CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice : points à coordonnées entières sur une hyperbole

On munit le plan d'un repère orthonormé. On considère la conique $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne :

$$x^2 - 13y^2 = 1.$$

1. Tracer l'allure de l'hyperbole $\mathcal{H}$. On précisera les tangentes aux points d'ordonnée nulle ainsi que les branches infinies.

2. Ecrire un algorithme en français qui renvoie les éventuels couples d'entiers **naturels** (x, y) vérifiant :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x^2 - 13y^2 = 1 \\ y \leqslant 200 \end{cases} .$$

3. Programmer cet algorithme sur calculatrice et donner les couples d'entiers naturels (x, y) solutions du système (I). On ne demande pas d'écrire le programme sur la copie.

Problème : matrices «toutes-puissantes»

Notations et objectifs

Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$ et I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On pourra confondre $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

Une matrice N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel r tel que $N^r = 0$.

Si $M_1, \ldots, M_k$ sont des matrices carrées, la matrice $\mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $M_1, \ldots, M_k$.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note id_E l'application identité sur E.

Enfin, on note $\mathbb{K}[X]$ la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est «**toute-puissante** sur $\mathbb{K}$» et on notera en abrégé TP$\mathbb{K}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$.

On note $T_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ toutes-puissantes sur $\mathbb{K}$:

$$T_p(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \mid \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \ A = B^n\}.$$

L'objectif principal du sujet est d'établir le résultat suivant :

toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TP$\mathbb{C}$.

Dans la partie **I**, on traite quelques exemples et contre-exemples.

Dans la partie **II**, on montre que, dans le cas où le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé, on peut ramener l'étude au cas des matrices de la forme $\lambda I_p + N$ avec N nilpotente.

Dans la partie **III**, on traite le cas des matrices unipotentes c'est-à-dire de la forme $I_p + N$ avec N nilpotente et on en déduit le théorème principal.

Les parties **I** et **II** sont dans une large mesure indépendantes. La partie **III** utilise les résultats des parties précédentes.

Partie I : quelques exemples

1. Le cas de la taille 1

(a) Démontrer que $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donner les racines n-ièmes du nombre complexe b, c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^n = b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(c) En déduire $T_1(\mathbb{C})$.

2. Une condition nécessaire...

(a) Démontrer que si $A \in T_p(\mathbb{K})$, alors $\det A \in T_1(\mathbb{K})$.

(b) En déduire un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas TP$\mathbb{R}$.

3. ...mais pas suffisante

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il n'existe aucune matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. En déduire que la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante.

4. Un cas où A est diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (le détail des calculs n'est pas demandé).

(b) Démontrer que la matrice A est TP$\mathbb{R}$.

(c) Pour chacun des cas $n = 2$ et $n = 3$, expliciter une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B^n = A$ (on pourra utiliser la calculatrice).

5. Un exemple de nature géométrique

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que A est la matrice d'une rotation vectorielle dont on précisera une mesure de l'angle.

(b) En déduire que A est TP$\mathbb{R}$.

6. Le cas des matrices nilpotentes

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de N, en déduire que $N^p = 0$.

(b) Démontrer que si N est TP$\mathbb{K}$, alors N est la matrice nulle.

Partie II : le cas où le polynôme caractéristique est scindé

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique noté χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme :

$$\chi_A = (-1)^p \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i},$$

avec $k, r_1, \ldots, r_k$ des entiers de $\mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de A, éléments de $\mathbb{K}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Enfin, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, on note $C_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ que l'on appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i.

7. Démontrer que $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$.

8. **(a)** Soit v un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ qui commute avec u et Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que $\operatorname{Ker} Q(u)$ est stable par v.

(b) En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, le sous-espace caractéristique C_i est stable par u.

On note ainsi u_{C_i} l'endomorphisme induit par u sur C_i.

9. Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. Justifier que l'application $u_{C_i} - \lambda_i \operatorname{id}_{C_i}$ est un endomorphisme de C_i nilpotent.

10. En déduire que la matrice A peut s'écrire sous la forme :

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1},$$

avec P une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $p_i = \dim C_i$ et N_i est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$.

On rappelle que $\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs de premier bloc $\lambda_1 I_{p_1} + N_1$, de deuxième bloc $\lambda_2 I_{p_2} + N_2$ et de dernier bloc $\lambda_k I_{p_k} + N_k$.

11. Démontrer que, si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ la matrice $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est TP$\mathbb{K}$, alors A est elle-même TP$\mathbb{K}$.

Partie III : le cas des matrices unipotentes

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Nous allons montrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

On pourra confondre polynôme et fonction polynôme.

On rappelle que si f est une fonction, la notation $f(x) = o(x^p)$ signifie qu'il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que $f(x) = x^p \varepsilon(x)$ au voisinage de 0.

12. Une application des développements limités

(a) Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0.
Démontrer, à l'aide d'une division euclidienne, qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^p \times Q$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait, au voisinage de 0 :

$$1 + x = (U(x))^n + o(x^p)$$

(on pourra utiliser un développement limité de $(1+x)^\alpha$).

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$1 + X = U^n + X^p \times Q.$$

13. Applications

(a) Démontrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. En déduire que si λ est TP$\mathbb{K}$, alors la matrice $\lambda I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

14. Le résultat annoncé

(a) Conclure que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TP$\mathbb{C}$.

(b) Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est-elle TP$\mathbb{C}$?

15. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ non diagonalisable et non inversible qui est TP$\mathbb{R}$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1157 – D'après documents fournis