File d'attente M/GI/1

CCMP

Epreuve 0 de probabilités

On considère la file d'attente à une caisse de supermarché. Il y a un serveur et un nombre de places infini. Les clients sont servis selon la discipline « premier arrivé, premier servi ». On appelle « système », l'ensemble des clients en attente et du client en service. On considère $(A_n,\, n \geq 1)$ la suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ où A_n représente le nombre de clients arrivés pendant le service du client n.

On définit la suite $(X_n,\, n \geq 1)$ comme suit

$$X_0 = 0 \text{ et } X_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1} & \text{si } X_n = 0, \\ X_n - 1 + A_{n+1} & \text{si } X_n > 0. \end{cases} \tag{1}$$

On suppose que les variables aléatoires $(A_n,\, n \geq 1)$ sont indépendantes et de même loi, de loi commune celle d'une variable aléatoire A.

Hypothèse : On suppose que

- A est à valeurs entières,
- $\mathbf{P}(A \geq n) > 0$ pour tout entier n,
- A a une espérance finie, on note $\rho = \mathbf{E}\left[A\right]$.

---

1 Fonction caractéristique

Dans cette section X représente une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $\mathbf{N}$. On définit sa fonction caractéristique ϕ_X par

$$\begin{aligned} \phi_X \,:\, \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \mathbf{E}\left[e^{itX}\right]. \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbf{R}$ et périodique.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que X et Y ont même loi.

   Indication : on pourra considérer les intégrales
   $$I_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(t)e^{-ikt}\, dt.$$
   pour tout entier k.

3. Si $\mathbf{E}[X] < +\infty$, montrer que ϕ_X est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $\phi'_X(0)$.

4. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $Z = Y + 1$ où Y est de loi géométrique de paramètre p.

2 Remarques préliminaires

5. Etablir que X_n représente le nombre de clients dans le système au moment du départ du client n.

6. Existe-il $M > 0$ tel que $\mathbf{P}(X_n \leq M) = 1$ pour tout $n \geq 0$?

7. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $X_{n+1} - X_n \geq -1$.

8. Pour tout $n \geq 0$, montrer que les variables aléatoires X_n et A_{n+1} sont indépendantes.

3 Convergence

9. Etablir l'identité suivant pour X une variable aléatoire à valeurs entières :
   $$\mathbf{E}\left[e^{itX}\mathbf{1}_{\{X>0\}}\right] = \phi_X(t) - \mathbf{P}(X=0)$$

10. Pour tout entier n, établir la relation suivante :
    $$\phi_{X_{n+1}}(t) = \phi_A(t)\left[e^{-it}\phi_{X_n}(t) + (1-e^{-it})\mathbf{P}(X_n = 0)\right].$$

On suppose dorénavant que $0 < \rho < 1$.

On admet qu'alors la suite $(\mathbf{P}(X_n = 0),\, n \geq 1)$ converge vers une limite, notée α.

On suppose que A n'est pas *arithmétique*, c'est-à-dire que $|\phi_A(t)| < 1$ pour $t \notin \{2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

On pose

$$\begin{aligned} \theta\,:\,[-\pi,\,\pi] &\longrightarrow \mathbf{C} \\ 0 &\longmapsto 1 \\ t &\longmapsto \alpha\,\frac{\phi_A(t)(1-e^{-it})}{1-\phi_A(t)e^{-it}} \text{ pour } t \neq 0. \end{aligned}$$

11. Etablir le développement limité à l'ordre 1, de ϕ_A au voisinage de 0.

12. Que doit valoir α pour que θ soit continue en 0 ?

13. On fixe $\epsilon > 0$. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]\backslash\{0\}$, identifier $\beta_t \in]0,\,1[$ tel que pour tout entier n suffisamment grand, on ait l'identité suivante :

$$\left|\phi_{X_{n+1}}(t) - \theta(t)\right| \leq \beta_t\,|\phi_{X_n}(t) - \theta(t)| + \epsilon.$$

14. Montrer que la suite de fonctions $(\phi_{X_n},\, n \geq 1)$ converge simplement vers θ.

4 Application

On suppose que

$$\phi_A(t) = \frac{1}{1+\rho-\rho e^{it}}.$$

15. Identifier la loi de A.

16. Montrer que ϕ_A satisfait les hypothèses requises.

17. Calculer θ et identifier la loi de Y.