DS 1

L'usage des calculatrices est interdit

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 : Extrait d'un problème de concours 1995
Pour un calcul célèbre Archimède considéra les relations de récurrence :

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} \quad \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{c\ _{n+1}}$$

1) Montrer que pour $c_1 = 0$ et $\lambda_1 = 2$ ces relations définissent effectivement deux suites $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ et qu'il existe deux autres suites $(\theta_n)_{n\geq 1}$ et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telles que pour $n \geq 1$

$$\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \alpha_n \in \mathbb{R}^+ \quad c_n = \cos(\theta_n) \quad \lambda_n = \alpha_n \sin(\theta_n)$$

Montrer que $\lambda_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$

Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ converge vers π.

2) En utilisant la formule de Taylor, montrer pour tout naturel $n \geq 1$ l'inégalité :

$$|\pi - \lambda_n| \leq \frac{\pi^3}{6.4^n}$$

En déduire un entier N_1 tel que

$$|\pi - \lambda_{N_1}| \leq 10^{-6}$$

3) Montrer que pour tout naturel p donné, λ_n admet ; lorsque n tend vers l'infini, le développement

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}, \frac{1}{4^n} +,,, + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}, \frac{1}{4^{pn}} + o\left(\frac{1}{4^{np}}\right)$$

4) On définit une nouvelle suite $\left(\lambda_n^{(1)}\right)_{n\geq 1}$ par $\lambda_n^{(1)} = \frac{4\lambda_{n+1} - \lambda_n}{3}$,
Montrer que cette nouvelle suite converge elle aussi vers π et que l'on a quand n tend vers l'infini

$$\lambda_n^{(1)} - \pi = o(\lambda_n - \pi)$$

Donner un équivalent de $\lambda_n^{(1)} - \pi$,

5) Montrer qu'il existe un réel α (que l'on dé terminera) tel que la suite $\left(\lambda_n^{(2)}\right)_{n\geq 1}$ définie par

$$\lambda_n^{(2)} = (1-\alpha)\lambda_{n+1}^{(1)} + \alpha \lambda_n^{(1)}$$

vérifie

$$\lambda_n^{(2)} - \pi = o\left(\frac{1}{16^n}\right)$$

lorsque n tend vers l'infini,

6) Donner $\lambda_n^{(2)}$ en fonction de λ_n , λ_{n+1} , λ_{n+2} et montrer pour tout n l'inégalité

$$\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| \leq \frac{17\pi^7}{576, 7!, 4^{3n}}$$

Déterminer une valeur N_2 telle que l'on ait $\left|\lambda_{N_2}^{(2)} - \pi\right| \leq 10^{-6}$

Exercice 2 : Extrait d'un problème de concours 2014
Soit z un nombre complexe, de partie réelle x et de partie imaginaire y, tels que $(x,y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$. On note

$$\theta(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \text{et} \quad R(z) = \frac{z+|z|}{\sqrt{2(Re(z)+|z|)}}$$

1) Justifier que θ et R sont bien définis.

2) Lorsque z vaut successivement $z_1 = 4$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$, calculer $R(z)$, $\theta(z)$ et $(R(z))^2$.

3) Vérifier que $\theta(z) \in]-\pi, \pi[$ et que $R(z) \in \mathcal{P} = \{Z \in \mathbb{C} / \ Re(Z) > 0\}$.

4) Représenter sur une figure le cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon $|z|$ et les points M d'affixe z et B d'affixe $-|z|$.

En considérant des angles bien choisis, montrer que

$$\theta(z) = \text{Arg}(z) = 2\text{Arg}(z+|z|)$$

où $\text{Arg}(z)$ désigne la détermination principale de l'argument du nombre complexe z.

5) Déterminer $(R(z))^2$, $\theta \circ R(z)$ et $|z|^{1/2}e^{i\theta(z)/2}$ en fonction de z, $R(z)$ et $\theta(z)$.

6) Résoudre à l'aide de E l'équation $Z^2 = z$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

7) En déduire que R est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans $\mathcal{P}$. Préciser sa bijection réciproque.

Problème

I- Polynômes de Bernoulli

1) Soit f une fonction définie continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles, Montrer que les conditions ci-dessous définissent une unique fonction F continûment dérivable sur $[0,1]$;

$$F' = f \quad \text{et} \quad \int_0^1 F(t)dt = 0$$

et exprimer F à l'aide de $G : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$,

2) Montrer que les conditions ;

$$B_0 = 1 \ , \ B'_{n+1} = B_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

définissent une unique suite de fonctions polynômes,
Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré. Expliciter les polynômes B_1 , B_2, B_3 et B_4,

3) Montrer pour tout naturel n supérieur ou égal à 2 l'égalité ;

$$B_n(0) = B_n(1)$$

4) On définit une suite de polynômes C_n en posant pour tout naturel n

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

Montrer que la suite (C_n) vérifie les conditions du 2) définissant la suite (B_n) et en déduire que pour tout naturel n , $C_n = B_n$,
Qu'en déduit-on pour les graphes des B_n et pour les valeurs lorsque n est impair supérieur ou égal à 3 de $B_n(0)$,

$B_n(\frac{1}{2})$, et $B_n(1)$?

5) Montrer que les polynômes B_{2m+1} (pour , naturel) ne s'annulent pas sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ (on pourra procéder par récurrence et utiliser le théorème de Rolle)

En déduire que les polynômes $B_{2m}(X) - B_{2m}(0)$ sont de signe constant sur $[0, 1]$,

II- Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

1) Montrer que pour N entier naturel non nul ;

$$\forall t \in]0, 1[\quad 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

2) Montrer que pour tout naturel n non nul, la fonction φ_n ci-dessous définie sur $]0, 1[$ est prolongeable par continuité à $[0, 1]$ et que le prolongement est continûment dérivable ;

$$\forall t \in]0, 1[\ \varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$$

3) Montrer que pour toute fonction f continûment dérivable sur $[0, 1]$ on a

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(xt) \ dt = 0$$

(on pourra utiliser une intégration par parties)

4) Pour k et n entiers strictement positifs on définit

$$I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t) \cos(2k\pi t) \ dt$$

Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$ et en déduire selon la parité de n l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k,

5) En utilisant la formule établie au III 1) trouver pour N entier naturel une expression de

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) \ dt$$

en fonction de m , N et $B_{2m}(0)$,
En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$$

en fonction de m et de $B_{2m}(0)$ Donner les valeurs de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ et de } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

6) Montrer pour tout m entier naturel non nul la majoration

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq 2$$

et en déduire la majoration

$$|B_{2m}(0)| \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}$$