Devoir non surveillé

Conjuguée d'une fonction convexe

Dans ce problème, on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $f(0) = 0$.
2. $f \geqslant 0$ (*i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant 0$).
3. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
4. f est convexe (*i.e.* $f'' \geqslant 0$).

On notera (légèrement abusivement) Id la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x \in \mathbb{R}$.

Partie A – Généralité sur les fonctions convexes

A.1 Soit h une fonction convexe continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

a Montrer que si h s'annule deux fois (au moins), alors elle est minorée.

b Montrer que h est décroissante ou tend vers $+\infty$ en $+\infty$. En déduire que h admet une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$.

A.2 Soit $f \in \mathcal{N}$ non constante, et $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

a Vérifier que g et f' admettent en $+\infty$ des limites l et l', finies ou valant $+\infty$.

b Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(x) \leqslant f'(x) \leqslant 2g(2x) - g(x).$$

En déduire que $l = l'$.

c Montrer que si g tend vers $a \in \mathbb{R}_+^*$ en $+\infty$, alors $f - a\mathrm{Id}$ tend vers un réel b ou vers $-\infty$ en $+\infty$, et préciser dans le premier cas les positions relatives de la courbe représentative de f et de son asymptote.

Partie B – Conjuguée d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction (non nécessairement élément de $\mathcal{N}$). On définit, pour $m \in \mathbb{R}_+$, la fonction

$$h_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & mx - f(x) \end{array}$$

et on note

$$M(f) = \{m \in \mathbb{R}_+, h_m \text{ est majorée sur } \mathbb{R}_+\}$$

B.1

a Montrer que si $m \in M(f)$, alors $[0, m] \subset M(f)$.

b En déduire que $M(f)$ est un intervalle.

Désormais, lorsque $m \in M(f)$, on note

$$f^*(m) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} h_m(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (mx - f(x)).$$

La fonction f^* ainsi définie sur $M(f)$ est appelée la *fonction conjuguée* de f.

B.2 On suppose ici $M(f)$ non vide.

a Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall m \in M(f), \quad f(x) + f^*(m) \geqslant mx.$$

b On suppose dans cette question que $M(f) = \mathbb{R}_+$. Montrer que $M(f^*) = \mathbb{R}_+$, et que pour tout $m \in \mathbb{R}_+$: $(f^*)^*(m) \leqslant f(m)$.

B.3 On considère deux fonctions f et g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \leqslant g$. Montrer que $M(f) \subset M(g)$ et que

$$\forall m \in M(f), \quad g^*(m) \leqslant f^*(m).$$

B.4 On cherche ici à déterminer les fonctions f telle que $M(f) = \mathbb{R}_+$ et $f = f^*$.
a Établir que la fonction $k\ : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x^2}{2}$ vérifie cette propriété.
b Soit f une telle fonction. Montrer que $f \geqslant k$, puis que $f = k$. Conclure.

Partie C – Conjuguée d'une fonction convexe

f désigne ici une fonction non constante appartenant à $\mathcal{N}$, et g est la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

C.1
a Montrer que $g(\mathbb{R}_+^*)$ est inclus dans $M(f)$.
b Déterminer $M(f)$:

i Lorsque f' tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

ii Lorque le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$.

iii Lorsque le graphe de f admet une branche parabolique en $+\infty$.

c Donner des exemples explicites d'éléments de $\mathcal{N}$ vérifiant ces trois situations possibles.

C.2 On suppose que $M(f) = \mathbb{R}_+$.
a Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $f'(x_0) \geqslant 0$, et que :

$$f^*(f'(x_0)) = x_0 f'(x_0) - f(x_0).$$

b Montrer que $f = (f^*)^*$.

C.3 Dans cette question, $f'(0) = 0$ et il existe un réel strictement positif c tel que $f'' \geqslant c$.
a Montrer que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même, de bijection réciproque dérivable.
b Montrer que $M(f) = \mathbb{R}_+$, que f^* est dérivable, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(f^*)'(f'(x)) = x$.