MATHÉMATIQUES I

Plan du problème

Dans les préliminaires, on établit quelques généralités utiles par la suite sur les applications intégrables. Elles sont illustrées par la partie I et utilisées pour établir les résultats de la partie II. Dans les parties III et IV, on étudie le comportement asymptotique de quelques suites et séries en utilisant les idées qui précèdent.

Rappels et notations

- Soient f et g deux fonctions de variable réelle et à valeurs réelles ne s'annulant pas au voisinage d'un élément $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, sauf éventuellement en ce point. f et g sont dites équivalentes en b si et seulement si leur quotient tend vers 1 en b. On notera alors $f \sim g$ en b. f est dite négligeable devant g en b si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 en b. On notera alors $f = o(g)$ en b.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles de termes non nuls à partir d'un certain rang. Les suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes si et seulement si la suite (w_n) définie pour n assez grand par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1 ; on note alors $u_n \sim v_n$. La suite (u_n) est dite négligeable devant (v_n) si et seulement si (w_n) converge vers 0 ; on note alors $u_n = o(v_n)$.
- Pour une série $\sum u_n$ de nombres réels, on note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k .$$

Si de plus $\sum u_n$ est convergente, on note $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses restes :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k .$$

- $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Filière PC

Préliminaires

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$, f et g deux applications continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs strictement positives.

1) On suppose que g est intégrable sur $[a, b[$.

a) Montrer qu'en b, la relation $f = o(g)$ entraîne

$$\int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right).$$

b) Montrer qu'en b, la relation $f \sim g$ entraîne $\int_x^b f \sim \int_x^b g$

(on justifiera l'intégrabilité de f sur les intervalles $[x, b[$ considérés).

2) On suppose que g n'est pas intégrable sur $[a, b[$.

a) Montrer qu'en b, la relation $f = o(g)$ entraîne $\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right)$.

Montrer à l'aide d'exemples que l'on ne peut en général rien dire de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$.

b) Montrer qu'en b, la relation $f \sim g$ entraîne $\int_a^x f \sim \int_a^x g$.

Que dire de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$?

Partie I -

I.A -

I.A.1) Déterminer un équivalent simple de

$$\int_x^1 \frac{e^t}{\operatorname{Arc} \sin t}\, dt \text{ en } 0^+.$$

I.A.2) En déduire un équivalent simple de $\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\operatorname{Arc} \sin t}\, dt$ en 0^+.

I.B -

I.B.1) À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'en $+\infty$, on a

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

I.B.2) Plus généralement, si n est un entier naturel, établir le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right).$$

I.C -

I.C.1) Justifier le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right).$$

I.C.2) Écrire, dans le langage associé au logiciel de calcul formel utilisé, une procédure permettant d'obtenir le terme d'indice n ($n \geq 2$) du développement asymptotique en $+\infty$ (par rapport aux $\frac{e^x}{x^k}$, $k \geq 2$) de :

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$$

(on indiquera le logiciel de calcul formel utilisé).

Partie II -

Soit a un nombre réel et f une application de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives. On suppose que le quotient $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ tend vers une limite finie α en $+\infty$.

II.A - Montrer à l'aide des préliminaires qu'en $+\infty$, $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers α (on peut distinguer le cas $\alpha = 0$).

II.B - On suppose dans cette question $\alpha < -1$.

II.B.1) Montrer que f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

II.B.2) Montrer qu'en $+\infty$, on a $\int_x^{+\infty} f \sim \frac{-xf(x)}{\alpha+1}$

(on peut considérer $\frac{xf(x)}{\alpha+1}$ et utiliser les préliminaires).

II.C - On suppose dans cette question $\alpha > -1$.

II.C.1) Étudier l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

II.C.2) Montrer qu'en $+\infty$, on a

$$\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

II.C.3) Donner un exemple d'application f de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives telles qu'en $+\infty$ le quotient $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tende vers une limite $\alpha > -1$, mais telle que l'on n'ait pas $\int_a^x f \sim \dfrac{xf(x)}{\alpha+1}$.

II.D -

II.D.1) Étudier l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$, selon $\beta \in \mathbb{R}$.

II.D.2) Étudier, à l'aide des questions précédentes, l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma(\ln x)^\beta}$, selon $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

II.E - Que conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ dans le cas $\alpha = -1$?

Partie III -

Dans cette partie, on considère une application f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs strictement positives.

On suppose qu'en $+\infty$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ tend vers $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère la série de terme général $f(n)$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses restes quand la série converge.

On associe à f deux applications u et v continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et définies par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } x \in [n-1, n[\,,\ u(x) = f(n) \text{ et } v(x) = \int_{n-1}^n f(t)dt\,.$$

On pose enfin pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = e^{-\alpha x} f(x)$.

III.A - Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Montrer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $t \in [n-1, n]$, on ait :

$$|h(t) - h(n)| \leq (e^\varepsilon - 1)h(n)$$

(on peut considérer $\dfrac{h'}{h}$).

III.B - On suppose dans cette question que α n'est pas nul. Déduire de III.A que lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$\int_{n-1}^n f(t)\,dt \sim \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} f(n)\,.$$

III.C - On suppose encore dans cette question que α n'est pas nul.

III.C.1) Exprimer pour $k \in \mathbb{N}^*$ les intégrales $\int_{k-1}^k v(t)dt$ et $\int_{k-1}^k u(t)dt$ à l'aide de f.

À l'aide des préliminaires, établir les résultats suivants :

III.C.2) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $f(n)$ converge et on a quand n vers $+\infty$,

$$R_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} f(t)dt .$$

III.C.3) Si f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $f(n)$ diverge et on a quand n vers $+\infty$,

$$S_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_0^{n} f(t)dt .$$

III.D - On suppose à présent que $\alpha = 0$.

Montrer alors que la série de terme général $f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec $R_n \sim \int_n^{+\infty} f(t)dt$ en cas de convergence et $S_n \sim \int_0^n f(t)dt$ en cas de divergence.

Partie IV -

IV.A - À l'aide de ce qui précède, déterminer un équivalent simple des sommes suivantes quand n tend vers $+\infty$:

IV.A.1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

IV.A.2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

IV.A.3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln(k)$

IV.B - Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives équivalentes.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ et } S_n(b) = \sum_{k=0}^{n} b_k .$$

Dans le cas où ces séries convergent, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \text{ et } R_n(b) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n$$

IV.B.1) Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors quand n tend vers $+\infty$, on a $R_n(a) \sim R_n(b)$.

IV.B.2) Montrer que si $\sum a_n$ diverge, alors quand n tend vers $+\infty$, on a $S_n(a) \sim S_n(b)$.

IV.C - Déduire de ce qui précède les résultats suivants lorsque n tend vers $+\infty$:

IV.C.1)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

IV.C.2)

$$n! = \delta n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

où γ et δ sont deux constantes qu'on ne demande pas d'expliciter.

IV.C.3) Que vaut δ ?

••• FIN •••
