Les parties II et III sont indépendantes de la partie I. On rappelle la formule de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{lorsque } n \to +\infty\,.$$

I

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx\,.$$

1) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'on a $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.
1) b) En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
1) c) Montrer que

$$I_n \sim \frac{c}{\sqrt{n}} \text{ lorsque } n \to +\infty$$

où c est une constante que l'on calculera.
2) a) Pour quelles valeurs de $k \in \mathbf{R}$ l'intégrale

$$F(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

existe-t-elle?
2) b) Montrer que la fonction F admet en $k = 0$ un développement en série entière dont on exprimera les coefficients en fonction de

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

Quel est son rayon de convergence?
2) c) Donner, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la valeur de u_n.

Soient $(A_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que

$$A_n > 0 \text{ et } B_n > 0 \text{ pour tout } n \geq 0\,, \quad \text{et } A_n \sim B_n \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

Supposons que la série entière

$$\sum_{n\geq 0} B_n x^n$$

a pour rayon de convergence 1, et que la série de terme général B_n diverge.
3) a) Donner la nature de la série de terme général A_n.
3) b) Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} A_n x^n \,?$$

3) c) Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} A_n x^n \sim \sum_{n\geq 0} B_n x^n \text{ lorsque } x \to 1^- \,.$$

4) Montrer que

$$F(k) \sim c' \ln(1-k) \text{ lorsque } k \to 1^-$$

où c' est une constante que l'on calculera.

II

Soient $a \geq b$ deux réels strictement positifs fixés. On considère les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par les relations de récurrence

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,, \qquad n \geq 1\,,$$

et par les conditions initiales $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
1) Vérifier que $a_n \geq b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2) a) Etudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ et en déduire qu'elles convergent.
2) b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ ont la même limite strictement positive, qui sera notée $\mu(a, b)$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $d_n = \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$.
3) a) Montrer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la double relation

$$\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}}\right)^2 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \,.$$

3) b) Montrer qu'il existe une constante $r \in]0, 1[$ que l'on précisera telle que

$$d_n \leq r^n d_0\,, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

4) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, qu'on ne demande pas de calculer, telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$a_n - \mu(a,b) \leq Cr^n \,, \quad \text{et} \quad \mu(a,b) - b_n \leq Cr^n \,.$$

III

Pour tout couple (a, b) de réels strictement positifs, on pose

$$E(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \,.$$

1) Montrer que l'intégrale $E(a, b)$ est bien définie.

2) Montrer que

$$E(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$

(on transformera l'intégrale $E(a, b)$ par le changement de variables défini par $t = b\tan\theta$).

3) a) Montrer que l'application

$$\phi : \, t \mapsto \phi(t) = \tfrac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$$

définit un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$ (c'est à dire une bijection de classe C^1 dont la bijection réciproque est également de classe C^1).

3) b) En effectuant le changement de variables $u = \phi(t)$ dans l'intégrale ci-dessus, montrer que

$$E(a,b) = E\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \,.$$

3) c) Déduire de ce qui précède la valeur de $E(a, b)$ en fonction de $\mu(a, b)$.

IV

En utilisant le résultat du I-4), déterminer un équivalent de $\mu(a, b)$ lorsque $b \to 0^+$, $a > 0$ étant fixé.

FIN