DS5 de MP2
17.11.15

Devoir surveillé

Durée : 4 heures

Sujet en trois parties largement indépendantes : la première, posable en MPSI, étudie finement les racines d'un polynôme dérivée, faisant appel au cours sur les polynômes et les fonctions réelles d'une variable réelle, mais comportant de nombreuses inégalités assez fines, demandant de la précision. La deuxième porte bien plus sur le programme de seconde année, et comporte même de nombreuses questions classiques, très proches du cours. La dernière partie est courte et technique.

Il n'est pas interdit de commencer par la deuxième partie.

Partie I – Quelques propriétés des racines de P_n'

1 Au moins une racine : Rolle. Au plus une racine : il suffit de compter les racines obtenues.

2 On utilise les relations coefficients-racines : trouvez les coefficients de degrés $n+1$ et n de P_n, déduisez-en ceux de degrés n et $n-1$ de P_n'.

3 $P_n(X)$ et $P_n(n-X)$ sont égaux ou opposés (selon la parité de n). Dériver ensuite la relation obtenue, et évaluer en $x_{n,k}$.

4 Résulte de la question précédente. On doit trouver 1.

5 Facile, mais il faut être soigneux.

6 On doit trouver que ce nombre est positif.

7 Dériver la relation indiquée, évaluer en $x_{n-1,k}$.

8 Question fine de synthèse des résultats obtenus jusqu'à présent.

9 Dériver la relation indiquée, puis évaluer en $1 + x_{n-1,k-1}$.

10 Similaire à la question 8.

11 Synthèse des questions 8 et 10.

Partie II – Un développement asymptotique

12 Cours !

13 Facile.

14 Question réservée aux 5/2 : les 3/2 admettent ce résultat, et pourront utiliser sans le justifer les formules :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t,$$

valables pour tout $x > 0$.

15 Cours ! Montrez soigneusement que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

16 Montrer que la dérivée est à valeurs strictement positive en utilisant une extension de l'inégalité de Cauchy-Schwarz –et de son cas d'égalité– aux fonctions intégrables (et que vous justifierez au passage).

17 Résulte facilement de 15.

18 Dominer $\phi(n+1) - \phi(n)$ en faisant un développement asymptotique.

19 Cours (j'imagine que le correcteur attendait un peu plus qu'une seule référence au cours, peut-être une ligne ou deux montrant qu'on saurait réexpliquer ce point).

20 Pour $x \geqslant 1$, poser $n = \lfloor x \rfloor$, utiliser la question 16 et la croissance du logarithme pour encadre $\phi(x)$ entre deux quantités tendant vers C lorsque x tend vers $+\infty$ (on évitera si possible de soustraire des inégalités).

21 Cours (c'est immédiat pour vous, mais le théorème que vous ne manquerez pas d'utiliser n'était pas au programme à ce moment là).

22 C'est à ce moment qu'on utilise la formule de Stirling, en étudiant $\int_1^n \phi(t)\mathrm{d}t$.

23 Suivre l'indication sans perdre de vue le but.

Partie III – Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$

24 On rappelle que si $P\alpha\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{r_i}$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, les λ_i sont des complexes et les r_i des entiers naturels, alors sa *dérivée logarithmique* est donnée par :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i}{X-\lambda_i}$$

Question bonus Montrer ce rappel.
La formule résulte facilement de ce rappel.

25 Question technique laissée au lecteur.

26 Question technique laissée au lecteur.