GAN8

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Problème

Dans tout le problème, ln désigne le logarithme népérien.

Partie I

Soit x un nombre réel dans $]-1,1]$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^i + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

2. En déduire l'égalité :

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt.$$

3. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$ converge vers $\ln(1+x)$. On citera précisément le théorème utilisé.

4 Démontrer les égalités :

$$\begin{aligned} \ln(2) &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i} \quad (1) \\ \ln(2) &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i\,2^i} \quad (2) \end{aligned}$$

5 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de nombres réels qui converge vers 0.

i. Justifier que la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n$ converge.

ii. Soit S la somme de la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n$ et soit S_n la somme partielle $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}u_i$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

a) Démontrer que la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(S_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

b) Démontrer que S vérifie, pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}.$$

iii. En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$|S - S_n| \leqslant u_n.$$

6. Soit p un entier naturel. Déterminer un entier naturel N_p tel que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p}, pour tout entier naturel $n \geqslant N_p$.

7 Soit p un entier naturel. On se propose de calculer une valeur de $\ln(2)$ à 10^{-p} près en utilisant les sommes partielles $(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i\,2^i})_{n\geqslant 1}$.

i. Pour un entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{i\,2^i}$. Justifier l'inégalité :

$$0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

ii. Déterminer un entier naturel N'_p tel que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i2^i}$ est une valeur approchée de $ln(2)$ à 10^{-p}, pour tout entier naturel $n \geqslant N'_p$.

iii. Comparer N_p (introduit dans la question 5) et N'_p.

Partie II

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leqslant n$.

1. Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, noté $\varphi_n(P)$ tel que $P(-1) - P(X) = (X+1)\varphi_n(P)(X)$.

2. Soit φ_n l'application ainsi définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que φ_n est une application linéaire. Déterminer le noyau de φ_n. L'application φ_n est-elle surjective ?

3. Ecrire la matrice de φ_n de la base $1, X, X^2, ..., X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ sur la base $1, X, X^2, ..., X^{n-1}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. Soit P le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Démontrer que $\varphi_n(P) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$ où les nombres réels $b_0, ..., b_{n-1}$ sont définis par :

$$\forall j \in \{0, ..., n-1\}, b_j = (-1)^j \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^i a_i.$$

Partie III

Dans la suite du problème, on désigne par I l'intervalle $]0,1]$. Soit f une fonction continue par morceaux sur I, à valeurs réelles positives, et intégrable sur l'intervalle I.

1. Soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \frac{f(x)}{1+x}.$$

   Démontrer que g est intégrable sur l'intervalle I.

2. Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle I par :

$$\forall x \in I,\ f_n(x) = x^n f(x).$$

   Démontrer que la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle I.

Dans la suite du problème, on note :

$$S_f = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n(f) = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

3. Démontrer que la série de terme général $(-1)^n u_n(f)$ converge.

4. Justifier l'égalité $\mathcal{E}_f$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n(f) = S_f$.

5. Que devient précisément l'égalité $\mathcal{E}_f$ dans les cas suivants :

   (i) La fonction f est la fonction constante égale à 1 sur l'intervalle I.

   (ii) La fonction f est la fonction définie par :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

   (iii) La fonction f est la fonction définie par :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

   Indication : On pourra démontrer que $S_f = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ et déterminer des nombres réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{b(-1+2x)}{1-x+x^2} + \frac{c}{1-x+x^2}\ .$$

Partie IV

1. Soit P un polynôme et soit n son degré. Démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x)dx = P(-1)S_f - \int_0^1 \varphi_n(P)(x)f(x)dx.$$

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} T_n \text{ est de degré } n, \\ T_n(-1) \neq 0 \end{cases}$$

On pose

$$S_n = \int_0^1 \varphi_n(T_n)(x)f(x)dx \quad \text{et} \quad M_n = \sup_{x\in[0,1]} |T_n(x)|.$$

2. Pour tout entier naturel n, démontrer l'inégalité :

$$\left|S_f - \frac{S_n}{T_n(-1)}\right| \leqslant \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|}.$$

Partie V

Dans toute la suite du problème, on considère $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par récurrence par :

$$\begin{array}{rcl} T_0(X) & = & 1 \\ T_1(X) & = & 1-2X \\ T_{n+2}(X) & = & 2(1-2X)T_{n+1}(X) - T_n(X), \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = T_n(-1)$, pour tout entier naturel n.

   (i) Etablir une relation entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n, pour tout entier naturel n.

   (ii) En déduire l'existence de nombres réels α et β tels que pour tout entier naturel n, $v_n = \alpha(3+\sqrt{8})^n + \beta(3-\sqrt{8})^n$.

   (iii) Déterminer les nombres réels α et β.

2 Justifier que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de la partie IV.

3 Démontrer que les coefficients du polynôme $T_n(X)$ sont des entiers relatifs, pour tout entier naturel n.

4 Démontrer l'égalité $T_n(\sin^2 x) = \cos(2nx)$, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x.

5 Soit n un entier naturel. Démontrer que $M_n = 1$ et en déduire l'inégalité :

$$\frac{M_n}{|T_n(-1)|} \leqslant \frac{2}{(3+\sqrt{8})^n}.$$

6 Expliquer comment construire une suite de nombres rationnels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une constante K strictement positive vérifiant, pour tout entier naturel n,

$$|\ln 2 - t_n| \leqslant \frac{K}{(3+\sqrt{8})^n}.$$

Partie VI

On suppose de plus dans cette partie que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^5$ sur l'intervalle $[0,1]$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(\sin^2 x)\sin 2x}{1+\sin^2 x}.$$

1. Justifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^5$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit P un polynôme. Démontrer l'égalité :
$$\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\sin^2 t) g(t) dt.$$

3. Soit n un entier naturel non nul et soit T_n le n-ième polynôme de la suite introduite dans la partie V. Démontrer l'égalité :
$$4n^2 \int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x)dx = (-1)^n g'(\frac{\pi}{2}) - g'(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx)\, g''(x)dx.$$

4. Soit alors $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n(x) = (n+2)^2 T_{n+2}(x) - n^2 T_n(x).$$
Soit n un entier naturel non nul.
   (i) Démontrer l'égalité :
$$\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2nx) - \cos(2(n+2)x))\, g''(x)dx.$$
   (ii) On définit U et V par :
$$U = \int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)dx \text{ et } V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{\sin(2nx)}{n^3} + \frac{\sin(2(n+2)x)}{(n+2)^3}) g^{(5)}(x)dx.$$
   Exprimer U en fonction de $g^{(3)}(\frac{\pi}{2})$, $g^{(3)}(0)$ et V.
   (iii) En déduire qu'il existe un nombre réel K tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\left|\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)dx\right| \leqslant \frac{K}{n^3}.$$

5. Expliquer comment construire une suite de nombres rationnels $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une constante K strictement positive vérifiant, pour tout entier naturel n,
$$|\ln 2 - q_n| \leqslant \frac{K}{n^5(3+\sqrt{8})^n}.$$