A 2007 MATH. I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Pseudo-inverse et matrice stochastique

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on appelle endomorphisme canoniquement associé à M, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, noté m, dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $M(i,j)$ représente le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice M. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice (colonne) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 est notée J_n. Pour $M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, on considère la norme

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{r} |M(i,j)|.$$

Définition 1 *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est positive (respectivement strictement positive), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs).*

Une matrice positive $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque $MJ_m = J_n$.

On désigne par $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes stochastiques.

On admet le théorème suivant :

Théorème 1 (CCMP 2006, filière MP) *Soit P une matrice stochastique strictement positive de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Le réel 1 est valeur propre simple de P et il existe un unique élément de $\mathcal{K}_n$, noté X_∞, tel que*

$$X_\infty = X_\infty P.$$

De plus, quel que soit $X \in \mathcal{K}_n$,

$$X_\infty = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} XP^j.$$

L'objectif de ce problème est de trouver une méthode de calcul de X_∞ en utilisant la notion de pseudo-inverse.

Définition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, une matrice $A' \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

$$AA' = A'A \tag{1}$$

$$A = AA'A \tag{2}$$

$$A' = A'AA'. \tag{3}$$

Dorénavant, P est une matrice stochastique, strictement positive, de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

I Préliminaires

❏ 1 - Montrer que $\|MN\| \leq \|M\|\,\|N\|$ pour toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_{n,\,r}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{r,\,m}(\mathbb{K})$.

❏ 2 - Montrer que $\|P\| = 1$.

❏ 3 - Montrer que pour tout $k \geq 1$, P^k est une matrice stochastique.

II Pseudo-inverse

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,\,n}(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

❏ 4 - Montrer que l'existence d'un pseudo-inverse implique que

$$\operatorname{rang}(a) = \operatorname{rang}(a^2).$$

Inversement, on suppose maintenant que $\operatorname{rang}(a) = \operatorname{rang}(a^2)$. On note r cet entier.

❏ 5 - Montrer que le noyau et l'image de a sont en somme directe :

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(a) \oplus \operatorname{Ker}(a).$$

❏ 6 - Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$, B inversible et $W \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, W inversible, telles que

$$A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}.$$

❏ 7 - Montrer que A admet au moins un pseudo-inverse.

Considérons un pseudo-inverse quelconque A' de A et a' l'endomorphisme canoniquement associé à A'.

❏ 8 - Montrer que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a' et montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$ telle que

$$A' = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}.$$

❏ 9 - Montrer que aa' est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a et préciser ce que vaut $W^{-1}(AA')W$.

❏ 10 - Montrer que A admet au plus un pseudo-inverse.

III Calcul de X_∞

À tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, on associe l'endomorphisme u_c de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$u_c(x+iy) = u(x) + iu(y),$$

pour tout x, y appartenant à $\mathbb{R}^n$. Dans les questions suivantes, on note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $A = \mathrm{I}_n - P$.

❏ 11 - Montrer que $a_c \circ a_c = (a^2)_c$.

❏ 12 - Montrer que

$$a_c(\mathbb{C}^n) = a_c^2(\mathbb{C}^n).$$

❏ 13 - Montrer que $\mathrm{rang}(a) = \mathrm{rang}(a^2) = n - 1$.

On note A', le pseudo-inverse de A dont l'existence et l'unicité sont garanties par ce qui précède.

❏ 14 - Soit $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ inversible. Établir, pour tout entier non nul k, l'identité

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\mathrm{I}_n - C)^j = (\mathrm{I}_n - (\mathrm{I}_n - C)^k) C^{-1}.$$

❏ 15 - Établir, pour tout entier non nul k, l'identité suivante :

$$\sum_{j=0}^{k-1} P^j = (\mathrm{I}_n - P^k) A' + k(\mathrm{I}_n - AA').$$

❏ 16 - Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j$$

existe et donner sa valeur.

❏ 17 - Montrer que $(\mathrm{I}_n - AA')$ est stochastique et que $(\mathrm{I}_n - AA')A = 0$.

❏ 18 - Montrer que $\mathrm{I}_n - AA' = J_n X_\infty$.

FIN DU PROBLÈME