ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2004 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Polynômes unitaires de norme minimale

Pour tout entier $d \geqslant 0$, on désigne par $\mathcal{E}_d$ l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré $\leqslant d$ et par $\mathcal{U}_d$ le sous-ensemble des polynômes unitaires de degré d.

Première partie

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes distincts. On considère le polynôme

$$P(X) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (X - x_k) ,$$

et l'on désigne par P' le polynôme dérivé de P.

1. Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose

$$P_j(X) = \frac{P(X)}{(X - x_j)\, P'(x_j)} .$$

a) Montrer que cette expression définit un polynôme P_j de degré $n-1$.

b) Calculer $P_j(x_k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et montrer que, pour tout polynôme F, le polynôme $L_F = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} F(x_j)\, P_j$ prend la même valeur que F en tous les points $x_1, \dots, x_n$.

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$.

d) Les polynômes P_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, forment-ils une base de $\mathcal{E}_{n-1}$?

2. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose $P_j(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j}\, X^i$, où $b_{i,j} \in \mathbf{C}$. Soient V et B les matrices complexes $n \times n$ dont les éléments à la i^{e} ligne ($1 \leqslant i \leqslant n$) et à la j^{e} colonne ($1 \leqslant j \leqslant n$) sont $(x_i)^{j-1}$ et $b_{i-1,j}$, respectivement. Montrer que V est inversible, et que V et B sont inverses l'une de l'autre.

3.a) Montrer que $b_{n-1,j} = \dfrac{1}{P'(x_j)}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)}$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(X-x_k)^{n-1}}{P'(x_k)}$ est un polynôme constant que l'on calculera.

$\star\star\star$

Dans toute la suite du problème, $d \in \mathbf{N}^*$ *est un entier fixé, et* K *est une partie compacte du plan complexe, contenant au moins* $d+1$ *éléments.* On pose $\rho = \sup_{z \in K} |z|$. Pour tout polynôme $Q \in \mathcal{E}_d$, on pose

$$\|Q\|_K = \sup_{z \in K} |Q(z)| \,.$$

Deuxième partie

Pour tout polynôme $Q \in \mathcal{E}_d$, défini par $Q(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i\, X^i$, on pose

$$N(Q) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant d} |a_i| \,.$$

4.a) Montrer que $Q \mapsto N(Q)$ et $Q \mapsto \|Q\|_K$ sont des normes sur $\mathcal{E}_d$ et qu'elles sont équivalentes.

b) La fonction $Q \mapsto \|Q\|_K$ est-elle continue sur l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}_d, \|\ \|_K)$?

5.a) Majorer $\displaystyle\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{\|Q\|_K}{N(Q)}$ en fonction de ρ.

b) On choisit $n = d+1$ points distincts dans K, $x_1, \ldots, x_{d+1}$, et l'on reprend les notations de la première partie. On pose $\beta = \displaystyle\sup_{\substack{0 \leqslant i \leqslant d \\ 1 \leqslant j \leqslant d+1}} |b_{i,j}|$. En utilisant les résultats de la question **2.**, montrer que

$$\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leqslant \beta(d+1) \,.$$

$\star\star\star$

Dans toute la suite du problème, on pose

$$m = \inf_{Q \in \mathcal{U}_d} \|Q\|_K \,.$$

Troisième partie

6.a) Montrer que $0 \leqslant m \leqslant \rho^d$.

b) Montrer que $\inf\limits_{\substack{Q \in \mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K \leqslant \rho^d}} \|Q\|_K = m$.

c) Montrer qu'il existe $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$.

Quatrième partie

7. Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et c_k un nombre complexe non nul. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On considère le polynôme

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k .$$

Montrer qu'il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $|Q(z)| > |Q(z_0)|$. [On pourra considérer le module et l'argument de c_k et de $z - z_0$.]

8. Plus généralement, soit $Q \in \mathcal{E}_d$ et soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On suppose que $Q(z_0) = 1$ et que Q n'est pas constant.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 1$, un nombre complexe c_k, $c_k \neq 0$, et un polynôme R tels que

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k + c_k(X - z_0)^{k+1}R(X) .$$

b) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z - z_0| = r$ et

$$Q(z) = 1 + |c_k|\,|z - z_0|^k + |c_k|\,|z - z_0|^k(z - z_0)R(z) .$$

c) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z - z_0| \leqslant r$ et

$$|Q(z)| > |Q(z_0)| .$$

9.a) Montrer que la propriété démontrée à la question **8.c)** est satisfaite pour tout polynôme non constant $Q \in \mathcal{E}_d$ et pour tout point $z_0 \in \mathbf{C}$.

b) En déduire que, pour tout $Q \in \mathcal{E}_d$,

$$\sup_{|z| \leqslant 1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} |Q(z)| .$$

c) Montrer que, pour tout $Q \in \mathcal{E}_d$,

$$\sup_{|z| \geqslant 1} \left| \frac{Q(z)}{z^d} \right| = \sup_{|z|=1} |Q(z)| .$$

d) *Dans cette question*, on choisit $K = \{z \in \mathbf{C} \mid \ |z| \leqslant 1\}$. Montrer que le polynôme $Q_0(X) = X^d$ satisfait

$$\|Q_0\|_K = m .$$

Cinquième partie

10. Soient z_0 et z_1 deux nombres complexes non nuls. Montrer que $|z_0 + z_1| = |z_0| + |z_1|$ si et seulement s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $z_1 = \lambda\, z_0$.

Pour $Q \in \mathcal{E}_d$, on pose

$$\mathcal{M}(Q) = \{z \in K \mid |Q(z)| = \|Q\|_K\} .$$

11. On suppose qu'il existe des polynômes distincts $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ et $Q_1 \in \mathcal{U}_d$ vérifiant

$$\|Q_0\|_K = \|Q_1\|_K = m .$$

Pour tout $t \in]0,1[$, on pose

$$Q_t = t\, Q_1 + (1-t)Q_0 .$$

a) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\|Q_t\|_K = m$.

b) Soit $t \in]0,1[$ et soit $z \in \mathcal{M}(Q_t)$. Montrer que $z \in \mathcal{M}(Q_0)$ et $z \in \mathcal{M}(Q_1)$, puis montrer que $Q_0(z) = Q_1(z)$.

c) En déduire que, pour tout $t \in]0,1[$, Card $(\mathcal{M}(Q_t)) < d$.

12. On suppose qu'il existe $Q \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q\|_K = m$ et tel que Card $(\mathcal{M}(Q)) \leqslant d$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme $L \in \mathcal{E}_{d-1}$ tel que, pour tout $z \in \mathcal{M}(Q)$, $L(z) = Q(z)$.

b) Soit $Q_p = Q - \dfrac{1}{p}\, L$, pour $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que, pour chaque $p \in \mathbf{N}^*$, il existe $z_p \in K$ tel que $|Q_p(z_p)| \geqslant \|Q\|_K$.

On admettra le résultat suivant : il existe une suite strictement croissante de nombres entiers, $p \mapsto n_p$, telle que la suite $p \mapsto z_{n_p}$ converge vers un élément ℓ de la partie compacte K de $\mathbf{C}$, quand p tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $|Q(\ell)| = \|Q\|_K$. En déduire que $Q(\ell) = L(\ell)$.

d) Montrer que $Q(z_{n_p}) = Q(\ell)(1+\varepsilon_p)$ et $L(z_{n_p}) = Q(\ell)(1+\varepsilon_p)(1+\varepsilon'_p)$, où ε_p et ε'_p sont des suites de nombres complexes, définies pour p assez grand, telles que $\lim\limits_{p\to+\infty} \varepsilon_p = 0$ et $|1+\varepsilon_p| \leqslant 1$, et $\lim\limits_{p\to+\infty} \varepsilon'_p = 0$. En déduire que, pour p assez grand, $|Q_{n_p}(z_{n_p})| < \|Q\|_K$.

13. Y a-t-il unicité du polynôme $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$?

* *
*