CX4611

Banque commune École Polytechnique - interENS

PSI

Session 2014

Épreuve de Mathématiques

Durée: 4 heures

Aucun document n'est autorisé

Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni de la norme $||.||_E$. On appelle opérateur sur E tout endomorphisme T de E dans E tel que

$$\exists M \geq 0, \quad \forall f \in E, \quad ||T(f)||_E \leq M||f||_E \tag{1}$$

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs sur E.

L'objectif de ce problème est d'étudier différents exemples ou classes de tels opérateurs dans le cadre de la dimension infinie.

On appelle respectivement :

(i) spectre de $T \in \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif. On note $\sigma(T)$ l'ensemble de ces réels.

(ii) spectre ponctuel de $T \in \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas injectif. On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble de ces réels.

Les quatre parties sont indépendantes.

PARTIE 1. Un premier exemple d'opérateur

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||.||_\infty$:

$$||f||_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On note T l'application définie sur E telle que :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = xf(\frac{x}{2}).$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

b) Calculer la valeur minimale possible pour la constante M dans la relation (1).

c) Déterminer $Ker(T)$ et $Im(T)$.

On se place à présent dans E muni de la norme $||.||_2$:

$$||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

d) Reprendre la question a) avec cette nouvelle norme pour E.

e) Reprendre la question b) avec cette nouvelle norme pour E. Pour cela, on pourra considérer la famille $(f_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de E telle que :

(i) f_n est affine par morceaux,

(ii) $f_n(0) = f_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = 1$.

PARTIE 2. Un premier exemple de calcul de spectres

Soit $H = l^2(\mathbb{N})$, l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable :

$$l^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\}$$

muni de la norme :

$$||u||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}.$$

On note S, respectivement V, l'application de décalage à gauche :$(Su)_n = u_{n-1}$ si $n \geq 1$ et $(Su)_0 = 0$, respectivement à droite : $(Vu)_n = u_{n+1}$ si $n \geq 0$ dans $H = l^2(\mathbb{N})$.

a) Montrer que S et V appartiennent à $\mathcal{L}(H)$.

b) Calculer le spectre ponctuel de S et V.

On se place à présent dans l'espace des suites réelles bornées $F = l^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme

$$||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

c) Reprendre la question a) pour les applications S et V dans ce nouvel espace F.

d) Reprendre la question b) pour les applications S et V dans F.

e) Calculer le spectre de S et V dans F.

PARTIE 3. Un second exemple de calcul de spectre ponctuel

On note K la fonction définie de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$K(s,t) = (1-s)t$ si $0 \leq t \leq s \leq 1$ et $K(s,t) = (1-t)s$ sinon.

On note T l'application définie sur $E = C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $||.||_2$ définie en partie 1, par la relation :

$$\forall f \in E, \quad \forall s \in [0,1], \quad T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt.$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

b) Soit $f \in E$. En décomposant $T(f)$ en deux intégrales, montrer que $T(f)$ est une fonction C^2 et exprimer $(T(f))'$ puis $(T(f))''$.

c) Montrer que T est injectif.

d) Montrer que si $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $f \in Ker(T - \lambda Id)$, alors $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ et vérifie l'équation

$$\lambda f'' + f = 0$$

avec les conditions $f(0) = f(1) = 0$.

e) En déduire $\sigma_p(T)$. Calculer les sous-espaces propres associés $E_\lambda = Ker(T - \lambda Id)$ à chaque élément $\lambda \in \sigma_p(T)$.

PARTIE 4. Une classe particulière d'opérateurs

On rappelle qu'un espace préhilbertien H est un espace vectoriel normé dont la norme dérive d'un produit scalaire noté $< .,. >$. On appelle base hilbertienne de H toute famille $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

(i) la famille est orthonormale : pour tous i et j dans $\mathbb{N}$, $< b_i, b_j >= 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

(ii) tout élément x de H peut s'écrire : $x = \sum_{i=0}^{+\infty} < x, b_i > b_i$ c'est à dire que

$$\lim_{N\to+\infty} ||x - \sum_{i=0}^{N} < x, b_i > b_i|| = 0$$

a) Montrer que si $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, alors

$$\forall x \in H, \quad ||x||^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} | < x, b_i > |^2.$$

b) Montrer que $H = l^2(\mathbb{N})$ muni de la norme $||.||_2$ définie dans la partie 2 est un espace préhilbertien pour le produit scalaire :

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

(on justifiera qu'il s'agit bien d'un produit scalaire) puis déterminer une base hilbertienne de H.

Dans toute la suite, H désigne l'espace préhilbertien $l^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire précédent.

c) Soit T un opérateur sur H. On admettra l'existence d'un opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall (x, y) \in H^2, \quad < T(x), y >=< x, \tilde{T}(y) > .$$

Soient $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de H telles que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} ||T(b_i)||^2 < +\infty.$$

Montrer que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} ||T(b_i)||^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} ||\tilde{T}(c_i)||^2$$

d) Soit $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que la quantité (éventuellement infinie)

$$\sum_{i=0}^{+\infty} ||T(b_i)||^2$$

ne dépend pas de la base B. On note

$$||T||_2 = \sum_{i=0}^{+\infty} ||T(b_i)||^2$$

et on pose

$$\mathcal{L}^2(H) = \{T \in \mathcal{L}(H), \quad ||T||_2 < +\infty\}.$$

e) Montrer que les opérateurs S et V définis dans la partie 2 ne sont pas dans $\mathcal{L}^2(H)$. Donner un exemple d'opérateur non nul dans $\mathcal{L}^2(H)$.

f) Montrer que $\mathcal{L}^2(H)$ muni de $||.||_2$ possède une structure d'espace vectoriel normé.

g) Soient L et U dans $\mathcal{L}^2(H)$ et $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que la quantité

$$\sum_{i=0}^{+\infty} < L(b_i), U(b_i) >$$

est finie, indépendante de la base B choisie et définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(H)$.

h) On considère L et U deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$. Montrer que si $L \in \mathcal{L}^2(H)$, alors il en est de même pour UL.

i) Que se passe t-il pour UL en supposant cette fois que $U \in \mathcal{L}^2(H)$?