CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Partie I : EXERCICE 1

Soit les suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & u_n & + & 3v_n & & \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & v_n & + & 4w_n \\ w_{n+1} & = & & & 4v_n & + & w_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1).$$

I.1.

I.1.a Justifier sans calcul que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

I.1.b Diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.1.c Déterminer la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser la calculatrice.

I.2. Expliciter les termes u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Partie II : EXERCICE 2

Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

II.1. Soit p un projecteur de E.

II.1.a Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont supplémentaires dans E.

II.1.b En déduire que la trace de p (notée $\mathrm{Tr}\,(p)$) est égale au rang de p (noté $\mathrm{rg}\,(p)$).

II.1.c Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u)$ est-il nécessairement un projecteur de E ?

II.2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

II.3. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

II.3.a Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que la matrice $Mat_\beta(u)$ de u dans β soit de la forme :

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{où } a_1, \cdots, a_n \text{ sont } n \text{ nombres réels.}$$

II.3.b Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

II.3.c On suppose que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

II.3.d Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

Partie III : PROBLEME

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée.
On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle \mid \rangle$ et de la norme euclidienne $|| \quad ||$ associée. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle s(x) \mid y \rangle = \langle x \mid s(y) \rangle.$$

Un endomorphisme symétrique s de E est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :

$$\forall x \in E,\ \langle s(x) \mid x \rangle \geqslant 0 \quad (\text{respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\},\ \langle s(x) \mid x \rangle > 0).$$

Une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0 \quad (\text{respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0).$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \cdots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \operatorname{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Questions préliminaires

III.1.

III.1.a Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

III.1.b Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

III.2. Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, ε_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Pour tout vecteur x de E, on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x) \mid x \rangle \ .$$

III.2.a Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.

III.2.b En déduire l'inclusion : $R_s\left(S(0,1)\right) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E.

III.3.

III.3.a On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

III.3.b Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \quad \lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n.$$

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.4. Démontrer que l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.5. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \quad | \, a_{i,j} \, | \leqslant 1.$$

III.6. En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.7. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \mathrm{Tr}\,(AS)$.

III.7.a Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \mathrm{Tr}\,(B\Delta) \ .$$

III.7.b Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, que l'on notera t.

III.7.c Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}\,(S)$, puis déterminer le réel t.

Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

III.8. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leqslant \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\,(S)\right)^n \quad (*).$$

III.9. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = {}^tDSD$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{Tr}\,(S_\alpha)$.

III.10. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :

$$\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

III.11. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leqslant \prod\limits_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leqslant \prod_{i=1}^n s_{i,i} \quad \text{(inégalité d'Hadamard).}$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, et $\Delta = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega \Delta\, {}^t\Omega$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

III.12. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = {}^t\Omega A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\mathrm{Tr}\,(AS) = \mathrm{Tr}\,(B\Delta).$$

III.13. Démontrer que $\{\mathrm{Tr}\,(AS) \backslash A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}\,(B\Delta) \backslash B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

III.14. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\mathrm{Tr}\,(B\Delta) \geqslant n\,(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}\,(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}.$$

III.15. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\mathrm{Tr}\,(B\Delta) \geqslant n\,(\det(S))^{1/n}$.

III.16. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}\,(\det(S))^{1/n}$ et $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$. Déterminer le réel m.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1306 – D'après documents fournis