E25D

e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

Partie I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle sur I :

$$y'' + y = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur I est $\{x \to A\cos x + B\sin x \setminus (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

2. Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur I. Que peut-on dire des suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(\frac{2n+1}{2}\pi))_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$. On suppose que $g(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que g est la fonction nulle.

Partie II

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$:
$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$.

Soit $v = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. On note h_v l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_v : x \mapsto (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x.$$

On note V l'ensemble des applications h_v lorsque v parcourt $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que l'application qui envoie le vecteur v sur h_v définit un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et V. En déduire que $\mathcal{B} = \{h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4}\}$ est une base de V.
3. Soit $v = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. Exprimer l'application $x \mapsto h_v''(x) + h_v(x)$. On note $\psi(h_v)$ cette application.
   (i) Démontrer que ψ est un endomorphisme de V.
   (ii) Déterminer le noyau de ψ. Quel est le rang de ψ ?
   (iii) Expliciter la matrice de ψ sur la base de V, notée $\mathcal{B}$, déterminée à la question 2. En déduire une base de l'image de ψ.
4. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + y = \cos x \qquad (\mathcal{E}_1)$$

   Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$.

Dans le reste du problème, on considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y'' + y = \frac{1}{x} \qquad (\mathcal{E})$$

Partie III

Dans cette partie, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}.$$

1. Soit x un réel positif.

   1a. Démontrer l'inégalité :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, F(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

   1b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x,t)dt$ est convergente.

   On peut donc définir sur $\mathbb{R}_+$ une fonction G en posant :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, G(x) = \int_0^{+\infty} F(x,t)dt.$$

2. En utilisant l'inégalité démontrée en $1a$, justifier que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3. On se propose de démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit ϵ un réel strictement positif.

   3a. Justifier que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ au point (x,t).

   3b. En utilisant l'inégalité

   $$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \frac{te^{-tx}}{1+t^2} \leq e^{-t\epsilon}$$

   que l'on justifiera, démontrer les points suivants :

   (i) Pour $x \geq \epsilon$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt$ est convergente.

   (ii) G est dérivable sur l'intervalle $]\epsilon, +\infty[$ et on a :

   $$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, \ \ G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}dt.$$

3c. Conclure.

4. En suivant les mêmes étapes que pour la question 3, démontrer que G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée seconde vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

5. Montrer que G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

6a. Démontrer que G est une application décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

6b. En déduire que $G(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Déterminer cette limite.

Partie IV

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que f vérifie les quatre conditions suivantes :

a. f est positive,

b. f est décroissante,

c. $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$,

d. L'application g définie, pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, par $g(t) = tf(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures.

1. Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Montrer que la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (on énoncera précisément le théorème utilisé).

2. Montrer que $\sin(t)f(t)$ admet une limite lorsque t tend 0 par valeurs supérieures. En déduire, que la fonction $|\sin(t)|f(t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0, x]$, pour tout réel $x > 0$.

3. Soit n un entier naturel non nul. On pose w_n le réel défini par :

$$w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|f(t)dt.$$

3a. Justifier l'encadrement : $2f((n+1)\pi) \leq w_n \leq 2f(n\pi)$.

3b. En déduire qu'il existe u_n dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ tel que : $w_n = 2f(u_n)$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3c. Montrer que :

$$w_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t) f(t) dt.$$

4. On considère les deux suites $\{\int_0^{2n\pi} \sin(t) f(t) dt\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t) f(t) dt\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4a. Montrer que la suite $\{\int_0^{2n\pi} \sin(t) f(t) dt\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4b. Montrer que la suite $\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t) f(t) dt\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4c. En comparant les termes de ces deux suites, établir la convergence de chacune d'entre elles vers une limite l commune.

Pour tous réels positifs x et y, tels que $x \leq y$, on pose $I_f(x, y) = \int_x^y \sin(t) f(t) dt$.

5. Déduire de 4. que l'application $I_f(x, y)$ admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$. On note $\int_x^{+\infty} \sin(t) f(t) dt$ cette limite.

6. Soit x un réel positif. Justifier l'existence de $I_x = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Partie V

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que la fonction h_x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h_x(t) = \frac{1}{x+t}$, vérifie les hypothèses de la partie IV.

On peut donc définir une fonction H sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt.$$

2. En effectuant un changement de variables, démontrer l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt.$$

3. En développant $\sin(t-x)$, démontrer que H est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H''(x) + H(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Quelle est la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

5. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = G(x).$$

   la fonction G étant définie dans la partie III.