

Devoir non surveillé

Fonctions absolument monotones

Définition : soit a et b deux éléments de la droite numérique achevée, où $a < b$, et f une application de $]a, b[$ dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^∞ sur $]a, b[$ (i.e. un élément de $\mathcal{C}^\infty(]a, b[)$). La fonction f est dite *absolument monotone* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]a, b[, \quad f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Partie A – Généralités

A.1 Montrer que toute application absolument monotone est positive et croissante. Donner un exemple d'application absolument monotone décroissante.

A.2 Soit f et g deux fonctions absolument monotones sur $]a, b[$. Montrer que $f + g$ et fg sont absolument monotones.

A.3 Montrer que si f est absolument monotone sur $]a, b[$, alors e^f est absolument monotone sur $]a, b[$.

Indication : on pourra effectuer une récurrence forte.

Partie B – La fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0, 1[$

B.1 On considère l'application

$$g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right).$$

a Calculer les dérivées successives de g .

b Montrer que g est absolument monotone sur $]0, 1[$.

B.2 Montrer que l'application

$$f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est absolument monotone sur $]0, 1[$.

Indication : on pourra considérer $h = \ln(f)$ et calculer h' .

B.3 Montrer que l'application arcsinus est absolument monotone sur $]0, 1[$.

Partie C – Prolongement d'une application absolument monotone

On suppose ici a réel, et f absolument monotone sur $]a, b[$.

C.1 Montrer que f est prolongeable par continuité en a en $\tilde{f} : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, que ce prolongement est dérivable en a , et que $\tilde{f}'(a) \geq 0$.

C.2 Montrer que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[a, b[$, et que toutes ses dérivées sont positives ou nulles en a .

C.3 Montrer que même dans le cas où b est fini, f n'est pas nécessairement prolongeable par continuité en b .

Partie D – Une caractérisation des applications absolument monotones

Étant donné un réel h , on définit les applications

$$t_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad T_h : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \Delta_h : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ x \mapsto x + h \quad f \mapsto f \circ t_h \quad f \mapsto T_h(f) - f$$

D.1 Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$, T_h et Δ_h sont des endomorphismes du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que T_h est un automorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. L'endomorphisme Δ_h est-il injectif ?

Dans la suite, h désigne un réel strictement positif.

Notation : pour tout entier naturel n , Δ_h^n désignera la composée n fois de Δ_h . Par exemple, $\Delta_h^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ et $\Delta_h^3 = \Delta_h \circ \Delta_h \circ \Delta_h$.

D.2 Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et $x \in \mathbb{R}$. Donner $\Delta_h^2(f)(x)$ en fonction de $f(x+2h)$, $f(x+h)$ et $f(x)$.

D.3 Montrer, pour tout entier naturel n , tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et tout réel x , la formule :

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh).$$

Définition : soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On dit que f est *totalelement monotone* si pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, tout $n \in \mathbb{N}$, tout réel x , $\Delta_h^n(f)(x) \geq 0$.

D.4 On souhaite montrer que toute application absolument monotone sur \mathbb{R} est totalelement monotone.

a Soit f une application absolument monotone sur \mathbb{R} , et x un réel. Pour tout entier naturel n , on définit l'application :

$$X_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ h \mapsto \Delta_h^n(f)(x) \end{array}$$

Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$X'_{n+1}(h) = (n+1)\Delta_h^n(f')(x+h).$$

b Montrer que si $\Delta_h^n(f') \geq 0$, alors $\Delta_h^{n+1}(f) \geq 0$.

c Montrer que toute application absolument monotone est totalelement monotone.

D.5 On souhaite montrer que toute application totalelement monotone est absolument monotone sur \mathbb{R} .

a Montrer que toute fonction totalelement monotone est positive et croissante.

b Pour tout entier naturel non nul n , on définit l'application

$$\psi_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (e^t - 1)^n \end{array}$$

On convient que ψ_0 est la fonction constante de valeur 1 sur \mathbb{R} .

Pour tout entier naturel non nul n , donner une combinaison linéaire non triviale à résultat nul de la famille $(\psi'_n, \psi_n, \psi_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

c Montrer que, pour tout entier naturel n , $\psi_n^{(k)}(0) = 0$ si $0 \leq k < n$, et que $\psi_n^{(n)}(0) = n!$.

d Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose :

$$S_j = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^j.$$

Montrer que S_j vaut 0 si $0 \leq j < n$, et que S_n vaut $n!$.

Indication : on pourra utiliser la question précédente, et calculer autrement les dérivées en 0 de ψ_n , jusqu'à l'ordre n .

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange (ne pas la redémontrer) :

Si f est de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$, dérivable $n+1$ fois sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \left(\sum_{j=0}^n \frac{(b-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

e En utilisant cette formule et D.3, montrer que toute fonction totalelement monotone est absolument monotone.