DS5 de MP2
16.12.14

Devoir surveillé

Durée : 4 heures

Conseils généraux :

- Respirez un grand coup.
- Ne paniquez pas, vous résoudrez un certain nombre de questions si vous prenez le temps de rentrer dans le sujet. Si cela vous prend une heure pour retenir les notions introduites, ce n'est pas grave, il vous restera beaucoup de temps pour avancer dans le texte.
- Lisez le sujet en entier, pour voir les notions du cours qui pourraient être utiles, d'éventuels liens entre les diverses questions.
- Il est essentiel de bien comprendre les notations et termes, en particulier la positivité ou la stricte positivité d'une matrice.
- **Pour simplifier le problème, ou pour vous donner des points plus ou moins faciles, j'ai ajouté des questions bonus et des questions intermédiaires sur cette feuille, chacune vous rapportera au moins un point si vous la traitez.**

On pourra observer que M est stochastique si et seulement si :

- $M \geqslant 0$, *i.e.* M est à coefficients positifs ou nuls.
- La somme des lignes de M est la matrice-ligne de n termes, tous égaux à 1. Cela revient à dire, en notant C la matrice colonne de n termes, tous égaux à 1, que

$$^{t}MC = C$$

Question bonus Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit, et convexe (*i.e.* pour toutes matrices stochastiques M et N, tout $t \in [0,1]$, $tM + (1-t)N$ est stochastique).

Question bonus Vérifier que $M \mapsto \|M\|_1$ définie dans l'énoncé est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *i.e.* est une norme, et, pour tout $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

$$\|MN\|_1 \leqslant \|M\|_1 \|N\|_1$$

Aide à la résolution

1 Non vide : vérifier que $0 \in \Gamma_x$.

Fermé : montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\Gamma_{x,i} \overset{def}{=} \{\theta \in \mathbb{R}_+, \theta x_i \leqslant (Tx)_i\}$ est fermé.
Borné : montrer qu'au moins un des $\Gamma_{x,i}$ est borné.
Question bonus Montrer que Γ_x est un segment.

2 . Que vaut $\Gamma_{x,i}$ lorsque $x_i = 0$?
Si $x_i \neq 0$, décrire simplement $\Gamma_{x,i}$.

3 Que vaut $\frac{(T\alpha x)_i}{\alpha x_i}$?

4 Que signifie $x \in B$? $P > 0$? Une fois ceci compris, utiliser la formule du produit matriciel.
Question bonus En déduire que si $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $X \leqslant Y$ et $X \neq Y$, alors $PX < PY$.

5 Vérifier que $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$. On pourra observer que P et T commutent.
Pour la seconde question, on pourra observer plus finement (en utilisant la question précédente) que $\theta Px < T(Px)$, et que Γ_{Px} est en fait un segment.

6 Introduire la valeur propre α associée à x. Vérifier que $\alpha > 0$ et utiliser 3.

7 Raisonner par l'absurde : on sait que $\theta(x)x \leqslant Tx$. Que peut-on en déduire si $\theta(x)x \neq Tx$? Quelle contradiction obtient-on ?

8
Question intermédiaire Montrer que si $g_1, \dots, g_n$ sont continues, alors $\min(g_1, \dots, g_n)$ l'est aussi.
Combiner ce résultat à 2.

9 Pourquoi peut-on appliquer le théorème des bornes atteintes ?

10 Prendre $x \in C$, et utiliser 5

11 Que permet d'affirmer l'inclusion de C dans B ?
Pour l'inégalité en sens inverse, utiliser 3.

12 Observer que $P(C) \subset B$, et utiliser 10.
Le *et que* $\theta(x_0) = \sup_{x \in C} \theta(x)$ n'est là que pour vous aider dans la suite.

13 Utiliser 8.

14 Utiliser l'inégalité triangulaire, et la positivité des coefficients de T.

15 Vérifier que $x^+ \in B$ et que $\theta_0 = \sup_{y \in B} \theta(y)$.

16 Calcul matriciel, inégalité triangulaire, et définition d'une matrice stochastique.
Le *en déduire* n'est pas difficile.

17 Qu'obtient-on en combinant 13 et 16 ?
Question intermédiaire Vérifier que 1 est valeur propre de T.
Qu'en déduit-on sur θ_0 d'après 16 ?

18 Utiliser les remarques faites en préambule dans ce guide.

19 Montrer que pour toute matrice stochastique M, tout $x \in \mathbb{K}^n$:

$$\|Mx\|_1 \leqslant \|x\|_1$$

Qu'en déduit-on sur $\|M\|_1$?

20 $TR_k - R_k$ se simplifie par télescopage.

21 En dimension finie, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

22 Utiliser 20.

23 Cela provient essentiellement du fait que R_l et R_m commutent : comment justifier ce fait ?

24 On veut montrer que $y = z$. Pour ce faire, introduire des extractrices pour les suites extraites de $(R_k x)$ convergeant vers y et z respectivement, et utiliser la question précédente.

25 Que dire d'une suite bornée qui n'a qu'une valeur d'adhérence dans un evn de dimension finie ?
Pour définir R, commencer par définir Rx pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, puis montrer la linéarité de R. Alternativement, on peut définir R, linéaire, sur une base, et vérifier qu'elle convient.
Pour montrer que $\lim_k \|R_k - R\|_1 = 0$, utiliser une équivalence de normes.

26 La question est : pourquoi le commutant d'une matrice est-il fermé ?

27 Utiliser 20, puis simplifier RR_k en revenant à la définition de R_k.

28 Plus explicitement, il s'agit de montrer que

$$\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Im}(T - I_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(R) = \mathrm{Ker}(T - I_n)$$

29 Laissée au lecteur.