DS1 de MP2
06.09.16

Devoir surveillé

Durée : 4 heures

Exercice 1 : Supplémentaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$H \stackrel{def}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et en donner un supplémentaire.

Exercice 2 : Un classique d'algèbre linéaire

Soit E un espace vectoriel, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1 Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$

2 Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$ si et seulement si $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

Exercice 3 : Supplémentarité

Soit E, F des espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$. On suppose que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que $\mathrm{Ker}\, v \oplus \mathrm{Im}\, u = F$.

Exercice 4 : L'identité est-elle un crochet de Lie ?

Existe-t-il des matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

Exercice 5 : Dimension d'un sous-espace d'endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Soit $x \in E$. Vérifier que

$$F \stackrel{def}{=} \{f \in \mathcal{L}(E), f(x) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, et déterminer sa dimension.

Exercice 6 : Produit nul d'endomorphismes nilpotents

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutant. Montrer que si $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(f)$, alors $\mathrm{rg}(f \circ g^k) = \mathrm{rg}(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2 Montrer que si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille de n endomorphismes nilpotents de E, commutant deux à deux, alors $u_1 \dots u_n = 0$.

Exercice 7 : Calculs de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions (toujours appelées f) :

1 $x \mapsto \frac{x}{2+(1-x)^3}$.

2 $x \mapsto e^{\sin(x)}$.

3 $x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

4 $x \mapsto \int_{-x^2}^{\sin(x)} \frac{e^{\sin(t)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 8 : Équivalents de fonctions

Donner des équivalents simples aux points considérés pour les fonctions définies par les formules suivantes :

1 $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ en 0.

2 $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$ en 0.

3 $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ en $+\infty$.

Exercice 9 : Calcul de limites

1 Déterminer la limite en 0 de $\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

2 Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}$.

3 *(CCP MP)* Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)$.

Exercice 10 : Calcul d'intégrale

Calculer $\int_0^1 \arctan(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 11 : Encadrement de Gauss de la factorielle

1 Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! = \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{ij}.$$

2 Montrer que si $i \geqslant 1$ et $j \geqslant 1$, alors

$$i+j-1 \leqslant ij \leqslant \left(\frac{i+j}{2}\right)^2.$$

3 En déduire l'encadrement :

$$n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 12 : Un encadrement de $\binom{2n}{n}$

1 Montrer que :

$$\frac{\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

2 En déduire que pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{2}.$$

Endomorphismes nilpotents de rang maximal

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice unité de cet espace sera notée I_n et la matrice nulle 0_n.

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{C}^n$.

Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

— v^0 est l'endomorphisme unité (*i.e.* $v^0 = \mathrm{Id}_E$).

— $\forall m \in \mathbb{N}, \quad v^{m+1} = v \circ v^m$.

L'endomorphisme v sera dit *nilpotent* s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = 0$ (endomorphisme nul de E). On définit de même une matrice nilpotente.

On note J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux en position $(i, i+1)$, qui valent 1 ($i \in [\![1, n-1]\!]$).

Partie I – Quelques propriétés de J

I.1 Déterminer le rang de J.

I.2

a Déterminer J^k pour $k \in \mathbb{N}$.

b Vérifier que toutes les puissances de J – sauf celle d'exposant 0 – sont nilpotentes.

Partie II – Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E.

II.1 Prouver que pour tous entiers naturels i et j, $\mathrm{Ker}(u^i) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+j})$.

II.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\mathrm{Ker}(u^m))$. Prouver l'existence de

$$r = \inf\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}.$$

II.3 Montrer que :

a Pour tout entier naturel m, tel que $m < r$, $\mathrm{Ker}(u^m)$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}(u^{m+1})$.

b $\mathrm{Ker}(u^r) = \mathrm{Ker}(u^{r+1})$.

c Pour tout entier $m \geqslant r$, $\mathrm{Ker}(u^m) = \mathrm{Ker}(u^{m+1})$.

Partie III – Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit V une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ et vérifiant $V^n = 0_n$. On note v l'endomorphisme de E canoniquement associé à V.

III.1 Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

a Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

b Prouver que $\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Ker}(v^q)$.

c Vérifier alors que l'on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(v^{p+q})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(v^p)) + \dim(\mathrm{Ker}(v^q)).$$

d En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(v^i)) \leqslant i$.

e Démontrer qu'en fait $\dim(\mathrm{Ker}(v^i)) = i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

III.2 Prouver alors que $v^{n-1} \neq 0$.

III.3 En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que

$$\mathcal{B}_1 = (v^{n-1}(e), \ldots, v(e), e)$$

soit une base de E.

III.4 Écrire la matrice de v dans cette base.

III.5 Montrer que si u et v sont deux endomorphismes nilpotents de $\mathbb{C}^n$ de rang $n-1$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{C}^n$, alors $M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M_{\mathcal{C}}(v)$ sont semblables.