est un entier strictement positif, on note  $f^n$  l'application

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

On pose par convention  $f^0 = Id_A$ .

### Rappels

- Définition : soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On dit qu'une suite  $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une **suite extraite** de la suite  $u$  s'il existe une application strictement croissante  $\phi$  de l'ensemble  $\mathbf{N}$  vers lui-même vérifiant  $v = u \circ \phi$ , c'est-à-dire  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}} = (u_{\phi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ .
- Définition : soit  $u$  une suite de  $E$ . Un élément  $\ell$  de  $E$  est dit **valeur d'adhérence** de cette suite s'il est limite d'une suite extraite de la suite  $u$ .
- Définition équivalente : un élément  $\ell$  de  $E$  est valeur d'adhérence d'une suite  $u$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \quad \exists n \geq N / \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

### Notations

- On note  $V(u)$  l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite  $u$ .
- Pour toute suite  $u$  et pour tout entier naturel  $N$ , on note  $T_N(u)$  l'ensemble des termes d'indice supérieur ou égal à  $N$  de la suite  $u$ , c'est-à-dire :

$$T_N(u) = \{x \in E / \exists n \in \mathbf{N}, n \geq N, x = u_n\}.$$

On remarquera que  $T_0(u)$  est l'ensemble image de la suite  $u$ .

- **Partie I : Valeurs d'adhérence** -

**A) Premières propriétés de  $V(u)$**

On considère une suite  $u$  d'éléments de  $E$ .

1. Démontrer que

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \overline{T_N(u)} = T_N(u) \cup V(u).$$

2. Démontrer que :

$$V(u) = \bigcap_{N \in \mathbf{N}} \overline{T_N(u)}$$

3. Vérifier que l'ensemble  $V(u)$  est

- (a) un fermé de  $E$  ;
- (b) un compact non vide si la suite  $u$  est bornée.

4. (a) On considère une suite  $u$  bornée telle que  $V(u)$  soit fini. On note  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_k$  les valeurs d'adhérence de  $u$ . Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un entier  $n_0$  vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \in \bigcup_{i=0}^k \mathcal{B}(\ell_i, \varepsilon).$$

- (b) En déduire qu'une suite bornée  $u$  est convergente si et seulement si  $V(u)$  est un singleton.

5. Soient  $u$  et  $v$  deux suites d'éléments de  $E$ . Démontrer qu'il existe une suite  $w$  vérifiant :

$$V(w) = V(u) \cup V(v).$$

**B) Exemples**

On dit qu'une partie  $A$  de  $E$  est **discrète** s'il existe un réel  $r$  strictement positif vérifiant

$$\forall (a, a') \in A^2, \quad a \neq a' \implies \|a - a'\| \geq r.$$

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est **discrète** si son ensemble image est une partie discrète de  $E$ .

- 6. Démontrer qu'une suite discrète convergente est stationnaire.
- 7. Démontrer que si  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite discrète alors

$$V(u) = \bigcap_{N \in \mathbf{N}} T_N(u).$$

8. Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , il existe un unique couple d'entiers naturels  $(p, k)$  vérifiant :

$$n = 2^p + k \text{ avec } k < 2^p.$$

- 9. Écrire dans le langage de votre choix, mais en n'utilisant pas de fonction «puissance», un algorithme donnant à partir d'un entier naturel  $n$  non nul, l'unique couple d'entiers naturels  $(p, k)$ .
- 10. On reprend la décomposition vue dans la question 8, et on pose  $k = k_n$  ainsi que  $p = p_n$ . On définit sur  $\mathbf{N}^*$  la suite réelle  $u$  par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = k_n.$$

- (a) Détailler les valeurs de  $u_n$  pour  $n$  compris entre 1 et 20. On présentera les résultats dans un tableau.

(b) Donner l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $u$ .

11. Toujours avec la décomposition vue dans la question 8, on définit sur  $\mathbf{N}^*$  la suite  $v$  par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n = \frac{k_n}{2^{p_n}}.$$

On considère un réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1[$  et un entier naturel  $n$ .

(a) Démontrer que  $x$  est une valeur d'adhérence de la suite  $v$ .

(b) Déterminer alors  $V(v)$ .

### C) Limite inférieure d'une suite réelle

Pour les questions 12 à 15, on considère une suite réelle bornée  $u = (u_n)$ .

12. Soit  $N$  un entier naturel. Justifier l'existence de

$$m_N = \inf T_N(u).$$

13. (a) Démontrer que la suite  $(m_N)_{N \in \mathbf{N}}$  est convergente. Sa limite est appelée **limite inférieure** de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et notée  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

(b) Vérifier que

$$\inf u \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \sup u.$$

14. Montrer que  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$  est une valeur d'adhérence de la suite  $u$ .

15. Dans cette question, on compare  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ,  $\inf V(u)$  et  $\min V(u)$ . Soit  $\ell$  une valeur d'adhérence de la suite  $u$ . Démontrer que  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \ell$ . Conclure.

16. On considère deux suites réelles bornées  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telles que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq v_n$ . Démontrer que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

17. On considère deux suites réelles bornées  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Comparer les nombres suivants

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n + \liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

et donner au moins un exemple de suites  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telles que l'égalité n'ait pas lieu.

### D) Suites à évolution lente

On dit qu'une suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de  $E$  est à **évolution lente** si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0.$$

18. Donner un exemple de suite bornée, à évolution lente mais non convergente.

*Le but des questions qui suivent est de montrer que si une suite  $u$  est bornée et à évolution lente alors l'ensemble  $V(u)$  est connexe.*

*Nous allons effectuer une preuve par l'absurde; **on suppose donc que  $V(u)$  n'est pas connexe.***

19. Démontrer qu'il existe deux compacts non vides  $K_1$  et  $K_2$  vérifiant

$$\begin{cases} K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ K_1 \cup K_2 = V(u). \end{cases}$$

20. Démontrer que la distance entre  $K_1$  et  $K_2$  est strictement positive. Elle sera notée  $a$ .

21. On note

$$\Omega_1 = \left\{ x \in E / d(x, K_1) < \frac{a}{3} \right\} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \left\{ x \in E / d(x, K_2) < \frac{a}{3} \right\}.$$

On considère  $M$  un majorant de la suite  $\|u\| = (\|u_n\|)$ . Démontrer que

$$K = \overline{\mathcal{B}(0, M)} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

est un compact.

22. Démontrer qu'il existe une suite extraite de  $u$  à valeurs dans  $K$  et conclure à l'absurdité de l'hypothèse initiale.

## - Partie II : Valeurs d'adhérence de suites itératives -

On considère une partie compacte  $K$  de  $E$ , une application continue  $f$  définie sur  $K$ , à valeurs dans  $K$  et enfin une suite récurrente  $u$  associée à  $f$ , c'est-à-dire définie par

$$\begin{cases} u_0 \in K, \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

23. Démontrer que  $V(u)$  est invariant par  $f$ , c'est-à-dire que  $f(V(u)) = V(u)$ .

Pour les questions 24 à 27, le compact  $K$  est le segment  $[0, 1]$ , la fonction  $f$  est définie par

$$f : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & 1 - |2x - 1| \end{array} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-x) & \text{si } x \in ]\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

et  $u$  est une suite récurrente associée à  $f$ .

24. Démontrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a l'équivalence :  $x \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbf{Q}$ .

Le but des questions 25 et 26 est de montrer que la suite  $u$  est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si le réel  $u_0$  est un nombre rationnel.

25. Dans cette question, on suppose que  $u_0$  est un nombre rationnel. Il existe donc deux entiers  $a$  et  $b$  tels que  $u_0 = \frac{a}{b}$  avec  $0 \leq a \leq b$ ,  $a$  et  $b$  étant premiers entre eux.

(a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , le réel  $u_n$  s'écrit sous la forme  $u_n = \frac{h_n}{b}$  où  $h_n$  est un entier naturel inférieur ou égal à  $b$ .

(b) Démontrer qu'il existe un entier naturel  $N$  et un entier strictement positif  $p$  tels que  $u_{N+p} = u_N$ . En déduire que  $u$  est périodique à partir d'un certain rang.

26. On suppose que la suite  $u$  est périodique à partir d'un certain rang.

(a) Soit  $x$  un réel appartenant au segment  $[0, 1]$ . Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , il existe deux entiers  $a_n$  et  $b_n$  dépendant de  $x$  vérifiant

$$f^n(x) = a_n x + b_n$$

(b) En déduire que  $u_0$  est un nombre rationnel.

27. Soit  $p$  un entier strictement positif. On considère la suite  $u$  de premier terme  $u_0 = \frac{2}{1+2^p}$ .

(a) Donner les valeurs de  $u_k$  pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $p$ .

(b) Donner l'ensemble  $V(u)$  des valeurs d'adhérence de  $u$ . On justifiera la réponse.

– **Partie III : Force d'un point par rapport à une suite** –

Pour les questions 28 à 30, on considère un nombre réel  $x$  et une suite réelle  $u$ . À tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , on associe la suite  $(H_m(x, u, \varepsilon))_{m \in \mathbf{N}^*}$  définie par

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \quad H_m(x, u, \varepsilon) = \frac{\text{Card}\{n \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket / |x - u_n| < \varepsilon\}}{m},$$

où  $\text{Card } A$  représente le cardinal d'un ensemble  $A$ . Ainsi,  $H_m(x, u, \varepsilon)$  représente la proportion des  $m$  premiers éléments de la suite appartenant à la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$ .

**28.** Démontrer que la suite  $(H_m(x, u, \varepsilon))_{m \in \mathbf{N}^*}$  est bornée. On note

$$H(x, u, \varepsilon) = \liminf_{m \rightarrow +\infty} H_m(x, u, \varepsilon).$$

**29.** Démontrer que l'application  $H(x, u, \cdot)$  définie par

$$\begin{aligned} H(x, u, \cdot) : \mathbf{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \varepsilon &\longmapsto H(x, u, \varepsilon) \end{aligned}$$

admet une limite à droite en 0 que l'on note  $F(x, u)$ .

Cette limite est appelée **force** de  $x$  par rapport à la suite  $u$ .

**30.** Démontrer que

$$0 \leq F(x, u) \leq 1.$$

**31.** Soit  $u$  une suite réelle. On considère un entier  $p$  strictement positif et  $(p+1)$  réels distincts que l'on note  $x_0, x_1, \dots, x_p$ .

(a) Démontrer que

$$\sum_{k=0}^p F(x_k, u) \leq 1.$$

(b) Soit  $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une suite de réels distincts. Démontrer que la série  $\sum F(x_k, u)$  est convergente avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F(x_k, u) \leq 1.$$

**32.** On considère dans cette question  $u$  une suite réelle convergente vers un réel  $\ell$ .

(a) Démontrer que

$$F(\ell, u) = 1.$$

(b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{\ell\}, \quad F(x, u) = 0.$$

**33.** Démontrer que si un réel a une force strictement positive par rapport à une suite  $u$  alors il est valeur d'adhérence de cette suite.

Nous verrons grâce à la question 35 que la réciproque est fausse.

**34.** Donner un exemple d'une suite bornée divergente  $u$  et d'un réel  $x$  vérifiant

$$F(x, u) = 1.$$

**35.** Donner un exemple de suite  $u$  ayant une suite de valeurs d'adhérence  $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$  deux à deux distinctes et vérifiant

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F(x_k, u) = 0.$$

## – Partie IV : Algorithme déterminant le nombre de valeurs d'adhérence –

**Définition :** on appelle **liste de réels** toute suite finie de nombres réels.

Par exemple :  $L = (2; 5; 20; 15; 12; 14; 3, 14; 15)$ .

À toute liste de réels  $L = (x_1; \dots; x_p)$  et à tout réel strictement positif  $r$ , on associe  $\mathcal{G}(L, r)$  l'union suivante de segments :

$$\mathcal{G}(L, r) = \bigcup_{((i,j)/0 \leq x_j - x_i \leq r)} [x_i, x_j].$$

On note  $\mathcal{N}(L, r)$  le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{G}(L, r)$ , c'est-à-dire le nombre de segments disjoints composant  $\mathcal{G}(L, r)$ .

**36.** Soit  $L = (2; 5; 20; 15; 12; 14; 3, 14; 15)$  et  $r = 2$ .

Donner sans justification  $\mathcal{G}(L, r)$  et  $\mathcal{N}(L, r)$ .

**37.** On considère une liste de réels  $L$  et un réel  $r$  strictement positif. Écrire dans le langage de votre choix un algorithme permettant de déterminer  $\mathcal{N}(L, r)$ .

On pourra supposer qu'on dispose d'une fonction permettant de trier les éléments d'une liste par ordre croissant.

Jusqu'à la fin du problème, on considère une suite bornée  $u$  admettant un nombre fini de valeurs d'adhérence, notées  $y_1, y_2, \dots, y_q$ , **toutes de force strictement positive** et un réel strictement positif  $r$  vérifiant pour tout  $i \neq j$ ,  $|y_i - y_j| \geq r$ .

On considère, pour tout entier naturel  $p$  strictement supérieur à 1, la liste

$$L_p = (u_p; u_{p+1}; \dots; u_{p^2-1}).$$

On considère enfin l'algorithme *N.V.A.* qui à l'entier  $p$  associe le nombre  $N.V.A.(p) = \mathcal{N}(L_p, \frac{2r}{5})$ . Le but de cette dernière partie est de prouver que la suite  $(N.V.A.(p))_{p \geq 2}$  est stationnaire et que les termes de cette suite à partir d'un certain rang sont égaux au nombre de valeurs d'adhérence de la suite  $u$ .

On considère un entier naturel  $p_0$  (il en existe d'après la question **I-4a**) vérifiant

$$\forall p \geq p_0, \quad u_p \in \bigcup_{k=1}^q \left] y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5} \right[.$$

**38.** Soit  $p$  un entier supérieur à  $p_0$ . Démontrer que

$$\forall (n, m) \in \llbracket p, p^2 - 1 \rrbracket^2, \quad |u_n - u_m| \leq \frac{2r}{5} \iff \exists k \in \llbracket 1, q \rrbracket / (u_n, u_m) \in \left( \left] y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5} \right[ \right)^2.$$

**39.** En déduire que

$$\forall p \geq p_0, \quad \mathcal{G} \left( L_p, \frac{2r}{5} \right) \subset \bigcup_{k=1}^q \left] y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5} \right[.$$

**40.** Démontrer que si  $x$  est un réel de force strictement positive par rapport à  $u$ , alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall p \geq p_\varepsilon, \quad \{u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p^2-1}\} \cap ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \neq \emptyset.$$

**41.** En déduire qu'il existe un entier  $P$  tel que

$$\forall p \geq P, \forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \mathcal{G} \left( L_p, \frac{2r}{5} \right) \cap \left] y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5} \right[ \neq \emptyset.$$

**42.** Démontrer que

$$\forall p \geq P, \quad N.V.A.(p) = q.$$